ЖЭТФ, 2018, том 153, вып. 2, стр. 339–348

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЗБУЖДЕНИЙ ВБЛИЗИ ТОНКОЙ ПРОСЛОЙКИ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ КРИСТАЛЛАМИ

С. Е. Савотченко[*]

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
308012, Белгород, Россия

Поступила в редакцию 11 сентября 2017 г.

Показано, что вблизи тонкого дефектного слоя с внутренней структурой, разделяющего линейную среду и нелинейную среду керровского типа, существуют локализованные и полулокализованные стационарные состояния. Локализованные состояния описываются монотонно убывающей амплитудой поля по обе стороны от границы раздела сред. Полулокализованные состояния характеризуются полем в виде стоячей волны в линейной среде, монотонно убывающим в нелинейной среде. Рассмотрены случаи керровских сред с самофокусировкой и дефокусировкой. Математическая формулировка предложенной модели представляет собой систему линейного и нелинейного уравнений Шредингера с потенциалом особого вида, моделирующим тонкий дефектный слой с внутренней структурой. Показано, что в случае контакта линейной среды со средой с самофокусировкой в одном энергетическом диапазоне существуют локализованные состояния, а в другом — полулокализованные. В случае контакта линейной среды с дефокусирующей средой могут существовать в разных энергетических диапазонах по два вида локальных и полулокализованных состояний, различающихся энергиями и профилем поля. В частных случаях получены выражения для энергий состояний рассматриваемых видов в явном аналитическом виде и указаны условия их существования.

DOI: 10.7868/S0044451018020153

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из видов контактных явлений на границе раздела кристаллов с различными характеристиками являются эффекты локализации возбуждений полей различной физической природы. Такие процессы играют важную роль при разработке различных технических приложений, использующих оптические нелинейные среды, многослойные структуры с различными магнитными свойствами, слоистые кристаллы с многоатомной элементарной ячейкой и другие.

Особый интерес для разработки такого рода систем представляют теоретические исследования особенностей распространения нелинейных волн. Поверхностные нелинейные волны как вид колебательных состояний, локализованных вблизи дефектов в кристаллах, изучаются достаточно давно [1].

В большинстве случаев аналитическое описание нелинейных волн сводится к использованию нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Такое уравнение содержит слагаемое с кубической степенью волновой функции, отвечающее так называемой нелинейности керровского типа. Нелинейные оптические волны, локализованные вблизи границы раздела нелинейных сред керровского типа и в слоистых структурах, были подробно теоретически описаны в работе [2]. Продолжением такого вида исследований были работы [3, 4], в которых видоизменялись модели границ раздела нелинейных кристаллов. Существование нелинейных поверхностных волн отмечено на границе раздела линейной и нелинейной сред [5]. Нелинейные локализованные состояния на границе раздела нелинейных сред с пространственной дисперсией рассматривались в работе [6]. В двухуровневой системе анализировались особенности взаимодействия вблизи дефекта связанных солитонных состояний, относящихся к различным состояниям системы [7].

[*] E-mail: savotchenkose@mail.ru

В нелинейной динамике важную роль играет взаимодействие нелинейных возбуждений с дефектами. Математические модели на основе НУШ позволяют аналитически анализировать эффекты локализации возбуждения на качественном уровне. Локализация возбуждения обусловлена характером взаимодействия между возбуждением и дефектами. Как правило, дефект моделируется потенциалом, входящим в НУШ, который в стандартном приближении для короткодействующего потенциала в одномерной модели имеет вид

$$U(x) = U_0\delta(x), \tag{1}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, U_0 — интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом, расположенным в начале координат (иногда данная величина называется «мощностью» дефекта). При $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ притягивается.

Использование модели дефекта, основанной на потенциале (1), не в полной мере позволяет проанализировать влияние собственных характеристик дефекта на эффекты локализации возбуждений. С целью изучения возможностей управления распространением волн в слоистых структурах через границы раздела сред, учитывающие влияние дальнодействующих сил, для моделирования плоского дефекта с внутренней структурой было предложено использовать модифицированный потенциал [8]. Модифицированный потенциал использовался в работе [9] для теоретического описания особенностей рассеяния волн в линейной среде с пространственной дисперсией; было решено линейное уравнение Шредингера, содержащее производные старшего порядка с таким потенциалом. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой описаны в работе [10]. Решение НУШ с модифицированным потенциалом было найдено для случая нелинейных сред, содержащих дефект с внутренней структурой.

Следует отметить, что существуют другие теоретические подходы к описанию тонких плоских дефектов с использованием нестандартного вида потенциалов, в частности, нелинейных относительно искомого поля [11].

Как хорошо известно, типы решений НУШ определяются знаком нелинейности. Свободные солитоны распространяются в среде при отсутствии дефекта ($U(x) \equiv 0$). В случае положительной нелинейности ($\gamma > 0$) и когда $E < \Omega$, НУШ (принято $\hbar = 1$)

$$i\psi'_t = -\frac{1}{2m}\,\psi''_{xx} + \Omega\psi - \gamma|\psi|^2\psi,$$

где m, Ω, γ — константы, имеет стационарное решение

$$\psi(x) = A\frac{e^{-iEt}}{\operatorname{ch}[q(x-x_0)]},$$
$$A^2 = q^2/m\gamma, \quad q^2 = 2m(\Omega - E).$$

В случае отрицательной нелинейности ($\gamma < 0$) НУШ, как известно, имеет два типа стационарных решений:

1) при $E < \Omega$

$$\psi(x) = A\frac{e^{-iEt}}{\operatorname{sh}[q(x-x_0)]},$$
$$A^2 = q^2/m|\gamma|, \quad q^2 = 2m(\Omega - E),$$

2) при $E > \Omega$

$$\psi(x) = A\frac{e^{-iEt}}{\operatorname{th}[q(x-x_0)]},$$
$$A^2 = q^2/m|\gamma|, \quad q^2 = m(E - \Omega).$$

Для случая границы раздела нелинейных сред, моделируемой короткодействующим потенциалом вида (1), локализованные состояния в средах с положительной и отрицательной нелинейностями, описываемые волновыми функциями с гиперболическими косинусом и синусом, часто встречаются в литературе. Решения такого типа объединяет то, что они исчезают на бесконечности, т. е. волновые функции удовлетворяют условию $|\psi| \to 0$ при $x \to \infty$. Решение НУШ с отрицательной нелинейностью, описываемой волновой функцией с гиперболическим тангенсом, называемое кинком, такому условию не удовлетворяет, однако оно широко используется для описания различных физических явлений, в частности, в сверхпроводниках.

В данной работе показано, что существуют несколько типов локализованных состояний вблизи плоского дефекта с внутренней структурой, разделяющего линейную и нелинейную среды. Рассмотрены случаи контакта линейной среды с нелинейными средами керровского типа с различными знаками нелинейности. Основной целью работы является нахождение энергии локализованных состояний всех видов, возникающих в рассматриваемой системе, и анализ влияния внутренней структуры дефекта на особенности локализации возбуждений.

2. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Будем считать, что тонкая прослойка, разделяющая кристаллы с гармоническим и ангармоническим взаимодействиями элементарных возбуждений, расположена в плоскости yz перпендикулярно оси x. Толщина прослойки существенно меньше характерного расстояния локализации возбуждений.

Линейный (гармонический) кристалл занимает полупространство $x < 0$, а нелинейный (ангармонический) кристалл — полупространство $x > 0$. Тогда параметр нелинейности в НУШ имеет вид

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \gamma, & x > 0. \end{cases}$$

Граница раздела как плоский дефект создает возмущение характеристик среды, которые сосредоточены на расстояниях, существенно меньших ширины локализации рассматриваемых возбуждений.

Модель дефекта с внутренней структурой была предложена в работе [8] и использовалась для случая линейной среды с пространственной дисперсией [9] и для нелинейного кристалла [10]. Математически такой дефект описывается модифицированным короткодействующим потенциалом. Модифицированный потенциал учитывает влияние взаимодействия не только ближайших соседей в кристаллической решетке, но и вторых соседей в длинноволновом приближении. Подобного вида описание важно при переходе от дискретных решеточных моделей к континуальным моделям сред.

Для описания дефекта с внутренней структурой предлагается использовать предельный случай двугорбого потенциала (потенциала с двумя симметричными максимумами). Такое рассмотрение возможно для потенциальной ямы с квазистационарным уровнем энергии. Потенциальная яма может быть описана выражением вида (1) с дополнительным слагаемым со второй производной от дельта-функции Дирака в предельном случае при бесконечном увеличении глубины кратера:

$$U(x) = U_0\delta(x) + V_0\delta''(x), \tag{2}$$

где V_0 — второй параметр, характеризующий взаимодействие внутренней структуры границы раздела сред с возбуждением.

Будем рассматривать взаимодействие нелинейных возбуждений, локализованных вблизи дефекта с внутренней структурой, на основе одномерного НУШ (принято $\hbar = 1$):

$$i\psi'_t = -\frac{1}{2m}\psi''_{xx} + \Omega(x)\psi - \gamma(x)|\psi|^2\psi + U(x)\psi, \tag{3}$$

где m — эффективная масса возбуждения,

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1, & x < 0, \\ \Omega_2, & x > 0, \end{cases}$$

$\Omega_{1,2}$ — постоянные величины.

Нахождение стационарных состояний с энергией E сводится подстановкой в НУШ (3) волновой функции

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt}.$$

В результате из (3) получается стационарное НУШ

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\psi''_{xx} + \Omega(x)\psi - \gamma(x)|\psi|^2\psi + U(x)\psi. \tag{4}$$

Задача нахождения решения НУШ (4) с потенциалом (2) эквивалентна решению НУШ без потенциала:

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\psi''_{xx} + \Omega(x)\psi - \gamma(x)|\psi|^2\psi, \tag{5}$$

с двумя граничными условиями сопряжения в точке $x = 0$, через которую проходит плоскость дефекта. Первое граничное условие соответствует требованию непрерывности волновой функции:

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi(0). \tag{6}$$

Как описано в работе [8], для получения второго граничного условия следует проинтегрировать обе части уравнения (4) с потенциалом (2) по x на малом интервале $[-\varepsilon;\varepsilon]$ и устремить ε к нулю. С учетом того, что производные от волновой функции не являются непрерывными в точке $x = 0$, было получено второе граничное условие:

$$\begin{aligned}\psi'(+0) - \psi'(-0) &= \\ &= m\left\{2U_0\psi(0) + V_0\left[\psi''(+0) + \psi''(-0)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

При $V_0 = 0$ из (7) получается хорошо известное граничное условие, используемое при описании локализации и рассеяния возбуждений на точечном дефекте, отвечающее короткодействующему потенциалу (1).

3. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

3.1. Локализованные состояния на границе между линейным кристаллом и самофокусирующей средой

В случае контакта линейного кристалла с самофокусирующей средой, т. е. с кристаллом с положительной нелинейностью ($\gamma > 0$), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, НУШ (5) имеет решение

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_{0c}\exp(q_1 x), & x < 0, \\ A_c/\operatorname{ch}[q_2(x - x_0)], & x > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Параметры решения (8) определяются после его подстановки в уравнение (5) и условие непрерывности (6):

$$q_{1,2}^2 = 2m(\Omega_{1,2} - E), \quad (9)$$

$$A_c^2 = \frac{q_2^2}{m\gamma}, \quad (10)$$

$$\psi_{0c} = \frac{q_2}{\sqrt{m\gamma}\,\operatorname{ch}(q_2 x_0)}. \quad (11)$$

Параметр x_0 характеризует положение «центра» солитона в нелинейном кристалле справа от дефекта. Он связан с энергией локализации возбуждения, которая определяется из дисперсионного соотношения, получаемого после подстановки решения (8) в граничное условие (7):

$$q_2 \operatorname{th}(q_2 x_0) - q_1 = \\ = m\left\{2U_0 + V_0\left[q_2^2\left(2\operatorname{th}^2(q_2 x_0) - 1\right) + q_1^2\right]\right\}. \quad (12)$$

Из соотношения (12) находится одно из «волновых чисел» (любое — q_1 или q_2, так как они связаны), которое позволяет определить энергию как функцию параметров $E = E(m,\ U_0, V_0, \gamma, x_0)$. Положение x_0 центра солитона является свободным параметром. Анализ дисперсионного соотношения (12) проведем в различных частных случаях, допускающих нахождения его решения в явном виде.

В случае дефекта без внутренней структуры при $V_0 = 0$ из (12) получается дисперсионное соотношение

$$q_2 \operatorname{th}(q_2 x_0) - q_1 = 2mU_0, \quad (13)$$

из которого в «длинноволновом» приближении при $q_2 x_0 \ll 1$ можно получить энергию локализованного состояния в явном виде:

$$E = \Omega_2 - \frac{\Omega_2 - \Omega_1 + 2mU_0^2}{1 + 4mU_0 x_0}. \quad (14)$$

Для дефекта с внутренней структурой при $V_0 \neq 0$ из (12) можно получить в явном виде энергию локализованного состояния, положение центра которого совпадает с плоскостью дефекта, т. е. $x_0 = 0$. В этом случае из (12) определяется пространственное затухание возбуждения в линейном кристалле:

$$q_1 = -2m\left[U_0 + mV_0(\Omega_1 - \Omega_2)\right]. \quad (15)$$

Поскольку $q_1 > 0$, параметры дефекта должны быть связаны условием

$$U_0 < mV_0(\Omega_2 - \Omega_1).$$

С помощью выражений (9) и (15) можно получить энергию такого локализованного состояния:

$$E = \Omega_1 - 2m\left[U_0 + mV_0(\Omega_1 - \Omega_2)\right]^2. \quad (16)$$

Следует отметить, что величина пространственного затухания и энергия такого состояния с $x_0 = 0$ при $\Omega_1 = \Omega_2$ будет такой же как для дефекта без внутренней структуры, как это вытекает из соотношений (14) и (16).

Рассмотрим далее длинноволновое приближение при $q_2 x_0 \ll 1$ и $V_0 \neq 0$. В этом случае из (12) получается энергия локализованного состояния

$$E = \Omega_2 - \frac{d^2 + 2m(\Omega_2 - \Omega_1)}{2m(1 - 2dx_0)}, \quad (17)$$

где обозначено $d = 2m[U_0 + mV_0(\Omega_1 - \Omega_2)]$. Следует отметить, что длинноволновое приближение ($q_2 x_0 \ll 1$) означает близость энергии возбуждения к краю спектра, когда выполняется требование $|\Omega_2 - E| \ll 1/2mx_0^2$.

Из (11) определяется амплитуда колебаний дефектного слоя в длинноволновом приближении или при $x_0 = 0$:

$$\psi_{0c} = \frac{q_2}{\sqrt{m\gamma}}.$$

3.2. Локализованные состояния на границе между линейным кристаллом и дефокусирующей средой

В случае контакта линейного кристалла с дефокусирующей средой, т. е. с кристаллом с отрицательной нелинейностью ($\gamma < 0$), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, НУШ (5) имеет решение

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_{0s}\exp(q_1 x), & x < 0, \\ A_s/\operatorname{sh}[q_2(x - x_0)], & x > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для ограниченности решения (18) должно выполняться условие $x_0 < 0$. Параметры решения (18) определяются после его подстановки в уравнение (5) и условие непрерывности (6). Положим для удобства $g = -\gamma > 0$. Значения $q_{1,2}$ определяются выражениями (9), а амплитуды имеют вид

$$A_s^2 = \frac{q_2^2}{mg}, \quad (19)$$

$$\psi_{0s} = -\frac{q_2}{\sqrt{mg}\,\operatorname{sh}(q_2 x_0)}. \quad (20)$$

После подстановки решения (18) в граничное условие (7) получается дисперсионное соотношение

$$q_2 \operatorname{cth}(q_2 x_0) + q_1 = \\ = m\left\{V_0\left[q_2^2\left(1 - 2\operatorname{cth}^2(q_2 x_0)\right) - q_1^2\right] - 2U_0\right\}. \quad (21)$$

В случае дефекта без внутренней структуры при $V_0 = 0$ из (21) получается дисперсионное соотношение

$$q_2 \operatorname{cth}(q_2 x_0) + q_1 = -2mU_0. \tag{22}$$

В длинноволновом приближении ($q_2 x_0 \ll 1$) из (22) можно получить величину пространственного затухания возбуждения в линейном кристалле:

$$q_1 = -\left(2mU_0 + \frac{1}{x_0}\right). \tag{23}$$

Поскольку $q_1 > 0$, параметры дефекта должны быть связаны условием $U_0 < -1/2mx_0$. Для локализованного состояния (18) имеется требование $x_0 < 0$ для ограниченности, поэтому $U_0 > 0$. Другими словами, локализованное состояние рассматриваемого вида существует только для отталкивающего дефекта. Энергия такого состояния определяется после подстановки (23) в (9):

$$E = \Omega_1 - \frac{(2mU_0 + 1/x_0)^2}{2m}. \tag{24}$$

Для дефекта с внутренней структурой при $V_0 \neq 0$ в длинноволновом приближении ($q_2 x_0 \ll 1$) из (21) получается величина пространственного затухания возбуждения в линейном кристалле:

$$q_1 = 2m\left\{V_0\left[m(\Omega_2 - \Omega_1) - \frac{1}{x_0^2}\right] - U_0\right\} - \frac{1}{x_0}. \tag{25}$$

Поскольку величина пространственного затухания в линейном кристалле является положительной величиной, параметры дефекта должны быть связаны условием

$$U_0 < V_0\left[m(\Omega_2 - \Omega_1) - \frac{1}{x_0^2}\right] - \frac{1}{2mx_0}.$$

Получается, что наличие внутренней структуры дефекта приводит к тому, что локализованное состояние, описываемое решением вида (18), может существовать как для притягивающего, так и для отталкивающего дефекта. Энергия такого состояния определяется после подстановки (25) в (9):

$$E = \Omega_1 - 2m\left\{V_0\left[m(\Omega_2 - \Omega_1) - \frac{1}{x_0^2}\right] - U_0 - \frac{1}{2mx_0}\right\}^2. \tag{26}$$

Из (20) определяется амплитуда колебаний дефектного слоя в длинноволновом приближении при $q_2 x_0 \ll 1$:

$$\psi_{0s} = -1/x_0\sqrt{mg}.$$

В случае контакта линейного кристалла с кристаллом с отрицательной нелинейностью, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$, НУШ (5) имеет другое решение:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_{0t}\exp(q_1 x), & x < 0, \\ A_t \operatorname{th}[q_t(x - x_0)], & x > 0. \end{cases} \tag{27}$$

Следует отметить, что для существования решения такого типа должно выполняться условие $\Omega_2 < \Omega_1$, которого не требовалось для существования решений описанных выше.

Параметры решения (27) определяются после его подстановки в уравнение (5) и условие непрерывности (6). Значение q_1 определяется выражением (9), а остальные характеристики имеют вид

$$q_t^2 = m(E - \Omega_1), \tag{28}$$

$$A_t^2 = \frac{q_t^2}{mg}, \tag{29}$$

$$\psi_{0t} = -\frac{q_t \operatorname{th}(q_t x_0)}{\sqrt{mg}}. \tag{30}$$

После подстановки решения (27) в граничное условие (7) получается дисперсионное соотношение

$$\frac{2q_t}{\operatorname{sh}(2q_t x_0)} + q_1 = m\left\{V_0\left[\frac{2q_t^2}{\operatorname{ch}^2(q_t x_0)} - q_1^2\right] - 2U_0\right\}. \tag{31}$$

В случае дефекта без внутренней структуры при $V_0 = 0$ из (31) получается дисперсионное соотношение

$$\frac{2q_t}{\operatorname{sh}(2q_t x_0)} + q_1 = -2mU_0. \tag{32}$$

В длинноволновом приближении ($q_t x_0 \ll 1$) из (32) получаются такие же выражения для величины пространственного затухания возбуждения в линейном кристалле (23) и энергии (24), как и для локализованного состояния, описываемого волновой функцией (18).

Для дефекта с внутренней структурой при $V_0 \neq 0$ в длинноволновом приближении при $q_t x_0 \ll 1$ и при дополнительном требовании $mV_0 q_1 \ll 1$ из (31) получается величина пространственного затухания возбуждения в линейном кристалле:

$$q_1 = -\left\{2m\left[U_0 + mV_0(\Omega_2 - \Omega_1)\right] + \frac{1}{x_0}\right\}. \tag{33}$$

Длинноволновое приближение $q_t x_0 \ll 1$ означает близость энергии возбуждения к краю спектра, когда выполняется требование

$$|E-\Omega_2| \ll \frac{1}{mx_0^2}.$$

Дополнительное требование означает, что $|\Omega_1-E| \ll 1/2m^3V_0^2$. Одновременное выполнение таких условий возможно при достаточно узкой полосе, когда Ω_2 и Ω_1 близки:

$$\Omega_1 - \frac{1}{2m^3V_0^2} \ll E \ll \Omega_2 - \frac{1}{mx_0^2}\,.$$

Если не вводить дополнительного требования $mV_0q_1 \ll 1$, то в длинноволновом приближении из (31) получается величина пространственного затухания возбуждения в линейном кристалле:

$$q_1 = \frac{1}{4mV_0}\times \\ \times\left\{\sqrt{1+8mV_0\left[mV_0(\Omega_1-\Omega_2)-U_0\right]-\frac{1}{x_0}}-1\right\}. \quad (34)$$

Энергия такого состояния определяется после подстановки (34) в (9):

$$E = \Omega_2 - \Omega_a\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{\Omega_b}{\Omega_a}}\right), \quad (35)$$

где

$$\Omega_a = \frac{1}{32m^2V_0^2},$$

$$\Omega_b = \frac{1}{2V_0}\left[mV_0(\Omega_1-\Omega_2) - U_0 - \frac{1}{2mx_0}\right].$$

Для существования такого состояния должно быть $\Omega_a > -\Omega_b$, что приводит к условию

$$U_0 < mV_0(\Omega_1-\Omega_2) + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2mV_0} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Ясно, что при выполнении данного неравенства состояние рассматриваемого типа может существовать для различных знаков параметров дефекта и свободного параметра.

Из выражения (29) определяется амплитуда колебаний дефектного слоя в длинноволновом приближении при $q_t x_0 \ll 1$:

$$\psi_{0t} = -\frac{q_t^2 x_0}{\sqrt{mg}}\,.$$

4. ПОЛУЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

4.1. Полулокализованные состояния на границе между линейным кристаллом и самофокусирующей средой

В случае контакта линейного кристалла с кристаллом с положительной нелинейностью ($\gamma > 0$), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $\Omega_1 < E < \Omega_2$, НУШ (5) имеет решение

$$\psi(x) = \begin{cases} B_c\cos(kx+\varphi), & x<0, \\ A_c/\operatorname{ch}[q_2(x-x_0)], & x>0. \end{cases} \quad (36)$$

Для существования решения такого типа должно выполняться требование $\Omega_1 < \Omega_2$. Параметры решения (36) определяются после его подстановки в уравнение (5) и условие непрерывности (6). Значение q_2 определяется выражением (9), амплитуда A_c — выражением (10), а характеристики волны в линейном кристалле имеют вид

$$k^2 = 2m(E-\Omega_1), \quad (37)$$

$$B_c = \frac{q_2}{\sqrt{mg}\cos\varphi\operatorname{ch}(q_2x_0)}. \quad (38)$$

После подстановки решения (36) в граничное условие (7) получается дисперсионное соотношение

$$k\operatorname{tg}\varphi + q_2\operatorname{th}(q_2x_0) = \\ = m\left\{2U_0 + V_0\left[q_2^2\left(2\operatorname{th}^2(q_2x_0)-1\right)-k^2\right]\right\}. \quad (39)$$

Из соотношения (39) находится одно из волновых чисел (любое — k или q_2, так как они связаны), которое позволяет определить энергию как функцию параметров $E = E(m,\ U_0, V_0, \gamma, \varphi, x_0)$. Теперь положение x_0 центра солитона и фаза φ являются свободными параметрами.

Решение (36) описывает состояние, в котором линейная волна после перехода через тонкий дефектный слой затухает в глубину ангармонического кристалла, т. е. происходит локализация волны. Поскольку энергия такого стационарного состояния находится в спектре линейных волн, а по одну сторону от плоскости дефекта возбуждение локализуется, состояния такого вида можно называть полулокализованными.

В случае дефекта без внутренней структуры при $V_0 = 0$ из выражения (39) получается дисперсионное соотношение

$$k\operatorname{tg}\varphi + q_2\operatorname{th}(q_2x_0) = 2mU_0. \quad (40)$$

Если рассмотреть решение, для которого $x_0 = 0$, то из (40) определяется энергия

$$E = \Omega_1 + 2mU_0^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi. \qquad (41)$$

Рассматриваемое состояние и те, которые будут получены ниже, существуют не при всех значениях фазы φ.

В длинноволновом приближении при $q_2 x_0 \ll 1$ из (40) можно получить выражение для энергии полулокализованного состояния в явном виде:

$$E = \frac{2mU_0(U_0 - 2x_0\Omega_2) + \Omega_1 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - 4mU_0 x_0}. \qquad (42)$$

Из (41) и (42) вытекает, что выделенное состояние для $\varphi = 0$ может существовать только для $x_0 \neq 0$.

Для дефекта с внутренней структурой при $V_0 \neq 0$ и $x_0 = 0$ из выражения (39) для энергии получаем

$$E = \Omega_1 + 2m\left[U_0 - mV_0(\Omega_2 - \Omega_1)\right]^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi. \qquad (43)$$

Рассмотрим далее длинноволновое приближение при $q_2 x_0 \ll 1$ и $V_0 \neq 0$. В этом случае из (39) получается энергия полулокализованного состояния:

$$E = \Omega_2 - \Omega_c^{\varphi}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Omega_c}{\Omega_c^{\varphi}}}\right), \qquad (44)$$

где

$$\Omega_c^{\varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{8mx_0^2}, \quad \Omega_c = \frac{1}{x_0}\left[U_0 - (mV_0 + x_0)(\Omega_2 - \Omega_1)\right].$$

Состояния с энергией (44) существуют при значениях фазы, удовлетворяющей условию $\operatorname{tg}^2 \varphi > 8mx_0^2\Omega_c$.

4.2. Полулокализованные состояния на границе между линейным кристаллом и дефокусирующей средой

В таком же энергетическом диапазоне, $\Omega_1 < E < \Omega_2$, но в случае контакта линейного кристалла с кристаллом с отрицательной нелинейностью ($\gamma = -g < 0$) НУШ (5) имеет другое решение:

$$\psi(x) = \begin{cases} B_s \cos(kx + \varphi), & x < 0, \\ A_s / \operatorname{sh}[q_2(x - x_0)], & x > 0. \end{cases} \qquad (45)$$

Параметры решения (45) определяются после его подстановки в уравнение (5) и условие непрерывности (6). Значение q_2 определяется выражением (9), амплитуда A_s — (19), волновое число k — (37), а амплитуда волны в линейном кристалле имеет вид

$$B_s = -\frac{q_2}{\sqrt{mg}\cos\varphi \operatorname{sh}(q_2 x_0)}. \qquad (46)$$

После подстановки решения (45) в граничное условие (7) получается дисперсионное соотношение

$$k \operatorname{tg}\varphi - q_2 \operatorname{cth}(q_2 x_0) = \\ = m\left\{2U_0 + V_0\left[q_2^2(1 - 2\operatorname{cth}^2(q_2 x_0)) - k^2\right]\right\}. \qquad (47)$$

Для такого полулокализованного состояния положение x_0 центра солитона, которое должно быть отрицательным для ограниченности решения (45), и фаза φ являются свободными параметрами.

В случае дефекта без внутренней структуры при $V_0 = 0$ из (47) получается дисперсионное соотношение

$$k \operatorname{tg}\varphi - q_2 \operatorname{cth}(q_2 x_0) = 2mU_0. \qquad (48)$$

В длинноволновом приближении ($q_2 x_0 \ll 1$) из (48) можно получить энергию полулокализованного состояния в явном виде:

$$E = \Omega_1 + \frac{1}{2m}\left(2mU_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi. \qquad (49)$$

Рассмотрим далее длинноволновое приближение при $q_2 x_0 \ll 1$ и $V_0 \neq 0$. В этом случае из (47) для энергии полулокализованного состояния получаем

$$E = \Omega_1 + 2m\left\{U_0 + V_0\left[\frac{1}{x_0^2} - m(\Omega_2 - \Omega_1)\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2mx_0}\right\}^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi. \qquad (50)$$

В случае контакта линейного кристалла с кристаллом с отрицательной нелинейностью ($\gamma = -g < 0$) в энергетическом диапазоне $E > \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$ НУШ (5) имеет другое решение:

$$\psi(x) = \begin{cases} B_t \cos(kx + \varphi), & x < 0, \\ A_t \operatorname{th}[q_t(x - x_0)], & x > 0. \end{cases} \qquad (51)$$

Параметры решения (51) определяются после его подстановки в уравнение (5) и условие непрерывности (6). Значение q_t определяется выражением (28), амплитуда A_t — (29), волновое число k — (37), а амплитуда волны в линейном кристалле имеет вид

$$B_t = -\frac{q_t \operatorname{th}(q_t x_0)}{\sqrt{mg}\cos\varphi}. \qquad (52)$$

После подстановки решения (51) в граничное условие (7) получается дисперсионное соотношение

$$k \operatorname{tg} \varphi - \frac{2q_t}{\operatorname{sh}(2q_t x_0)} = \\ = m\left\{2U_0 - V_0\left[\frac{2q_t^2}{\operatorname{ch}^2(q_t x_0)} + k^2\right]\right\}. \quad (53)$$

В случае дефекта без внутренней структуры при $V_0 = 0$ из (53) получается дисперсионное соотношение

$$k \operatorname{tg} \varphi - \frac{2q_t}{\operatorname{sh}(2q_t x_0)} = 2mU_0. \quad (54)$$

В длинноволновом приближении ($q_t x_0 \ll 1$) из (54) получается, что энергия такого состояния совпадает с энергией (49).

В случае дефекта с внутренней структурой ($V_0 \neq \neq 0$) в длинноволновом приближении ($q_t x_0 \ll 1$) из (54) для энергии полулокализованного состояния имеем

$$E = \Omega_1 + \Omega_t^{\varphi}\left(\sqrt{1 + \Omega_t/\Omega_t^{\varphi}} - 1\right), \quad (55)$$

где

$$\Omega_t^{\varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{32 m x_0^2},$$

$$\Omega_t = \frac{1}{2U_0}\left[U_0 + mV_0(\Omega_2 - \Omega_1) + 1/2mx_0\right].$$

Для существования такого состояния должно выполняться требование $\Omega_t < -\Omega_t^{\varphi}$, откуда вытекает ограничение

$$\operatorname{tg}^2 \varphi > -32 m^2 U_0^2 \Omega_t.$$

Поскольку величина Ω_t может иметь любой знак, полулокализованные состояния с энергией (55) могут существовать как для притягивающего, так и для отталкивающего дефекта.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Проанализируем влияние внутренней структуры дефекта на особенности локализации стационарных состояний.

5.1. Дефект в линейной среде

Сначала рассмотрим дефект в линейной среде ($\gamma = 0$), для упрощения полагая, что среда слева и справа от дефекта имеет одинаковые характеристики, в частности $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, тогда $q_1 = q_2 = q$. В линейной среде без дефекта (в НУШ (4) всюду $\gamma(x) \equiv 0$ и $U(x) \equiv 0$) распространяются свободные волны с квадратичным законом дисперсии $E = \Omega + + k^2/2m$, где k — волновое число.

Хорошо известно, что при наличии простого дефекта ($U_0 \neq 0$, $V_0 = 0$), описываемого короткодействующим потенциалом (1), в линейной среде существует симметричное локализованное по обе стороны от дефекта состояние. Такое состояние описывается волновой функцией

$$\psi(x) = \psi_0 \exp(-q|x|),$$

где $q = -mU_0$, и существует только для притягивающего дефекта с $U_0 < 0$. Энергия такого локального уровня $E = \Omega - mU_0^2/2$.

В работе [8] было показано, что в линейной среде с дефектом, обладающим внутренней структурой, существуют локализованные состояния, описываемые экспоненциально убывающей по обе стороны от дефекта волновой функцией как для притягивающего, так и для отталкивающего дефекта. Для выявления роли внутренней структуры дефекта в эффектах локализации возбуждений проведем ниже подробный анализ полученных результатов для случая $U_0 = 0$ и $V_0 \neq 0$.

Локальное состояние в линейной среде в этом случае описывается такой же волновой функцией, как и в линейной среде с простым дефектом (т. е. при $U_0 \neq 0$, $V_0 = 0$), но величина пространственного затухания теперь равна $q = -1/mV_0$, а энергия — $E = \Omega - 1/2m^3V_0^2$. Такое локальное состояние существует при $V_0 < 0$. Следует отметить, что глубина локализации $l = 1/q = m|V_0|$, т. е. коэффициент V_0 фактически пропорционален глубине локализации поля в данном случае.

Особую роль внутренней структуры дефекта, приводящей к качественно новым эффектам, можно продемонстрировать на примере рассеяния плоской монохроматической волны дефектом, моделируемым потенциалом (2). Волновую функцию в постановке задачи рассеяния можно представить в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < 0, \\ Te^{-ikx}, & x > 0. \end{cases} \quad (56)$$

В работе [8] были получены коэффициенты отражения и прохождения. После подстановки (56) в граничные условия (6) и (7) при $U_0 \neq 0$ и $V_0 \neq 0$ эти коэффициенты можно определить по формулам

$$|R|^2 = \frac{m^2(U_0 - V_0k^2)^2}{k^2 + m^2(U_0 - V_0k^2)^2}, \quad (57)$$

$$|T|^2 = \frac{k^2}{k^2 + m^2(U_0 - V_0k^2)^2}. \qquad (58)$$

Отсюда следует, что только при $V_0 \neq 0$ становится возможным полное прохождение, когда $|R|^2 = 0$ и $|T|^2 = 1$, при определенном значении волнового числа: $k^2 = U_0/V_0$. Энергия полного прохождения определяется выражением

$$E_T = \Omega + U_0/2mV_0.$$

Подчеркнем, что без учета внутренней структуры дефекта (т. е. при $V_0 = 0$), такой эффект не возникает.

5.2. Контакт линейной и нелинейной сред

Рассмотрим сначала случай контакта линейного кристалла с кристаллом с положительной нелинейностью ($\gamma > 0$), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, а волновая функция имеет вид (8). Для упрощения будем интересоваться локализованным состоянием, в котором $x_0 = 0$. Из (15) в интересующем нас случае при $U_0 = 0$ и $V_0 \neq 0$ получается величина пространственного затухания

$$q_1 = -2m^2V_0(\Omega_1 - \Omega_2),$$

соответствующая энергии локализованного состояния

$$E = \Omega_1 - 2m^2[V_0(\Omega_1 - \Omega_2)]^2.$$

Отсюда вытекает, что если $\Omega_1 > \Omega_2$, то локализация происходит при $V_0 < 0$, а если $\Omega_1 < \Omega_2$, то локализация происходит при $V_0 > 0$. Это означает, что возбуждение может локализоваться как вблизи притягивающего дефекта, так и вблизи отталкивающего дефекта в зависимости от соотношения между характеристиками сред (например, химических потенциалов).

Далее рассмотрим случай контакта линейного кристалла с кристаллом с отрицательной нелинейностью ($\gamma < 0$), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, а волновая функция имеет вид (18). Для упрощения здесь можно ограничиться рассмотрением случая $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, тогда $q_1 = q_2 = q$. Из (25) в интересующем нас случае при $U_0 = 0$ и $V_0 \neq 0$ в приближении $qx_0 \ll 1$ получается величина пространственного затухания:

$$q = -(x_0 + 2mV_0)/x_0^2.$$

Отсюда следует, что для существования локализованного состояния должно выполняться условие $x_0 < -2mV_0$. Поскольку для ограниченности решения (18) требовалось $x_0 < 0$, локализация возбуждения возможна при $V_0 > 0$. При малых значениях V_0 глубина локализации возбуждения $l \approx \approx x_0(1 - 2V_0/x_0)$, т. е. такое возбуждение практически затухает на расстояниях порядка x_0.

Рассмотрим теперь случай контакта линейного кристалла с кристаллом с отрицательной нелинейностью, когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$, а волновая функция имеет вид (27). Из (33) в интересующем нас случае при $U_0 = 0$ и $V_0 \neq 0$ в приближении $qx_0 \ll 1$ и при дополнительном требовании $mV_0q_1 \ll 1$ получается величина пространственного затухания:

$$q_1 = 2m^2V_0(\Omega_1 - \Omega_2) - 1/x_0.$$

Для существования такого локализованного состояния должно выполняться условие

$$x_0 > 1/2m^2V_0(\Omega_1 - \Omega_2),$$

откуда следует, что, поскольку $\Omega_2 < \Omega_1$, а знак x_0 не фиксирован, локализация возбуждения возможна при любом знаке V_0.

Аналогичным образом можно показать, что состояния полулокализованного типа, описываемые функциями (36), (45) и (51), могут существовать при условии $U_0 = 0$ и $V_0 \neq 0$.

Таким образом, при изучении особенностей локализации возбуждений вблизи границы раздела сред может играть важную роль учет ее внутренней структуры, приводящей в некоторых случаях к появлению качественно новых эффектов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что локализованные состояния нескольких типов могут возникать вблизи плоского дефекта с внутренней структурой, разделяющего линейную и нелинейную среды. Такие локализованные состояния порождаются решениями НУШ солитонного типа.

Математическая формулировка модели для описания дефекта с внутренней структурой потребовала использования модифицированного потенциала, содержащего производные дельта-функции Дирака. Задача решения НУШ с таким потенциалом сводится к нахождению решения НУШ без потенциала с граничными условиями нового типа. Найдены решения сформулированной контактной краевой задачи с такими условиями. Получены выражения для энергии в явной аналитической форме. Показано, что учет внутренней структуры дефекта приводит к модификации профиля нелинейных локализованных возбуждений и области их существования.

В рассматриваемой системе существуют два типа стационарных состояний. Первый тип — локализованные по обе стороны от дефекта состояния. Второй тип — локализованное в нелинейной среде состояние и стоячая волна в линейной среде — называется полулокализованным.

Оба типа стационарных состояний реализуются в трех видах, определяемых знаком нелинейности среды и диапазоном возможной энергии возбуждений. В случае контакта линейного кристалла с самофокусирующей средой, т. е. с кристаллом с положительной нелинейностью ($\gamma > 0$), когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, реализуется локальное состояние, а когда энергия возбуждения лежит в диапазоне $\Omega_1 < E < \Omega_2$, — полулокализованное.

В случае контакта линейного кристалла с дефокусирующей средой, т. е. с кристаллом с отрицательной нелинейностью ($\gamma < 0$), имеются по два вида как локализованных, так и полулокализованных состояний. Локализованные состояния одного вида реализуются в диапазоне энергий возбуждений $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$, а другого — в диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$. Полулокализованные состояния одного вида реализуются в диапазоне энергий возбуждений $\Omega_1 < E < \Omega_2$, а другие — в диапазоне $E > \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$. Таким образом, управляя энергией локализации, можно получать различные виды локализованных состояний.

Результаты, полученные в этой работе, дополняют проведенные в работах [8–10] исследования особенностей локализации нелинейных возбуждений в средах с дефектами на случай границы раздела линейной и нелинейной сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Павло, И. Ю. Солодов, ФТТ **19**, 2948 (1977).
2. Д. Михалаке, Р. Г. Назмитдинов, В. К. Федянин, ЭЧАЯ **20**, 198 (1989).
3. В. И. Горенцвейг, Ю. С. Кившарь, А. М. Косевич, Е. С. Сыркин, ФНТ **16**, 1472 (1990).
4. F. Kh. Abdullaev, B. B. Baizakov, and B. A. Umarov, Opt. Comm. **156**, 341 (1998).
5. Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, Ю. В. Кузьменко, ЖЭТФ **88**, 107 (1985).
6. С. Е. Савотченко, Изв. вузов, физика **47**, 79 (2004).
7. С. Е. Савотченко, Конденсированные среды и межфазные границы **2**, 291 (2017).
8. В. В. Красильников, С. Е. Савотченко, Изв. Тульского гос. ун-та. Ест. науки **4**, 178 (2015).
9. С. Е. Савотченко, Изв. Воронежского гос. пед. ун-та **270**, 196 (2016).
10. С. Е. Савотченко, Вестник Воронежского гос. ун-та, сер. Физика. Математика вып. 4, 51 (2016).
11. И. В. Герасимчук, ЖЭТФ **121**, 596 (2015).