

# О ЗАХВАТЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА ПОВЕРХНОСТНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬЮ

*Е. Р. Подоляк\**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 октября 2017 г.

Рассматривается вопрос о захвате магнитного потока поверхностной сверхпроводимостью. Изучается устойчивость состояния, локализованного у поверхности цилиндрического образца, при изменении внешнего магнитного поля. Показано, что при уменьшении величины магнитного поля образец приобретает положительный магнитный момент за счет захвата магнитного потока, т. е. кривая намагничивания поверхностной сверхпроводимости имеет «парамагнитный» характер.

DOI: 10.7868/S0044451018030124

## 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При описании поверхностной сверхпроводимости обычно рассматривают полубесконечный сверхпроводник, находящийся во внешнем магнитном поле, приложенном вдоль оси  $z$  в плоскости границы с вакуумом. В этом случае уравнения Гинзбурга–Ландау [1] зависят только от одной переменной,  $x$ , координаты по нормали к границе. Решение уравнений Гинзбурга–Ландау в такой постановке [2] дает известное значение для критического поля возникновения поверхностной сверхпроводимости

$$H_{c3} = 1.695H_{c2},$$

где  $H_{c2}$  — поле абсолютной неустойчивости нормальной фазы в объеме сверхпроводника. Дальнейшие исследования [3] показали, что существует критическое значение параметра Гинзбурга–Ландау  $\kappa$ :  $\kappa_F \approx 0.405$  такое, что устойчивые поверхностные состояния образуются, только если параметр Гинзбурга–Ландау сверхпроводника превышает  $\kappa_F$ , в противном случае сверхпроводимость, возникающая в поле  $H = H_{c3}$ , сразу распространяется на весь объем образца. С другой стороны, в сверхпроводниках II рода ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ) в поле  $H < H_{c2}$  образуется вихревая решетка, которая характеризуется собственной кривой намагничивания, поэтому для изучения

магнитного момента поверхностной сверхпроводимости во всем диапазоне ( $0 < H < H_{c3}$ ) полей представляют интерес сверхпроводники I рода с параметром Гинзбурга–Ландау  $0.405 < \kappa < 1/\sqrt{2}$ . Отметим, что область существования поверхностной сверхпроводимости для полубесконечного сверхпроводника I рода исследована в работе [4].

Реальный сверхпроводящий образец не бесконечен, а имеет конечные размеры и вполне определенную форму. Это обстоятельство приводит к тому, что поверхностная сверхпроводимость образует вокруг образца контур, по которому может протекать замкнутый сверхпроводящий ток, т. е. образец можно представлять себе как короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид, величина поля внутри которого отличается от значения внешнего поля.

Такая картина напоминает известный эксперимент Литтла–Паркса [5] с тем отличием, что в рассматриваемой задаче роль диэлектрической нити играет область нормальной фазы, а толщина сверхпроводящей области определяется не количеством напыленного сверхпроводника, а толщиной поверхностной сверхпроводимости и величиной параметра порядка.

В поле  $H \approx H_{c3}$  величина параметра порядка мала по сравнению с его равновесным значением (в нулевом поле), поэтому нельзя ожидать, что поле на оси цилиндра будет значительно отличаться от внешнего, но по мере уменьшения внешнего поля параметр порядка растет и, соответственно, увеличиваются экранирующие токи, поэтому разница полей может стать значительной. Величина поля

\* E-mail: podolyak@kapitza.ras.ru

на оси цилиндра заранее неизвестна, она определяется из решения самосогласованной задачи. Эта задача может иметь несколько решений, соответствующих разным значениям поля на оси образца, поэтому необходимо выяснить, каким образом то или иное сверхпроводящее состояние теряет устойчивость при изменении внешнего поля. Исследование устойчивости поверхностных сверхпроводящих состояний и является целью настоящей работы.

В рассматриваемой задаче экранировка магнитного поля, как правило, мала, следовательно, глубина проникновения магнитного поля не является характерным масштабом задачи, поэтому для приведения к безразмерному виду мы используем процедуру, несколько отличную от принятой в [1]. Ниже приведено ее краткое изложение.

Рассмотрим выражение для плотности энергии Гинзбурга – Ландау

$$F = g \left| \nabla \Psi - i \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \alpha(T - T_c) |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi}, \quad (1)$$

где  $\Phi_0 = hc/2|e|$  и  $g = \hbar^2/4m$ . Отсюда можно получить равновесное значение параметра порядка  $\Psi_0(T)$  в нулевом поле:

$$|\Psi_0(T)|^2 = \frac{\alpha}{\beta} (T_c - T) \quad (2)$$

и термодинамическое критическое поле

$$H_c(T) = \alpha(T_c - T) \sqrt{\frac{4\pi}{\beta}}. \quad (3)$$

В рассматриваемой задаче на большей части образца параметр порядка пренебрежимо мал, а магнитное поле практически однородно, поэтому естественной единицей длины будет корреляционная длина

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{g}{\alpha(T_c - T)}}, \quad (4)$$

а в качестве единицы магнитного поля мы выбираем

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2(T)}. \quad (5)$$

Далее мы используем безразмерные величины, которые обозначены соответствующими маленькими буквами,

$$x = \frac{X}{\xi}, \quad b = \frac{B}{H_{c2}}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{\xi H_{c2}} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \xi \mathbf{A}. \quad (6)$$

Сделав переход к безразмерному параметру порядка

$$\psi = \frac{\Psi}{|\Psi_0|} \quad (7)$$

и использовав определение параметра Гинзбурга – Ландау

$$\varkappa = \frac{\Phi_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{8\pi g^2}}, \quad (8)$$

перепишем плотность энергии Гинзбурга – Ландау (1) в виде

$$F = \frac{H_c^2 \xi^2}{4\pi} \left\{ |\nabla \psi - i \mathbf{a} \psi|^2 - |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \varkappa^2 b^2 \right\}. \quad (9)$$

Поскольку мы рассматриваем протяженный цилиндрический образец, ориентированный вдоль магнитного поля, его размагничивающий фактор равен нулю, и поле вне образца не искажено и равно внешнему. В этом случае термодинамическое равновесие соответствует минимуму свободной энергии Гиббса, которую также называют свободной энергией  $\tilde{F}$  при постоянном внешнем поле. Энергию  $\tilde{F}$  будем отсчитывать от энергии нормальной фазы ( $\psi = 0, b = h_0$ )

$$\tilde{F} = \frac{H_c^2 \xi^2}{4\pi} \times \left\{ |\nabla \psi - i \mathbf{a} \psi|^2 - |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \varkappa^2 (b - h_0)^2 \right\}, \quad (10)$$

где  $h_0 = H_0/H_{c2}$  обозначает приложенное магнитное поле.

## 2. АЗИМУТАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим длинный цилиндрический образец радиуса  $r_0$ , находящийся во внешнем магнитном поле  $h_0$ , приложенном вдоль оси цилиндра  $z$ . Будем считать, что сверхпроводящее состояние имеет азимутальную симметрию, и фаза параметра порядка  $\phi = n\theta$ , где  $\theta$  обозначает азимутальный угол. Азимутальной симметрии соответствует калибровка векторного потенциала

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a(r) \mathbf{e}_\theta \quad \text{и} \quad \psi(\mathbf{r}) = f(r) e^{in\theta}. \quad (11)$$

Энергию, приходящуюся на единицу длины цилиндрического образца, можно представить в виде интеграла

$$E = \frac{H_c^2 \xi^2}{2} \int_0^{r_0} r dr \left\{ (f')^2 + \left( a - \frac{n}{r} \right)^2 f^2 - f^2 + \frac{1}{2} f^4 + \varkappa^2 (b - h_0)^2 \right\}. \quad (12)$$

Удобно ввести калибровочно-инвариантную «обобщенную скорость»

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} - \nabla\phi = \left(a - \frac{n}{r}\right) \mathbf{e}_\theta,$$

для которой справедливо равенство

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{q} = \left(q' + \frac{q}{r}\right) \mathbf{e}_z. \quad (13)$$

Приравнивая нулю вариацию энергии (12), получим систему уравнений Гинзбурга–Ландау

$$\begin{aligned} \Delta f &= f \left( |\mathbf{q}|^2 - 1 + f^2 \right), \\ -\text{rot } \mathbf{b} &= b'(r) \mathbf{e}_\theta = \frac{f^2}{\chi^2} \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в цилиндрической геометрии

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r.$$

Из равенства нулю вариации энергии на поверхности цилиндра получаем при  $r = r_0$  стандартное граничное условие Гинзбурга–Ландау

$$f'(r_0) = 0 \quad (15)$$

и условие непрерывности тангенциальной компоненты поля

$$b(r_0) = h_0. \quad (16)$$

Вторая пара граничных условий (при  $r = 0$ ) определяется требованием непрерывности функций  $\psi$ ,  $\mathbf{a}$  и  $b$  на оси цилиндра. Здесь можно выделить два частных случая — а) при  $n = 0$ :  $f(0) \neq 0$  и  $f'(0) = 0$  и б) при  $n = 1$ :  $f(0) = 0$  и  $f'(0) \neq 0$ . При  $n > 1$  условие имеет вид  $f(0) = f'(0) = 0$ .

Приведем некоторые свойства решений уравнений Гинзбурга–Ландау. Для вычисления энергии равновесного состояния можно проинтегрировать первое слагаемое в выражении (12) по частям и подставить первое из соотношений (14)

$$E = \frac{H_c^2 \xi^2}{4} \int_0^{r_0} r dr \left\{ -f^4 + 2\chi^2(b - h_0)^2 \right\}. \quad (17)$$

В безразмерном виде квант магнитного потока равен  $2\pi$ , поэтому условие квантования захваченного магнитного потока можно записать в виде

$$\int_0^{r^*} b(r) r dr = n. \quad (18)$$

Здесь  $r^* \lesssim r_0$  обозначает радиус, на котором сверхпроводящий ток меняет знак.

Численное интегрирование системы уравнений (14) представляет некоторую трудность. Дело в том, что при  $r \rightarrow 0$  модуль параметра порядка изменяется как  $f(r) \propto r^n$ , и при больших значениях  $n$  — это быстроменяющаяся функция, которая становится исчезающе малой вблизи оси. Для численного счета оказалось удобным перейти к плавным функциям  $g(r)$  и  $\chi(r)$  согласно равенствам

$$\begin{aligned} f(r) &= e^{g(r)}, \\ b(r) &= b_0 - \frac{f^2(r)}{2\chi^2} \chi(r). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь константа  $b_0$  обозначает поле на оси цилиндра. Уравнения (14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta g &= q^2 - (g')^2 - 1 + f^2, \\ \chi' &= -2(g'\chi + q). \end{aligned} \quad (20)$$

Функции  $g(r)$  и  $q(r)$  имеют особенности на оси цилиндра. При  $r \rightarrow 0$  решение системы (20) можно выразить в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} g(r) &\approx \ln \alpha_0 + n \ln(r) + \alpha_2 r^2 + \alpha_4 r^4 + \dots, \\ \chi(r) &\approx 1 + \beta_2 r^2 + \beta_4 r^4 + \dots, \\ q(r) &\approx -\frac{n}{r} + \frac{b_0}{2} r + C_{2n+1} r^{2n+1} + \\ &\quad + C_{2n+3} r^{2n+3} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Для существования решения краевой задачи необходимо, чтобы двум граничным условиям (15), (16) при  $r = r_0$  соответствовали два независимых параметра в разложениях (21). В качестве таких параметров естественно выбрать величины  $\alpha_0$  и  $b_0$ . Ниже приведены значения для первых коэффициентов рядов (21), выраженные через эти параметры:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{4(n+1)} [nb_0 + 1 + \alpha_0^2 \delta_{0n}], \\ \beta_2 &= -\frac{1}{2(n+1)^2} [b_0 - 1 + \alpha_0^2 \delta_{0n}], \\ C_3 &= \frac{1}{4(n+1)} \frac{\alpha_0^2}{\chi^2} \left[ \frac{b_0}{4} \delta_{0n} - \delta_{1n} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Использование разложений (21) позволяет сдвинуть границу области интегрирования из особой точки  $r = 0$  в  $r = r_1$ , причем значение  $r_1$  можно выбрать не слишком малым. Единственным условием при выборе величины  $r_1$  является то, что погрешность из-за отброшенных членов соответствующих рядов не должна превышать заданную точность численного счета.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ

В предыдущем разделе описана процедура вычисления решения, которое имеет азимутальную симметрию. Но устойчивость этого решения нужно исследовать по отношению к произвольным возмущениям. В рассматриваемой задаче такие возмущения описываются четырьмя вещественными функциями: две функции  $p$  и  $\phi$  описывают возмущение модуля и фазы параметра порядка,

$$\psi(r, \theta) = (f_0(r) + p(r, \theta)) \exp \{in\theta + i\phi(r, \theta)\},$$

и еще две функции  $d_r$  и  $d_\theta$  описывают возмущение  $r$ - и  $\theta$ -компонент векторного потенциала,

$$a_r(r, \theta) = d_r(r, \theta), \quad a_\theta(r, \theta) = a_0(r) + d_\theta(r, \theta).$$

Здесь и далее индекс «0» обозначает равновесное решение —  $a_0, f_0$  и  $\phi_0$ , устойчивость которого мы изучаем. Отметим, что мы не рассматриваем возмущения, связанные с наклоном поля, считая, что в возмущенной системе однородность по  $z$  сохраняется.

Устойчивость сверхпроводящего состояния определяется знаком второй вариации энергии

$$\delta^2 E = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} r dr [|\nabla p|^2 + p^2 (q_0^2 - 1 + 3f_0^2) + 4q_0 f_0 p (d_\theta - \partial_\theta \phi) + \chi^2 |\text{rot } \mathbf{d}|^2 + f_0^2 |\mathbf{d} - \nabla \phi|^2]. \quad (23)$$

Чтобы исключить возмущения, которые не влияют на энергию и сводятся только к изменению калибровки, удобно (по аналогии с равенствами (12)–(14)) ввести возмущение «обобщенной скорости»  $\mathbf{t} = \mathbf{d} - \nabla \phi$  и воспользоваться равенством  $\text{rot}(\nabla \phi) = 0$ :

$$\delta^2 E = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} r dr [|\nabla p|^2 + p^2 (q_0^2 - 1 + 3f_0^2) + 4q_0 f_0 p t_\theta + \chi^2 |\text{rot } \mathbf{t}|^2 + f_0^2 |\mathbf{t}|^2]. \quad (24)$$

Теперь, следуя общепринятой процедуре, разложим возмущение в ряд Фурье по углу  $\theta$ :

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} p_k(r), \\ t_\theta(r, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} t_{k\theta}(r), \\ t_r(r, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} t_{kr}(r). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставим (25) в (24) и проинтегрируем по  $\theta$ . С учетом ортогональности фурье-гармоник получим

$$\delta^2 E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{r_0} r dr \left\{ |p'_k|^2 + \frac{k^2}{r^2} |p_k|^2 + |p_k|^2 (q_0^2 - 1 + 3f_0^2) + 4q_0 f_0 t_{k\theta}^* p_k + \chi^2 |u_k|^2 + f_0^2 |t_{k\theta}|^2 + \left( f_0^2 + \frac{\chi^2 k^2}{r^2} \right) |t_{kr}|^2 + i \frac{2\chi^2 k}{r} u_k t_{kr}^* \right\}, \quad (26)$$

где

$$u_k = t'_{k\theta} + \frac{1}{r} t_{k\theta}. \quad (27)$$

Поскольку все функции (25) вещественные, для амплитуд гармоник выполняются соотношения  $p_{-k} = p_k^*$  и т. д. Попарно сложив интегралы с  $k$  и  $-k$ , получим

$$\delta^2 E = \delta^2 E_0(p, t_\theta, t_r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta^2 E_k(p, t_\theta, t_r), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \delta^2 E_k(p, t_\theta, t_r) &= \int_0^{r_0} r dr \left\{ |p'_k|^2 + |p_k|^2 \times \right. \\ &\times \left( q_0^2 + \frac{k^2}{r^2} - 1 + 3f_0^2 \right) + 2f_0 q_0 (p_k^* t_{k\theta} + p_k t_{k\theta}^*) + \\ &+ \chi^2 |u_k|^2 + f_0^2 |t_{k\theta}|^2 + \left( f_0^2 + \chi^2 \frac{k^2}{r^2} \right) |t_{kr}|^2 + \\ &\left. + i \chi^2 \frac{k}{r} (u_k t_{kr}^* - u_k^* t_{kr}) \right\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Теперь устойчивость по отношению к  $k$ -й гармонике возмущения можно рассматривать независимо от остальных гармоник. Выражение (29) не содержит производных  $t'_{kr}$ , поэтому подстановкой

$$t_{kr} = -i \frac{\chi^2 k r}{r^2 f_0^2 + \chi^2 k^2} u_k \quad (30)$$

можно выделить полный квадрат по  $t_{kr}$  и исключить его из рассмотрения:

$$\begin{aligned} \delta^2 E_k(p, t_\theta) &= \int_0^{r_0} r dr \left\{ |p'_k|^2 + |p_k|^2 \times \right. \\ &\times \left( q_0^2 + \frac{k^2}{r^2} - 1 + 3f_0^2 \right) + 2f_0 q_0 (p_k^* t_{k\theta} + p_k t_{k\theta}^*) + \\ &\left. + \chi^2 \frac{r^2 f_0^2}{r^2 f_0^2 + \chi^2 k^2} |u_k|^2 + f_0^2 |t_{k\theta}|^2 \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

Из формулы (31) следует, что вариация энергии определяется только двумя независимыми вещественными функциями:  $p(r, \theta)$  — возмущением модуля параметра порядка — и  $t_\theta(r, \theta)$  — возмущением азимутальной компоненты обобщенной скорости. Полезно также выразить  $k$ -ю гармонику возмущения магнитного поля

$$b_k = t'_{k\theta} + \frac{1}{r} t_{k\theta} - i \frac{k}{r} t_{kr} = \frac{r^2 f_0^2}{r^2 f_0^2 + \varkappa^2 k^2} u_k. \quad (32)$$

Теперь сформулируем задачу об устойчивости по отношению к  $k$ -й гармонике произвольного возмущения. Это задача на собственные значения линейного оператора, который соответствует квадратичной форме (31). В рассматриваемой задаче собственные функции  $k$ -й гармоники имеют две компоненты  $p_k(r)$  и  $t_{k\theta}(r)$ , поэтому существует дополнительный произвол в определении их ортогональности. Поскольку нас интересует только основная собственная функция, мы ограничиваемся использованием нормировочного интеграла вида

$$\int_0^{r_0} r dr \{ |p_k|^2 + w_k(r) |t_{k\theta}|^2 \}, \quad (33)$$

в котором весовая функция  $w_k(r)$  выбирается так, чтобы коэффициенты разложения собственной функции при  $r \rightarrow 0$  имели наиболее простой вид. В итоге задача об устойчивости сверхпроводящего состояния сводится к определению знака собственных значений  $E_k$  в краевой задаче:

$$\begin{aligned} \Delta p_k &= p_k \left( q_0^2 + \frac{k^2}{r^2} - 1 + 3f_0^2 - E_k \right) + 2t_{k\theta} f_0 q_0, \\ t'_{k\theta} &= b_k \left( 1 + \frac{\varkappa^2 k^2}{f_0^2 r^2} \right) - \frac{1}{r} t_{k\theta}, \\ \varkappa^2 b_k' &= t_{k\theta} (f_0^2 - w_k E_k) + 2p_k f_0 q_0 \end{aligned} \quad (34)$$

с граничными условиями

$$p'_k(r_0) = 0, \quad b_k(r_0) = 0. \quad (35)$$

В общем случае ( $n \neq 0, k \neq 0$ ) разложение собственных функций вблизи оси имеет вид

$$\begin{aligned} p_k(r) &= \\ &= f_0(r) [\gamma_0 r^{-k} + \gamma_2 r^{-k+2} + \dots + \gamma_p r^k + \dots], \\ t_{k\theta}(r) &= \\ &= C_0 r^{-k-1} + C_2 r^{-k+1} + \dots + C_p r^{k-1} + \dots, \\ b_k(r) &= \\ &= \frac{f_0^2}{\varkappa^2} [\eta_0 r^{-k} + \eta_2 r^{-k+2} + \dots + \eta_p r^k + \dots]. \end{aligned} \quad (36)$$

Все коэффициенты разложений (36) должны выражаться через нормировочный множитель  $\gamma_0$  и один произвольный параметр  $\gamma_p$ , который вместе с  $E_k$  подбирается так, чтобы при  $r = r_0$  удовлетворить условиям (35). В численном счете мы используем функцию  $w_k(r)$  вида

$$w_k(r) = \left[ f_0(r) \frac{r}{k} \right]^2, \quad (37)$$

для которой ниже приведены выражения для первых коэффициентов разложения (36),

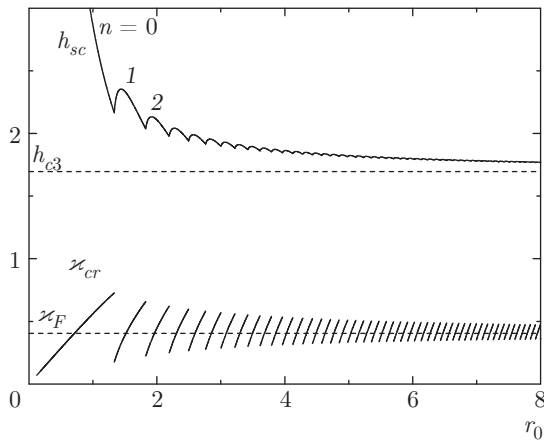
$$\begin{aligned} \eta_0 &= -\gamma_0, & \eta_p &= \gamma_p, \\ C_0 &= k\gamma_0, & C_p &= -k\gamma_p. \end{aligned} \quad (38)$$

Как следует из выражений (34), (36) и (37), случай  $k = 0$  является особым. Его анализ не представляет какой-либо трудности, поэтому здесь лишь укажем, что в качестве весовой функции мы используем  $w_0(r) = f_0^2(r)$ , а подбираемыми параметрами здесь являются собственное значение  $E_0$  и коэффициент  $\eta_0$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты предыдущего раздела применимы не только для изучения устойчивости сверхпроводящих состояний. Если положить  $f_0 = 0$ , то их можно использовать и для вычисления устойчивости нормальной фазы. Критическое поле абсолютной неустойчивости нормальной фазы  $h_{sc}$  как функция радиуса образца [6] показано на верхней кривой рис. 1.

Величина этого поля зависит от фазового множителя  $n$ , который также определяет число квантов захваченного магнитного потока, причем для заданного радиуса цилиндра  $r_0$  реализуется такое значение  $n$ , которое соответствует наибольшей величине  $h_{sc}$ . В частности, при радиусе цилиндра  $r_0 \lesssim 1.33$  образец не может захватить магнитный поток ( $n = 0$ ) и сверхпроводимость возникает в большом поле, величина которого обратно пропорциональна радиусу образца  $h_{sc} \approx 2\sqrt{2}/r_0$ , что совпадает с результатом [7]. При радиусе образца  $1.33 \lesssim r_0 \lesssim 1.83$  возникающая сверхпроводимость захватывает  $n = 1$  квант потока. Максимум этой кривой достигается при  $r_0 \approx 1.43$  и составляет  $h_{sc} \approx 2.36$ . При дальнейшем увеличении радиуса образца критическое поле стремится к  $h_{c3} \approx 1.695$  приблизительно по закону  $h_{sc} \approx h_{c3} + r_0^{-1}$ . При этом число квантов захваченного потока растет как  $n \approx 0.5 h_{sc} r_0^2$ . Как видно на



**Рис. 1.** Верхняя кривая — зависимость критического поля абсолютной неустойчивости нормальной фазы от радиуса цилиндрического образца. Штриховая линия изображает поле  $h_{c3}$  для плоской задачи ( $r_0 \rightarrow \infty$ ). Нижняя кривая — критическое значение параметра Гинзбурга–Ландау

рис. 1, осцилляции поля  $h_{sc}(r_0)$ , связанные с квантованием магнитного потока, можно наблюдать лишь в достаточно тонких цилиндрах ( $r_0 \sim 1$ ). В более толстых образцах следует говорить скорее о размерном эффекте, который приводит к сдвигу  $h_{sc}$  по отношению к полю  $h_{c3}$  для полубесконечного образца с плоской границей.

Величина  $r_0 = R_0/\xi(T) \sim (T_c - T)^{1/2}$ , поэтому для конкретного образца значение  $r_0$  будет меняться при изменении температуры. Это обстоятельство можно использовать для экспериментальной проверки [8] зависимости  $h_{sc}(r_0)$ . Отметим, что при заданном  $R_0$  эта же зависимость определяет осцилляции критической температуры как функцию внешнего поля точно так же, как и в опытах Литтла–Паркса.

Теперь, аналогично [3], можно определить критическое значение  $\kappa_{cr}$  параметра Гинзбурга–Ландау, ограничивающее область существования локализованных поверхностных состояний. Оно определяется сменой знака энергии (17) в пределе  $f(r) \rightarrow 0$  при заданном  $h_0 = h_{sc}(r_0)$ . С учетом (19) получим выражение для  $\kappa_{cr}$ :

$$2\kappa_{cr}^2 \int_0^{r_0} r dr f^4(r) = \int_0^{r_0} r dr \{f^2(r)\chi(r) - f^2(r_0)\chi(r_0)\}^2. \quad (39)$$

Зависимость  $\kappa_{cr}(r_0)$  показана на нижней кривой рис. 1. Напомним, что для заданного  $r_0$  в поле  $h_{sc}(r_0)$  происходит сверхпроводящий переход II рода, если  $\kappa$  образца больше, чем  $\kappa_{cr}(r_0)$ . В противном

случае в этом поле происходит переход I рода с образованием объемной сверхпроводимости.

При  $r_0 \rightarrow 0$  мы получили результат, совпадающий с результатом из работы [7],  $\kappa_{cr} \approx r_0/\sqrt{3}$ . Укажем, что при  $r_0 \approx 1.33$  критическое значение параметра Гинзбурга–Ландау достигает максимального значения  $\kappa_{cr} \approx 0.75$ .

По зависимости типа сверхпроводящего перехода от радиуса образца сверхпроводника можно разделить на три группы. К первой группе ( $\kappa < 0.16$ ) относятся практически все классические сверхпроводящие металлы. В них поверхностная сверхпроводимость не образуется, а сверхпроводящий переход II рода имеет место только при выполнении условия ( $r_0 < \kappa\sqrt{3}$ ) Гинзбурга [7]. При больших радиусах ( $r_0 > \kappa\sqrt{3}$ ) происходит сверхпроводящий переход I рода с образованием объемного сверхпроводящего состояния. В сверхпроводниках второй группы ( $\kappa > 0.75$ ) поверхностная сверхпроводимость образуется при  $r_0 > 1.33$ . При  $r_0 < 1.33$  происходит переход II рода с образованием объемной сверхпроводимости. В третьей группе сверхпроводников ( $0.16 < \kappa < 0.75$ ) при изменении радиуса образца имеет место чередование переходов I и II родов.

То обстоятельство, что размагничивающий фактор цилиндрического образца равен нулю, в задаче об устойчивости нормальной фазы не существенно, поскольку сверхпроводящие токи, экранирующие магнитное поле, исчезающе малы. Однако форма образца важна как для постановки граничных условий, так и при решении самих уравнений Гинзбурга–Ландау. В частности, для образцов сферической формы функции  $\psi$  и  $\mathbf{q}$  сохраняют азимутальную симметрию, но зависят не только от  $r$ , но и от  $z$ . Кроме того, цилиндрические дифференциальные операторы в формуле (14) нужно заменить на сферические. Формально задача остается той же самой, но теперь она сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных.

В рамках данной работы мы представляем решение только для линейной задачи об устойчивости нормальной фазы (рис. 2) в сферическом образце. При  $r \rightarrow 0$  для сферы получается результат  $h_{sc} \approx \sqrt{10}/r_0$  и  $\kappa_{cr} \approx 2/\sqrt{21} r_0$ , также совпадающий с результатом [7], а при  $r \rightarrow \infty$  также имеет место предельный переход к «плоской» задаче. Заметим, что в отличие от цилиндра, при  $r \rightarrow \infty$  в сферическом образце  $h_{sc} < h_{c3}$ . Дальнейшее изучение сферических образцов выходит за рамки данной работы, отметим лишь, что поверхностное сверхпроводящее состояние имеет вид пояса вокруг экватора сферы.

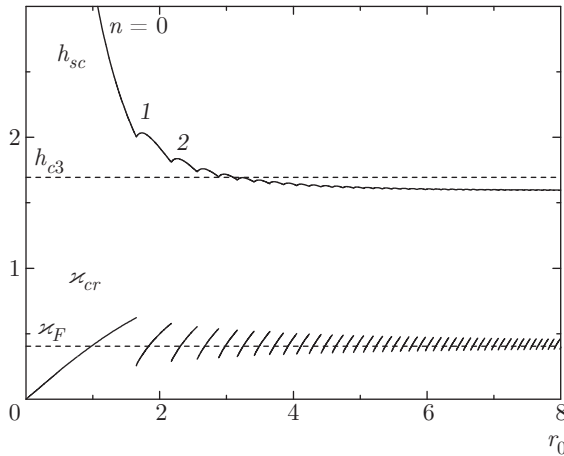


Рис. 2. Верхняя кривая — зависимость критического поля абсолютной неустойчивости нормальной фазы от радиуса сферического образца. Нижняя кривая — критическое значение параметра Гинзбурга–Ландау

Вернемся к цилиндрическому образцу. Мы уже выяснили, что в цилиндрическом образце возникновение сверхпроводимости может сопровождаться захватом магнитного потока. С другой стороны, в нулевом поле равновесным является мейснеровское состояние без захваченного магнитного потока. Следовательно, при уменьшении внешнего магнитного поля от  $h_{sc}$  до нуля должен происходить «сброс» захваченного магнитного потока.

Первоначальная цель этой работы заключалась в проверке утверждения [9] о том, что наблюдаемые скачки на кривой намагничивания в образцах свинца ( $\kappa < 0.4$ ,  $r_0 > 10$ ) связаны с захватом магнитного потока поверхностной сверхпроводимостью. Поскольку образцы, использованные в эксперименте, имели форму близкую к сферической, а параметр Гинзбурга–Ландау для свинца, по-видимому, удовлетворяет неравенству  $\kappa < \kappa_F$ , мы не можем проверить это утверждение количественно. Мы провели численное моделирование для сверхпроводящего ( $\kappa = 0.6$ ) цилиндра радиусом  $r_0 = 10$ . Поверхностная сверхпроводимость возникает в поле  $h_0 = h_{sc} \approx 1.754$  и захватывает  $n = 78$  квантов потока. При уменьшении внешнего поля магнитный момент имеет положительный знак, а на кривой намагничивания «наблюдается» 78 скачков магнитного момента.

Для большей наглядности здесь мы приводим результаты счета для более тонкого образца ( $r_0 = 5$ ), для которого на кривой намагничивания «наблюдаются» всего 18 скачков магнитного момента (рис. 3). На этом рисунке сплошными линиями изображен магнитный момент, соответствующий равно-

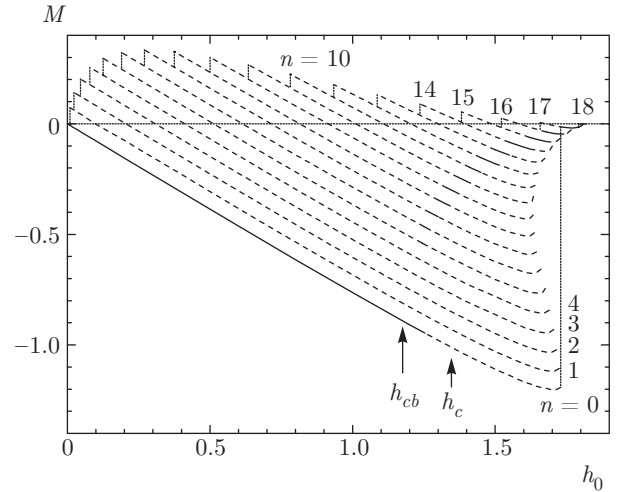


Рис. 3. Все возможные кривые намагничивания сверхпроводящего ( $\kappa = 0.6$ ) цилиндра радиуса  $r_0 = 5$ . Штриховые линии соответствуют различным значениям ( $n$ ) числа квантов захваченного потока. Сплошные линии соответствуют равновесным состояниям

весным состояниям, а штриховые линии соответствуют устойчивым (в малом) метастабильным состояниям.

При уменьшении внешнего магнитного поля от больших значений в поле  $h_0 = h_{sc} \approx 1.820$  возникает поверхностная сверхпроводимость, захватывающая  $n = 18$  квантов магнитного потока. Это состояние является равновесным вплоть до поля  $h_0 = 1.804$ . При дальнейшем понижении поля поверхностная сверхпроводимость с  $n = 18$  квантами потока становится метастабильной и может переходить в состояние с  $n = 17$  квантами. Поле  $h_0 \approx 1.792$  является полем абсолютной неустойчивости состояния с  $n = 18$ , и в этом поле существует только состояние с  $n = 17$  квантами.

Если мы теперь начнем увеличивать внешнее поле, то состояние с  $n = 17$  квантами может существовать вплоть до поля  $h_0 = 1.807$ .

Если стартовать с мейснеровского состояния в нулевом поле, то оно остается равновесным при увеличении поля до  $h_0 = 1.253$ . Это поле можно считать термодинамическим критическим полем для образца данного размера. Отметим, что термодинамическое критическое поле для бесконечного образца в принятых здесь единицах составляет  $h_{cb} = 1/\kappa\sqrt{2} \approx 1.179$ . Также на рисунке приведено значение поля  $h_c$ , при котором энергия мейснеровского состояния сравнивается с энергией нормальной фазы. Поскольку в образце возможны состояния с захваченным потоком, поля  $h_{cb}$  и  $h_c$  не имеют здесь особого смысла.

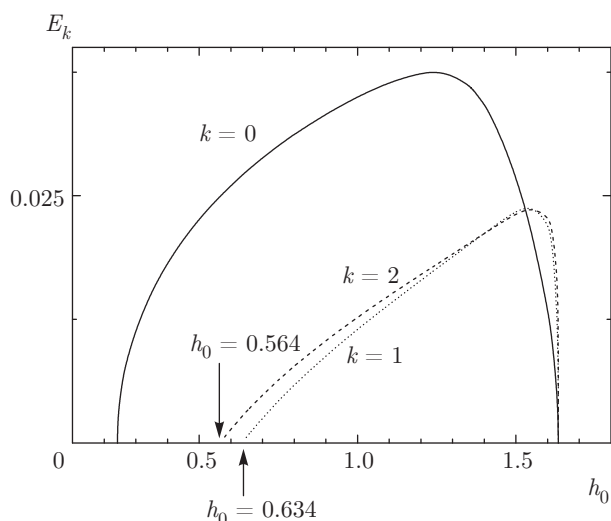


Рис. 4. Зависимости собственных значений  $E_k(h_0)$  от поля для  $n = 10, k = 0, 1, 2$

При дальнейшем увеличении поля состояние с  $n = 0$  становится метастабильным и может перейти в любое состояние с  $n < 14$ . Однако абсолютная неустойчивость мейснеровского состояния наступает в поле  $h_0 \approx 1.73$ , в котором возможен переход лишь в состояния с  $n = 16$  и  $n = 17$ .

На рис. 4 приведены типичные «спектры устойчивости», т.е. зависимости собственных значений  $E_k(h_0)$  от внешнего поля. При уменьшении внешнего поля потеря устойчивости поверхностной сверхпроводимости всегда происходит на гармонике  $k = 1$ . Это соответствует выходу из образца одного кванта потока. Здесь следует подчеркнуть, что мы можем лишь сказать, как неустойчивость начнет развиваться, но ничего не можем сказать про конечное состояние, в котором окажется сверхпроводник. Это может быть любое допустимое состояние для данного внешнего поля. Среди всех допустимых состояний есть два выделенных — это состояние с  $n - 1$  квантом и равновесное состояние для данного внешнего поля.

Отметим, что поиск решения системы (14) мы проводим в более узком классе функций, чем исследование устойчивости. Решения системы чувствительны только к потере устойчивости при  $k = 0$ . Если потеря устойчивости сверхпроводящего состояния происходит при  $k \neq 0$ , то решение системы (14) этого не «замечает», и отличить устойчивое состояние от неустойчивого без анализа всех гармоник невозможно.

При увеличении поля сверхпроводящее состояние с заданным  $n$  просто перестает существовать,

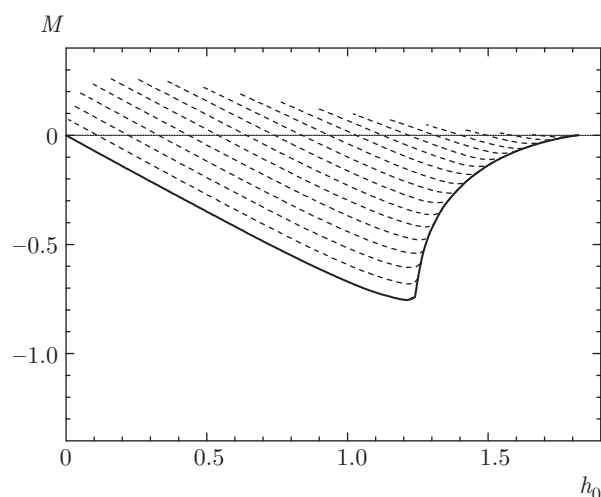


Рис. 5. Кривые намагничивания для сверхпроводника II рода,  $r_0 = 5, z = 0.8$

т.е. можно сказать, что потеря устойчивости происходит при всех  $k$  одновременно. В этом случае нет предпочтительного значения для величины  $n$  в конечном состоянии.

Важным общим свойством изученных кривых намагничивания оказалась невозможность существования поверхностных состояний с конечным потоком в нулевом внешнем поле. При достижении некоторого конечного внешнего поля магнитный поток полностью выходит из образца.

Кроме того, нам не удалось обнаружить закономерностей в том, при каком внешнем поле парамагнитный эффект достигает максимума. Можно лишь утверждать, что это происходит в поле  $h_0 \approx (0.2-0.3)$ , а сам магнитный момент по величине сравним с мейснеровским магнитным моментом, соответствующим тому же внешнему полю.

Как было отмечено выше, в сверхпроводниках I рода при уменьшении внешнего поля магнитный поток выходит из образца по одному кванту, а при увеличении поля в образец входит сразу много квантов потока. Для сверхпроводников II рода картина существенно другая. Здесь и при увеличении внешнего поля магнитный поток может входить в образец по одному кванту (сплошная кривая на рис. 5).

Кривые намагничивания для сверхпроводника II рода, также имеющего радиус  $r_0 = 5$ , приведены на рис. 5. Отрицательная энергия  $n-s$ -границы в сверхпроводниках II рода должна приводить к нарушению азимутальной симметрии у равновесного состояния. Более того, при достаточно большом радиусе цилиндра в нем возникнет вихревая решетка. Зависимости, представленные на рисунке, полу-



чены в предположении азимутальной симметрии, а возможные асимметричные состояния в данной работе не изучались. Тем не менее, сравнение рис. 3 и рис. 5 позволяет увидеть, как возникает различие между кривыми намагничивания для макроскопических сверхпроводников I и II родов.

Автор выражает глубокую признательность В. И. Марченко и И. Н. Хлюстикovu за многочисленные полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (2000).
2. П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
3. J. Feder, *Sol. St. Comm.* **5**, 299 (1967).
4. В. И. Марченко, Е. Р. Подоляк, *ЖЭТФ* **124**, 172 (2003).
5. W. A. Little and R. D. Parks, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 9 (1962).
6. D. Saint-James, *Phys. Lett.* **15**, 13 (1965).
7. В. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **34**, 113 (1958).
8. A. A. Shablo and I. M. Dmitrenko, *Proceed. 12<sup>th</sup> Int. Conf. on Low Temperature Physics*, Acad. Press of Japan (1971).
9. И. Н. Хлюстикov, *ЖЭТФ* **149**, 378 (2016).