ЖЭТФ, 2018, том 153, вып. 3, стр. 475–482 

# УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ ВИХРЕВЫЕ УЗЛЫ В ЗАХВАЧЕННОМ БОЗЕ-КОНДЕНСАТЕ

***В. П. Рубан*** [*]

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук*
*142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 1 ноября 2017 г.

В гидродинамическом приближении рассмотрена динамика квантового вихревого торического узла $\mathcal{T}_{P,Q}$ и других подобных узлов в атомном бозе-конденсате, находящемся при нуле температуры в режиме Томаса – Ферми. Конденсат имеет пространственно-неоднородный равновесный профиль плотности $\rho(z,r)$ благодаря действию внешнего осесимметричного потенциала. Предполагается, что $z_*=0$, $r_*=1$ является точкой максимума функции $r\rho(z,r)$, причем $\delta(r\rho)\approx-(\alpha-\epsilon)z^2/2-(\alpha+\epsilon)(\delta r)^2/2$ при малых $z$ и $\delta r$. Геометрическая конфигурация узла в цилиндрических координатах определяется комплексной $2\pi P$-периодической функцией $A(\varphi,t)=Z(\varphi,t)+i[R(\varphi,t)-1]$. В случае $|A|\ll 1$ система описывается относительно простыми приближенными уравнениями для перемасштабированных функций $W_n(\varphi)\propto$ $\propto A(2\pi n+\varphi)$ в количестве $P$ штук: $iW_{n,t}=-(W_{n,\varphi\varphi}+\alpha W_n-\epsilon W_n^*)/2-\sum_{j\neq n}1/(W_n^*-W_j^*)$. При $\epsilon=0$ численно найдены для $P=3$ примеры устойчивых решений вида $W_n=\theta_n(\varphi-\gamma t)\exp(-i\omega t)$ с нетривиальной топологией. Кроме того, промоделирована динамика различных нестационарных узлов с $P=3$, причем в ряде случаев замечена тенденция к образованию особенности за конечное время. Для $P=2$ при малых $\epsilon\neq 0$ исследованы вращающиеся вокруг оси $z$ конфигурации вида $W_0-W_1\approx B_0\exp(i\zeta)+\epsilon C(B_0,\alpha)\exp(-i\zeta)+\epsilon D(B_0,\alpha)\exp(3i\zeta)$, где $B_0>0$ — произвольная константа, $\zeta=k_0\varphi-\Omega_0 t+\zeta_0$, $k_0=Q/2$, $\Omega_0=(k_0^2-\alpha)/2-2/B_0^2$. В пространстве параметров $(\alpha,B_0)$ обнаружены широкие области устойчивости таких решений. При этом в неустойчивых зонах возможен возврат вихревого узла к слабо возбужденному состоянию.

**DOI:** 10.7868/S0044451018030136

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач теории бозе-конденсированных атомных газов является описание динамики и статики квантовых вихревых нитей (см. обзор [1] и цитируемую там литературу). Данная проблема сильно усложняется (но также обогащается) тем обстоятельством, что конденсат находится во внешнем потенциале ловушки $V(\mathbf{r})$ и потому движение вихрей происходит на пространственно-неоднородном фоне плотности. На эту тему проведены многочисленные исследования (см., например, [2–18]), но предмет далеко не исчерпан. В частности, динамика топологически нетривиальных вихревых конфигураций до сих пор рассматривалась только при однородной плотности (см. [19–25] и ссылки там). Чтобы частично заполнить имеющийся пробел в теории, в данной работе будут изучены простейшие вихревые узлы в захваченных осесимметричных конденсатах.

[*] E-mail: ruban@itp.ac.ru

Сделаем сначала необходимые предварительные замечания, которые позволят нам достаточно просто вывести удобные для исследования приближенные уравнения движения заузленных вихревых нитей.

В общем случае вихри существенно взаимодействуют с потенциальными возмущениями и с надконденсатными атомами. Но если бозе-конденсат при нуле температуры находится в режиме Томаса – Ферми (ширина кора $\xi$ много меньше характерного размера вихря $R_*$), то потенциальными возбуждениями можно пренебречь и использовать «безэластичное» гидродинамическое приближение (см. примеры в работах [2–4, 7, 12, 26–28]). На формальном уровне это означает, что волновая функция конденсата $\Psi(\mathbf{r},t)=|\Psi|\exp(i\Phi)$ полностью определяется геометрией вихревой нити $\mathbf{R}(\beta,t)$ (где $\beta$ — произвольный продольный параметр, $t$ — время) и соответствует минимуму функционала Гросса – Питаевского (все обозначения — стандартные)

$$\mathcal{H} = \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m_{at}} |\nabla\Psi|^2 + [V(\mathbf{r}) - \mu]|\Psi|^2 + \frac{g}{2}|\Psi|^4 \right] d^3r \quad (1)$$

при условиях наличия вихря заданной формы и сохранении числа атомов. Из требования минимума $\mathcal{H}$ в пределе $\xi \ll R_*$ следуют приближенные условия для поля скорости $\mathbf{v} = (\hbar/m_{at})\nabla\Phi$ в виде

$$\operatorname{div}(\rho(\mathbf{r})\mathbf{v}) = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{v} = \Gamma \oint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})\mathbf{R}_\beta \, d\beta, \quad (2)$$

где $\rho(\mathbf{r}) = m_{at}|\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \approx m_{at}[\mu - V(\mathbf{r})]/g$ — невозмущенная равновесная плотность конденсата в отсутствие вихря, $\Gamma = 2\pi\hbar/m_{at}$ — квант циркуляции скорости.

Для наших целей очень важно, что из гамильтоновой структуры уравнения Гросса – Питаевского, которому подчиняется волновая функция,

$$i\hbar\Psi_t = \delta\mathcal{H}/\delta\Psi^*, \quad (3)$$

при $\xi \ll R_*$ следует вариационное уравнение для движения нити,

$$\Gamma[\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_t]\rho(\mathbf{R}) \approx \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}(\beta). \quad (4)$$

Прямое доказательство этого утверждения для однородного конденсата имеется в недавней работе [26]. Обобщение на неоднородный случай проводится весьма просто и поэтому мы его здесь не приводим. Ранее уравнение (4) было выведено более сложным путем в работе [4]. Именно уравнение (4) послужит основой разрабатываемой далее теории. Оно значительно упростит нам рассмотрение динамики вихревых узлов, поскольку позволит, во-первых, наиболее компактным и контролируемым способом вывести приближенные уравнения движения и, во-вторых, использовать методы гамильтоновой механики при их анализе.

Последовательное применение гидродинамического приближения потребовало бы решения вспомогательных уравнений (2), что привело бы к гамильтониану вихревой линии $\mathcal{H}\{\mathbf{R}(\beta)\}$ в виде двойного контурного интеграла с участием трехмерной матричной функции Грина (см. технические подробности в [28]):

$$\mathcal{H}\{\mathbf{R}(\beta)\} = \frac{\Gamma^2}{2} \oint\oint \mathbf{R}_1' \cdot \hat{G}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)\mathbf{R}_2' \, d\beta_1 \, d\beta_2, \quad (5)$$

где $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_\beta$. Но если конфигурация вихревой нити далека от самопересечений (например, в случае умеренно деформированного вихревого кольца), то применимо приближение локальной индукции,

$$\mathcal{H}\{\mathbf{R}(\beta)\} \approx \mathcal{H}_{LIA} = \frac{\Gamma^2\Lambda}{4\pi} \oint \rho(\mathbf{R})|\mathbf{R}'| \, d\beta, \quad (6)$$

где $\Lambda = \ln(R_*/\xi) \approx \text{const} \gg 1$ — большой логарифм. Подстановка этого выражения в (4) и последующее разрешение относительно временной производной дают уравнение локальной индукции [2–4]:

$$\mathbf{R}_t\big|_{norm} = \frac{\Gamma\Lambda}{4\pi}\Big(\varkappa\mathbf{b} + [\nabla\ln\rho(\mathbf{R}) \times \boldsymbol{\tau}]\Big), \quad (7)$$

где $\varkappa$ — локальная кривизна нити, $\mathbf{b}$ — единичный вектор бинормали, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор.

Как известно, при $\rho = \text{const}$ уравнение локальной индукции преобразованием Хасимото [29] приводится к одномерному фокусирующему нелинейному уравнению Шредингера и поэтому динамика вихревой нити на однородном фоне может быть близка к интегрируемой. Для неоднородных профилей плотности примеры применения этой модели можно найти в работах [14, 15, 30–32].

Но в ряде представляющих интерес случаев приближение локальной индукции оказывается заведомо недостаточным. Например, пусть в системе присутствует замкнутая вихревая нить типа торического узла $\mathcal{T}_{P,Q}$ (где $P$ и $Q$ — взаимно простые натуральные числа), конфигурация которой в цилиндрических координатах определяется двумя $2\pi P$-периодическими по углу $\varphi$ функциями $Z(\varphi, t)$ и $R(\varphi, t)$. Тогда нетрудно оценить, что при разумных значениях параметра $\Lambda = 5.0 \div 9.0$ вклад локальной индукции в динамику нити является хотя и существенным, но все же субдоминантным по сравнению с нелокальным квазидвумерным взаимодействием. Вихревые узлы на однородном фоне плотности ранее интенсивно исследовались (см. [19–25] и ссылки там), тогда как аналитических результатов для узлов в неоднородных конденсатах, по существу, до сих пор нет.

Целью данной работы является исследование динамики простейших вихревых узлов в захваченном ловушкой осесимметричном бозе-конденсате с профилем равновесной плотности $\rho(z, r)$. Мы выведем упрощенные уравнения движения для случая, когда функция $r\rho(z, r)$ имеет квадратичный максимум в точке $z = 0$, $r = R_*$, так что

$$\frac{\delta(r\rho)}{R_*\rho_*} \approx -\left[(\alpha-\epsilon)\frac{z^2}{2R_*^2} + (\alpha+\epsilon)\frac{(\delta r)^2}{2R_*^2}\right], \quad 0 \le |\epsilon| < \alpha,$$

а форма вихревой нити описывается достаточно малыми функциями $u = Z(\varphi, t)/R_*$ и $v = R(\varphi, t)/R_* - 1$. Будут найдены аналитические решения приближенных уравнений, соответствующие стационарно вращающимся вокруг оси $z$ вихревым торическим узлам. В некоторых областях значений параметров

$\alpha$ и $\epsilon$ стационарные решения оказываются устойчивыми, что, по-видимому, должно соответствовать долгоживущим узлам в исходной системе, описываемой уравнением Гросса–Питаевского.

## 2. ВЫВОД УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Далее для простоты формул используются безразмерные единицы, так что $\Gamma/2\pi = 1$, $R_* = 1$, $\rho_* = 1$. Разобьем полный период $2\pi P$ функций $u$ и $v$ по азимутальному углу на $P$ равных частей длиной $2\pi$ и введем обозначения $u_j(\varphi) \equiv u(2\pi j+\varphi)$, $v_j(\varphi) \equiv v(2\pi j + \varphi)$, где индекс $j$ пробегает значения от 0 до $P-1$. Будем предполагать, что выполнены неравенства

$$(u,v) \ll 1, \quad a_{jl} \equiv \sqrt{(u_j-u_l)^2+(v_j-v_l)^2} \gg \xi/R_*.$$

Очевидно, что типичные значения $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{a}_{jl}$ являются величинами одного порядка.

Воспользуемся тем фактом, что векторое уравнение (4) при выбранной нами параметризации вихревой линии эквивалентно неканонической гамильтоновой системе

$$(1+v)\rho(u,1+v)u_t = \frac{\delta H}{\delta v}, \qquad (8)$$

$$-(1+v)\rho(u,1+v)v_t = \frac{\delta H}{\delta u}. \qquad (9)$$

При малых $u$ и $v$ имеем

$$(1+v)\rho(u,1+v) \approx \left[1-(\alpha-\epsilon)\frac{u^2}{2}-(\alpha+\epsilon)\frac{v^2}{2}\right], \qquad (10)$$

поэтому с достаточной точностью в левых частях уравнений (8), (9) можно положить $(1+v)\rho(u,1+v) \approx 1$. Фактически это будет означать пренебрежение членами порядка $\tilde{u}^2/\tilde{a}_{jl} \sim \tilde{u}$ по сравнению с членами порядка $\Lambda\tilde{u}$ в уравнениях движения, как это будет ясно из дальнейшего рассмотрения. В правых же частях мы используем приближенный гамильтониан $H \approx H^{(2)}_{LIA} + H_{2D}$, первое слагаемое которого представляет собой разложенный до второго порядка гамильтониан локальной индукции в терминах функций $u$ и $v$, а второе слагаемое есть гамильтониан взаимодействия строго соосных правильных вихревых колец в окрестности точки максимума функции $r\rho$:

$$H^{(2)}_{LIA} = \frac{\Lambda}{2}\int_0^{2\pi P}\left[\frac{u_\varphi^2}{2}+\frac{v_\varphi^2}{2} - (\alpha-\epsilon)\frac{u^2}{2} - (\alpha+\epsilon)\frac{v^2}{2}\right] d\varphi, \qquad (11)$$

$$H_{2D} \approx \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_j\sum_{l\neq j}\ln\left[(u_j-u_l)^2 + (v_j-v_l)^2\right]^{-1/2} d\varphi, \qquad (12)$$

причем суммирование по индексам $l$ и $j$ в двойной сумме ведется от 0 до $P-1$, за исключением диагональных членов. Здесь следует отметить, что, вообще говоря, вместо логарифма в (12) должна стоять функция Грина $G$, которая является решением уравнения

$$-\partial_z\left[\frac{G_z}{r\rho(z,r)}\right] - \partial_r\left[\frac{G_r}{r\rho(z,r)}\right] = 2\pi\delta(z-z_0)\delta(r-r_0) \qquad (13)$$

и представляет собой создаваемую точечным вихрем (расположенным в точке $(z_0,r_0)$) цилиндрическую функцию тока в полуплоскости $(z,r)$ для бездивергентного поля $\rho\mathbf{v}$. Справедлива формула

$$G(z,r;z_0,r_0) = \sqrt{r\rho(z,r)r_0\rho(z_0,r_0)}\,\tilde{G}(z,r;z_0,r_0),$$

причем функция $\tilde{G}$ удовлетворяет уравнению

$$\left[-\partial_z^2 - \partial_r^2 + \tilde{\kappa}^2(z,r)\right]\tilde{G} = 2\pi\delta(z-z_0)\delta(r-r_0), \qquad (14)$$

где $\tilde{\kappa}^2(z,r) = \sqrt{r\rho}[\partial_z^2+\partial_r^2](1/\sqrt{r\rho})$. В окрестности максимума имеем $\tilde{\kappa}^2 \approx \alpha + \mathcal{O}(u^2,v^2)$, и поэтому с достаточной точностью

$$\tilde{G} \approx K_0\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}\right),$$

где $K_0(\ldots)$ — модифицированная функция Бесселя. Таким образом,

$$G \approx \left[1-\frac{1}{4}(\alpha-\epsilon)(u^2+u_0^2)-\frac{1}{4}(\alpha+\epsilon)(v^2+v_0^2)\right] \times K_0\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}\right). \qquad (15)$$

Заменяя в гамильтониане данное выражение логарифмом, мы пренебрегаем членами порядка $\tilde{u}^2\ln\tilde{u}$ по сравнению с главным вкладом локальной индукции, который имеет порядок $\Lambda\tilde{u}^2$. Ясно также, что мы пренебрегли теми эффектами в гамильтониане взаимодействия, которые связаны с отличием формы нити от идеального соосного кольца.

В результате всех сделанных упрощений получается каноническая гамильтонова система нелинейных уравнений для $u_n$ и $v_n$, способная описать динамику вихревых узлов:

$$u_t = -\frac{\Lambda}{2}\left[v_{\varphi\varphi}+(\alpha+\epsilon)v\right] - \sum_{j\neq n}\frac{v_n-v_j}{(u_n-u_j)^2+(v_n-v_j)^2}, \qquad (16)$$

$$-v_t = -\frac{\Lambda}{2}\left[u_{\varphi\varphi} + (\alpha - \epsilon)u\right] - \\ - \sum_{j\neq n} \frac{u_n - u_j}{(u_n - u_j)^2 + (v_n - v_j)^2}. \quad (17)$$

Перемасштабируя здесь время $\Lambda t_{old} = t_{new}$ и вводя комплекснозначные функции $W_n = \sqrt{\Lambda}(u_n + iv_n)$, представим нашу систему в более компактном виде,

$$iW_{n,t} = -\frac{1}{2}(W_{n,\varphi\varphi} + \alpha W_n - \epsilon W_n^*) - \\ - \sum_{j\neq n} \frac{1}{W_n^* - W_j^*}, \quad (18)$$

с циклической перестановкой в граничных условиях $W_0(2\pi) = W_1(0)$, $W_1(2\pi) = W_2(0), \ldots, W_{P-1}(2\pi) = W_0(0)$. Отметим попутно, что эта же система, но с другими граничными условиями, когда перестановка содержит несколько циклов, способна описать динамику нескольких вихревых нитей, в том числе зацепленных и заузленных.

Заметим еще, что сумма $w = \sum_n W_n$ удовлетворяет линейному уравнению

$$iw_t = -\frac{1}{2}(w_{\varphi\varphi} + \alpha w - \epsilon w^*) \quad (19)$$

с периодическими граничными условиями, которое легко решается и имеет собственные частоты

$$\omega_m = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(m^2 - \alpha + |\epsilon|) \times \\ \times \sqrt{(m^2 - \alpha + \epsilon)(m^2 - \alpha - \epsilon)}, \quad (20)$$

где $m$ — целое число. Учет следующих поправок по амплитудам привел бы нас к значительно более громоздким уравнениям движения, чем (18). Во многих случаях такой учет не нужен. Исключение составляют возможные параметрические резонансы типа $\omega_0 = -2\omega_m$, для которых требуются определенные соотношения между $\alpha$ и $\epsilon$ (см. пример в работе [32]). Мы для простоты здесь предполагаем нерезонансный случай.

## 3. РЕШЕНИЯ ПРИ $\epsilon = 0$

От пространственной неоднородности конденсата в уравнения (18) вошли только коэффициенты $\alpha$ и $\epsilon$. Существенное влияние на динамику они оказывают, лишь когда $\epsilon \neq 0$. Если же $\epsilon = 0$, то простым изменением фазы $W_n = \Theta_n \exp(i\alpha t/2)$ члены с $\alpha$ убираются из системы и тогда для $\Theta_n(\varphi, t)$ получаются известные уравнения, которые используются при моделировании длинноволновой динамики слабо искривленных, почти параллельных вихревых нитей в однородной идеальной жидкости (см., например, [33–36] и ссылки там):

$$i\Theta_{n,t} = -\frac{1}{2}\Theta_{n,\varphi\varphi} - \sum_{j\neq n} \frac{1}{\Theta_n^* - \Theta_j^*}. \quad (21)$$

В этом случае, помимо соответствующего гамильтониана

$$H_0 = \int_0^{2\pi} \left( \sum_n |\Theta_{n,\varphi}|^2/2 - \\ - \sum_n \sum_{l\neq n} \ln|\Theta_n - \Theta_l| \right) d\varphi \quad (22)$$

и углового момента (относительно оси $z$)

$$M = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \sum_n (\Theta_n^*\Theta_{n,\varphi} - \Theta_n\Theta_{n,\varphi}^*)\, d\varphi, \quad (23)$$

в системе имеются дополнительные интегралы движения

$$N_\sigma = \int_0^{2\pi} \sum_n |\Theta_n - \sigma|^2\, d\varphi. \quad (24)$$

Следовательно, существуют устойчивые (в рамках рассматриваемой приближенной модели) решения вида $\Theta_n = \sigma + \theta_n(\varphi - \gamma t)\exp(i\lambda t)$, которые приводят к минимуму ограниченного снизу функционала $\tilde{H}_0 = H_0 + \lambda N_\sigma - \gamma M$ с некоторыми константами $\lambda$, $\sigma$ и $\gamma$ (без ограничения общности далее будем полагать $\sigma = 0$). В частности, торические узлы $\mathcal{T}_{P,Q}$, когда

$$\theta_n = c\exp\left(i\frac{2\pi n Q}{P} + i\frac{Q}{P}\varphi\right), \quad (25)$$

заведомо устойчивы при $P \leq 6$, что следует из классического результата об устойчивости правильного $P$-угольника точечных вихрей на плоскости (см. обсуждение в [37] и ссылки там).

Таким образом, получен интересный теоретический результат: при определенных параметрах внешнего потенциала в конденсате могут существовать долгоживущие вихревые узлы. Так, в гармонической анизотропной ловушке, где приведенный к безразмерному виду профиль плотности конденсата в режиме Томаса–Ферми дается выражением

$$\rho = \frac{3}{2} - \frac{r^2 + \alpha_\parallel z^2}{2},$$

коэффициенты системы (18) равны

$$\alpha = \frac{3 + \alpha_\parallel}{2}, \quad \epsilon = \frac{3 - \alpha_\parallel}{2}.$$

Чтобы вихревой узел был максимально устойчивым, необходимо использовать параметр анизотропии $\alpha_\parallel \approx 3$.

Численное нахождение примеров таких «стационарных» решений не составляет труда и может быть эффективно выполнено методом градиентного спуска, т. е. путем решения вспомогательной эволюционной системы

$$f_{n,\tau} = -\frac{\delta \tilde{H}_0}{\delta f_n^*} = \frac{1}{2} f_{n,\varphi\varphi} - i\gamma f_{n,\varphi} - \lambda f_n + \\ + \sum_{j\neq n} \frac{1}{f_n^* - f_j^*}. \quad (26)$$

Несколько нетривиальных примеров для $P = 3$ показаны на рис. 1 (при выборе $\Lambda = 6.25$; линия на рисунке тем толще, чем больше локальное значение координаты $z$).

Однако было бы ошибкой думать, что, взяв произвольные начальные данные $f_n(\varphi, \tau = 0)$, мы сможем проинтегрировать эти уравнения по «времени» до сколь угодно больших $\tau$ с сохранением начальной топологии узла и обязательно получим в пределе $\tau \to +\infty$ некоторые гладкие функции $f_n \to \theta_n$. Напротив, вполне может случиться, что за конечное время в системе (26) произойдет образование сингулярности, когда $\delta(\tau) \equiv \min_\varphi |f_j(\varphi,\tau) - f_l(\varphi,\tau)| \to 0$ при $\tau \to \tau_{sing}$. Численная дискретизация кривых приведет к тому, что в некоторой точке нить пересечет сама себя, и топология узла при этом изменится. Другими словами, дисперсионная тенденция к сглаживанию локально «перевитых» нитей может возобладать над их взаимным отталкиванием. Действительно, когда характерный масштаб по $\varphi$ становится порядка $\delta$, то дисперсионное слагаемое $f_{\varphi\varphi}$ имеет тот же порядок $1/\delta$, что и нелинейный член. Поэтому вопрос о том, всегда ли имеется стационарное решение при заданной топологии узла, остается открытым.

И тем не менее, во многих случаях $\delta(\tau)$ в нуль не обращается, топология начального узла сохраняется и гладкие решения благополучно находятся (иногда, правда, релаксация к минимуму $\tilde{H}_0$ происходит довольно медленно).

Следует еще упомянуть принципиально возможный случай $\alpha < 0$, когда функция $r\rho(z, r)$ имеет в точке $z = 0$, $r = 1$ не максимум, а минимум. В этом случае при $\epsilon \neq 0$ интегралы $N_\sigma$ отсутствуют, но зато функционал $H - \gamma M$ сам по себе оказывается ограниченным снизу. Поэтому существуют стационарно вращающиеся вокруг оси $z$ устойчивые узлы вида $W_n = F_n(\varphi - \gamma t)$.

Другой заслуживающий внимания результат касается численного моделирования уравнений движения. Оказывается, что тенденция к образованию особенности за конечное время может проявляться и в самой консервативной системе (21), а не только в градиентной системе (26). Соответствующий пример приведен на рис. 2. В рамках уравнения Гросса–Питаевского подобное резкое сближение вихревых линий обычно приводит к их перезамыканию. Разумеется, наши упрощенные уравнения теряют свою буквальную применимость вблизи сингулярности, но начальную стадию ее формирования они отражают верно. Выяснение условий коллапса и его связи с топологией вихря представляет интересную задачу.

## 4. СЛУЧАЙ $P = 2$

Рассмотрим теперь более подробно простейшие конфигурации с $P = 2$. Вводя сумму $w = W_0 + W_1$ и разность $W = W_0 - W_1$, получим два «незацепленных» уравнения: уравнение (19) и

$$iW_t = -\frac{1}{2}(W_{\varphi\varphi} + \alpha W - \epsilon W^*) - \frac{2}{W^*}, \quad (27)$$

причем последнее — с антипериодическими граничными условиями. Сосредоточим наше внимание на этом уравнении. В случае $\epsilon = 0$ имеются точные решения вида

$$W = B_0 \exp(ik_0\varphi - i\Omega_0 t + i\zeta_0), \quad (28)$$

зависящие от действительного параметра $B_0 > 0$, где

$$\Omega_0 = \frac{1}{2}(k_0^2 - \alpha) - \frac{2}{B_0^2}, \quad (29)$$

а $k_0$ должно быть полуцелым числом $Q/2$ (при $k_0 = 3/2$ решение соответствует «трилистнику» $\mathcal{T}_{2,3}$). Нетрудно проанализировать малые возмущения и убедиться, что данное решение устойчиво при всех $B_0$ и $\alpha$.

Более сложно обстоит дело, когда $\epsilon \neq 0$. В этом случае также имеются стационарные решения. При малых $\epsilon$ с точностью до первого порядка легко получить, что

$$W \approx B_0 \exp(i\zeta) + \epsilon C \exp(-i\zeta) + \epsilon D \exp(3i\zeta), \quad (30)$$

где $\zeta = k_0\varphi - \Omega_0 t + \zeta_0$, а коэффициенты $C$ и $D$ удовлетворяют линейной системе уравнений:

$$-\Omega_0 C = \frac{1}{2}(k_0^2 - \alpha)C + \frac{2}{B_0^2}D + \frac{B_0}{2}, \quad (31)$$

$$3\Omega_0 D = \frac{1}{2}(9k_0^2 - \alpha)D + \frac{2}{B_0^2}C. \quad (32)$$

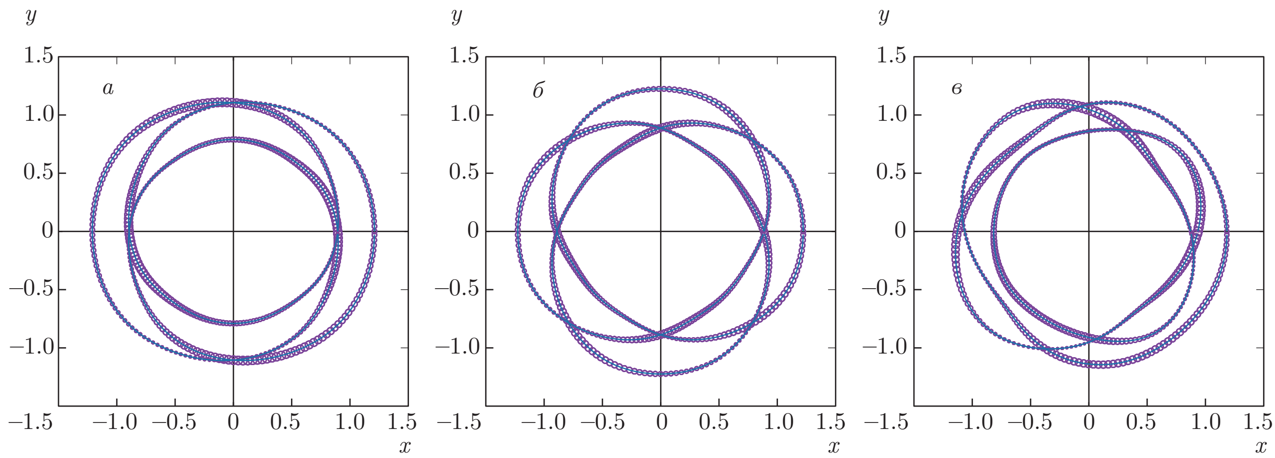


**Рис. 1.** Примеры устойчивых узлов при $P = 3$, найденных путем решения уравнений (26) с различными начальными условиями: *а*) $f(\varphi,0) = 0.6[i\cos(2\varphi/3) - 0.5\sin(4\varphi/3)]$ — узел «восьмерка» (figure-eight knot), *б*) $f(\varphi,0) = 0.6[i\cos(4\varphi/3) - 0.5\sin(8\varphi/3)]$, *в*) $f(\varphi,0) = 0.6i\{\cos(\varphi/3) + \exp(11i\varphi/3)[1+\cos(2(\varphi-\pi)/3)]^4/16\}$ — так называемый «бабий узел» (granny knot). В случаях *а*) и *б*) параметры $\lambda = 4.0$, $\gamma = 0$. В случае *в*) $\lambda - \gamma^2/2 = 4.5$, $\gamma = 1.5$

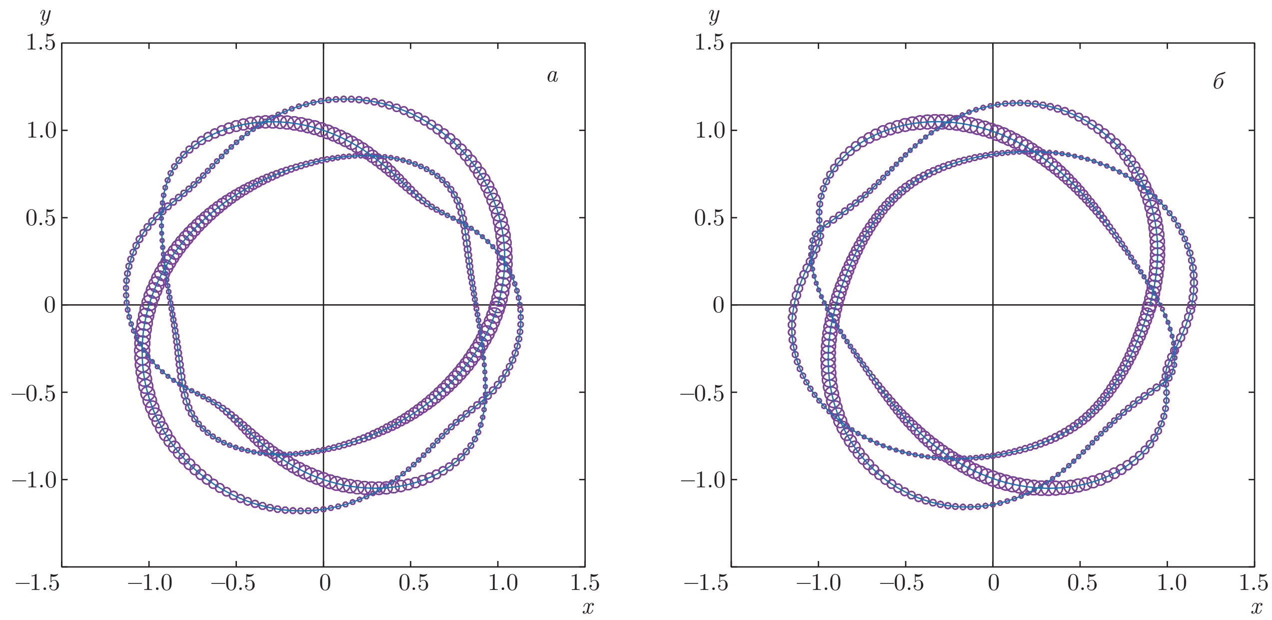


**Рис. 2.** Тенденция к формированию особенности за конечное время: *а*) начальная конфигурация узла, полученная путем интегрирования системы (26) с параметрами $\lambda - \gamma^2/2 = 4.0$, $\gamma = 0.7$ до значения $\tau_{max} = 7.0$, с начальными условиями $f(\varphi,0) = 0.6[\exp(2i\varphi/3) + \exp(4i\varphi/3) + \exp(8i\varphi/3)]$; *б*) узел при $t = 2.3$ со сблизившимися участками нити (показан без учета фазового множителя $\exp(i\alpha t/2)$)

Решение этой системы имеет вид

$$D = \frac{B_0}{J}, \quad C = -\frac{B_0^3}{2J}\left(3k_0^2 + \alpha + \frac{6}{B_0^2}\right), \tag{33}$$

$$J = -\frac{4}{B_0^2} + B_0^2\left(k_0^2 - \alpha - \frac{2}{B_0^2}\right)\left(3k_0^2 + \alpha + \frac{6}{B_0^2}\right). \tag{34}$$

Разница по сравнению со случаем $\epsilon = 0$ состоит в том, что при некоторых соотношениях между $B_0$ и $\alpha$ в рассматриваемой динамической системе оказываются возможными параметрические резонансы, приводящие к неустойчивостям. Другими словами, при наличии малых случайных возмущений в начальных данных на фоне стационарного реше-

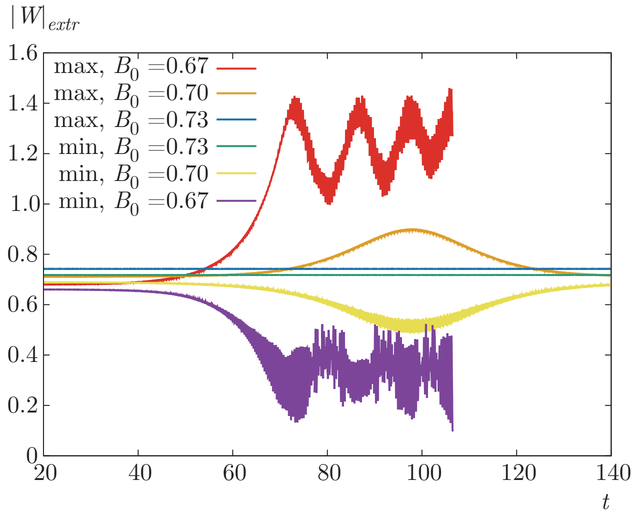


**Рис. 3.** (В цвете онлайн) Примеры динамики экстремальных отклонений для устойчивых и неустойчивых решений (30)

ния возможны три сценария последующей динамики наибольшего и наименьшего значений $|W|$. Если решение (30) устойчиво, то $|W|$ не испытывает заметных изменений. Если же (30) неустойчиво, то отклонения $|W|$ сначала растут экспоненциально, а затем либо отклонения возвращаются к исходным малым значениям, либо система переходит в квазитурбулентный режим. Для иллюстрации сказанного на рис. 3 приведены примеры найденных численно временных зависимостей экстремальных значений $\max_\varphi|W(\varphi,t)|$ и $\min_\varphi|W(\varphi,t)|$ при $\alpha = 2.8$, $\epsilon = 0.2$ для нескольких $B_0$. На рис. 4 показана структура решения при возвратной динамике неустойчивой моды.

Если в каждом таком численном эксперименте на достаточно большом интервале времени фиксировать глобально достигнутые экстремальные значения величины $|W|/B_0$, а затем построить их зависимость от $B_0$, то получится структура устойчивых и неустойчивых зон при заданных $\alpha$ и $\epsilon$. Соответствующий пример приведен на рис. 5. Существенно, что при достаточно малых $\epsilon$ зоны устойчивости доминируют.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе впервые предложены достаточно простые и удобные для аналитических исследований и численного моделирования гамильтоновы уравнения, описывающие в некотором пределе динамику заузленных квантовых вихрей

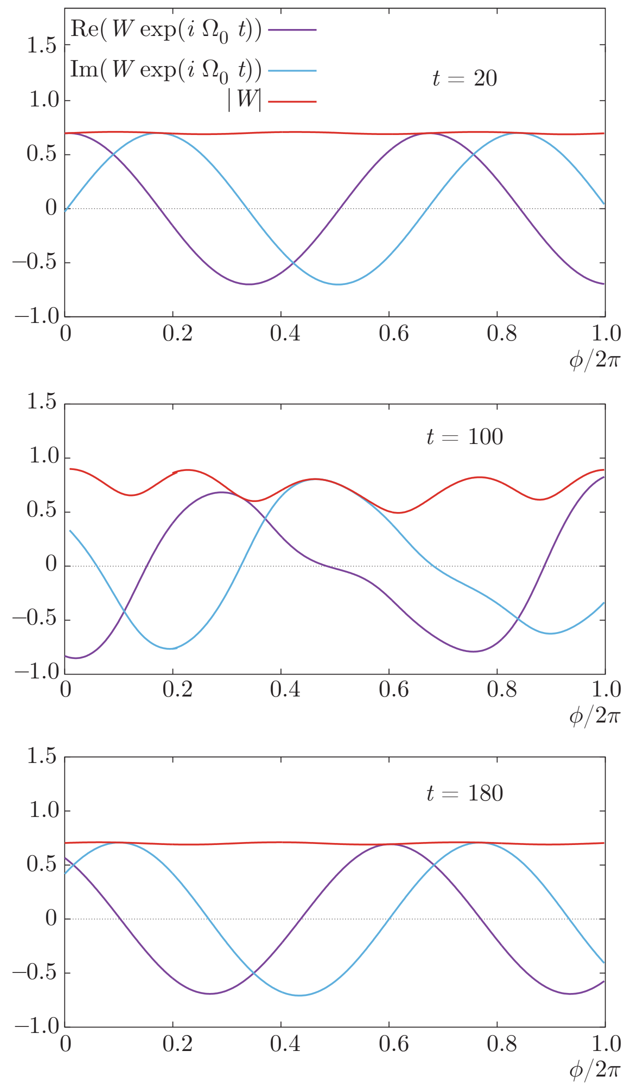


**Рис. 4.** (В цвете онлайн) Рост и последующее затухание неустойчивой моды при $\alpha = 2.8$, $\epsilon = 0.2$, $B_0 = 0.7$

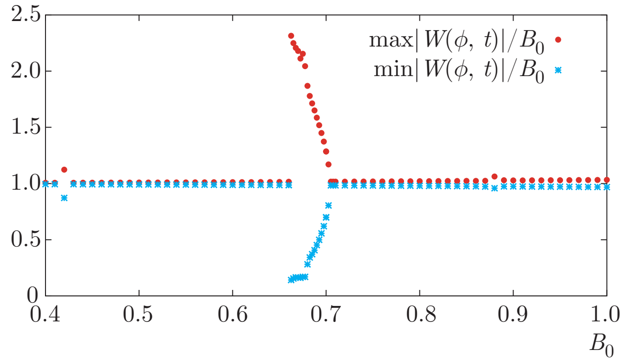


**Рис. 5.** (В цвете онлайн) Структура устойчивых и неустойчивых зон при $\alpha = 2.8$, $\epsilon = 0.2$. Видна одна сильно неустойчивая зона вблизи $B_0 = 0.66$, а также две слабо неустойчивых зоны вблизи $B_0 = 0.42$ и $B_0 = 0.88$

в пространственно-неоднородных осесимметричных бозе-конденсатах в режиме Томаса – Ферми при нуле температуры. В численных экспериментах в ряде случаев наблюдалась тенденция к формированию особенности за конечное время в узлах со сложной топологией. В рамках предложенной модели при определенных значениях параметров найдены устойчивые стационарные решения с различной топологией, аналогов которым в однородных конденсатах нет. Обнаружено, что в общем случае стационарные решения в виде торических узлов могут быть параметрически неустойчивыми, но зоны неустойчивости являются относительно узкими при малой анизотропии максимума функции $r\rho(z,r)$, в области которого наблюдается вся динамика.

Теория построена при большом параметре $\Lambda$. В действительности, однако, он никогда не бывает очень большим. Поэтому представляется желательным сравнить предсказания упрощенной модели с результатами прямого численного моделирования уравнения Гросса – Питаевского при умеренных $\Lambda$.

## ЛИТЕРАТУРА


**1**. A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).

**2**. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **62**, 063617 (2000).

**3**. A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, J. Phys.: Condens. Matter **13**, R135 (2001).

**4**. V. P. Ruban, Phys. Rev. E **64**, 036305 (2001).

**5**. A. Aftalion and T. Riviere, Phys. Rev. A **64**, 043611 (2001).

**6**. J. Garcia-Ripoll and V. Perez-Garcia, Phys. Rev. A **64**, 053611 (2001).

**7**. J. R. Anglin, Phys. Rev. A **65**, 063611 (2002).

**8**. A. Aftalion and R. L. Jerrard, Phys. Rev. A **66**, 023611 (2002).

**9**. P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **89**, 200403 (2002).

**10**. A. Aftalion and I. Danaila, Phys. Rev. A **68**, 023603 (2003).

**11**. A. Aftalion and I. Danaila, Phys. Rev. A **69**, 033608 (2004).

**12**. D. E. Sheehy and L. Radzihovsky, Phys. Rev. A **70**, 063620 (2004).

**13**. I. Danaila, Phys. Rev. A **72**, 013605 (2005).

**14**. A. Fetter, Phys. Rev. A **69**, 043617 (2004).

**15**. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, Phys. Rev. A **74**, 041603 (2006).

**16**. S. Serafini, M. Barbiero, M. Debortoli, S. Donadello, F. Larcher, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, Phys. Rev. Lett. **115**, 170402 (2015).

**17**. S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaime, R. N. Bisset, C. F. Barenghi, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, Phys. Rev. X **7**, 021031 (2017).

**18**. R. N. Bisset, S. Serafini, E. Iseni, M. Barbiero, T. Bienaime, G. Lamporesi, G. Ferrari, and F. Dalfovo, Phys. Rev. A **96**, 053605 (2017).

**19**. R. L. Ricca, D. C. Samuels, and C. F. Barenghi, J. Fluid Mech. **391**, 29 (1999).

**20**. F. Maggioni, S. Alamri, C. F. Barenghi, and R. L. Ricca, Phys. Rev. E **82**, 026309 (2010).

**21**. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, Phys. Rev. E **85**, 036306 (2012).

**22**. D. Kleckner and W. T. M. Irvine, Nature Phys. **9**, 253 (2013).

**23**. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, J. Phys.: Conf. Ser. **544**, 012022 (2014).

**24**. P. Clark di Leoni, P. D. Mininni, and M. E. Brachet, Phys. Rev. A **94**, 043605 (2016).

**25**. D. Kleckner, L. H. Kauffman, and W. T. M. Irvine, Nature Phys. **12**, 650 (2016).

**26**. M. D. Bustamante and S. Nazarenko, Phys. Rev. E **92**, 053019 (2015).

**27**. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **105**, 449 (2017).

**28**. В. П. Рубан, ЖЭТФ **151**, 1092 (2017).

**29**. H. Hasimoto, J. Fluid Mech. **51**, 477 (1972).

**30**. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **103**, 878 (2016).

**31**. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **104**, 875 (2016).

**32**. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **106**, 208 (2017).

**33**. В. Е. Захаров, УФН **155**, 529 (1988).

**34**. R. Klein, A. J. Majda, and K. Damodaran, J. Fluid Mech. **288**, 201 (1995).

**35**. C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, Comm. Math. Phys. **243**, 471 (2003).

**36**. N. Hietala, R. Hanninen, H. Salman, and C. F. Barenghi, Phys. Rev. Fluids **1**, 084501 (2016).

**37**. H. Aref, J. Fluid Mech. **290**, 167 (1995).