

# КУЛОНОВСКИЙ ЛОГАРИФМ В НЕИДЕАЛЬНОЙ И ВЫРОЖДЕННОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. Филиппов<sup>a\*</sup>, А. Н. Старостин<sup>a,b</sup>, В. К. Грязнов<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
108840, Троицк, Москва, Россия

<sup>b</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>c</sup> Институт проблем химической физики Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

<sup>d</sup> Томский государственный университет  
634050, Томск, Россия

Поступила в редакцию 13 октября 2017 г.

Рассмотрены различные методы определения кулоновского логарифма в кинетической теории переноса и различные варианты выбора постоянной экранирования плазмы с учетом или без учета вклада ионной компоненты и граничного значения волнового вектора электронов. Для учета корреляции ионов использовалось интегральное уравнение Орнштейна–Цернике в гиперцепном приближении. Установлено, что в невырожденной плазме влияние корреляции ионов оказывается малой, а в вырожденной плазме их учет необходим, если экранирование определяется только электронной компонентой. Проведено сравнение рассчитанных значений удельной электропроводности плазмы водорода с экспериментально измеренными в мегабарной области давлений. Показано, что значения кулоновского логарифма, намного меньше единицы, действительно могут иметь место. Для более точного определения кулоновского логарифма предложено проведение специальных экспериментов в магнитном поле при экстремально высоких давлениях, когда рассеяние электронов на ионах становится преобладающим.

DOI: 10.7868/S0044451018030173

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В физике плазмы и астрофизике дальнедействующий характер кулоновского или гравитационного взаимодействия приводит к появлению различного рода расходящихся интегралов. Например, это приводит к расходимости транспортных сечений столкновения электронов и ионов с заряженными частицами, причем расходимость имеет место как при малых значениях прицельного параметра, так и при больших. Ландау в работе [1] при рассмотрении кинетического уравнения для электронов в случае преобладания кулоновского взаимодействия для устранения расходимостей ввел ограничения для прицельного параметра, что привело к появлению в се-

чении рассеяния электронов на ионах кулоновского логарифма:

$$\Lambda = \ln \left( \frac{R_D}{r_0} \right). \quad (1)$$

Здесь  $R_D$  — наибольшее значение прицельного параметра, положенное в работе [1] равным дебаевскому радиусу экранирования:

$$R_D = k_D^{-1}, \quad k_D^2 = k_{De}^2 + k_{Di}^2, \quad (2)$$

$$k_{De}^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{T_e}, \quad k_{Di}^2 = \frac{4\pi z_i^2 e^2 n_i}{T_i},$$

$r_0$  — наименьший прицельный параметр, соответствующий рассеянию электрона (иона) с тепловой энергией на  $90^\circ$  (эта величина в физике плазмы обычно называется радиусом Ландау) и который для случая рассеяния электрона на ионе определяется выражением

$$r_0 = \frac{e^2 z_i}{T_e}, \quad (3)$$

\* E-mail: fav@triniti.ru

$e$  — элементарный заряд,  $z_i$  — кратность заряда иона,  $T_e, T_i$  — температуры электронов и ионов в энергетических единицах,  $n_e, n_i$  — концентрации электронов и ионов соответственно.

Спитцер в работе [2] для рассеяния частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, ввел близкую к кулоновскому логарифму величину, равную отношению прямого угла ( $\pi/2$ ) к углу рассеяния при прицельном параметре, равном среднему расстоянию между частицами. Далее в работах [3,4] Спитцер с соавторами использует для кулоновского логарифма определение Ландау с полным дебаевским радиусом плазмы, а в монографии [5] для определения внешнего радиуса обрезания уже предлагает использовать только электронный дебаевский радиус.

В работе [6] Темко вывел уравнение Фоккера–Планка для плазмы, исходя из цепочки уравнений Боголюбова. В рамках этого подхода экранирование учитывалось естественным образом, а для обрезания на малых прицельных параметрах использовался радиус Ландау. Для кулоновского логарифма в работе [6] было получено выражение

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{R_D^2}{r_0^2} \right), \quad (4)$$

которое, в отличие от (1), не дает отрицательных значений кулоновского логарифма.

Далее кулоновский логарифм исследовался во многих работах (см., например, [7–17] и цитируемую в них литературу), и теория рассеяния в идеальной плазме достигла такого уровня развития, что позволяла уточнить значение числового множителя (разного для разных процессов переноса) под логарифмом в кулоновском логарифме (см., например, работу [7]). Если Спитцер полагал, что точность теории рассеяния с кулоновским логарифмом достаточна только при  $\Lambda \gtrsim 10$ , то в работах [9, 10] (см. также [11]) была показана достаточная точность до  $\Lambda \approx 2$ . Далее в литературе стали рассматриваться и значения  $\Lambda < 1$  [11–16]. В работе [15] исследовался процесс выравнивания температуры электронов и ионов в плотной плазме на основе квантовомеханического метода  $T$ -матриц. Поскольку данный метод требует большого объема вычислений, было предложено использовать сечения рассеяния на основе подхода Ландау–Спитцера с кулоновским логарифмом:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{b_{max}^2}{r_0^2 + \lambda_e^2/8\pi} \right). \quad (5)$$

Здесь  $b_{max}$  — максимальное прицельное расстояние, определенное соотношением

$$b_{max} = R_{De} \exp \left( \frac{a_1 + a_2 \ln \Lambda_0}{1 + \Lambda_0^{a_3}} \right),$$

параметры  $a_1, a_2$  и  $a_3$  определяются условием наилучшего приближения данных расчетов методом  $T$ -матриц и в [15] получены следующие их значения:  $a_1 = 1.65, a_2 = 0.40, a_3 = 0.64, R_{De} = k_{De}^{-1}$  — электронный дебаевский радиус,  $\Lambda_0$  — кулоновский логарифм, определенный выражением

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{R_{De}^2}{r_0^2 + \lambda_e^2/8\pi} \right), \quad (6)$$

$\lambda_e$  — длина волны де Бройля электронов,

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_e T}}, \quad (7)$$

$m_e$  — масса электрона. В работе [15] отмечается, что в невырожденной плазме  $n_e \lambda_e^3 < 0.1$  ( $n_e$  — концентрация электронов) выражение (5) дает скорости потери энергии с точностью 15% при  $\Lambda_0 > 2 \cdot 10^{-2}$ , а при  $\Lambda_0 > 5 \cdot 10^{-3}$  ошибка не превышает 30%. Для больших значений  $\Lambda_0$  точность была значительно выше. Отметим, что для определения длины волны де Бройля в вырожденной плазме в работе [9] (как и в нашей работе [18]) предлагалось использовать вместо температуры электронов энергию Ферми. Выражение (5) дает значения кулоновского логарифма, близкие и немного меньшие единицы, т. е. оно «исправляет» малые значения  $\Lambda_0 \ll 1$  в области слабой неидеальности плазмы.

В работе [18] при определении электропроводности плотной плазмы водорода нами также использовался подход на основе кулоновского логарифма, при этом его значения в области сильной ионизации плазмы оказались заметно меньше единицы, что вызывает определенные вопросы по поводу применимости используемого подхода для описания переноса электронов в этой области параметров. Поэтому настоящая работа посвящена более подробному рассмотрению данного вопроса. Отметим, что использование приближенного подхода на основе кулоновского логарифма вызвано тем, что точные расчеты сечения рассеяния требуют очень много времени (что отмечалось выше относительно метода  $T$ -матриц).

При высоких давлениях происходит так называемая ионизация давлением [19] и любое вещество становится плазмой, в общем случае неидеальной и

вырожденной. Определение транспортных свойств электронов в неидеальной плазме сегодня является одной из нерешенных проблем кинетической теории. Для решения этой проблемы привлекаются приближенные методы, среди которых подход на основе борновского приближения с последующей корректировкой результатов путем введения кулоновского логарифма является одним из самых широко используемых. Нужно отметить, что рассеяние в неидеальной плазме является многочастичным, а точность современных экспериментов не позволяет определить даже точный порядок величины кулоновского логарифма. Поэтому тщательный анализ теоретических методов определения кулоновского логарифма представляет большой интерес.

## 2. ТРАНСПОРТНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА ИОНАХ

Займан в работах [20–24] ввел и активно использовал понятие «атома» — иона с экранирующим электронным облаком — для описания транспортных свойств электронов в металлах. При этом рассеяние электрона происходит на таком «атоме» с псевдопотенциалом, равным экранированному дебаевскому, а взаимодействие «атомов» друг с другом описывается этим же потенциалом. В работах [20–24] полагалось, что в экранировании участвуют только электроны; хаотичность или упорядоченность расположения «атомов», далее просто ионов, учитывается структурным фактором. Эта теория была весьма успешной при описании транспортных свойств электронов в различных металлах и их сплавах, поэтому в настоящей работе нами используется этот же подход.

Экранирование электронами в плазме в общем случае определяется выражением [25, 26]

$$k_{De}^2 = \frac{8\pi e^2}{T} \frac{1}{\lambda_e^3} \mathcal{F}_{-1/2}(\eta_e), \quad (8)$$

где  $T$  — температура электронов,  $\eta_e = \mu_e/T$ ,  $\mu_e$  — химический потенциал электронного газа,  $\mathcal{F}_{-1/2}(\eta_e)$  — интеграл Ферми–Дирака, определенный соотношением [27]

$$\mathcal{F}_k(\eta_e) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty \frac{x^k dx}{\exp(x - \eta_e) + 1}, \quad (9)$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция. Концентрация электронов равна

$$n_e = \frac{2}{\lambda_e^3} \mathcal{F}_{1/2}(\eta_e). \quad (10)$$

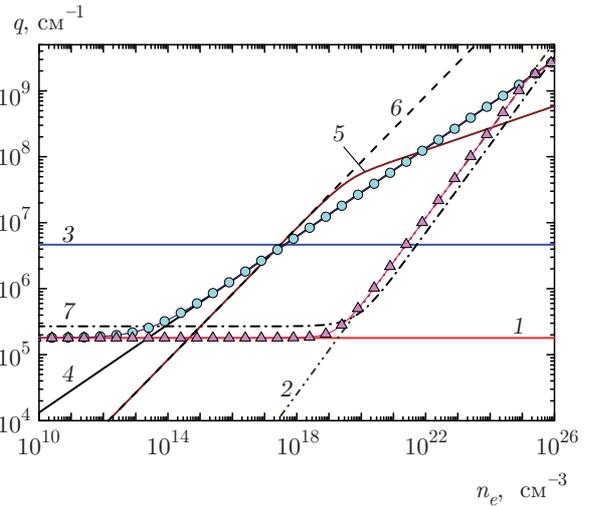


Рис. 1. Зависимости от концентрации электронов основных величин плазмы, имеющих размерность обратной длины и определяющих граничное значение волнового вектора  $q_m$  при  $T = 300$  К,  $z_i = 1$ . Кривая 1 — обратный радиус Ландау (3), 2 — обратный радиус Ландау с энергией Ферми вместо температуры, 3–6 —  $q_m = 2/\lambda_e$  (3),  $2k_F$  (4),  $k_{De}$  (5),  $k_{Di}$  (6), 7 — обратный радиус Ландау со средней кинетической энергией ( $\langle \varepsilon_e \rangle$ ),  $\Delta$  —  $q_m = q_{mS}$  (27),  $\circ$  —  $q_m = q_{mZ}$  (28)

Комбинируя (8) и (10), находим

$$k_{De}^2 = k_{De,0}^2 \frac{\mathcal{F}_{-1/2}(\eta_e)}{\mathcal{F}_{1/2}(\eta_e)}, \quad (11)$$

где  $k_{De,0}$  — электронная постоянная экранирования в невырожденном случае:

$$k_{De,0}^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{T}. \quad (12)$$

Отметим, что при комнатной температуре и  $n_e \lesssim 10^{18} \text{ см}^{-3}$  электронная постоянная экранирования практически не отличается от (12) (см. рис. 1), а в сильно вырожденном случае

$$k_{De}^2 = \frac{m_e e^2}{\pi^2 \hbar^2} \left( \frac{3n_e}{\pi} \right)^{1/3}. \quad (13)$$

В расчетах по заданной концентрации электронов  $n_e$  из (10) находилось значение приведенного химического потенциала  $\eta_e$ , затем из (8) или (11) находилась постоянная экранирования  $k_{De}$ . Интегралы Ферми–Дирака вычислялись согласно [27]. Здесь также приведем выражение для средней кинетической энергии электронов:

$$\langle \varepsilon_e \rangle = \frac{3}{2} T \frac{\mathcal{F}_{3/2}(\eta_e)}{\mathcal{F}_{1/2}(\eta_e)}. \quad (14)$$

В невырожденной плазме  $\langle \varepsilon_e \rangle = (3/2)T$ , а в сильно вырожденной  $\langle \varepsilon_e \rangle = (3/5)\varepsilon_F$ , где  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми:

$$\varepsilon_F = (3\pi^2 n_e)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e}. \quad (15)$$

Транспортное сечение рассеяния электронов на ионах с учетом межйонной корреляции определяется выражением [28]

$$Q_{ei}(\varepsilon_e) = \frac{\pi z_i^2 e^4}{\varepsilon_e^2} \Lambda_{ei}, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_e$  — энергия электрона,  $\Lambda_{ei}$  — кулоновский логарифм:

$$\Lambda_{ei} = \int_0^{q_m} \frac{k^3}{(k^2 + k_s^2)^2} S_i(k) dk, \quad (17)$$

$S_i(k)$  — структурный фактор, описывающий корреляцию ионов с потенциалом взаимодействия

$$U_{ii}(R) = \frac{z_i^2 e^2}{R} \exp(-k_s R), \quad (18)$$

$R$  — расстояние между ионами,  $k_s$  — постоянная экранирования,  $q_m$  — максимальное значение волнового вектора (определяется максимальным значением импульса электрона, передаваемого иону в столкновении). В работе [20] полагалось, что  $q_m = 2k_F$  (для электрона на поверхности Ферми максимальное значение передаваемого импульса равно  $2\hbar k_F = 2\sqrt{2m_e \varepsilon_F}$ ), где  $k_F$  — длина волны электрона на поверхности Ферми:

$$k_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3}. \quad (19)$$

В работе [18] полагалось, что

$$q_m = \min \{ E_T / z_i e^2, 2 / \lambda_e \}, \quad (20)$$

где  $E_T$  в невырожденном случае полагалась равной температуре (в энергетических единицах), а в вырожденном — энергии Ферми, длина волны де Бройля в этих случаях также определялась с использованием температуры или энергии Ферми.

В разреженной плазме, когда можно пренебречь ион-ионной корреляцией,  $S_i \approx 1$ . В этом случае из (17) находим (см. [26, 29]):

$$\Lambda_{ei} = \frac{1}{2} \left[ \ln(1 + \chi_i) - \frac{\chi_i}{1 + \chi_i} \right], \quad (21)$$

где  $\chi_i = (q_m / k_s)^2$ . Со структурным фактором ионов в дебаевском приближении ( $z_i n_i = n_e$ ) [30]

$$S_{iD} = 1 - \frac{e^2 z_i^2}{T} \frac{4\pi n_i}{k^2 + k_s^2} \quad (22)$$

из (17) находим [18]:

$$\Lambda_{ei} = \frac{1}{2} \left[ \ln(1 + \chi_i) - \frac{\chi_i}{1 + \chi_i} - \frac{1}{2} \frac{z_i}{k_s^2} \frac{4\pi n_e e^2}{T} \frac{\chi_i^2}{(1 + \chi_i)^2} \right]. \quad (23)$$

Для определения структурного фактора ионов в настоящей работе численно решалось уравнение Орнштейна – Цернике (ОЦ) [31–33]:

$$h(\mathbf{r}) = C(\mathbf{r}) + n_i \int h(\mathbf{r}_1) C(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) d\mathbf{r}_1, \quad (24)$$

где  $g(r) = 1 + h(r)$  — парная корреляционная функция,  $C(r)$  — прямая корреляционная функция,  $n_i$  — концентрация ионов. Для замыкания уравнения ОЦ использовалось гиперцепное (ГЦ) приближение [34]:

$$C(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{U_{ii}(\mathbf{r})}{T} + \gamma(\mathbf{r}) \right] - \gamma(\mathbf{r}) - 1, \quad (25)$$

где  $U_{ii}(r)$  — потенциал взаимодействия рассматриваемых частиц,  $\gamma(r) = h(r) - C(r)$ . В нашем случае для описания взаимодействия ионов использовался дебаевский потенциал (18). Гиперцепное приближение оказывается достаточно точным для описания кулоновских систем и систем частиц, взаимодействие которых описывается дебаевским потенциалом (см., например, [35]).

Статический структурный фактор связан с двухчастичной корреляционной функцией фурье-преобразованием [32]:

$$S(k) = 1 + n_i \int [g(r) - 1] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = 1 + \frac{4\pi n_i}{k} \int_0^\infty h(r) \sin(kr) r dr. \quad (26)$$

Уравнение ОЦ решалось методом итераций [36, 37], в качестве начального решения задавались значения структурного фактора в дебаевском приближении (22). Для ускорения сходимости использовалась процедура, предложенная в работе [38].

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе рассматривались два варианта определения постоянной дебаевского экранирования: с учетом ( $k_s = k_D$ ) и без учета ( $k_s = k_{Fe}$ )

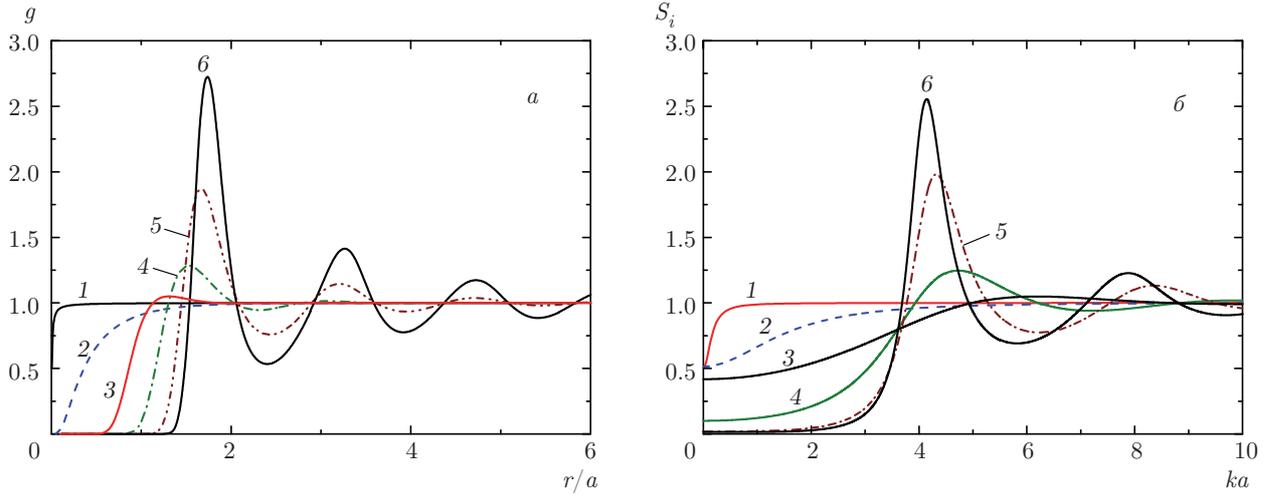


Рис. 2. Двухчастичная корреляционная функция (а) и структурный фактор ионов (б) при  $T = 300$  К,  $z_i = 1$  для разных значений параметра неидеальности:  $\Gamma = 4.2 \cdot 10^{-3}$  (1), 0.416 (2), 89.7 (3), 193 (4), 416 (5), 897 (6)

вклада ионной компоненты. Значение граничного волнового вектора  $q_m$  задавалось либо как в работе [18]:

$$q_m = q_{mS} \equiv \min \left( r_0^{-1} \sqrt{1 + (\varepsilon_F/T)^2}, 2k_E \right), \quad (27)$$

либо как обратный радиус Ландау в невырожденной плазме с переходом на  $2k_F$  в вырожденной (как в работе [20]):

$$q_m = q_{mZ} \equiv \sqrt{r_0^{-2} + 4k_F^2}. \quad (28)$$

Здесь  $k_E$  — волновое число, определенное из средней кинетической энергии электронов (14):

$$k_E = \left( \frac{10}{3} \frac{\langle \varepsilon_e \rangle m_e}{\hbar^2} \right)^{1/2}, \quad (29)$$

которое в сильно вырожденном случае переходит в волновое число электрона с энергией Ферми. В итоге, в настоящей работе были проведены расчеты для четырех вариантов выбора максимального значения волнового числа и выбора постоянной экранирования: вариант 1 —  $k_s = k_{De}$ ,  $q_m = q_{mZ}$ , вариант 2 —  $k_s = k_D$ ,  $q_m = q_{mZ}$ , вариант 3 —  $k_s = k_{De}$ ,  $q_m = q_{mS}$ , вариант 4 —  $k_s = k_D$ ,  $q_m = q_{mS}$ .

Рассмотрение различных вариантов выбора постоянной экранирования и граничного значения волнового вектора вызвано следующим обстоятельством. Как отмечалось выше, в ряде работ в качестве постоянной экранирования используется электронная постоянная экранирования. Такой выбор в случае металлов не вызывает вопросов, так как ионы находятся в узлах кристаллической решетки, но в случае плазмы при не слишком высоких значениях параметра неидеальности (см. рис. 2, на котором

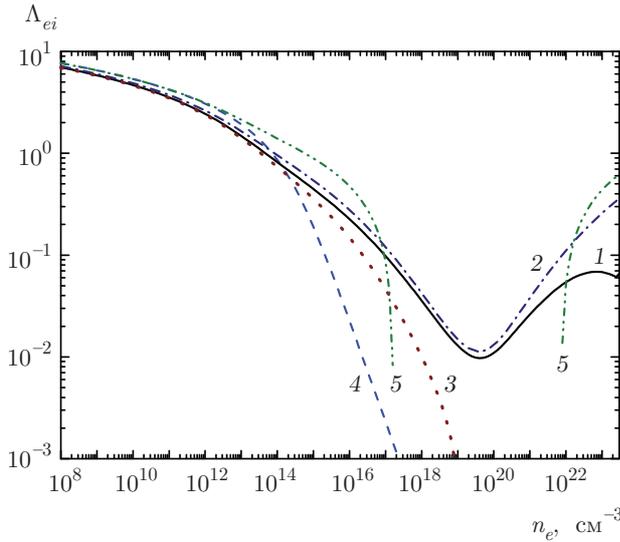
виден рост упорядоченности в распределении ионов по мере роста  $\Gamma$ ) ионная компонента также принимает участие в экранировании электрического поля ионов. Также выбор граничного значения волнового вектора, равного  $2k_F$ , в случае металлов понятен, ведь перенос осуществляется в основном электронами с энергией вблизи поверхности Ферми, но такой выбор в случае плазмы вызывает вопросы.

Из рис. 1 видно, что величина  $q_{mS}$ , совпадая при малых концентрациях электронов с классическим обратным радиусом Ландау, при концентрации порядка  $10^{19}$  см $^{-3}$  стремится к величине, равной обратному радиусу Ландау, определенному с энергией Ферми в качестве температуры, и далее при концентрации порядка  $10^{25}$  см $^{-3}$  стремится к  $2k_F$ . Отметим, что поведение  $q_{mS}$  очень близко к поведению обратного радиуса Ландау со средней кинетической энергией  $\langle \varepsilon_e \rangle$  вместо температуры (см. кривую 7 на рис. 1). Величина  $q_{mZ}$  при малых концентрациях совпадает с  $r_0^{-1}$ , а при увеличении концентрации стремится к  $2k_F$ .

Из рис. 1 также видно, что при комнатной температуре на величине электронного дебаевского радиуса при  $n_e > 10^{18}$  см $^{-3}$  начинает сказываться вырождение и электронная постоянная экранирования становится заметно меньше ионной.

На рис. 2 приведена зависимость двухчастичной корреляционной функции и структурного фактора ионов с кратностью ионизации  $z_i = 1$  при  $T = 300$  К от  $r/a$  и  $ka$  для разных значений параметра неидеальности  $\Gamma$ , который определялся выражением

$$\Gamma = \frac{e^2 z_i^2}{aT}, \quad a = \left( \frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3}. \quad (30)$$



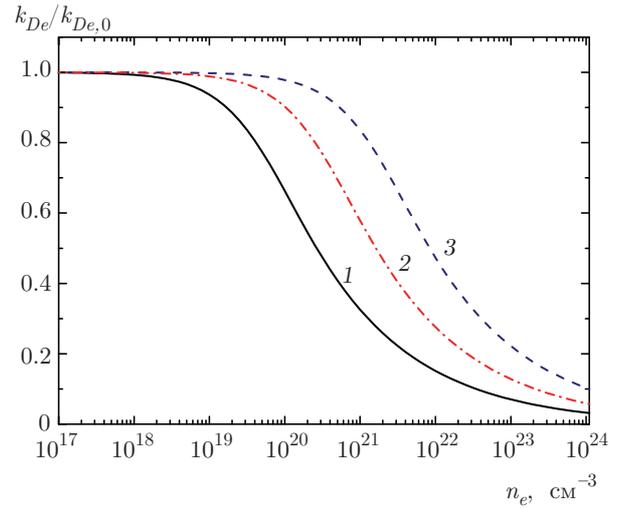
**Рис. 3.** Кулоновский логарифм как функция концентрации электронов при  $T = 300$  К,  $z_i = 1$  с граничным значением волнового вектора  $q_m = q_{mZ}$  и без учета вклада ионов в экранирование  $k_s = k_{De}$ . Кривая 1 — численное интегрирование (17), 2 — формула (21), 3 — (23), 4 — формула (4) для классического случая, 5 —  $\Lambda_{ei} = \ln(q_{mZ}/k_{De})$

С использованием аналогичных зависимостей структурного фактора вычислялся кулоновский логарифм (17). Обычно выполнялось неравенство  $k_{max} > q_m$ , но если оно нарушалось, то в диапазоне  $k_{max} < k \leq q_m$  полагалось  $S_i = 1$ , где  $k_{max}$  — максимальное значение волнового вектора в расчетах структурного фактора.

### 3.1. Расчеты при $k_s = k_{De}$ и $q_m = q_{mZ}$ (вариант 1)

На рис. 3 приведены зависимости кулоновского логарифма от концентрации электронов для варианта 1. Видно, что  $\Lambda_{ei}$  с ростом  $n_e$  убывает и проходит через минимум при  $n_e \sim 10^{19}$  см<sup>-3</sup>. Аналогично ведет себя кривая 2, рассчитанная при  $S_i = 1$ , поэтому мы можем заключить, что появление минимума не связано с вариациями структурного фактора при изменении концентрации ионов. Из сравнения кривых 1 и 2 мы можем сделать вывод, что учет корреляции ионов вносит вклад в кулоновский логарифм уже при  $n_e \sim 10^{12}$  см<sup>-3</sup>, но особенно заметным этот вклад становится при  $n_e > 10^{20}$  см<sup>-3</sup>, когда учет корреляции ионов необходим и приводит к заметному уменьшению сечения рассеяния электронов.

Из рис. 3 видно, что расчеты со структурным фактором в дебаевском приближении (22) хорошо согласуются с расчетами со структурным факто-



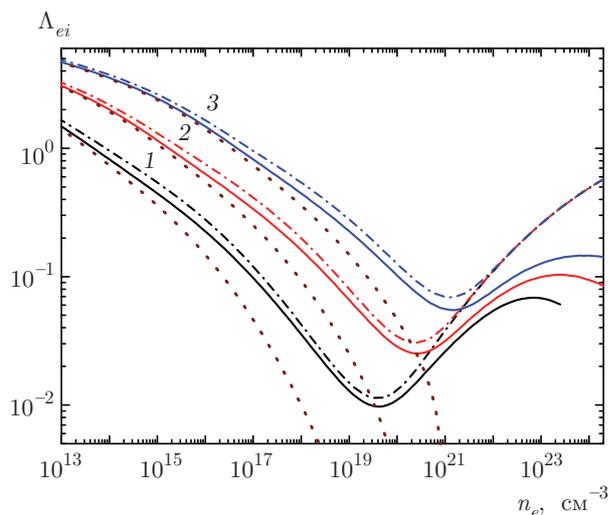
**Рис. 4.** Поправка вырождения к классическому электронному радиусу экранирования при разных температурах: 300 К (1), 1000 К (2), 3000 К (3)

ром из уравнения ОЦ до концентрации электронов порядка  $10^{15}$  см<sup>-3</sup>, при больших концентрациях расхождение становится заметным. Отметим, что в этой области более точным оказывается приближение  $S_i \approx 1$ .

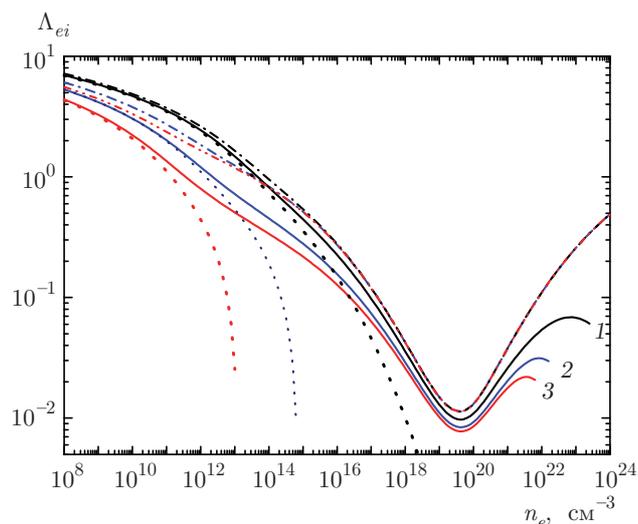
На рис. 3 также приведены значения кулоновского логарифма, рассчитанные по классическим формулам для невырожденной плазмы (кривая 4). Видно, что кривая 4 при малых  $n_e$  близка к зависимости  $\ln(q_{mZ}/k_{De})$ , которая является асимптотикой при  $n_e \rightarrow 0$  зависимостей (21) и (23) (см. [18]).

На рис. 4 приведены поправки к классическому электронному радиусу экранирования при разных температурах. Видно, что при  $T = 300$  К эффекты вырождения электронной компоненты плазмы начинают проявляться при  $n_e \sim 10^{18}$  см<sup>-3</sup> и с ростом  $n_e$  экранирующие свойства электронного газа значительно ослабевают. С ростом температуры эффект заметно уменьшается и отклонения поправки от единицы начинаются при больших  $n_e$ . По этой причине минимумы кулоновского логарифма с ростом температуры также сдвигаются в сторону больших концентраций электронов, что хорошо видно на рис. 5.

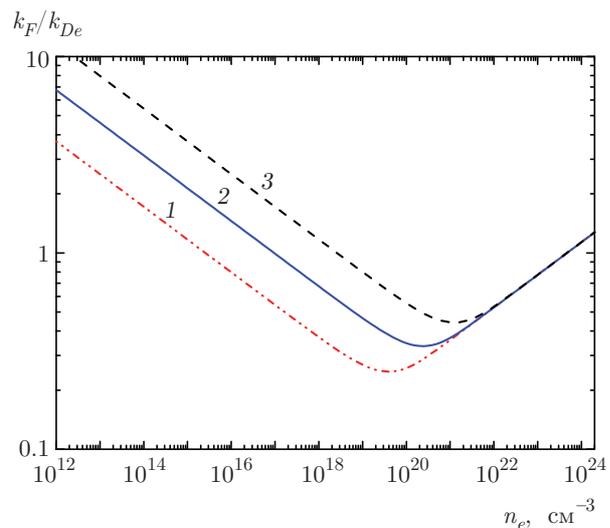
На рис. 5 видно, что в невырожденной плазме значения кулоновского логарифма возрастают с ростом температуры, что связано как с уменьшением радиуса Ландау, так и с увеличением радиуса экранирования. Также видно, что формула (23) является хорошим приближением только при  $n_e \sim 10^{15} - 10^{17}$  см<sup>-3</sup> и в области после минимума



**Рис. 5.** Кулоновский логарифм как функция концентрации электронов при  $z_i = 1$  с граничным значением волнового вектора  $q_m = q_{mZ}$  и без учета вклада ионов в экранирование  $k_s = k_{De}$  при разных температурах: 300 К (1), 1000 К (2), 3000 К (3). Сплошные кривые — численное интегрирование (17) со структурным фактором из уравнения ОЦ в ГЦ-приближении, штрихпунктирные — формула (21), пунктирные — (23)



**Рис. 7.** Кулоновский логарифм как функция концентрации электронов при  $T = 300$  К с граничным значением волнового вектора  $q_m = q_{mZ}$  без учета вклада ионов в экранирование  $k_s = k_{De}$  при разных значениях зарядового числа ионов  $z_i = 1$  (1), 3 (2), 5 (3). Сплошные кривые — численное интегрирование (17) со структурным фактором из уравнения ОЦ в ГЦ-приближении, штрихпунктирные кривые — формула (21), пунктирные — (23)



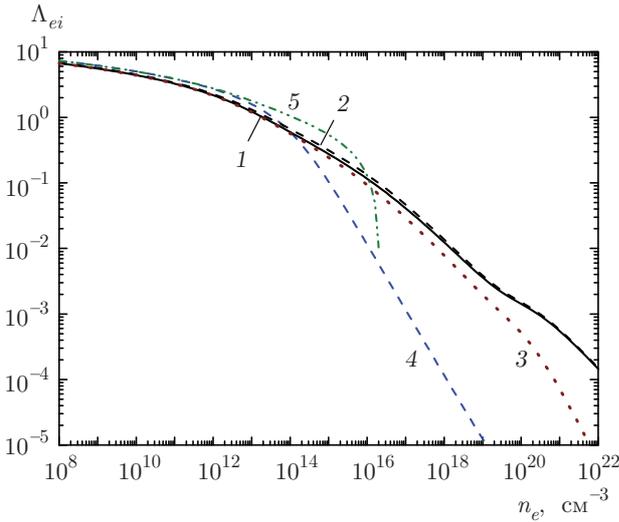
**Рис. 6.** Зависимости отношения волнового числа Ферми к электронной постоянной экранирования при разных температурах: 300 К (1), 1000 К (2), 3000 К (3)

$\Lambda_{ei}$  необходим более точный учет корреляции ионов, чем в дебаевском приближении.

Сравнение положения минимумов  $\Lambda_{ei}$  на рис. 5 и отношения  $k_F/k_{De}$  на рис. 6 показывает, что они практически совпадают. Появление минимума отношения  $k_F/k_{De}$  связано со следующим обстоятель-

ством. На левой ветви до минимума в области невырожденной плазмы электронная постоянная экранирования  $k_{De}$  растет как  $n_e^{1/2}$ , а  $k_F$  — как  $n_e^{1/3}$ , поэтому их отношение убывает как  $n_e^{-1/6}$ . На правой ветви после минимума в области вырожденной плазмы электронная постоянная экранирования  $k_{De}$  растет как  $n_e^{1/6}$  согласно (13), поэтому отношение  $k_F/k_{De}$  растет как  $n_e^{1/6}$ . Это и объясняет появление минимума отношения  $k_F/k_{De}$  в переходной области от невырожденной к вырожденной плазме. Отсюда можно сделать вывод, что появление минимума кулоновского логарифма является следствием ослабления экранирования ионов из-за вырождения электронного газа.

С увеличением кратности ионизации ионов значения кулоновского логарифма уменьшаются (см. рис. 7) вследствие увеличения радиуса Ландау при малых  $n_e < 10^{14} - 10^{15}$  см $^{-3}$  (далее кривые расчетов с  $S_i = 1$  для разных  $z_i$  сливаются в одну), а различия при больших  $n_e$  вызваны различиями структурных факторов как в дебаевском приближении (22), так и полученных из уравнения ОЦ в ГЦ-приближении. Как видно из рис. 7, минимумы  $\Lambda_{ei}$  находятся при одном и том же значении  $n_e$ , так как положение минимума  $k_F/k_{De}$  не зависит от  $z_i$ .



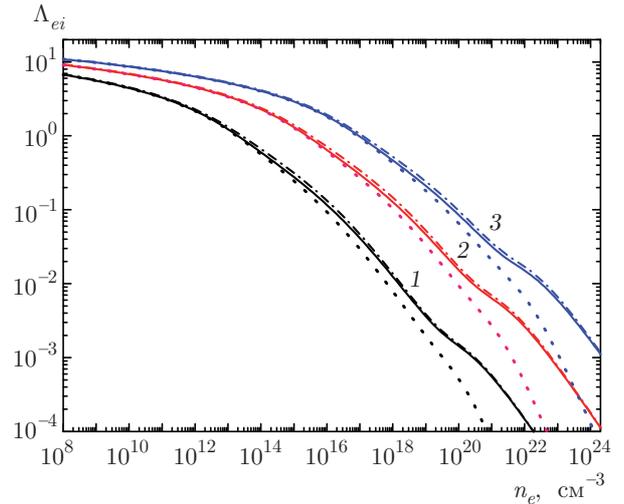
**Рис. 8.** Кулоновский логарифм как функция концентрации электронов при  $T = 300$  К,  $z_i = 1$  с граничным значением волнового вектора  $q_m = q_{mZ}$  с учетом вклада ионов в экранирование  $k_s = k_D$ . Нумерация кривых, как на рис. 3

**3.2. Расчеты при  $k_s = k_D$  и  $q_m = q_{mZ}$  (вариант 2)**

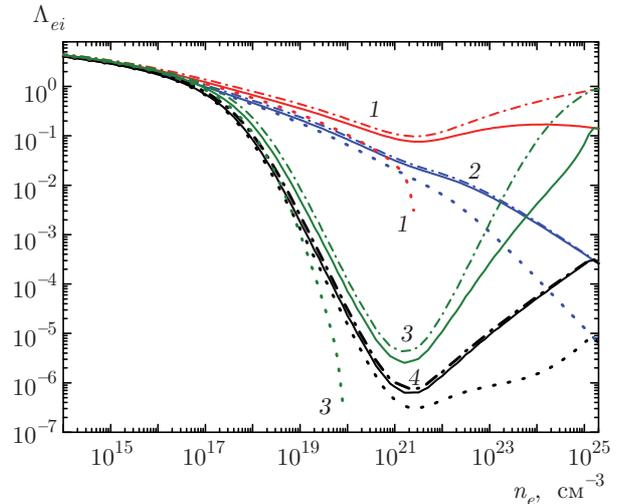
На рис. 8 приведены зависимости кулоновского логарифма в варианте 2 ( $k_s = k_D$ ,  $q_m = q_{mZ}$ ). Видно, что в этом случае минимум исчезает и остается только особенность в виде двух слабых перегибов в области минимума в варианте 1. Также в этом случае расчеты со структурным фактором в дебаевском приближении оказываются достаточно близкими к кривой 1 до  $n_e \sim 10^{18}$  см<sup>-3</sup>, а данные расчетов с  $S_i = 1$  практически совпадают с расчетами с  $S_i$  из уравнения ОЦ. Поэтому можно сделать вывод о пренебрежимо малом влиянии корреляции ионов в этом варианте расчетов. Аналогичное поведение имеет место и при других температурах (см. рис. 9).

**3.3. Расчеты при  $k_s = k_{De}$ ,  $q_m = q_{mS}$  (вариант 3) и  $k_s = k_D$ ,  $q_m = q_{mS}$  (вариант 4)**

На рис. 10 проводится сравнение четырех упомянутых выше вариантов расчета. Видно, что в расчетах с  $q_m = q_{mS}$  значения кулоновского логарифма оказываются заметно меньше, чем в расчетах с  $q_m = q_{mZ}$ . Также значения  $\Lambda_{ei}$  оказываются меньше в расчетах с  $k_s = k_D$ , чем с  $k_s = k_{De}$ . Как видно из рис. 10, учет корреляции ионов оказывается важным только в расчетах без учета экранирования ионами. Аналогичная картина наблюдалась и в расчетах при  $T = 300, 1500, 3000$  К.



**Рис. 9.** Кулоновский логарифм как функция концентрации электронов при  $z_i = 1$  с граничным значением волнового вектора  $q_m = q_{mZ}$  с учетом вклада ионов в экранирование  $k_s = k_D$  при разных температурах  $T = 300$  К (1), 1500 К (2), 5000 К (3). Сплошные кривые — численное интегрирование (17) со структурным фактором из уравнения ОЦ в ГЦ-приближении, штрихпунктирные — формула (21), пунктирные — (23)



**Рис. 10.** Кулоновский логарифм как функция концентрации электронов при  $z_i = 1$ ,  $T = 5000$  К. Кривые 1 — вариант 1 с граничным значением волнового вектора  $q_m = q_{mZ}$  и без учета вклада ионов в экранирование  $k_s = k_{De}$ , 2 — вариант 2 с  $q_m = q_{mZ}$  и  $k_s = k_D$ , 3 — вариант 3 с  $q_m = q_{mS}$  и  $k_s = k_{De}$ , 4 — вариант 4 с  $q_m = q_{mS}$  и  $k_s = k_D$ . Сплошные кривые — численное интегрирование (17) со структурным фактором из уравнения ОЦ в ГЦ-приближении, штрихпунктирные — формула (21), пунктирные — (23)

#### 4. УДЕЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Наряду с кулоновским логарифмом в настоящей работе были проведены расчеты удельной электропроводности плазмы с четырьмя вариантами определения кулоновского логарифма. Удельная электропроводность определялась в рамках модели Лоренца – Блоха [18, 28]:

$$\sigma_T = \frac{4e^2 T^{-3/2}}{3\sqrt{\pi} m_e} \frac{2}{\lambda_e^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon_e^{3/2}}{\nu(\varepsilon_e)} \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_e} \right) d\varepsilon_e. \quad (31)$$

Здесь  $\nu$  – транспортная частота столкновений электронов:

$$\nu(\varepsilon_e) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_e}{m_e}} \left[ n_i Q_{ei}(\varepsilon_e) + n_a Q_{ea}(\varepsilon_e) \right], \quad (32)$$

где  $Q_{ea}$ ,  $Q_{ei}$  – транспортные сечения рассеяния электронов на атомах с концентрацией  $n_a$  и ионах с концентрацией  $n_i$ . Если в плазме присутствуют несколько сортов нейтральных атомов (молекул) и/или ионов, то по ним нужно провести суммирование. В настоящей работе мы рассматриваем только случай, когда преобладают столкновения электронов с однократно ионизованными ионами. В общем случае нужно учитывать столкновения с нейтральными атомами и молекулами, что приведет к уменьшению электропроводности плазмы, поэтому полученные в настоящей работе значения определяют верхнюю границу удельной электропроводности.

В случае преобладания электрон-ионных столкновений имеем

$$\nu(\varepsilon_e) = \pi z_i^2 e^4 \Lambda_{ei} \sqrt{\frac{2}{m_e}} n_i \varepsilon_e^{-3/2}. \quad (33)$$

Используя (32), из (31) находим

$$\sigma_T = \frac{2T}{\pi z_i e^2 \Lambda_{ei}} \sqrt{\frac{8T}{\pi m_e}} \frac{\mathcal{F}_2(\eta_e)}{\mathcal{F}_{1/2}(\eta_e)}. \quad (34)$$

На рис. 11 приведены зависимости удельной электропроводности для четырех вариантов выбора граничного значения волнового вектора и постоянной экранирования. Видно, что наименьшие значения электропроводности имеют место в расчетах в варианте 1 ( $k_s = k_{De}$ ,  $q_m = q_{mZ}$ ), к которым при высоких концентрациях электронов начинают приближаться данные расчетов в варианте 3 ( $k_s = k_{De}$ ,  $q_m = q_{mS}$ ). На рис. 11 видно, что значения электропроводности с единичным значением кулоновского логарифма при  $n_e > 10^{17} \text{ см}^{-3}$  оказываются меньше, чем во всех четырех вариантах.

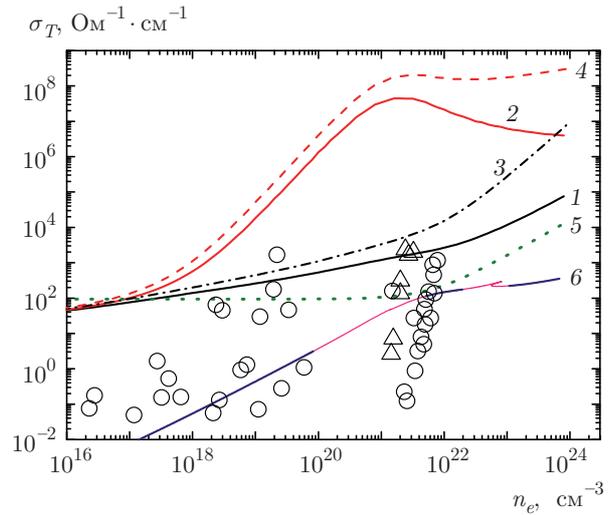


Рис. 11. Удельная проводимость при преобладании рассеяния электронов на ионах при  $T = 5000 \text{ К}$ ,  $z_i = 1$ . Кривая 1 – вариант 1 ( $q_m = q_{mZ}$ ,  $k_s = k_{De}$ ), 2 – вариант 2 ( $q_m = q_{mZ}$ ,  $k_s = k_D$ ), 3 – вариант 3 ( $q_m = q_{mS}$ ,  $k_s = k_{De}$ ), 4 – вариант 4 ( $q_m = q_{mS}$ ,  $k_s = k_D$ ), 5 – расчеты с  $\Lambda_{ei} = 1$ , 6 – расчеты [18],  $\circ$  – экспериментальные данные [40, 41],  $\triangle$  – экспериментальные данные [42]

На рис. 11 также приведены значения электропроводности плазмы, полученные в работе [18] с учетом вклада нейтральных атомов и молекул в рассеяние электронов, а кулоновский логарифм рассчитывался по формуле (23) как в варианте 4 (см. точечную кривую 4 на рис. 10). При этом вклад нейтральных атомов и молекул в суммарное сечение рассеяния оказался подавляющим. На рис. 11 также приведены экспериментальные значения электропроводности плазмы, измеренные в работах [39–43]. Для определения концентрации электронов по плотности или концентрации атомов и молекул нейтрального газа использовались данные расчетов [18], при этом для данных [39, 41] пересчет проведен при температуре 5000 К, а для данных [42] – при 2500 К. Видно, что ряд экспериментальных точек оказывается выше кривых 1 и 5, поэтому при учете рассеяния электронов на нейтральных атомах и молекулах водорода данные расчетов с кулоновским логарифмом как в варианте 1 и при  $\Lambda_{ei} = 1$  окажутся в худшем согласии с экспериментальными данными [39–43], чем в расчетах в трех остальных вариантах.

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные в настоящей работе исследования показали, что значения кулоновского логарифма

сильно зависят от выбора граничного значения волнового вектора и от выбора способа определения постоянной экранирования ионов с учетом или без учета их вклада. В невырожденной плазме влияние корреляции ионов оказывается малой, а в вырожденной плазме их учет необходим только в случае, если потенциал взаимодействия ионов определяется экранированием только электронной компонентой. Сравнение рассчитанных значений удельной электропроводности плазмы водорода с экспериментально измеренными в мегабарной области давлений показало, что значения кулоновского логарифма, значительно меньшие единицы, действительно могут иметь место. Для более точного определения кулоновского логарифма необходима постановка и проведение специальных экспериментов.

Малые значения кулоновского логарифма при высоких давлениях газа приводят к тому, что рассеяние на нейтральных атомах и молекулах оказывается преобладающим (в водороде до плотностей порядка  $1 \text{ г/см}^3$ ), несмотря на отмеченное выше явление ионизации давлением и высокую степень ионизации газа. Из-за того, что частота столкновений электронов с ионами оказывается сильно уменьшенной малым кулоновским логарифмом, электроны в неидеальной плотной плазме можно достаточно легко «замагнитить» в умеренных магнитных полях порядка 1 Тл. При экстремально высоких давлениях и плотностях газа (для водорода эта область плотностей выше  $5 \text{ г/см}^3$ ) рассеяние электронов на ионах будет преобладать над рассеянием на нейтральных атомах и молекулах. Поэтому в этих условиях коэффициенты переноса электронов будут определяться столкновениями электронов с ионами, а не с нейтральными атомами. При этом электропроводность и теплопроводность плазмы может оказаться сравнимой или выше, чем в металлах. При высоких температурах перенос тепла определяется лучистой теплопроводностью, поэтому электронная теплопроводность играет незначительную роль, но в низкотемпературной плазме она может быть не малой. Это открывает хорошие перспективы экспериментальной проверки различных теорий переноса электронов в неидеальной плазме, в том числе, и методов определения кулоновского логарифма. При этом в магнитном поле электропроводность (и теплопроводность) поперек магнитного поля не будет чрезвычайно высокой и ее будет возможно измерить экспериментально.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-12-10511).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 203 (1937).
2. L. Spitzer, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **100**, 396 (1940).
3. R. S. Cohen, L. Spitzer, Jr., and P. McR. Routly, Phys. Rev. **80**, 230 (1950).
4. L. Spitzer, Jr., and R. Härm, Phys. Rev. **89**, 977 (1953).
5. Л. Спитцер, *Физика полностью ионизованного газа*, Изд-во иностр. лит., Москва (1957) [L. Spitzer, Jr., *Physics of Fully Ionized Gases*, Intersci. Publ., London (1956)].
6. С. В. Темко, ЖЭТФ **31**, 1021 (1956).
7. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ **41**, 1328 (1961).
8. S. Skupsky, Phys. Rev. A **16**, 727 (1977).
9. Y. T. Lee and R. M. More, Phys. Fluids **27**, 1273 (1984).
10. C.-K. Li and R. D. Petrasso, Phys. Rev. Lett. **70**, 3063 (1993).
11. C. A. Ordonez and M. I. Molina, Phys. Plasmas **1**, 2515 (1994).
12. E. Bésuelle, R. R. E. Salomaa, and D. Teychenné, Phys. Rev. E **60**, 2260 (1999).
13. T. S. Ramazanov and S. K. Kodanova, Phys. Plasmas **8**, 5049 (2001).
14. J. R. Correa, Y. Chang, and C. A. Ordonez, Phys. Plasmas **12**, 084505 (2005).
15. D. O. Gericke, M. S. Murillo, and M. Schlanges, Phys. Rev. E **65**, 036418 (2002).
16. L. S. Brown and R. L. Singleton, Jr., Phys. Rev. E **76**, 066404 (2007).
17. L. G. Stanton and M. S. Murillo, Phys. Rev. E **93**, 043203 (2016).
18. А. Н. Старостин, В. К. Грязнов, А. В. Филиппов, Письма в ЖЭТФ **104**, 798 (2016).
19. В. Е. Фортвов, УФН **177**, 347 (2007).
20. J. M. Ziman, Phil. Mag. **6**, 1013 (1961).

21. J. M. Ziman, Proc. Phys. Soc. **86**, 337 (1965).
22. J. M. Ziman, Adv. Phys. **13**, 89 (1964).
23. C. C. Bradley, T. E. Faber, E. G. Wilson, and J. M. Ziman, Phil. Mag. **7**, 865 (1962).
24. J. M. Ziman, Adv. Phys. **16**, 551 (1967).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. X, *Физическая кинетика*, Физматлит, Москва (2002).
26. R. V. Dingle, Phil. Mag. J. Sci. **46**, 831 (1955).
27. M. Goano, ACM Trans. Math. Software (TOMS) **21**, 221 (1995).
28. В. К. Грязнов, Ю. В. Иванов, А. Н. Старостин, В. Е. Фортов, ТВТ **14**, 643 (1976).
29. R. Barrie, Proc. Phys. Soc. B **69**, 553 (1956).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. V, *Статистическая физика*, ч. I, Физматлит, Москва (2002).
31. И. З. Фишер, УФН **76**, 499(1962).
32. Н. П. Коваленко, И. З. Фишер, УФН **108**, 209 (1972).
33. Г. Н. Саркисов, УФН **169**, 625 (1999).
34. T. Morita and K. Hiroike, Progr. Theor. Phys. **23**, 1003 (1960).
35. Yu. V. Arkhipov, A. Askaruly, A. E. Davletov, D. Yu. Dubovtsev, Z. Donkó, P. Hartmann, I. Korolov, L. Conde, and I. M. Tkachenko, Phys. Rev. Lett. **119**, 045001 (2017).
36. A. V. Filippov, A. N. Starostin, I. M. Tkachenko, and V. E. Fortov, Phys. Lett. A **376**, 31 (2011).
37. A. V. Filippov, A. N. Starostin, I. M. Tkachenko, and V. E. Fortov, Contrib. Plasma Phys. **53**, 442 (2013).
38. K.-C. Ng, J. Chem. Phys. **61**, 2680 (1974).
39. S. T. Weir, A. C. Mitchell, and W. J. Nellis, Phys. Rev. Lett. **76**, 1860 (1996).
40. В. Е. Фортов, В. Я. Терновой, С. В. Квитов, В. Б. Минцев, Д. Н. Николаев, А. А. Пяллинг, А. С. Филимонов, Письма в ЖЭТФ **69**, 874 (1999).
41. V. Ya. Ternovoi, A. S. Filimonov, V. E. Fortov, S. V. Kvitov, D. N. Nikolaev, and A. A. Pyalling, Physica B: Condens. Matter **265**, 6 (1999).
42. W. J. Nellis, S. T. Weir, and A. C. Mitchell, Phys. Rev. B **59**, 3334 (1999).
43. R. Chau, A. C. Mitchell, R. W. Minich, and W. J. Nellis, Phys. Rev. Lett. **90**, 245501 (2003).