

УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ С УЧЕТОМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УСКОРЕНИЯ

*В. В. Саенко**

*Ульяновский государственный университет,
Научно-исследовательский технологический институт им. С. П. Капицы
432000, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 9 октября 2017 г.

Рассматривается обобщение модели блужданий Леви с ловушками. Основным отличием рассматриваемой модели от уже существующих моделей является введение в рассмотрение мультипликативного ускорения частиц при столкновениях. Введение ускорения переводит рассмотрение блужданий в фазовое пространство координат-импульсов, что позволяет получать как пространственное распределение частиц, так и их спектр. Получены кинетические уравнения в фазовом пространстве координат-импульсов для случая блужданий с двумя возможными состояниями. Показано, что данная система уравнений в частном случае сводится к обычным блужданиям Леви. Эта система кинетических уравнений допускает интегрирование по пространственной переменной, что переводит рассмотрение только в пространство импульсов и позволяет вычислить спектр. Точное решение кинетических уравнений удается получить в терминах преобразования Лапласа–Меллина. Обратное преобразование удается выполнить только для асимптотических решений. Полученные спектры сравниваются с результатами моделирования методом Монте-Карло, которые подтверждают правильность полученных асимптотик.

DOI: 10.7868/S0044451018040041

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных проблем при изучении процессов аномальной диффузии является учет влияния конечной скорости свободного движения частиц на процесс распространения. Как известно, в основе процессов аномальной диффузии лежит модель случайных блужданий с непрерывным временем (СБНВ). Впервые эта модель была введена в работе [1] и в дальнейшем описана в работах [2–4]. Эта модель описывает распространение частиц прыжково-ловушечным механизмом, при котором частица мгновенно перемещается из одной точки пространства в другую, а потом покоится некоторое случайное время. Ширина диффузионного пакета растет со временем как $\Delta(t) \propto D_\alpha t^\chi$, где D_α — коэффициент аномальной диффузии. Мгновенность перемещения частицы приводит к нефизическому результату: по истечении сколь угодно малого промежутка времени t от начальной частица может оказаться на сколь угодно большом расстоянии от источника. В то время как в реальности, двига-

ясь с конечной скоростью v , частица не может покинуть область, ограниченную сферой радиуса vt . Этот факт неоднократно отмечался ранее [5–8] и послужил толчком к разработке и исследованию аномальной диффузии с учетом конечной скорости.

Введение в рассмотрение конечной скорости приводит к изменению механизма распространения частиц. Теперь координата частицы непрерывно изменяется со временем, и за время t она может пройти путь, равный vt . Впервые такая модель блужданий была рассмотрена в работе [9] и получила название «блуждания Леви». Движение с конечной скоростью приводит к формированию фронта распределения, за пределами которого вероятность обнаружить частицу равна нулю. В зависимости от режима процесса наличие такого кинематического ограничения приводит к формированию U -образных и W -образных распределений [5, 10–12] при $\chi \geq 1$. При $\chi < 1$ влияние конечной скорости сводится к уменьшению коэффициента диффузии [5].

Столь существенное изменение формы диффузионного пакета означает, что теперь процесс блуждания описывается совершенно другим уравнением, чем процесс с мгновенными прыжками. Действительно, в работе [6] указывается, что при

* E-mail: saenkoslava@mail.ru

учете конечной скорости свободного движения в обобщенном уравнении диффузии, описывающем асимптотическое распределение частиц в процессе СБНВ, дробный лапласиан необходимо заменить на материальную производную дробного порядка. В дальнейшем к этому выводу приходят авторы работ [8, 13–15]. Оператор материальной производной дробного порядка возникает при описании распространения резонансного излучения [16] и космических лучей [8, 15, 17–19]. Столь широкое применение этого оператора привело к разработке методов решения обобщенного уравнения диффузии материальной производной дробного порядка. Можно выделить три основных метода решения этого уравнения: метод преобразования Фурье – Лапласа [11, 15, 20–24], метод моментов [7, 12] и метод стохастических соотношений [25–29].

Дальнейшее развитие модели блужданий Леви связано с рассмотрением блужданий со случайной скоростью. Существует всего несколько работ в этом направлении, в которых рассматриваются обобщенные модели полетов Леви на пространство скоростей [30], блуждания со случайной скоростью [31] и блуждания с флуктуациями скорости [32, 33]. За более подробным обзором результатов по блужданиям Леви отсылаем читателя к работам [17, 34]. Следует также отметить работы [35, 36], в которых рассмотрена диффузия в импульсном пространстве и указывается, что при степенной функции перераспределения по скоростям процесс описывается аномальной диффузией. Естественным развитием данной модели блужданий является введение ускорения в эту модель. При этом процесс блуждания рассматривается уже в фазовом пространстве координат-скоростей, а ускорение частиц является диффузией частицы в пространстве скоростей.

Интерес к проблеме диффузии в пространстве скоростей в первую очередь связан с проблемой ускорения элементарных частиц и, в частности, с проблемой ускорения космических лучей. Классическая теория ускорения космических лучей рассматривает процесс ускорения как нормальную диффузию в пространстве импульсов [37–39]. Однако существующие экспериментальные данные указывают на аномальный характер диффузии космических лучей [40–49] и силовых линий магнитного поля [50–53]. Кроме того, существуют экспериментальные подтверждения фрактальной структуры Галактики [54–57]. Все это указывает на правомерность использования моделей аномальной диффузии для описания распространения и ускорения космических лучей.

С учетом этих фактов была предложена модель распространения космических лучей в галактике на основе дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии [58–62] и получены энергетические спектры [63–67]. На основе СБНВ предложена модель ускорения космических частиц на ударных волнах [68, 69]. В работе [8] было обращено внимание на то, что модель СБНВ подразумевает мгновенное перемещение частицы в пространстве, что физически невозможно, и было предложено использовать блуждания Леви для описания распространения космических лучей [15, 17, 70–72]. В дальнейшем эта модель была применена для описания процесса ускорения космических лучей на ударных волнах [73–75], на основе этого подхода были получены спектры [19, 76–78]. Стоит отметить, что непосредственное рассмотрение блуждания элементарных частиц (нейтронов, протонов, электронов и т. п.) в пространстве скоростей показывает аномально-диффузионный характер этого процесса [35, 48].

Однако в рассмотренных выше работах процесс блуждания в пространстве скоростей напрямую не рассматривался. Поэтому этот вопрос представляется актуальным. В данной работе рассматривается блуждание частицы в фазовом пространстве координат и импульсов. Блуждания в координатном пространстве представляют собой блуждания с конечной скоростью с ловушками. При этом после каждого столкновения, приводящего к продолжению движения, импульс частицы изменяется по закону $p = p'\zeta$, где p' — импульс до столкновения, p — импульс после столкновения, а ζ — случайная величина. Выбор именно такого механизма изменения импульса диктуется механизмом ускорения космических лучей. На сегодняшний день основным механизмом ускорения космических лучей принято считать механизм ускорения на остатках сверхновых, при котором изменение энергии определяется отношением энергий до и после столкновения с ударной волной [79, 80]. В работе [81] (см. также [17]) такая модель ускорения была названа мультипликативной моделью ускорения.

2. МОДЕЛЬ БЛУЖДАНИЙ И КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Для вывода кинетического уравнения используется подход, описанный в работе [10]. Исходной величиной будет плотность столкновений $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. По определению, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} dt$ есть количество столкновений, происходящих в элементе объема

$d\mathbf{r}$ окрестности точки \mathbf{r} за промежуток времени $(t, t + dt)$, при которых импульс частицы принимает значение из интервала от \mathbf{p} до $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$. В нерелятивистском случае уравнение баланса для величины $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в окрестности точки $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ принимает вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \int_0^t k(\tau) d\tau \times \\ \times \int f\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}'}{m}\tau, \mathbf{p}', t - \tau\right) W(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}', \quad (1)$$

где $s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — плотность источников новых частиц, появившихся в окрестности точки $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, $k(\tau)$ — плотность вероятности распределения времени между двумя последовательными столкновениями, $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ — импульс частицы до столкновения, m — масса частицы, \mathbf{p} — импульс после столкновения, $W(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ — плотность вероятности перехода из состояния с импульсом \mathbf{p}' в состояние с импульсом \mathbf{p} и $d\mathbf{p} = p^2 dp d\Omega$, $\Omega = \mathbf{p}/p$, $p = |\mathbf{p}|$.

Переход от плотности столкновений $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ к фазовой плотности $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ осуществляется при помощи интеграла

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int_0^t K(\tau) f\left(\mathbf{r} - \frac{p}{m}\Omega\tau, \mathbf{p}, t - \tau\right) d\tau, \quad (2)$$

где $K(t) = \int_t^\infty k(\tau) d\tau$. Смысл этого выражения достаточно прост. Для того чтобы обнаружить частицу в окрестности $d\mathbf{r}$ точки \mathbf{r} с импульсом в интервале от \mathbf{p} до $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ в момент времени от t до $t + dt$, частица должна испытать столкновение в точке $\mathbf{r} - (p/m)\Omega\tau$ в момент времени $t - \tau$ и просуществовать в этом состоянии время, большее чем τ . Из выражения (2) можно получить плотность частиц $\rho(\mathbf{r}, t)$ и спектр частиц $\psi(\mathbf{p}, t)$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad \psi(\mathbf{p}, t) = \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r}.$$

Пусть в системе существует n дискретных состояний, а распределение по направлениям импульса не зависит от его величины. В результате функцию $W(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ можно представить в виде

$$W(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_{ij}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \\ = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} W_{ij}(\Omega', \Omega) h_{ij}(p', p), \quad (3)$$

где c_{ij} — вероятность перехода из состояния i в состояние j , $W_{ij}(\Omega', \Omega)$ — плотность вероятности того, что до столкновения импульс имел направление

Ω' , а после столкновения примет направление Ω , $h_{ij}(p', p)$ — плотность вероятности изменения импульса в результате столкновения от значения p' до значения p . Величины c_{ij} , $W_{ij}(\Omega', \Omega)$ и $h_{ij}(p', p)$ имеют следующие нормировки:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, \quad \int W_{ij}(\Omega', \Omega) d\Omega = 1, \\ \int h_{ij}(p', p) dp = 1. \quad (4)$$

Подставляя выражение (3) в (1), получаем, что функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ может быть представлена в виде суммы:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (5)$$

где

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = s_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \\ + \sum_{i=1}^n c_{ij} \int_0^t k_i(\tau) d\tau \int W_{ij}(\Omega', \Omega) d\Omega' \times \\ \times \int f_i\left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m}\Omega'\tau, p'\Omega', t - \tau\right) h_{ij}(p', p) dp', \quad (6)$$

а $k_i(\tau)$ — распределение плотности вероятности времени пребывания в состоянии i . Суммирование ведется по всем возможным предыдущим состояниям. Величина $f_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ имеет простой смысл — это плотность столкновений, произошедших в объеме $d\mathbf{r}$ за время dt , в результате которых частица перешла в состояние j и ее импульс принял значение от \mathbf{p} до $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$.

Подставляя выражение (5) в (2), получаем, что фазовая плотность имеет вид суммы:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

где

$$\psi_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int_0^t K_j(\tau) f_j\left(\mathbf{r} - \frac{p}{m}\Omega\tau, \mathbf{p}, t - \tau\right) d\tau \quad (7)$$

и $K_j(t) = \int_t^\infty k_j(\tau) d\tau$.

Система (6) вместе с уравнением (7) является основной для дальнейшего рассмотрения. На основе этой системы можно вычислить распределение частиц для любого количества состояний n , отличающихся друг от друга как индикатрисой рассеяния $W_{ij}(\Omega', \Omega)$, так и законом перераспределения по импульсам $h_{ij}(p', p)$.

Предположим, что существуют два состояния: покой ($i = 1$) и движение с постоянным импульсом ($i = 2$). Состояние покоя характеризуется импульсом $p = 0$. Импульс может изменяться только при столкновениях. Между двумя последовательными столкновениями импульс не изменяется. Матрица вероятности переходов имеет вид

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь c_{11} — вероятность того, что после выхода из состояния покоя частица снова попадает в состояние покоя, c_{12} — вероятность того, что после состояния покоя частица перейдет в состояние движения и приобретет начальный импульс \mathbf{p}_0 , c_{21} — вероятность перехода из состояния движения в состояние покоя и c_{22} — вероятность того, что после состояния движения частица продолжит движение. Из условий нормировки (4) для c_{ij} имеем

$$c_{11} + c_{12} = 1, \quad c_{21} + c_{22} = 1. \quad (8)$$

Пусть при переходе $2 \rightarrow 2$ абсолютные величины импульсов частицы до и после столкновения связаны между собой соотношением $p = p'\zeta$, где величина ζ имеет плотность распределения вероятностей $h_{22}(\zeta)$. Положим, что направление движения после столкновения не зависит ни от предыдущего направления движения, ни от типа столкновения. В результате получаем

$$\begin{aligned} W_{11}(\Omega', \Omega) &= W_{12}(\Omega', \Omega) = W_{21}(\Omega', \Omega) = \\ &= W_{22}(\Omega', \Omega) = W(\Omega). \end{aligned}$$

Как видно, при переходах $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 1$, функции $h_{11}(p', p)$ и $h_{21}(p', p)$ не зависят от величины импульса p' до столкновения и совпадают друг с другом, так как описывают распределение по импульсам в состоянии 1. В результате имеем $h_{11}(p', p) = h_{21}(p', p) = h_1(p)$. Аналогично, $h_{12}(p', p)$ не зависит от p' и описывает начальное распределение импульса в состоянии 2: $h_{12}(p', p) = h_2(p)$. При переходе $2 \rightarrow 2$ величина приобретаемого импульса определяется произведением двух случайных величин: импульса p' до столкновения и величиной изменения импульса при столкновении, ζ . В результате плотность вероятности изменения импульса при столкновении приобретает вид $h_{22}(p', p) = h_{22}(p/p')/p'$, а плотность вероятности

$$\begin{aligned} W_{ij}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \\ &= \begin{pmatrix} c_{11}W(\Omega)h_1(p) & c_{12}W(\Omega)h_2(p) \\ c_{21}W(\Omega)h_1(p) & c_{22}W(\Omega)h_{22}(p/p')/p' \end{pmatrix}. \quad (9) \end{aligned}$$

Источники в выражении (6) представим в виде

$$s_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sigma_j s_j(\mathbf{r}, t) h_j^s(p) W_j(\Omega), \quad j = 1, 2,$$

где σ_j — вероятность рождения в состоянии j , причем

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1. \quad (10)$$

Пусть $W_1(\Omega) = W_2(\Omega) = W(\Omega)$, а $h_1^s(p) = h_1(p)$, $h_2^s(p) = h_2(p)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} s_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \sigma_1 s_1(\mathbf{r}, t) W(\Omega) h_1(p), \\ s_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \sigma_2 s_2(\mathbf{r}, t) W(\Omega) h_2(p). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя соотношения (9), (11) в (6), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= h_1(p) W(\Omega) \left\{ \sigma_1 s_1(\mathbf{r}, t) + \right. \\ &\quad \left. + c_{11} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \times \right. \\ &\quad \left. \times \int d\Omega' \int f_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \Omega' \tau, p' \Omega', t - \tau \right) dp' + \right. \\ &\quad \left. + c_{21} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\Omega' \times \right. \\ &\quad \left. \times \int f_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \Omega' \tau, p' \Omega', t - \tau \right) dp' \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= W(\Omega) \left\{ h_2(p) \left[\sigma_2 s_2(\mathbf{r}, t) + \right. \right. \\ &\quad \left. + c_{12} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \int d\Omega' \times \right. \\ &\quad \left. \times \int f_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \Omega' \tau, p' \Omega', t - \tau \right) dp' \right] + \\ &\quad \left. + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\Omega' \times \right. \\ &\quad \left. \times \int f_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \Omega' \tau, p' \Omega', t - \tau \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times h_{22} \left(\frac{p}{p'} \right) \frac{1}{p'} dp' \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Из этих уравнений видно, что в случае, когда плотность вероятности перехода не зависит от предыдущего значения, плотность столкновения представляема в виде произведения. В частности,

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \Phi_j(\mathbf{r}, p, t)W(\boldsymbol{\Omega}), \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Подставляя это представление в уравнения (12), (13), получаем систему уравнений для величины $\Phi_j(\mathbf{r}, p, t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}, p, t) = h_1(p) & \left[\sigma_1 s_1(\mathbf{r}, t) + c_{11} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \times \right. \\ & \times \int d\boldsymbol{\Omega}' \int \Phi_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) W(\boldsymbol{\Omega}') dp' + \\ & \left. + c_{21} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \times \right. \\ & \left. \times \int \Phi_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) W(\boldsymbol{\Omega}') dp' \right], \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}, p, t) = h_2(p) & \left[\sigma_2 s_2(\mathbf{r}, t) + c_{12} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \times \right. \\ & \left. \times \int d\boldsymbol{\Omega}' \int \Phi_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) W(\boldsymbol{\Omega}') dp' \right] + \\ & + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \int \Phi_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) \times \\ & \times W(\boldsymbol{\Omega}') h_{22} \left(\frac{p}{p'} \right) \frac{1}{p'} dp'. \quad (16) \end{aligned}$$

Физический смысл величины $\Phi_j(\mathbf{r}, p, t)$ достаточно прозрачен. Это плотность столкновений в элементе объема $d\mathbf{r}$ в окрестности точки \mathbf{r} , происходящих за промежуток времени $(t, t + dt)$, при которых частица переходит в состояние j , а абсолютная величина ее импульса принимает значения от p до $p + dp$. Из уравнения (15) видно, что величина $\Phi_1(\mathbf{r}, p, t)$ также представляема в виде произведения,

$$\Phi_1(\mathbf{r}, p, t) = F_1(\mathbf{r}, t)h_1(p), \quad (17)$$

в то время как величину $\Phi_2(\mathbf{r}, p, t)$ в таком виде представить нельзя, так как плотность вероятности перехода $h_{22}(p/p')/p'$ зависит от величины импульса до столкновения. Подставляя (17) в (15) и (16), получаем

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{r}, t) = \sigma_1 s_1(\mathbf{r}, t) + c_{11} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \times \\ \times \int F_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, t - \tau \right) h_1(p') W(\boldsymbol{\Omega}') dp' + \\ + c_{21} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \int \Phi_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) \times \\ \times W(\boldsymbol{\Omega}') dp', \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}, p, t) = \sigma_2 s_2(\mathbf{r}, t) h_2(p) + c_{12} h_2(p) \int_0^t k_1(\tau) d\tau \times \\ \times \int d\boldsymbol{\Omega}' \int F_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, t - \tau \right) h_1(p') W(\boldsymbol{\Omega}') dp' + \\ + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \int \Phi_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) \times \\ \times W(\boldsymbol{\Omega}') h_{22} \left(\frac{p}{p'} \right) \frac{1}{p'} dp'. \quad (19) \end{aligned}$$

Величина $F_1(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt$ есть плотность вероятности переходов типа $1 \rightarrow 1$, происходящих в элементе объема $d\mathbf{r}$ в окрестности точки \mathbf{r} за промежуток времени $(t, t + dt)$. Как видно из (18), третье слагаемое в правой части есть не что иное, как $F_2(\mathbf{r}, t)$ — плотность вероятности переходов $2 \rightarrow 1$. Следовательно, для решения системы (18), (19) требуется еще одно уравнение для $F_2(\mathbf{r}, t)$. Чтобы получить уравнение для этой величины, проинтегрируем уравнение (19) по p с учетом условия нормировка (4) и, вводя обозначение $F_2(\mathbf{r}, t) = \int \Phi_2(\mathbf{r}, p, t) dp$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{r}, t) = \sigma_1 s_1(\mathbf{r}, t) + c_{11} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \times \\ \times \int F_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, t - \tau \right) h_1(p') W(\boldsymbol{\Omega}') dp' + \\ + c_{21} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \int \Phi_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) \times \\ \times W(\boldsymbol{\Omega}') dp', \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{r}, t) = \sigma_2 s_2(\mathbf{r}, t) + c_{12} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \times \\ \times \int F_1 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, t - \tau \right) h_1(p') W(\boldsymbol{\Omega}') dp' + \\ + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\boldsymbol{\Omega}' \int \Phi_2 \left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \boldsymbol{\Omega}' \tau, p', t - \tau \right) \times \\ \times W(\boldsymbol{\Omega}') dp', \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}, p, t) = & \sigma_2 s_2(\mathbf{r}, t) h_2(p) + c_{12} h_2(p) \int_0^t k_1(\tau) d\tau \times \\ & \times \int d\Omega' \int F_1\left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \Omega' \tau, t - \tau\right) h_1(p') W(\Omega') dp' + \\ & + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int d\Omega' \int \Phi_2\left(\mathbf{r} - \frac{p'}{m} \Omega' \tau, p', t - \tau\right) \times \\ & \times W(\Omega') h_{22}\left(\frac{p}{p'}\right) \frac{1}{p'} dp'. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражения для плотностей частиц и спектров в каждом из состояний получаются путем подстановки выражений (14) и (17) в (7) с последующим интегрированием:

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{r}, t) = & \int_0^t K_1(\tau) d\tau \int h_1(p) dp \times \\ & \times \int F_1\left(\mathbf{r} - \frac{p}{m} \Omega \tau, t - \tau\right) W(\Omega) d\Omega, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\mathbf{r}, t) = & \int_0^t K_2(\tau) d\tau \times \\ & \times \iint \Phi_2\left(\mathbf{r} - \frac{p}{m} \Omega \tau, p, t - \tau\right) W(\Omega) dp d\Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(p, t) = & h_1(p) \int_0^t K_1(\tau) d\tau \times \\ & \times \iint F_1\left(\mathbf{r} - \frac{p}{m} \Omega \tau, t - \tau\right) W(\Omega) d\mathbf{r} d\Omega, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(p, t) = & \int_0^t K_2(\tau) d\tau \times \\ & \times \iint \Phi_2\left(\mathbf{r} - \frac{p}{m} \Omega \tau, p, t - \tau\right) W(\Omega) d\mathbf{r} d\Omega. \end{aligned} \quad (26)$$

Система уравнений (20)–(22) полностью описывает рассматриваемый процесс блужданий с двумя состояниями, а соотношения (23)–(26) позволяют вычислить пространственное распределение и спектр частиц в каждом из двух состояний. Итоговое распределение будет определяться суммой соответствующих распределений в каждом из состояний:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) = & \rho_1(\mathbf{r}, t) + \rho_2(\mathbf{r}, t), \\ \psi(p, t) = & \psi_1(p, t) + \psi_2(p, t). \end{aligned} \quad (27)$$

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ИМПУЛЬСАМ

Найдем распределение по импульсам частиц в рассматриваемой модели блужданий. Это распределение для каждого из двух состояний определяется выражениями (25), (26). Как видно, эти выражения допускают интегрирование по \mathbf{r} . В результате имеем

$$\psi_1(p, t) = h_1(p) \int_0^t K_1(\tau) F_1(t - \tau) d\tau, \quad (28)$$

$$\psi_2(p, t) = \int_0^t K_2(\tau) \Phi_2(p, t - \tau) d\tau, \quad (29)$$

где система уравнений для нахождения функции $F_1(t)$ и $\Phi_2(p, t)$ получается путем интегрирования системы (20)–(22) по \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} F_1(t) = & \sigma_1 s_1(t) + c_{11} \int_0^t k_1(\tau) F_1(t - \tau) d\tau + \\ & + c_{21} \int_0^t k_2(\tau) F_2(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} F_2(t) = & \sigma_2 s_2(t) + c_{12} \int_0^t k_1(\tau) F_1(t - \tau) d\tau + \\ & + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) F_2(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(p, t) = & \sigma_2 s_2(t) h_2(p) + \\ & + c_{12} h_2(p) \int_0^t k_1(\tau) F_1(t - \tau) d\tau + \\ & + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int \Phi_2(p', t - \tau) h_{22}\left(\frac{p}{p'}\right) \frac{1}{p'} dp'. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} F_j(t) = & \int F_j(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad \Phi_2(p, t) = \int \Phi_2(\mathbf{r}, p, t) d\mathbf{r}, \\ s_j(t) = & \int s_j(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

и использовано условие нормировки (4) для $W(\Omega)$.

Величины $F_j(t) dt$, $j = 1, 2$ имеют достаточно простой смысл — это количество столкновений, происходящих в интервале времени $(t, t + dt)$ во всем пространстве, при которых частица переходит в состояние i . Аналогичный смысл имеет и величина

$\Phi_2(p, t) dp dt$ — количество столкновений, происходящих в интервале времени $(t, t + dt)$ во всем пространстве, при которых частица переходит в состояние 2 и приобретает импульс, лежащий в интервале $(p, p + dp)$. Из выражения (28) видно, что распределение по импульсам в состоянии 1 будет определяться распределением $h_1(p)$. Этот результат следовало ожидать, так как было предположено, что величина импульса при переходе в состояние 1 не зависит от величины импульса до столкновения. Поэтому никакого блуждания в импульсном пространстве в состоянии 1 не происходит, и спектр определяется начальным распределением. Совершенно по другому обстоит дело для состояния 2. При переходе $2 \rightarrow 2$ приобретаемое значение импульса зависит от предыдущего значения. Это означает, что в импульсном пространстве происходит процесс блужданий, описываемый уравнением (32). Поэтому искомый спектр частиц будет определяться плотностью $\psi_2(p, t)$.

После выполнения преобразования Меллина по импульсам и преобразования Лапласа по времени,

$$f(\mu, \lambda) = \int_0^\infty p^{\mu-1} dp \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(p, t) dt,$$

выражения (28), (29) принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_1(\mu, \lambda) &= h_1(\mu) K_1(\lambda) F_1(\lambda), \\ \psi_2(\mu, \lambda) &= K_2(\lambda) \Phi_2(\mu, \lambda), \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$K_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda} [1 - k_j(\lambda)], \quad j = 1, 2, \tag{34}$$

а интегральные уравнения (30)–(32) сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \sigma_1 s_1(\lambda) + c_{11} k_1(\lambda) F_1(\lambda) + c_{21} k_2(\lambda) F_2(\lambda), \\ F_2(\lambda) &= \sigma_2 s_2(\lambda) + c_{12} k_1(\lambda) F_1(\lambda) + c_{22} k_2(\lambda) F_2(\lambda), \\ \Phi_2(\mu, \lambda) &= \sigma_2 s_2(\lambda) h_2(\mu) + c_{12} h_2(\mu) k_1(\lambda) F_1(\lambda) + \\ &+ c_{22} k_2(\lambda) h_{22}(\mu) \Phi_2(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \frac{\sigma_1 s_1(\lambda)(1 - c_{22} k_2(\lambda)) + \sigma_2 c_{21} s_2(\lambda) k_2(\lambda)}{(1 - c_{11} k_1(\lambda))(1 - c_{22} k_2(\lambda)) - c_{21} c_{12} k_1(\lambda) k_2(\lambda)}, \\ F_2(\lambda) &= \frac{\sigma_2 s_2(\lambda)(1 - c_{11} k_1(\lambda)) + \sigma_1 c_{12} s_1(\lambda) k_1(\lambda)}{(1 - c_{11} k_1(\lambda))(1 - c_{22} k_2(\lambda)) - c_{21} c_{12} k_1(\lambda) k_2(\lambda)}, \\ \Phi_2(\mu, \lambda) &= \frac{h_2(\mu)}{1 - c_{22} h_{22}(\mu) k_2(\lambda)} \frac{(1 - c_{22} k_2(\lambda))(\sigma_2 s_2(\lambda)(1 - c_{11} k_1(\lambda)) + \sigma_1 c_{12} s_1(\lambda) k_1(\lambda))}{(1 - c_{11} k_1(\lambda))(1 - c_{22} k_2(\lambda)) - c_{21} c_{12} k_1(\lambda) k_2(\lambda)}. \end{aligned} \tag{35}$$

Подставляя теперь решения (35) в (33), получаем выражение для искомого распределения по импульсам для трансформанты Лапласа – Меллина:

$$\psi_2(\mu, \lambda) = \frac{(1 - k_2(\lambda)) h_2(\mu)}{\lambda [1 - c_{22} h_{22}(\mu) k_2(\lambda)]} (1 - c_{22} k_2(\lambda)) \frac{(\sigma_2 s_2(\lambda)(1 - c_{11} k_1(\lambda)) + \sigma_1 c_{12} s_1(\lambda) k_1(\lambda))}{(1 - c_{11} k_1(\lambda))(1 - c_{22} k_2(\lambda)) - c_{21} c_{12} k_1(\lambda) k_2(\lambda)}. \tag{36}$$

Подставим теперь конкретный вид для плотностей $h_1(p)$ и $h_2(p)$. Поскольку состояние 1 соответствует состоянию покоя частицы, имеем $h_1(p) = \delta(p)$, где $\delta(p)$ – дельта-функция Дирака. Предположим, что после выхода из состояния покоя частица начинает движение с постоянным импульсом $p = p_0$, следовательно, $h_2(p) = \delta(p - p_0)$. В данной работе ограничимся рассмотрением ускорения частиц при столкновениях. Следуя работе [82], предположим, что плотность вероятности перехода $h_{22}(\zeta)$ имеет степенное распределение

$$h_{22}(\zeta) = \gamma \zeta^{-\gamma-1}, \quad \gamma > 0, \quad \zeta \geq 1, \tag{37}$$

где $\zeta = p/p'$. Далее предположим, что распределения плотностей вероятности времени пребывания в состоянии покоя, $k_1(t)$, и в состоянии движения,

$k_2(t)$, имеют степенные распределения с асимптотиками

$$k_1(t) = \beta t_0^\beta t^{-\beta-1}, \quad 0 < \beta \leq 1, \tag{38}$$

$$t \geq t_0, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$k_2(t) = \alpha \tau_0^\alpha t^{-\alpha-1}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \tag{39}$$

$$t \geq \tau_0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Известно, что если случайная величина τ имеет распределение со степенной асимптотикой $g_\tau(t) \propto t^{-\eta-1}$, то у случайной величины τ конечны статистические моменты порядка $n < \eta$; при $n \geq \eta$ статистические моменты бесконечны. Поэтому при $0 < \alpha \leq 1$ в распределении $k_2(t)$ бесконечны статистические моменты первого и второго порядков, а при $1 < \alpha < 2$ момент первого порядка конечен,

а момент второго порядка бесконечен. Этот факт приводит к необходимости рассмотреть эти два случая отдельно.

Случай $0 < \alpha \leq 1$. Согласно теореме Таубера, поведение функции $g(t)$ при $t \rightarrow \infty$, соответствует поведению трансформанты Лапласа $g(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому, применяя преобразование Лапласа к выражениям (38) и (39) и оставляя в получающемся разложении [12] слагаемые со степенью, не превышающей соответственно β и α , получим

$$k_1(\lambda) \approx 1 - b\lambda^\beta, \quad b = t_0^\beta \Gamma(1 - \beta), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (40)$$

$$k_2(\lambda) \approx 1 - a\lambda^\alpha, \quad a = \tau_0^\alpha \Gamma(1 - \alpha), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (41)$$

Преобразования Меллина функций $h_2(p)$ и $h_{22}(\zeta)$ имеют вид

$$h_2(\mu) = p_0^{\mu-1}, \quad h_{22}(\mu) = \frac{\gamma}{\gamma+1-\mu}, \quad \mu < \gamma+1. \quad (42)$$

Также предположим, что $s_j(t) = \delta(t)$, $j = 1, 2$, т.е. $s_j(\lambda) = 1$.

Подставляя соотношения (40), (41) и (42) в (36), получаем

$$\psi_2(\mu, \lambda) = \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)a\lambda^{\alpha-1}}{c_{21}\gamma+1-\mu-c_{22}\gamma a\lambda^\alpha} \frac{c_{21}c_{12}+c_{22}c_{12}a\lambda^\alpha+c_{21}(c_{11}-\sigma_1)b\lambda^\beta+c_{22}(c_{11}-\sigma_1)ab\lambda^{\alpha+\beta}}{c_{12}a\lambda^\alpha+c_{21}b\lambda^\beta+(c_{11}+c_{22}-1)ab\lambda^{\alpha+\beta}}. \quad (43)$$

Выполнить обратное преобразование Лапласа и Меллина этого выражения в общем случае не удастся. Поэтому рассмотрим некоторые частные случаи, в которых это возможно сделать.

Случай $c_{21} = 0$. В этом случае запрещен переход из состояния движения в состояние покоя. Поэтому, раз попав в состояние движения, частица остается в этом состоянии. Учитывая соотношения (8), из (43) получаем

$$\psi_2(\mu, \lambda) = \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{1-\mu-\gamma a\lambda^\alpha} \frac{a\lambda^{\alpha-1}(c_{12}+(c_{11}-\sigma_1)b\lambda^\beta)}{c_{12}+c_{11}b\lambda^\beta}.$$

Рассмотрим асимптотику $\lambda \rightarrow 0$. В этом случае в числителе и в знаменателе этого выражения необходимо оставить слагаемые, играющие доминирующую роль, т.е. слагаемые с наименьшей степенью λ . Оставляя в числителе слагаемые с множителем $\lambda^{\alpha-1}$, а в знаменателе с множителем λ^0 , имеем

$$\psi_2(\mu, \lambda) \approx \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{1-\mu} a\lambda^{\alpha-1}.$$

Выполнить обратное преобразование Лапласа и Меллина этого выражения не представляет большого труда. Учитывая обратное преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}^{-1}[\lambda^{\alpha-1}] = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

получаем

$$\psi_2(p, t) = \frac{\gamma}{p} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^\alpha. \quad (44)$$

Случай $c_{12} = 0$ соответствует отсутствию перехода частиц из состояния покоя в состояние движения. Поэтому, раз попав в состояние покоя, частица в нем и остается. С учетом соотношений (8) и (10) и оставляя в числителе и знаменателе выражения (43)

только слагаемые с наименьшей степенью λ , получаем

$$\psi_2(\mu, \lambda) \approx \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{c_{21}\gamma+1-\mu} \sigma_2 a\lambda^{\alpha-1}.$$

Обратное преобразование Лапласа и Меллина дает

$$\psi_2(p, t) = \frac{\sigma_2 c_{22} \gamma}{p_0} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^\alpha \left(\frac{p_0}{p}\right)^{c_{21}\gamma+1}. \quad (45)$$

Пусть теперь $c_{21} = c_{12} = 0$, $c_{11} = c_{22} = 1$. В этом случае полностью отсутствуют переходы между состояниями 1 и 2. Из (43) получаем 5

$$\psi_2(\mu, \lambda) \approx \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{1-\mu} \sigma_2 a\lambda^{\alpha-1}.$$

Обратное преобразование Лапласа и Меллина дает

$$\psi_2(p, t) = \frac{\sigma_2 \gamma}{p} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^\alpha. \quad (46)$$

В этом случае можно легко получить спектр для модели блужданий, в которой отсутствует состояние покоя. Для этого достаточно положить $\sigma_2 = 1$.

Как видно из выражений (44) и (46), при отсутствии перехода $2 \rightarrow 1$ спектр частиц имеет степенное распределение с показателем $\mu = 1$. Наличие такого перехода приводит к увеличению показателя спектра на величину $c_{21}\gamma$ (см. (45)), что ведет к укрупнению спектра. Этот эффект легко объяснить. Действительно, если вероятность перехода $2 \rightarrow 1$ отлична от нуля, то это приводит к выводу частиц с импульсом в интервале $(p, p+dp)$ из состояния движения. В результате вероятность обнаружить частицу с большим импульсом уменьшается, что и означает укрупнение спектра.

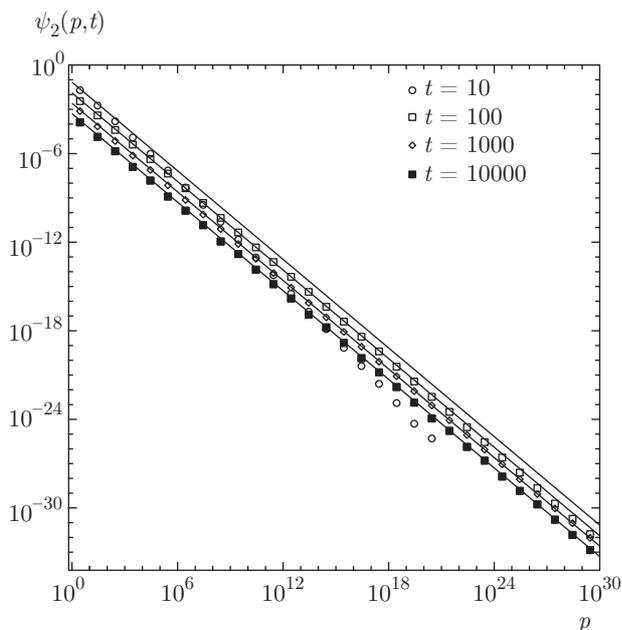


Рис. 1. Распределения по импульсам для случая $0 < \alpha < 1$ и $c_{21} = 0$ при $\alpha = 0.7, \beta = 0.8, \gamma = 0.4, p_0 = 0.6, m = 1$. Сплошные прямые — выражение (44) для времен $t = 10, 100, 1000, 10000$ (сверху вниз), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

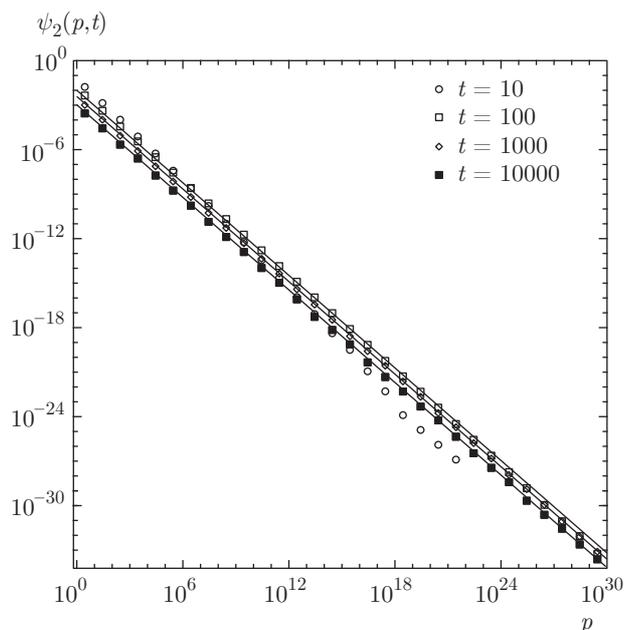


Рис. 2. Распределения по импульсам для случая $0 < \alpha < 1$ и $c_{12} = 0$ при $\alpha = 0.6, \beta = 0.8, \gamma = 0.4, p_0 = 0.6, m = 1$. Сплошные прямые — выражение (45) для времен $t = 10, 100, 1000, 10000$ (сверху вниз), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

Сопоставление полученных спектров (44)–(46) с результатами моделирования методом Монте-Карло приведены на рис. 1–3. Из рисунков можно заключить, что асимптотика достигается при временах $t \geq 100$. При этих временах наблюдается хорошее согласие результатов моделирования с полученными выражениями. Для времен $t \lesssim 10$ асимптотика еще не достигается.

Помимо этого, на рисунках видно, что во всех случаях спектр зависит от времени: с увеличением времени вероятность обнаружить частицу с импульсом в интервале $(p, p + dp)$ уменьшается. Это связано с тем, что в этих случаях отсутствует какой-либо из переходов между состояниями. В первом случае ($c_{21} = 0$) частица не может перейти из состояния движения в состояние покоя. Поэтому, раз попав в состояние движения, частица в нем и останется. Поскольку в состоянии движения при каждом столкновении импульс частицы увеличивается в ζ раз, где величина ζ имеет распределение (37), с увеличением времени вероятность обнаружить частицу в интервале $(p, p + dp)$ уменьшается из-за ухода частиц в область больших импульсов. Так как $c_{12} \neq 0$, мощность источников равна единице. В итоге все частицы, появляющиеся в состоянии покоя, переходят в состояние движения. Во-втором случае ($c_{12} = 0$)

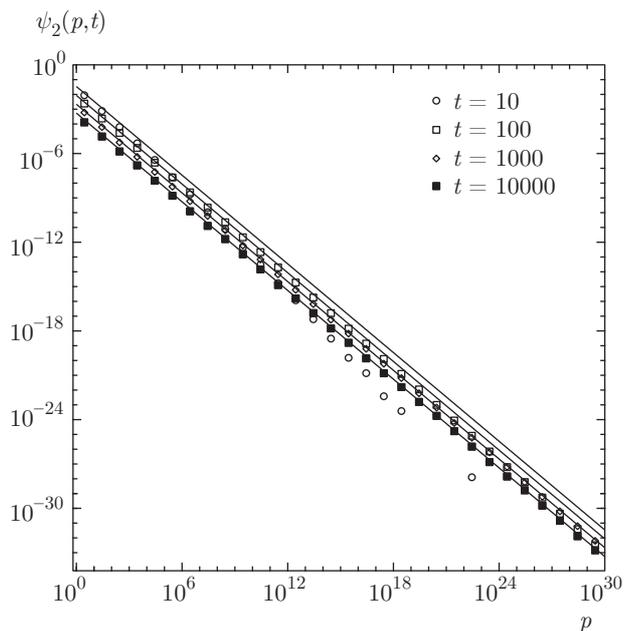


Рис. 3. Распределения по импульсам для случая $0 < \alpha < 1$ и $c_{12} = c_{21} = 0$ при $\alpha = 0.6, \beta = 0.8, \gamma = 0.4, p_0 = 0.6, m = 1$. Сплошные прямые — выражение (46) для времен $t = 10, 100, 1000, 10000$ (сверху вниз), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

ускоряются только частицы, остающиеся в состоянии движения. Доля таких частиц от общего количества равна $\sigma_2 c_{22}$ (см. (45)). В третьем случае ускоряются только частицы, изначально появившиеся в состоянии движения. Следовательно, доля таких частиц равна σ_2 , что соответствует соотношению (46).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда все вероятности переходов $c_{ij} \neq 0$. Поскольку ищется асимптотика $\lambda \rightarrow 0$, в зависимости от величин показателей α и β в (43) доминирующую роль будут играть различные слагаемые. Здесь возможны три ситуации: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$ и $\alpha = \beta$.

При $\alpha < \beta$ в числителе выражения (43) доминирующую роль играют слагаемые с множителями $\lambda^{\alpha-1}$ и $\lambda^{2\alpha-1}$, а в знаменателе — слагаемые с множителем λ^α . Пренебрегая всеми остальными слагаемыми, получаем

$$\psi_2(\mu, \lambda) \approx \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{c_{21}\gamma+1-\mu} (c_{21}\lambda^{-1} + c_{22}a\lambda^{\alpha-1}).$$

Обратное преобразование Лапласа и Меллина дает

$$\psi_2(p, t) = \frac{c_{22}\gamma}{p_0} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{c_{21}\gamma+1} \left(c_{21} + c_{22} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^\alpha\right). \quad (47)$$

В случае $\beta < \alpha$ в числителе выражения (43) доминирующими являются слагаемые с множителями $\lambda^{\alpha-1}$ и $\lambda^{\alpha+\beta-1}$, а в знаменателе — слагаемые с множителем λ^β . Оставляя только эти слагаемые в (43), имеем

$$\psi_2(\mu, \lambda) \approx \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{c_{21}\gamma+1-\mu} \times \left((c_{11} - \sigma_1)a\lambda^{\alpha-1} + \frac{c_{12}a}{b}\lambda^{\alpha-\beta-1} \right).$$

Обратное преобразование Лапласа и Меллина дает

$$\psi_2(p, t) = \frac{c_{22}\gamma}{p_0} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{c_{21}\gamma+1} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^\alpha \left((c_{11} - \sigma_1) + \frac{c_{12}\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta-\alpha)} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{-\beta} \right). \quad (48)$$

В последнем случае, $\alpha = \beta$, оставляя в числителе выражения (43) слагаемые с множителями $\lambda^{\alpha-1}$, $\lambda^{2\alpha-1}$ и $\lambda^{\alpha+\beta-1}$, а в знаменателе — с множителями λ^α и λ^β и полагая, что $k_1(\lambda) \equiv k_2(\lambda)$, получаем

$$\psi_2(\mu, \lambda) \approx \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{c_{21}\gamma+1-\mu} \times \frac{c_{21}c_{12}\lambda^{-1} + (c_{22}c_{12} + c_{21}(c_{11} - \sigma_1))a\lambda^{\alpha-1}}{c_{12} + c_{21}}.$$

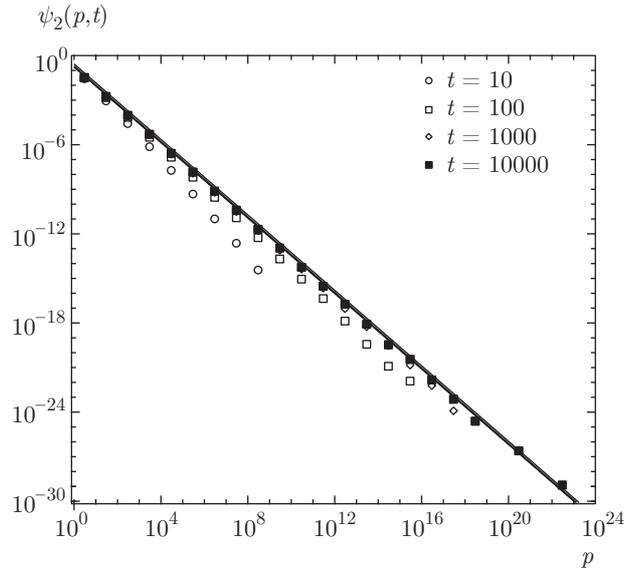


Рис. 4. Распределения по импульсам для случая $0 < \alpha < 1$ и $\alpha < \beta$ при $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$, $\gamma = 0.9$, $p_0 = 0.6$, $m = 1$. Сплошные прямые — выражение (47), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

Обратное преобразование дает

$$\psi_2(p, t) = \frac{c_{22}\gamma}{p_0(c_{12} + c_{21})} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{c_{21}\gamma+1} \times \left(c_{12}c_{21} + (c_{22}c_{12} + c_{21}(c_{11} - \sigma_1)) \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^\alpha \right). \quad (49)$$

На рис. 4 приведены результаты сравнения спектров для случая $\alpha < \beta$, полученных методом Монте-Карло и по формуле (47). Из этого выражения и из рисунка видно, что в данном случае спектр не зависит от времени. Причину такого поведения можно понять, проанализировав процесс блужданий. Частица может появиться в состоянии движения в начальный момент времени с вероятностью σ_2 . Ее начальный импульс равен p_0 . Так как в рассматриваемом случае все вероятности переходов не равны нулю, после этого с вероятностью c_{22} она может продолжить движение, увеличивая свой импульс при каждом столкновении, согласно распределению (37). При этом в любой момент времени с вероятностью c_{21} она может перейти в состояние покоя с полной потерей приобретенного импульса. После некоторого времени пребывания в состоянии покоя с вероятностью c_{12} частица может возвратиться в состояние движения. При этом ее импульс станет равен начальному значению p_0 , после чего процесс ускорения может повториться.

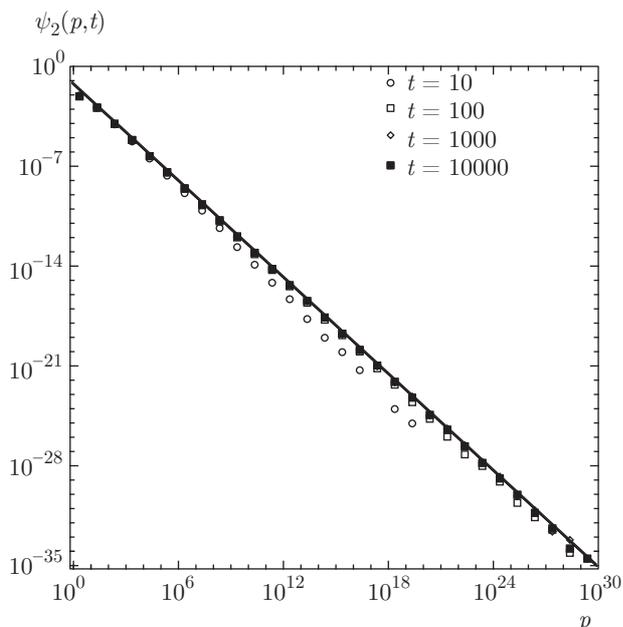


Рис. 5. Распределения по импульсам для случая $0 < \alpha < 1$ и $\alpha = \beta$ при $\alpha = 0.7, \beta = 0.7, \gamma = 0.4, p_0 = 0.6, m = 1$. Сплошные прямые — выражение (49), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

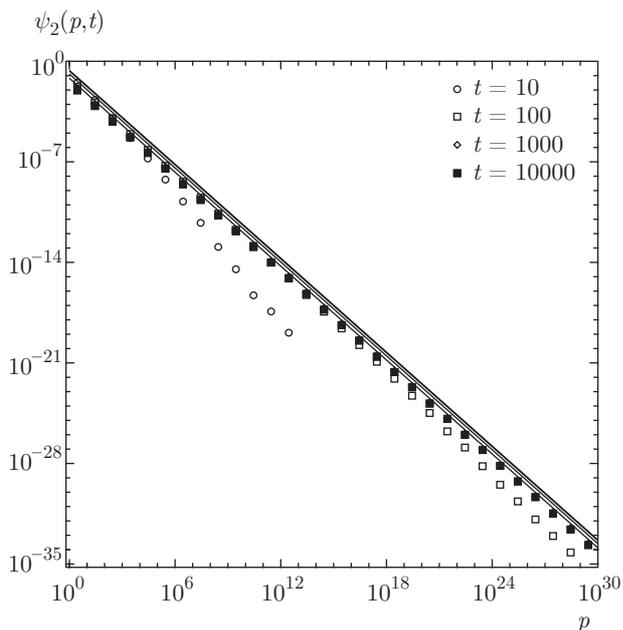


Рис. 6. Распределения по импульсам для случая $0 < \alpha < 1$ и $\beta < \alpha$ при $\alpha = 0.8, \beta = 0.5, \gamma = 0.9, p_0 = 0.6, m = 1$. Сплошные прямые — выражение (48), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

Таким образом, переход частицы из состояния покоя в состояние движения эквивалентен источнику частицы в произвольный момент времени. Мощность этого источника определяется количеством частиц, находящихся в состоянии покоя. Так как рассматривается случай $\alpha < \beta$, время пребывания частицы в состоянии движения значительно больше времени покоя частиц. Поэтому количество частиц в состоянии покоя будет определяться долей частиц, перешедших туда из состояния движения, т.е. вероятностью c_{21} , что и подтверждается формулой (47). Как видно, в этом выражении доминирующим является первое слагаемое в скобках, равное c_{21} . Если в этом выражении положить $c_{21} = 0$, то получаемое выражение в точности совпадает с (44). В этом случае спектр начинает зависеть от времени. Аналогичное, стационарное поведение спектра наблюдается и в случае $\alpha = \beta$ (см. рис. 5). В случае $\beta < \alpha$, как видно из (48) и на рис. 6, спектр не является стационарным. Однако, из-за того что время пребывания в состоянии покоя больше времени движения, эта зависимость выражена слабо. При $c_{12} = 0$ формула (48) в точности совпадает с (45).

Случай $1 < \alpha < 2$. В данном случае у распределения $k_2(t)$ существует математическое ожидание. Преобразование Лапласа этого распределения [12] принимает вид

$$k_2(\lambda) \approx 1 - m_1\lambda + m_2\lambda^\alpha, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (50)$$

где

$$m_1 = \frac{\alpha\tau_0}{\alpha - 1}, \quad m_2 = \frac{\tau_0^\alpha \Gamma(2 - \alpha)}{\alpha - 1}.$$

Подставляя выражения (50), (40), (42) в (36), получаем

$$\begin{aligned} \psi_2(\mu, \lambda) = & \frac{(m_1 - m_2\lambda^{\alpha-1})p_0^{\mu-1}(\gamma + 1 - \mu)}{c_{21}\gamma + 1 - \mu + c_{22}m_1\gamma\lambda - c_{22}\gamma m_2\lambda^\alpha} \times \\ & \times [c_{12}c_{21} + c_{21}(c_{11} - \sigma_1)b\lambda^\beta + c_{12}c_{22}m_1\lambda + \\ & + c_{22}(c_{11} - \sigma_1)m_1b\lambda^{\beta+1} - c_{12}c_{22}m_2\lambda^\alpha + \\ & + c_{22}m_2(c_{11} - \sigma_1)b\lambda^{\alpha+\beta}] \times \\ & \times [c_{12}m_1\lambda - c_{12}m_2\lambda^\alpha + c_{21}b\lambda^\beta + (1 - c_{12} - c_{21}) \times \\ & \times (m_1b\lambda^{\beta+1} - m_2b\lambda^{\alpha+\beta})]^{-1}. \quad (51) \end{aligned}$$

Выполнить обратное преобразование Лапласа и Меллина в общем случае не удастся. Поэтому, как это было сделано ранее, рассмотрим частные случаи. При $c_{21} = 0$ с учетом соотношений (8) из (51) получаем

$$\begin{aligned} \psi_2(\mu, \lambda) = & \frac{(m_1 - m_2\lambda^{\alpha-1})p_0^{\mu-1}(\gamma + 1 - \mu)}{1 - \mu + m_1\gamma\lambda - \gamma m_2\lambda^\alpha} \times \\ & \times [c_{12}m_1\lambda + (c_{11} - \sigma_1)m_1b\lambda^{\beta+1} - \\ & - c_{12}m_2\lambda^\alpha + (c_{11} - \sigma_1)bm_2\lambda^{\alpha+\beta}] \times \\ & \times [c_{12}m_1\lambda - c_{12}m_2\lambda^\alpha + c_{11}m_1b\lambda^{\beta+1} - c_{11}m_2b\lambda^{\alpha+\beta}]^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку нас интересует асимптотика при $\lambda \rightarrow 0$, в числителе и в знаменателе второго множителя можно оставить только слагаемые с наименьшей степенью λ , а в первом множителе — слагаемые с показателем степени λ , не превосходящим $\alpha - 1$:

$$\psi_2(\mu, \lambda) \approx \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma+1-\mu)}{1-\mu} (m_1 - m_2\lambda^{\alpha-1}).$$

Обратное преобразование Лапласа и Меллина дает

$$\psi_2(p, t) = \frac{\gamma}{p} \left(\frac{\alpha\tau_0}{\alpha-1} \delta(t) + \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^\alpha \right). \quad (52)$$

Аналогичным образом получаются асимптотики при $c_{12} = 0$,

$$\begin{aligned} \psi_2(p, t) = & \frac{c_{22}\gamma}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{c_{21}\gamma+1} \times \\ & \times \sigma_2 \left(\frac{\alpha\tau_0}{\alpha-1} \delta(t) + \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^\alpha \right), \quad (53) \end{aligned}$$

и при $c_{21} = 0, c_{12} = 0$,

$$\psi_2(p, t) = \frac{\gamma}{p} \sigma_2 \left(\frac{\alpha\tau_0}{\alpha-1} \delta(t) + \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^\alpha \right). \quad (54)$$

В случае, когда $c_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2$ наименьшими показателями степени λ в (51) являются β и $\alpha - 1$. Оставляя только слагаемые, степень λ которых не превосходит этих значений, получаем

$$\begin{aligned} \psi_2(\mu, \lambda) \approx & \frac{p_0^{\mu-1}(\gamma + 1 - \mu)}{c_{21}\gamma + 1 - \mu} (m_1 - m_2\lambda^{\alpha-1}) \times \\ & \times \left(\frac{c_{12}}{b} \lambda^{-\beta} + (c_{11} - \sigma_1) \right). \end{aligned}$$

Обратное преобразование Лапласа и Меллина дает

$$\begin{aligned} \psi_2(p, t) = & \frac{c_{22}\gamma}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{c_{21}\gamma+1} \times \\ & \times \left(\frac{\alpha\tau_0(c_{11} - \sigma_1)}{\alpha - 1} \delta(t) + (c_{11} - \sigma_1) \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^\alpha + \right. \\ & + \frac{c_{12}\alpha}{(\alpha - 1)\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\beta)} \frac{\tau_0}{t} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{-\beta} - \\ & \left. - \frac{c_{12}\Gamma(2 - \alpha)}{(\alpha - 1)\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 + \beta - \alpha)} \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^\alpha \left(\frac{t_0}{t} \right)^{-\beta} \right). \quad (55) \end{aligned}$$

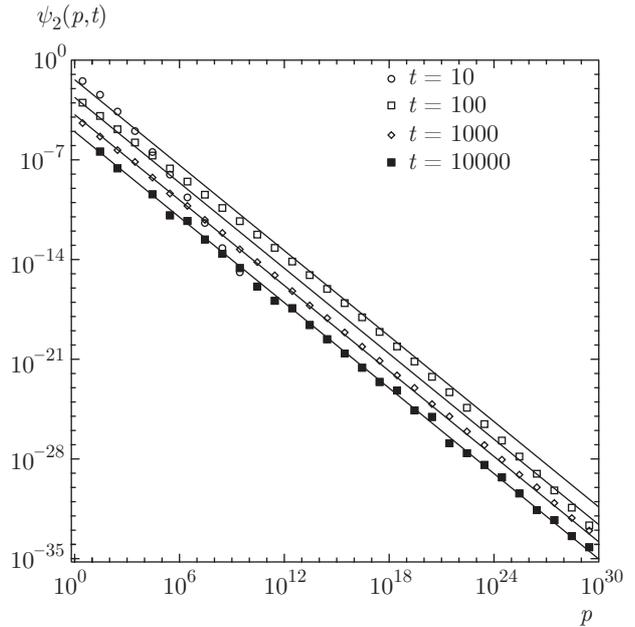


Рис. 7. Распределения по импульсам для случая $1 < \alpha < 2$ и $c_{21} = 0$ при $\alpha = 1.2, \beta = 0.8, \gamma = 1.2, p_0 = 0.6$. Сплошные прямые — выражение (52) для времен $t = 10, 100, 1000, 10000$, точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

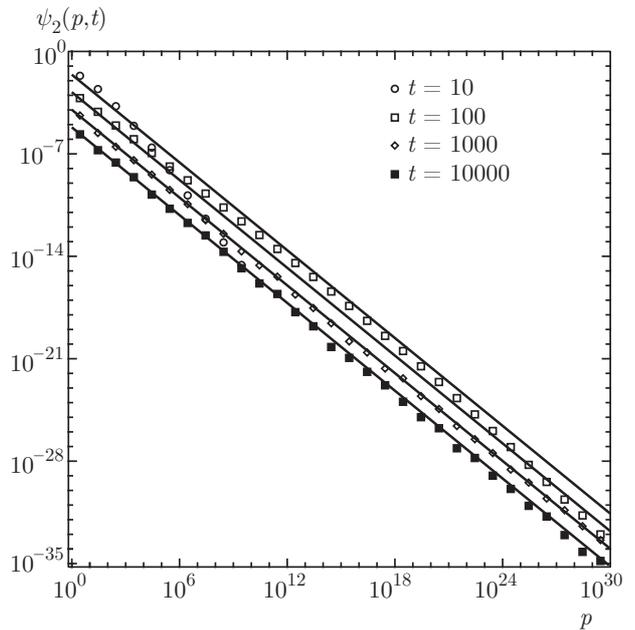


Рис. 8. Распределения по импульсам для случая $1 < \alpha < 2$ и $c_{12} = 0$ при $\alpha = 1.2, \beta = 0.8, \gamma = 1.2, p_0 = 0.6$. Сплошные прямые — выражение (53) для времен $t = 10, 100, 1000, 10000$, точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

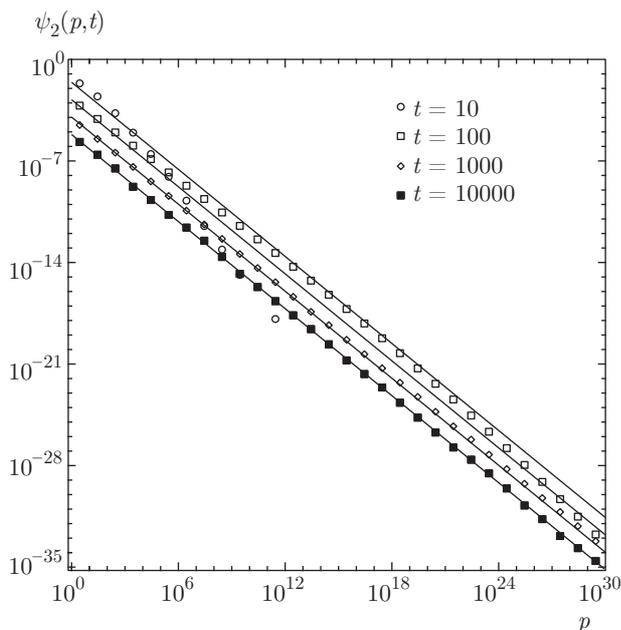


Рис. 9. Распределения по импульсам для случая $1 < \alpha < 2$ и $c_{12} = c_{21} = 0$ при $\alpha = 1.2, \beta = 0.8, \gamma = 1.2, p_0 = 0.6$. Сплошные прямые — выражение (54) для времен $t = 10, 100, 1000, 10000$, точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

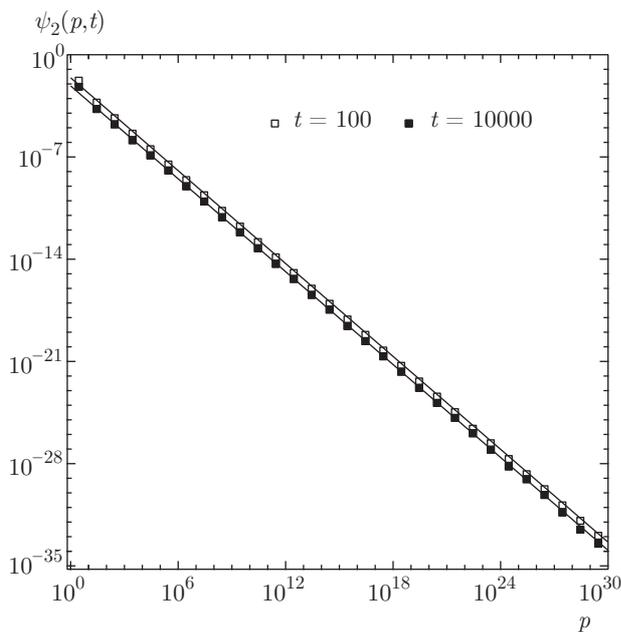


Рис. 10. Распределения по импульсам для случая $1 < \alpha < 2$ и $\alpha = 1.3, \beta = 0.7, \gamma = 0.3, p_0 = 0.6$. Сплошные прямые — выражение (55) для времен 100, 10000, точки — результаты моделирования методом Монте-Карло для указанных времен

Как видно из полученных выражений (52)–(55) у всех спектров наблюдается зависимость от времени. Это подтверждается и результатами моделирования методом Монте-Карло, представленными на рис. 7–10. При этом, как и в случае $0 < \alpha < 1$, когда какой-нибудь из переходов между двумя состояниями отсутствует ($c_{ij} = 0, i \neq j$), то зависимость от времени выражена более сильно, чем в случае $c_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2$.

4. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ

Рассмотрим теперь пространственное распределение частиц. Для упрощения задачи рассмотрим одномерный случай. Предположим, что блуждания происходят вдоль оси x . В этом случае функция $W(\Omega)$ принимает вид

$$W(\Omega) = W(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta} (\omega_1 \delta(\varphi) + \omega_2 \delta(\varphi - \pi)) \delta(\theta - \pi/2), \quad (56)$$

где ω_1 и ω_2 — вероятности движения соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси x и $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Подставляя (56) в (20)–(22) и учитывая, что

$$\Omega = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\},$$

$$F_1(\mathbf{r}, t) = F_1(x, y, z, t), \quad \Phi_2(\mathbf{r}, p, t) = \Phi_2(x, y, z, p, t),$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

получим систему уравнений для $F_1(x, y, z, t)$ и $\Phi_2(x, y, z, p, t)$. Так как рассматриваются блуждания вдоль оси x , то имеем

$$F_1(x, y, z, t) = F_1(x, t) \delta(y) \delta(z),$$

$$\Phi_2(x, y, z, p, t) = \Phi_2(x, p, t) \delta(y) \delta(z),$$

$$s_1(x, y, z, t) = s_1(x, t) \delta(y) \delta(z).$$

Переход к одномерным величинам осуществляется при помощи интегрирования по y и z :

$$F_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x, y, z, t) dy dz,$$

$$\Phi_2(x, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(x, y, z, p, t) dy dz.$$

В результате система (20)–(22) принимает вид

$$\begin{aligned}
 F_1(x, t) &= \sigma_1 s_1(x, t) + c_{11} \int_0^t k_1(\tau) d\tau \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty \left[\omega_1 F_1 \left(x - \frac{p'}{m} \tau, t - \tau \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \omega_2 F_1 \left(x + \frac{p'}{m} \tau, t - \tau \right) \right] h_1(p') dp' + \\
 &\quad + c_{21} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int_0^\infty \left[\omega_1 \Phi_2 \left(x - \frac{p'}{m} \tau, p', t - \tau \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \omega_2 \Phi_2 \left(x + \frac{p'}{m} \tau, p', t - \tau \right) \right] dp', \\
 \Phi_2(x, p, t) &= \sigma_2 s_2(x, t) h_2(p) + c_{12} h_2(p) \int_0^t k_1(\tau) d\tau \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty \left[\omega_1 F_1 \left(x - \frac{p'}{m} \tau, t - \tau \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \omega_2 F_1 \left(x + \frac{p'}{m} \tau, t - \tau \right) \right] h_1(p') dp' + \\
 &\quad + c_{22} \int_0^t k_2(\tau) d\tau \int_0^p \left[\omega_1 \Phi_2 \left(x - \frac{p'}{m} \tau, p', t - \tau \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \omega_2 \Phi_2 \left(x + \frac{p'}{m} \tau, p', t - \tau \right) \right] h_{22} \left(\frac{p}{p'} \right) \frac{1}{p'} dp'.
 \end{aligned}$$

Здесь мы исключили из рассмотрения уравнение для $F_2(x, t)$, так как для получения пространственного распределения эта величина нам не понадобится. Далее применим к полученной системе преобразование Фурье – Лапласа:

$$f(k, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{ikx - \lambda t} f(x, t) dt. \quad (57)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
 F_1(k, \lambda) &= \sigma_1 s_1(k, \lambda) + \\
 &\quad + c_{11} F_1(k, \lambda) \int_0^\infty W_1(k, p', \lambda) h_1(p') dp' + \\
 &\quad + c_{21} \int_0^\infty \Phi_2(k, p', \lambda) W_2(k, p', \lambda) dp', \quad (58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(k, p, \lambda) &= h_2(p) \left(\sigma_2 s_2(k, \lambda) + \right. \\
 &\quad \left. + c_{12} F_1(k, \lambda) \int_0^\infty W_1(k, p', \lambda) h_1(p') dp' \right) + \\
 &\quad + c_{22} \int_0^p W_2(k, p', \lambda) \Phi_2(k, p', \lambda) h_{22} \left(\frac{p}{p'} \right) \frac{1}{p'} dp', \quad (59)
 \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$W_j(k, p, \lambda) = \omega_1 k_j \left(\lambda - ik \frac{p}{m} \right) + \omega_2 k_j \left(\lambda + ik \frac{p}{m} \right),$$

$j = 1, 2$.

В общем случае решить систему уравнений (58), (59) пока не удастся. Поэтому в качестве примера рассмотрим частный случай, когда можно выполнить интегрирование в (59). Предположим, что в состоянии 1 частица покоится, а в состоянии 2 находится в движении с постоянным импульсом p_0 без ускорения. Это означает, что при переходе $2 \rightarrow 2$ импульс частицы не изменяется, т. е. $p/p' = 1$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 h_1(p) &= \delta(p), \quad h_2(p) = \delta(p - p_0), \\
 h_{22}(p/p') &= \delta(p/p' - 1). \quad (60)
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (58), (59) и учитывая, что

$$\int_0^\infty W_1(k, p', \lambda) \delta(p') dp' = k_1(\lambda),$$

находим решение этой системы уравнений:

$$F_1(k, \lambda) = \frac{\sigma_1 s_1(k, \lambda) [1 - c_{22} W_2(k, p_0, \lambda)] + \sigma_2 c_{21} s_2(k, \lambda) W_2(k, p_0, \lambda)}{(1 - c_{11} k_1(\lambda))(1 - c_{22} W_2(k, p_0, \lambda)) - c_{12} c_{21} k_1(\lambda) W_2(k, p_0, \lambda)}, \quad (61)$$

$$\Phi_2(k, p, \lambda) = \frac{\delta(p - p_0)}{1 - c_{22} W_2(k, p, \lambda)} \frac{(1 - c_{22} W_2(k, p_0, \lambda)) (\sigma_2 s_2(k, \lambda) [1 - c_{11} k_1(\lambda)] - \sigma_1 c_{12} s_1(k, \lambda) k_1(\lambda))}{(1 - c_{11} k_1(\lambda))(1 - c_{22} W_2(k, p_0, \lambda)) - c_{12} c_{21} k_1(\lambda) W_2(k, p_0, \lambda)}. \quad (62)$$

Как уже указывалось ранее, величины $F_1(k, \lambda)$ и $\Phi_1(k, p, \lambda)$ определяют скорости переходов в соответствующее состояние. Плотности распределения даются выражениями (23) и (24). Переход к одномерным плотностям осуществляется так же, как и для функций $F_j(\mathbf{r}, t)$. Подставим (56) в (23), (24) и проинтегрируем по $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Учтем, что рассматриваются блуждания вдоль оси x . В этом случае плотности могут быть представлены в виде

$$\rho_j(x, y, z, t) = \psi_j(x, t)\delta(y)\delta(z).$$

Одномерные плотности получаются путем интегрирования:

$$\rho_j(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \rho_j(x, y, z, t) dy dz, \quad j = 1, 2.$$

В результате получаем

$$\rho_1(x, t) = \int_0^t K_1(\tau) d\tau \int \left[\omega_1 F_1\left(x - \frac{p}{m}\tau, t - \tau\right) + \omega_2 F_1\left(x + \frac{p}{m}\tau, t - \tau\right) \right] h_1(p) dp,$$

$$\rho_2(x, t) = \int_0^t K_2(\tau) d\tau \int \left[\omega_1 \Phi_2\left(x - \frac{p}{m}\tau, t - \tau\right) + \omega_2 \Phi_2\left(x + \frac{p}{m}\tau, t - \tau\right) \right] dp.$$

Подставляя теперь соотношения (60) в эти выражения и применяя к получившимся выражениям преобразование Фурье – Лапласа (57), получаем

$$\rho_1(k, \lambda) = K_1(\lambda)F_1(k, \lambda),$$

$$\rho_2(k, \lambda) = \int \left(\omega_1 K_2\left(\lambda - ik\frac{p}{m}\right) + \omega_2 K_2\left(\lambda + ik\frac{p}{m}\right) \right) \Phi_2(k, p, \lambda) dp.$$

Подставляя сюда (61), (62) и учитывая (34), получаем

$$\rho_1(k, \lambda) = \frac{1 - k_1(\lambda)}{\lambda} \frac{\sigma_1 s_1(k, \lambda) [1 - c_{22}W_2(k, p_0, \lambda)] + \sigma_2 c_{21} s_2(k, \lambda) W_2(k, p_0, \lambda)}{(1 - c_{11}k_1(\lambda))(1 - c_{22}W_2(k, p_0, \lambda)) - c_{12}c_{21}k_1(\lambda)W_2(k, p_0, \lambda)}, \quad (63)$$

$$\rho_2(k, \lambda) = \left(\omega_1 \frac{1 - k_2\left(\lambda - ik\frac{p_0}{m}\right)}{\lambda - ik\frac{p_0}{m}} + \omega_2 \frac{1 - k_2\left(\lambda + ik\frac{p_0}{m}\right)}{\lambda + ik\frac{p_0}{m}} \right) \times \frac{\sigma_2 s_2(k, \lambda) [1 - c_{11}k_1(\lambda)] - \sigma_1 c_{12} s_1(k, \lambda) k_1(\lambda)}{(1 - c_{11}k_1(\lambda))(1 - c_{22}W_2(k, p_0, \lambda)) - c_{12}c_{21}k_1(\lambda)W_2(k, p_0, \lambda)}. \quad (64)$$

Отметим, что величины $\rho_1(k, \lambda)$ и $\rho_2(k, \lambda)$ описывают плотности частиц в состояниях соответственно покоя (состояние 1) и движения (состояние 2). Искомая плотность вероятности распределения частиц дается суммой (27).

Можно показать, что в случае, когда распределение $k_2(t)$ имеет вид (39), а блуждания происходят без состояния покоя, полученное решение сводится к известному случаю блужданий Леви с конечной скоростью [11, 14, 19, 20]. Действительно, для исключения состояния покоя из модели в выражениях (63) и (64) положим

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \\ c_{11} = c_{12} = 0, \quad c_{21} = 0, \quad c_{22} = 1.$$

Также предположим, что $s_2(x, t) = \delta(x)\delta(t)$. Это приводит к значению $s_2(k, \lambda) = 1$. В результате получаем

$$\rho_1(k, \lambda) = 0,$$

$$\rho(k, \lambda) \equiv \rho_2(k, \lambda) = \frac{1}{1 - c_{22}W_2(k, p_0, \lambda)} \times \left(\omega_1 \frac{1 - k_2\left(\lambda - ik\frac{p_0}{m}\right)}{\lambda - ik\frac{p_0}{m}} + \omega_2 \frac{1 - k_2\left(\lambda + ik\frac{p_0}{m}\right)}{\lambda + ik\frac{p_0}{m}} \right). \quad (65)$$

В случае $0 < \alpha < 1$ подставим в (65) выражение (41) и получим

$$\rho(k, \lambda) = \frac{\omega_1 \left(\lambda - ik \frac{p_0}{m}\right)^{\alpha-1} + \omega_2 \left(\lambda + ik \frac{p_0}{m}\right)^{\alpha-1}}{\omega_1 \left(\lambda - ik \frac{p_0}{m}\right)^\alpha + \omega_2 \left(\lambda + ik \frac{p_0}{m}\right)^\alpha}. \quad (66)$$

Это выражение полностью совпадает с результатом, полученным в работах [11, 19, 20]. Принимая во вни-

мание, что множитель $(\lambda \pm ikv)^\alpha$ является трансформантой Фурье – Лапласа материальной производной дробного порядка [14, 16],

$$\begin{aligned} (\lambda \pm ikv)^\alpha \hat{f}(k, \lambda) &= \\ &= \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty e^{ikx - \lambda t} f(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha dx, \end{aligned}$$

получаем, что процесс описывается дробно-дифференциальным уравнением [15–17, 19]

$$\left[\omega_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha + \omega_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\right] \rho(x, t) = \left[\omega_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-1} + \omega_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-1}\right] \delta(x) \delta(t),$$

где $v = p_0/m$. Деля в (66) замену переменной $s = ik$, можно провести обратное преобразование при помощи метода, описанного в работе [24] (см. также [11]). В результате имеем

$$\rho(x, t) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi vt} \frac{\omega_1 \omega_2 \left(1 - \left(\frac{x}{vt}\right)^2\right)^{\alpha-1}}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{x}{vt}\right)^{2\alpha} + \omega_2^2 \left(1 + \frac{x}{vt}\right)^{2\alpha} + 2\omega_1 \omega_2 \left(1 - \left(\frac{x}{vt}\right)^2\right) \cos(\pi\alpha)}. \quad (67)$$

Для случая $1 < \alpha < 2$, подставляя (50) в (65) и рассматривая асимптотику $\lambda \rightarrow 0, k \rightarrow 0, |\lambda/kv| \rightarrow 0$, получаем

$$\rho(k, \lambda) \approx \frac{1}{\lambda + ikv(\omega_2 - \omega_1) - \frac{m_2}{m_1} (\omega_1 (-ikv)^\alpha + \omega_2 (ikv)^\alpha)},$$

где также обозначено $v = p_0/m$. Выполняя обратное преобразование Лапласа по переменной λ и проводя некоторые преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \rho(k, t) &= \exp \left\{ ikv(\omega_1 - \omega_2)t - \right. \\ &\quad \left. - |k|^\alpha \frac{m_2}{m_1} v^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - 1)\right) t \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - i(\omega_1 - \omega_2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sign} k\right) \right\}. \quad (68) \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с характеристической функцией устойчивого закона [83]

$$\begin{aligned} \hat{g}(k; \alpha, \beta, \gamma, \eta) &= \\ &= \exp \left\{ ik\eta\gamma - \eta|k|^\alpha \left(1 - \beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \operatorname{sign} k\right) \right\}, \end{aligned}$$

видим, что выражение (68) является устойчивым законом с параметрами

$$\beta = \omega_1 - \omega_2, \quad \eta = D_\alpha t, \quad \gamma = v(\omega_1 - \omega_2)/D_\alpha,$$

где

$$D_\alpha = \frac{m_2}{m_1} v^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - 1)\right).$$

Выполняя обратное преобразование Фурье (68), получаем выражение для плотности распределения:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{(D_\alpha t)^{1/\alpha}} g\left((x - \beta vt)(D_\alpha t)^{-1/\alpha}; \alpha, \beta, 0, 1\right),$$

где $g(x; \alpha, \beta, 0, 1)$ – плотность распределения вероятности стандартного устойчивого закона. Этот результат в точности совпадает с выражением, полученным в работе [19]. Учитывая, что функция плотности распределения вероятности устойчивого закона является решением дробно-дифференциального уравнения диффузии [84], приходим к выводу, что в данном случае процесс описывается дробным уравнением диффузии.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным отличием рассматриваемой модели от уже существующих моделей блужданий Леви является введение в рассмотрение процесса ускорения частиц. Использованный подход вывода кинетических уравнений приводит к разделению исходного

уравнения (1) на систему из n уравнений (6), позволяющую получить распределения частиц в j -м состоянии ($j = 1, \dots, n$) в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. В данной работе мы ограничились исследованием модели блужданий с двумя состояниями: движением с конечным импульсом p , имеющим начальное распределение $h_1(p)$ (состояние 1), и состоянием ускорения с распределением начального импульса $h_2(p)$ и мультипликативным законом ускорения $p = p'\zeta$, где p' и p — импульсы частицы до и после столкновения, а случайная величина ζ распределена по закону (37). Система уравнений, описывающая этот процесс блужданий имеет вид (20)–(22). В частном случае $h_1(p) = \delta(p)$ состояние 1 сводится к состоянию покоя, а модель — к блужданиям Леви с ловушками и ускорением.

Оказалось, что система уравнений (20)–(22) допускает интегрирование по пространственной переменной \mathbf{r} . Это позволило упростить исходную систему уравнений и вычислить распределение по импульсам. Точное решение (36) этой системы удается получить в терминах преобразования Лапласа и Меллина. Получить обратное преобразование Лапласа и Меллина этого выражения в общем случае не удается; были рассмотрены частные случаи. Получены асимптотические (при $t \rightarrow \infty$) спектры при различных значениях коэффициента c_{ij} . Установлено, что все полученные спектры имеют степенной вид $\psi_2(p) \propto p^{-1-c_{21}\gamma}$, где γ характеризует закон перераспределения по импульсам (37), а c_{21} — вероятность ухода из состояния ускорения. Также следует отметить, что в случае, когда $c_{ij} \neq 0$ и $\alpha \leq \beta$, спектры не зависят от времени, т.е. являются стационарными. Действительно, при $\alpha < \beta$ распределение времени пребывания в состоянии движения имеет более «тяжелый хвост», чем распределение времени пребывания в состоянии покоя. Это означает, что вероятность обнаружить частицу в состоянии движения больше, чем в состоянии покоя. В результате в процессе движения с вероятностью c_{21} частица может перейти в состояние покоя. При этом она полностью теряет приобретенный импульс. После этого через некоторое время эта частица с вероятностью c_{12} вновь переходит в состояние ускорения с начальным импульсом p_0 . Так как $\beta \leq \alpha$, вероятность вернуться в процесс ускорения оказывается большей или равной вероятности обратного процесса. Поскольку возвращение в состояние ускорения происходит в произвольные моменты времени, такой процесс аналогичен постоянно действующему источнику, что и приводит к появлению стационарного спектра.

Система уравнений (20)–(22) позволяет также найти и пространственное распределение частиц. Однако получить решение этой системы в общем случае пока не удается. Рассмотрение частного случая — одномерных блужданий с фиксированной скоростью без ловушек — показало, что при этом система уравнений сводится к изученному ранее в работах [12, 15, 16, 19–21, 26, 34] случаю блужданий с фиксированной скоростью. В случае $0 < \alpha < 1$ процесс блужданий описывается дробно-дифференциальным обобщением телеграфного уравнения [15], а его решение (67) имеет W -образную или U -образную форму. В случае $1 < \alpha < 2$ процесс описывается дробно-дифференциальным обобщением уравнения диффузии, а его решение выражается через плотность распределения вероятности устойчивого закона.

Возвращаясь к вопросу о возможном применении рассматриваемой модели для описания ускорения космических лучей, затронутому во Введении, следует также отметить, что на сегодняшний день основным источником космических лучей считаются сверхновые, а основным механизмом ускорения космических лучей в Галактике является диффузионный механизм ускорения на фронтах ударных волн, образующихся при взрывах сверхновых. В результате, распространяясь в Галактике, космические лучи сталкиваются со сверхновыми и при таких столкновениях приобретают энергию, что и приводит к их ускорению [80, 85]. При этом спектр приобретаемой энергии имеет степенной вид типа (37). Кроме того, имеются экспериментальные подтверждения фрактального распределения вещества в Галактике [54–57], что приводит к формированию степенных распределений пробегов космических лучей. Как видно, исследуемая в настоящей работе модель блужданий находится в соответствии с экспериментальными фактами и теоретическими представлениями о процессе распространения и ускорения космических лучей. Это позволяет в дальнейшем использовать разработанную модель для описания ускорения космических лучей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 18-51-53018, 16-04-00504).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. Montroll and G. H. Weiss, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).
2. H. Scher and M. Lax, Phys. Rev. B **7**, 4491 (1973).

3. H. Scher and M. Lax, Phys. Rev. B **7**, 4502 (1973).
4. J. Klafter, A. Blumen, and M. F. Shlesinger, Phys. Rev. A **35**, 3081 (1987).
5. В. М. Золотарев, В. В. Учайкин, В. В. Саенко, ЖЭТФ **115**, 1411 (1999).
6. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, ЖЭТФ **121**, 299 (2002).
7. В. В. Учайкин, И. В. Яровикова, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **43**, 1536 (2003).
8. В. В. Учайкин, Письма в ЖЭТФ **91**, 115 (2010).
9. M. F. Shlesinger, B. J. West, and J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **58**, 1100 (1987).
10. V. V. Uchaikin, Physica A **255**, 65 (1998).
11. D. Froemberg, M. Schmiedeberg, E. Barkai, and V. Yu. Zaburdaev, Phys. Rev. E **91**, 022131 (2015).
12. V. V. Saenko, Physica A **444**, 765 (2016).
13. V. Yu. Zaburdaev, J. Stat. Phys. **123**, 871 (2006).
14. I. M. Sokolov and R. Metzler, Phys. Rev. E **67**, 010101(R) (2003).
15. V. V. Uchaikin and R. T. Sibatov, Grav. and Cosmol. **18**, 122 (2012).
16. V. V. Uchaikin and R. T. Sibatov, J. Phys. A **44**, 145501 (2011).
17. В. В. Учайкин, УФН **183**, 1175 (2013).
18. V. V. Uchaikin, R. T. Sibatov, and A. N. Byzykchi, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **79**, 592 (2015).
19. V. V. Uchaikin, R. T. Sibatov, and A. N. Byzykchi, Comm. Appl. Industr. Math. **6**, e-479 (2014).
20. В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов, Письма в ЖТФ **30**(8), 27 (2004).
21. M. Bologna, G. Ascolani, and P. Grigolini, J. Math. Phys. **51**, 043303 (2010).
22. В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов, ЖЭТФ **136**, 627 (2009).
23. D. Froemberg and E. Barkai, Europ. Phys. J. B **86**, 331 (2013).
24. C. Godrèche and J. M. Luck, J. Stat. Phys. **104**, 489 (2001).
25. M. Magdziarz, W. Szczotka, and P. Zebrowski, J. Stat. Phys. **147**, 74 (2012).
26. M. Magdziarz, H. P. Scheffler, P. Straka, and P. Zebrowski, Stoch. Processes and their Applications **125**, 4021 (2015).
27. M. Magdziarz and T. Zorawik, Phys. Rev. E **94**, 022130 (2016).
28. M. Magdziarz and T. Zorawik, Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul. **48**, 462 (2017).
29. M. Magdziarz, Phys. Rev. E **95**, 022126 (2017).
30. A. Milovanov and L. Zelenyi, Phys. Rev. E **64**, 052101 (2001).
31. V. Yu. Zaburdaev, M. Schmiedeberg, and H. Stark, Phys. Rev. E **78**, 1 (2008).
32. V. Zaburdaev, S. I. Denisov, and P. Hanggi, Phys. Rev. Lett. **106**, 16 (2011).
33. S. I. Denisov, V. Zaburdaev, and P. Hanggi, Phys. Rev. E **85**, 1 (2012).
34. V. Yu. Zaburdaev, S. I. Denisov, and J. Klafter, Rev. Mod. Phys. **87**, 483 (2015).
35. S. A. Trigger, W. Ebeling, G. J. F. Van Heijst et al., Phys. Plasmas **17**, 042102 (2010).
36. A. A. Dubinova and S. A. Trigger, Phys. Lett. A **376**, 1930 (2012).
37. В. Л. Гинзбург, УФН **62**(2), 37 (1957).
38. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН **71**(3), 411 (1960).
39. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, *Происхождение космических лучей*, Изд-во АН СССР, Москва (1963).
40. P. Duffy, J. G. Kirk, Y. A. Gallant, and R. O. Dendy, Astron. Astrophys. **302**, L21 (1995).
41. B. R. Ragot and J. G. Kirk, Astron. Astrophys. **327**, 432 (1997).
42. G. Zimbardo, P. Pommiois, and P. Veltri, Astrophys. J. **639**, L91 (2006).
43. S. Perri and G. Zimbardo, Astrophys. J. **671**, L177 (2007).
44. S. Perri and G. Zimbardo, J. Geophys. Res. **113**, A03107 (2008).
45. S. Perri and G. Zimbardo, Astrophys. J. **693**, L118 (2009).
46. S. Perri and G. Zimbardo, Adv. Space Res. **44**, 465 (2009).
47. T. Sugiyama and D. Shiota, Astrophys. J. **731**, L34 (2011).

48. E. M. Trotta and G. Zimbardo, *Astron. Astrophys.* **530**, A130 (2011).
49. S. Perri, E. Amato, and G. Zimbardo, *Astron. Astrophys.* **596**, A34 (2016).
50. B. R. Ragoth, *Astrophys. J.* **525**, 524 (1999).
51. B. R. Ragoth, *Astrophys. J.* **647**, 630 (2006).
52. B. R. Ragoth, *Astrophys. J.* **645**, 1169 (2006).
53. G. Zimbardo, S. Perri, P. Pommois, and P. Veltri, *Adv. Space Res.* **49**, 1633 (2012).
54. N. Sánchez and E. J. Alfaro, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **178**, 1 (2008).
55. N. Schneider, S. Bontemps, P. Girichidis et al., *Month. Not. Roy. Astron. Soc. Lett.* **453**, L41 (2015).
56. B. F. Elmegreen, *Publ. Astron. Soc. Australia* **15**, 74 (2013).
57. R. de la Fuente Marcos and C. de la Fuente Marcos, *Astron. Astrophys.* **452**, 163 (2006).
58. A. A. Lagutin, *Probl. Atom. Sci. Technol.* **6**, 214 (2001).
59. A. D. Erlykin, A. A. Lagutin, and A. W. Wolfendale, *Astropart. Phys.* **19**, 351 (2003).
60. H. A. Kermani and J. Fatemi, *South African J. Sci.* **107**, 2 (2011).
61. N. Ketabi and J. Fatemi, *Transaction B: Mech. Eng.* **16**, 269 (2009).
62. Yu. E. Litvinenko and F. Effenberger, *Astrophys. J.* **796**, 125 (2014).
63. A. A. Lagutin, Yu. A. Nikulin, and V. V. Uchaikin, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **97**, 267 (2001).
64. A. A. Лагутин, А. Г. Тюменцев, *Изв. РАН, сер. физ.* **67**, 439 (2003).
65. A. A. Lagutin and V. V. Uchaikin, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **201**, 212 (2003).
66. A. A. Lagutin, A. G. Tyumentsev, and A. V. Yushkov, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **175–176**, 555 (2008).
67. А. А. Лагутин, А. Г. Тюменцев, А. В. Юшков, *Изв. РАН, сер. физ.* **71**, 605 (2007).
68. S. Perri and G. Zimbardo, *Astrophys. J.* **750**, 87 (2012).
69. A. Lazarian and H. Yan, *Astrophys. J.* **784**, 38 (2014).
70. В. В. Учайкин, *ЖЭТФ* **143**, 1039 (2013).
71. V. V. Uchaikin, R. T. Sibatov, and V. V. Saenko, *J. Phys.: Conf. Ser.* **409**, 012057 (2013).
72. В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов, В. В. Саенко, *Изв. РАН, сер. физ.* **77**, 688 (2013).
73. G. Zimbardo and S. Perri, *Astrophys. J.* **778**, 35 (2013).
74. S. Perri and G. Zimbardo, *Astrophys. J.* **815**, 75 (2015).
75. S. Perri, G. Zimbardo, F. Effenberger, and H. Fichtner, *Astron. Astrophys.* **578**, A2 (2015).
76. В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов, А. Н. Бызыкчи, *Изв. РАН, сер. физ.* **79**, 646 (2015).
77. V. V. Uchaikin and R. T. Sibatov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **798**, 012029 (2017).
78. V. V. Uchaikin and R. T. Sibatov, *Chaos, Solitons and Fractals* **102**, 197 (2017).
79. A. R. Bell, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **182**, 147 (1978).
80. Е. Г. Бережко, Г. Ф. Крымский, *УФН* **154**(1), 49 (1988).
81. В. В. Учайкин, *Письма в ЖЭТФ* **92**, 226 (2010).
82. A. Wandel, D. Eichler, and J. R. Letaw, *Astrophys. J.* **316**, 676 (1987).
83. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва (1983).
84. В. В. Учайкин, *ЖЭТФ* **115**, 2113 (1999).
85. В. С. Березинский, С. В. Буланов, В. Л. Гинзбург и др., *Астрофизика космических лучей*, под ред. В. Л. Гинзбурга, Наука, Москва (1990).