ЖЭТФ, 2018, том 153, вып. 5, стр. 726–744

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ АТОМОВ В ПОЛЕ ШИРОКОПОЛОСНОГО ОДНОФОТОННОГО ПАКЕТА С УЧЕТОМ НЕВИНЕРОВСКОЙ ДИНАМИКИ

А. И. Трубилко [a*], ***А. М. Башаров*** [b,c**]

[a] *Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России*
196105, Санкт-Петербург, Россия

[b] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»*
123182, Москва, Россия

[c] *Московский физико-технический институт (технический университет)*
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 9 января 2018 г.

Выведено квантовое управляющее кинетическое уравнение для матрицы плотности атомной системы в поле узконаправленного однофотонного широкополосного пакета в условиях, когда последний играет роль термостата. Оно учитывает штарковское взаимодействие атомов с широкополосным полем окружения системы, находящимся в состоянии с нулевой плотностью фотонов, а также взаимодействие широкополосных полей на атомной системе.

DOI: 10.7868/S004445101805005X

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах по квантовой оптике прослеживаются две ярко выраженные тенденции. Одни исследователи используют «готовые» феноменологические основные уравнения для описания той или иной физической ситуации, другие строят модели и выводят основные уравнения более или менее строго, но под рассматриваемую физическую ситуацию. При этом и те, и другие говорят об использовании марковского приближения, которое часто многих исследователей вводит в заблуждение. Одной из причин такого заблуждения является общий вид кинетического уравнения (master equation), описывающего систему (о ней принято говорить как об открытой системе) в марковском приближении. Этот общий вид уже стал широко известным как форма Линдблада. Впервые кинетическое уравнение в такой форме получено в работе [1], где представлен в общем виде, без физической конкретизации задач, производящий оператор непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы открытой системы. Аналогичный результат был также получен авторами [2].

В результате при «феноменологическом» применении кинетического уравнения часто возникают случаи, когда уравнение в форме Линдблада используется в качестве исходного уравнения в постановке и решении задач, которым данное уравнение, мягко говоря, не отвечает и применение к которым не справедливо. На это важное обстоятельство в задачах квантовой оптики обращалось внимание в работах [3, 4]. Например, в [3] указывалось, что кинетическое уравнение в форме Линдблада, справедливое в описании процессов резонансного взаимодействия открытой системы и окружения в присутствии дополнительного поля, при описании взаимодействия в дисперсионном режиме уже неприменимо. Но именно оно используется в разных работах по дисперсионному приближению, например, авторами [5] для описания дисперсионного режима в резонаторе. В работе [6] использовалось феноменологическое кинетическое уравнение в форме Линдблада для описания фазовой релаксации фотонов резонатора. Парадоксальный вывод, который в этой работе сделан, связан с неучтенными слагаемыми исходного кинетического уравнения. Эти слагаемые имеют тот же порядок малости, что и учтенные, и также

* E-mail: trubilko.andrey@gmail.com
** E-mail: basharov@gmail.com

представляются в форме Линдблада. Их можно получить при корректном выводе кинетического уравнения, например, в технике квантовых стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [4] и в представлении эффективного гамильтониана [7].

В настоящее время отмеченный выше «феноменологизм» начинает проявляться и в «обосновании» кинетических уравнений в форме Линдблада в технике СДУ. Дело в том, что при использовании в формулировке задачи случайных дельта-коррелированных процессов в марковском приближении уравнение Шредингера для вектора состояния открытой системы и окружения становится уравнением типа Ланжевена, математический статус которого нуждается в серьезном уточнении. Так появляются в описании взаимодействия частиц с квантованными и классическими широкополосными полями случайные процессы, для корректного оперирования с которыми развит аппарат СДУ. До недавнего времени квантовые СДУ применялись в случае, когда подлежащие описанию процессы могли быть сформулированы в рамках квантового порождающего и уничтожающего процессов. И тогда, начиная с работы [8], использовались квантовые СДУ винеровского типа, которые помогали корректно формулировать задачи взаимодействия широкополосного квантованного электромагнитного поля с атомными и прочими системами в случае ненулевой плотности фотонов (см., например, [9–17], хотя область применения винеровских квантовых СДУ значительно шире). В отмеченных работах использовалась алгебра Гардинера – Коллет [8] для дифференциалов Ито квантовых стохастических процессов. Начиная с работ [18, 19], в квантовой оптике стали применяться квантовые СДУ невинеровского типа, основывающиеся на алгебре Хадсона – Партасарати [20–22] дифференциалов Ито квантовых стохастических процессов. Эта алгебра имеет жесткое ограничение на плотность фотонов широкополосного электромагнитного поля — последняя должна равняться нулю! От алгебры Гардинера – Коллет она отличается учетом квантового считывающего (часто называемого пуассоновским) процесса. Условия применимости квантовых СДУ невинеровского типа и учет квантового считывающего процесса являются весьма нетривиальными [18, 19]. Но в задачах квантовой оптики ограничение формализма нулевой плотностью фотонов весьма неудобно. Поэтому появились предложения по исследованию одновременного воздействия на квантовую частицу широкополосных квантованных полей с нулевой плотностью фотонов и с ограниченным общим числом фотонов [23–26]. Авторы этих работ используют формализм квантовых СДУ невинеровского типа, не определяя условий их применимости. Между тем, при взаимодействии одного атома с указанными полями невинеровское слагаемое квантового СДУ мало для открытых систем и необходима четкая формулировка условий, в которых невинеровское слагаемое, управляемое квантовым считывающим процессом, становится определяющим. Кроме того, использование алгебры Хадсона – Партасарати в стандартных условиях воздействия двух широкополосных полей становится некорректным. Так что физические условия необходимости учета считывающего процесса в работах [23–26] не были представлены, а использованная авторами математика противоречила условиям применимости алгебры квантовых шумовых процессов, использованной в вычислениях.

Постановка задачи, данная в работах [23–26], представляется важной как в общетеоретическом плане, так и для практических задач, например, для задач квантовой информации. Именно поэтому в представляемой здесь статье мы проводим корректный вывод кинетического уравнения квантовой частицы, одновременно взаимодействующей с широкополосным квантованным электромагнитным вакуумным полем с нулевой плотностью фотонов и узконаправленным широкополосным однофотонным источником. При этом в рассмотрение введены дополнительные атомы, т. е. открытая система представляется в виде ансамбля одинаковых атомов, чтобы учет квантового считывающего процесса являлся оправданным, согласно оценкам работ [18, 19].

Резонансное взаимодействие широкополосного однофотонного источника также характеризуется своей иерархией приближений. В данной статье использовано первое приближение этой иерархии, когда при выводе кинетического уравнения излучающей частицы пренебрегается корреляциями между частицей и полем однофотонного широкополосного пакета. Даже в этом случае получается кинетическое уравнение, отличающееся от «феноменологического» подхода работ [23–26].

Следует отметить, что впервые кинетическое уравнение для одиночной квантовой системы, взаимодействующей с однофотонным пакетом, приведено в работе [27]. В этой работе задача решена на основе input-output теории СДУ, а решение получено в виде стохастического винеровского уравнения для движения среднего от операторов квантовых наблюдаемых. Попытки представления уравнения для модели взаимодействия квантовой частицы на основе считывающего процесса [23], как и описание в [24], без физического обоснования его реализации, в условиях, когда алгебры Ито процессов заведомо не существует, не могут быть признаны удовлетворительными.

Среди недавних работ, посвященных выводу кинетических уравнений в интересующем нас случае, следует отметить работы [28–31]. В этих работах корректно обсуждается вывод кинетического уравнения без использования квантовых СДУ, поэтому проблем, связанных с применением алгебры дифференциалов Ито квантовых случайных процессов, не возникает. Но в этих работах нет также и учета слагаемых, определяющих выход за рамки традиционного приближения вращающейся волны и перехода к эффективному гамильтониану [7, 32]. В связи с этим нам представляется актуальным на примере предлагаемого в данной статье вывода кинетического уравнения квантовой частицы, одновременно взаимодействующей с широкополосным квантованным электромагнитным вакуумным полем с нулевой плотностью фотонов и узконаправленным широкополосным однофотонным источником, подчеркнуть также роль представления эффективного гамильтониана в подобных задачах.

Рассматриваемая нами ситуация приводит к необходимости построения квантового СДУ нового типа. Действительно, взаимодействие с широкополосным полем в вакуумном состоянии продуцирует дифференциалы всех стохастических процессов (порождающего, уничтожающего и считывающего), для которых существует алгебра Хадсона – Партасарати. Взаимодействие с широкополосным полем однофотонного пакета (возбужденного поля) порождает только дифференциалы от отрицательно- и положительно-частотных частей оператора напряженности, связанные с операторами рождения и уничтожения, поскольку никакой алгебры для невинеровских процессов широкополосных полей в возбужденном состоянии не существует. Эти обстоятельства приводят к необходимости построения эффективного гамильтониана задачи, порождающего источники стохастических процессов, до слагаемых от разных порядков по константе связи атомной системы с широкополосным однофотонным пакетом и широкополосным полем с нулевой плотностью фотонов. Невинеровская динамика атомов определяется удержанием слагаемых до второго порядка соответствующего параметра связи, а свойства взаимодействия с полем возбуждения описываются слагаемыми гамильтониана только первого порядка константы его связи с атомами. Кроме названных слагаемых, возникает билинейное слагаемое из-за интерференции разных полей на атомной системе, которое продуцирует эффективную связь дифференциалов Ито винеровских стохастических процессов и дифференциалов операторов напряженности возбужденного поля.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 рассмотрена постановка задачи. В разд. 3 на основе унитарного преобразования уравнения Шредингера объединенной системы из атомов и широкополосных полей выведен эффективный гамильтониан задачи. Порождая источники дифференциалов Ито случайных стохастических квантовых процессов, последний служит основой нахождения решения для дифференциала Ито оператора эволюции всей системы; это рассмотрено в разд. 4. При определении инкремента матрицы плотности всей системы и ее усреднении по переменным широкополосных полей в разд. 5 выводится кинетическое управляющее уравнение поведения атомной системы в рассматриваемых условиях.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ансамбль неподвижных атомов, локализованный в области пространства, геометрические размеры которой много меньше длин волн всех электромагнитных полей в задаче. Собственные энергетические состояния i-го атома $|E_j^{(i)}\rangle$, отвечающие значению энергии E_j, будем считать невырожденными. Будем также предполагать, что число атомов N в области их взаимодействия с электромагнитными полями не меняется во времени. Тогда свободный гамильтониан всей атомной системы имеет вид

$$H_a = \sum_{i=1}^{N} H_a^{(i)}, \tag{1}$$

где свободный гамильтониан отдельного атома

$$H_a^{(i)} = \sum_j E_j |E_j^{(i)}\rangle \tag{2}$$

представлен в базисе, проекторы которого обладают свойствами полноты $\sum_j |E_j^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}| = 1$ и ортогональности $\langle E_j^{(i)}|E_k^{(i)}\rangle = \delta_{jk}$.

Пусть на такой атомный ансамбль действует узконаправленный однофотонный широкополосный пакет, операторы рождения $a^\dagger(\omega)$ и уничтожения $a(\omega)$ квазимоды которого отвечают бозонным коммутационным соотношениям $\left[a(\omega), a^\dagger(\omega')\right] = \delta(\omega - \omega')$. Эти же операторы определяют и операторы напряженности однофотонного пакета, которые запишем в виде

$$\epsilon^-(t) = \int d\omega\, \epsilon(\omega) a(\omega) \exp(-i\omega t), \quad \epsilon^+(t) = (\epsilon^-(t))^\dagger.$$

Здесь $\epsilon(\omega)$ характеризуется свойствами источника однофотонного поля, а интегрирование ведется по его спектральной полосе. Для удобства считаем, что в $\epsilon(\omega)$ включен также параметр связи атома и однофотонного поля. Поэтому размерность этой величины не совпадает с размерностью напряженности электрического поля. Свободная энергия такого квантованного пакета задана согласно соотношению

$$H_F = \int d\omega\, \hbar\omega a^\dagger(\omega) a(\omega). \tag{3}$$

Узкая направленность однофотонного пакета позволяет естественным образом отделить его от квантованного поля окружения атома в вакуумном состоянии. Последнее опишем операторами рождения и уничтожения $b^\dagger(\omega), b(\omega)$, которые отвечают коммутационным соотношениям $\left[b(\omega), b^\dagger(\omega')\right] = \delta(\omega - \omega')$. Указанное условие позволяет считать бозонные поля источника и вакуума независимыми и коммутирующими между собой в любой момент времени. Отметим, что аналогичная ситуация может возникать при воздействии на атомы широкополосным полем, полученным в результате смешения на делительной пластинке полей от однофотонного источника и вакуума. Квантованное поле в вакуумном состоянии отвечает свободной энергии

$$H_B = \int d\omega\, \hbar\omega b^\dagger(\omega) b(\omega). \tag{4}$$

Будем считать, что внешние электромагнитные поля взаимодействуют с атомами электродипольно, что описывается следующими операторами атомно полевых взаимодействий:

$$V_1 = -(\epsilon^-(t) + \epsilon^+(t)) \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}|, \tag{5}$$

$$V_2 = -\int d\omega (b^\dagger(\omega) + b(\omega))\Gamma(\omega) \times \\ \times \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}|, \tag{6}$$

где d_{kj} — матричные элементы дипольного момента $d = \sum_{k,j} |E_k^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}|$. Через $\Gamma(\omega)$ обозначен параметр связи атома и широкополосного поля, который в случае обычного трехмерного вакуумного поля определяется соотношением $\Gamma(\omega) = \sqrt{\hbar\omega^3/\pi c^3}$. При записи этих выражений предполагается пренебрежение эффектами вырождения, поляризационными особенностями и эффектами отдачи, кроме того, считается, что уровни энергии атома обладают определенной четностью $\langle E_k^{(i)}|d|E_k^{(i)}\rangle = 0$.

Пусть в атомной системе существует выделенный резонансный переход $|E_1^{(i)}\rangle \to |E_2^{(i)}\rangle$ между двумя рабочими уровнями, частоту которого обозначим как

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}.$$

Выделение некоторого перехода связано, как правило, с возбуждением каким-либо источником состояния $|E_2^{(i)}\rangle$ или с резонансным взаимодействием источника с переходом $|E_1^{(i)}\rangle \to |E_2^{(i)}\rangle$. В условиях, когда квантовая система взаимодействует с широкополосным электромагнитным полем, наличие в ней выделенного перехода приводит к разбиению широкополосного поля на независимые источники. Это обстоятельство ранее учитывалось феноменологически, например, в теории Лакса [33], каждому резонансному переходу отвечает свой источник. Но таких переходов в атоме много и изначально их все учитывать крайне неудобно. Последующий анализ в рамках алгебраической теории возмущений (унитарного преобразования гамильтониана) при применении аппарата квантовых СДУ показывает [7], что из всех независимых шумовых источников вклад в итоговое кинетическое уравнение открытой системы дают лишь такие источники, которые так или иначе связаны с реальным квантовым переходом в открытой системе между заселенными уровнями. Разбиение широкополосного поля на независимые шумовые источники происходит «автоматически» в технике эффективного гамильтониана при применении алгебраической теории возмущений [31]. Основой такого разбиения служит требование отсутствия быстроменяющихся во времени слагаемых в преобразованном гамильтониане открытой системы и окружения в представлении взаимодействия. Поскольку многие исследователи до сих пор основывают свои «феноменологические» модели на приближении вращающейся волны, представляется целесообразным рассмотреть применение алгебраической теории возмущений к поставленной задаче.

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пусть локализованный атомный ансамбль одновременно взаимодействует с двумя квантованными широкополосными полями, одно из которых является вакуумным, а другое — однофотонным волновым пакетом. Известно, что для рассмотрения динамических процессов и, в частности, формулировки условий марковского приближения, необходимо сначала перейти к представлению эффективного гамильтониана или совершить каноническое преобразование исходного гамильтониана. В противном случае все равно придется усреднять быстроменяющиеся во времени слагаемые, что особенно четко видно в представлении взаимодействия в случае резонансных процессов в квантовой оптике. Здесь для описания резонансных процессов в основном используют приближение вращающейся волны, которое, однако, является лишь первым порядком по взаимодействию в алгебраической теории возмущений [7]. Заметим, что формулировка условий отбора слагаемых эффективного гамильтониана в некоторых разделах физики твердого тела отличается от приведенной в работе [7] в силу особенностей процессов взаимодействия (см., например, [34–37]). Однако без перехода к эффективному гамильтониану в теории открытых систем обычно получаются некорректные результаты (примером в оптике могут служить работы [5, 6]). Эти некорректности отчетливо видны при выводе кинетических уравнений в технике СДУ. В работе [38] теоретически изучены две модели воздействия шумового классического поля на двухуровневую систему. В случае перехода к представлению эффективного гамильтониана получаются общеизвестные результаты, тогда как без перехода к такому представлению полученные результаты не отвечают начальной постановке задачи и могут быть лишь интерпретированы как отвечающие весьма специфическому частному случаю резонансного шумового поля. Описание динамики открытой системы при взаимодействии с широкополосным квантованным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов в ряде случаев [18, 19] требует учета слагаемых второго порядка по параметру этого взаимодействия. Это обстоятельство связано со своеобразной алгебраической структурой учитываемых слагаемых в последующей формулировке марковского приближения. Именно поэтому в исследуемой ситуации мы будем строить эффективный гамильтониан задачи до величин второго порядка по взаимодействию системы с вакуумным полем.

Для получения эффективного гамильтониана воспользуемся унитарной симметрией квантовой теории. Тогда аппарат алгебраической теории возмущений [39] возникает естественным образом [32]. Идея метода заключается в получении эффективного гамильтониана задачи определенного вида. Его вид определяется требованием, чтобы при переходе к картине взаимодействия по гамильтониану, отвечающему свободному развитию системы, искомый не содержал быстроосциллирующих по времени слагаемых. Запишем для волновой функции $|\varphi\rangle$ всей системы (атомной системы, однофотонного пакета и вакуумного окружения) уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial|\varphi\rangle}{\partial t} = H|\varphi\rangle, \tag{7}$$

где

$$H = H_a + H_F + H_B + V_1 + V_2 \tag{8}$$

— полный гамильтониан задачи, заданный выражениями (1)–(6). Совершим теперь над волновой функцией $|\varphi\rangle$ унитарное преобразование U, такое что $|\tilde{\varphi}\rangle = U|\varphi\rangle$. Это преобразование также естественно преобразует и гамильтониан (8):

$$\tilde{H} = UHU^\dagger - i\hbar U\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger. \tag{9}$$

В итоге эволюция преобразованной волновой функции системы $|\tilde{\varphi}\rangle$ задана уравнением Шредингера (7), в котором $|\varphi\rangle \to |\tilde{\varphi}\rangle$, $H \to \tilde{H}$. Теперь представим унитарный оператор U через его генератор $\mathcal{S}$:

$$U = \exp(-i\mathcal{S}), \quad \mathcal{S}^\dagger = \mathcal{S}. \tag{10}$$

Используем разложение оператора $\mathcal{A}$ по формуле Бейкера – Хаусдорфа,

$$\exp(-i\mathcal{S})\mathcal{A}\exp(i\mathcal{S}) = \\ = \mathcal{A} + \frac{-i}{1!}[\mathcal{S};\mathcal{A}] + \frac{(-i)^2}{2!}[\mathcal{S};[\mathcal{S};\mathcal{A}]] + \ldots,$$

и представим оператор $\mathcal{S}$ и гамильтониан $\tilde{H}$ в виде разложения в ряд по константам взаимодействия атомной системы с квантованными полями:

$$\begin{gathered}\mathcal{S} = \mathcal{S}^{(10)} + \mathcal{S}^{(01)} + \ldots, \\ \tilde{H} = \tilde{H}^{(00)} + \tilde{H}^{(10)} + \tilde{H}^{(01)} + \ldots\end{gathered} \tag{11}$$

В этих выражениях правый индекс указывает соответствующий порядок разложения по константе связи атомной системы с квантованным полем однофотонного широкополосного пакета, а левый — на порядок разложения по константе связи с широкополосным полем в вакуумном состоянии. Подставим разложения (10) и (11) в (9), используем формулу Бейкера – Хаусдорфа и приравняем слагаемые соответствующих порядков, в результате чего имеем следующие равенства, определяющие $\tilde{H}$ в нулевом и первом порядке:

$$\tilde{H}^{(00)} = H_a + H_F + H_B, \tag{12}$$

$$\tilde{H}^{(10)} = V_1 - i\left[\mathcal{S}^{(10)}; \tilde{H}^{(00)}\right] + \hbar\frac{\partial\mathcal{S}^{(10)}}{\partial t}, \tag{13}$$

$$\tilde{H}^{(01)} = V_2 - i\left[\mathcal{S}^{(01)}; \tilde{H}^{(00)}\right] + \hbar\frac{\partial \mathcal{S}^{(01)}}{\partial t}. \tag{14}$$

Нетрудно также получить выражения, отвечающие второму порядку разложения по взаимодействию с каждым рассматриваемым полем и их билинейной комбинации:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(11)} &= -\frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(10)}; V_2\right] - \frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(01)}; V_1\right] - \\
&- \frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(10)}; \tilde{H}^{(01)}\right] - \frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(01)}; \tilde{H}^{(10)}\right] - \\
&- i\left[\mathcal{S}^{(11)}; \tilde{H}^{(00)}\right] + \hbar\frac{\partial \mathcal{S}^{(11)}}{\partial t}, \\
\tilde{H}^{(20)} &= -\frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(10)}; V_1\right] - \frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(10)}; \tilde{H}^{(10)}\right] - \\
&- i\left[\mathcal{S}^{(20)}; \tilde{H}^{(00)}\right] + \hbar\frac{\partial \mathcal{S}^{(20)}}{\partial t}, \\
\tilde{H}^{(02)} &= -\frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(01)}; V_2\right] - \frac{i}{2}\left[\mathcal{S}^{(01)}; \tilde{H}^{(01)}\right] - \\
&- i\left[\mathcal{S}^{(02)}; \tilde{H}^{(00)}\right] + \hbar\frac{\partial \mathcal{S}^{(02)}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Мы рассматриваем резонансное взаимодействие обоих широкополосных полей с выделенным атомным переходом $|E_1^{(i)}\rangle \to |E_2^{(i)}\rangle$. Согласно процедуре вывода, в получаемом выражении для эффективного гамильтониана при дальнейшем переходе в представление взаимодействия должны отсутствовать быстроосциллирующие слагаемые. Это означает, что слагаемые первого порядка по взаимодействию атомов с широкополосными полями имеют вид

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(10)} &= \sum_i \epsilon^+(t)\, d_{12}|E_1^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| + \\
&+ \sum_i \epsilon^-(t)\, d_{21}|E_2^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|, \\
\tilde{H}^{(01)} &= \sum_i \int d\omega\, b^\dagger(\omega)\Gamma(\omega)\, d_{12}|E_1^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| + \\
&+ \sum_i \int d\omega\, b(\omega)\Gamma(\omega) d_{21}|E_2^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|.
\end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения (13), (14) позволяют найти выражения для операторов $\mathcal{S}$ первых порядков, которые в данном случае равны

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{(10)} &= -i\sum_i \epsilon^-(t)\sum_{k,j}\frac{d_{kj}}{\hbar(\omega+\omega_{kj})} \times \\
&\times |E_k^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}| + \text{H.c.}, \\
\mathcal{S}^{(01)} &= -i\sum_i \int d\omega\, b(\omega)\Gamma(\omega)\sum_{k,j}\frac{d_{kj}}{\hbar(\omega+\omega_{kj})} \times \\
&\times |E_k^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}| + \text{H.c.}
\end{aligned} \tag{17}$$

Отметим, что в выражениях (17) учтен и вклад нерезонансных уровней, а они сами не содержат резонансных знаменателей, что является одним из основных принципов используемого метода.

Подчеркнем, что важным условием получения выражений (17) является предположение об адиабатическом включении взаимодействия. Поэтому они неприменимы в случае предельно коротких импульсов однофотонного возбужденного поля.

Также заметим, что в первых важных работах по формулировке алгебраической теории возмущений применительно к задачам нелинейной оптики [40–43] в этом месте допущены принципиальные ошибки, которые также встречались и в более поздних работах других авторов. Фактически результаты [40–44] подгонялись под известные результаты, получаемые методами усреднения Боголюбова – Митропольского [45], а без такой подгонки полученные позднее ошибочные результаты в слагаемых эффективного гамильтониана во многих случаях отличаются от правильных всего в два раза.

Выражения (16), (17) позволяют получить и явный вид последующих порядков разложения. Приведем выражение билинейного слагаемого, отвечающего интерференционному характеру взаимодействия широкополосных полей с атомной системой:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(11)} &= \sum_i \int d\omega' \epsilon^+(t)\Gamma(\omega')b(\omega') \times \\
&\times \sum_k \frac{1}{2}\left(\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')\right)|E_k^{(i)}\rangle\langle E_k^{(i)}| + \text{H.c.},
\end{aligned} \tag{18}$$

где введены функции, типичные для теории оптических резонансных процессов:

$$\Pi_k(\omega) = \sum_j \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar}\left(\frac{1}{\omega_{kj}+\omega} + \frac{1}{\omega_{kj}-\omega}\right).$$

Выражения для оператора $\mathcal{S}^{(11)}$, как и для операторов $\mathcal{S}^{(02)}$, $\mathcal{S}^{(20)}$, могут быть получены с помощью уравнений (15) из требований адиабатичности включения полей и отсутствия в преобразованном гамильтониане быстро меняющихся во времени слагаемых, однако в дальнейшем их явный вид не потребуется и поэтому мы здесь его не приводим.

Взаимодействие атомов с вакуумным широкополосным полем представим в виде суммы трех слагаемых:

$$\tilde{H}^{(02)} = H^{(02)}_{Stark} + H^{(02)}_{Lamb} + H^{(02)}_{D}. \tag{19}$$

Первое слагаемое в правой части (19) $H^{(02)}_{Stark}$ отвечает оператору штарковского взаимодействия в квантованном поле с нулевой плотностью числа фотонов и определяется выражением

$$H^{(02)}_{Stark} = \sum_i \int d\omega \int d\omega' \, \Gamma(\omega)\Gamma(\omega')b^\dagger(\omega)b(\omega') \times \\ \times \sum_k \frac{1}{2}\big(\Pi_k(\omega)+\Pi_k(\omega')\big)|E^{(i)}_k\rangle\langle E^{(i)}_k|.$$

Величина среднего значения полученного слагаемого зависит от значения параметра $\Pi_k(\omega)$ и наличия резонансного уровня для конкретной частоты излучения. Само это слагаемое описывает процессы виртуального излучения фотона и последующего его поглощения. Второе слагаемое

$$H^{(02)}_{Lamb} = \sum_i \int d\omega \, \Gamma^2(\omega) \times \\ \times \sum_{k,j} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj}-\omega)}|E^{(i)}_k\rangle\langle E^{(i)}_k| \quad (20)$$

описывает лэмбовский сдвиг атомных уровней одиночного атома. Третье слагаемое $H^{(02)}_D$ отвечает диполь-дипольному взаимодействию между атомами, возникающему в результате обмена возбуждениями между атомами ансамбля. Приведем его явный вид:

$$H^{(02)}_D = -\int d\omega \, \Gamma^2(\omega) \sum_{i\neq i',k,j} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj}-\omega)} \times \\ \times |E^{(i)}_k\rangle\langle E^{(i)}_j||E^{(i')}_j\rangle\langle E^{(i')}_k|.$$

В используемом методе диполь-дипольное взаимодействие возникает автоматически без привлечения каких-либо дополнительных условий или приближений.

Оператор взаимодействия атомной системы с внешним волновым пакетом во втором порядке по этому взаимодействию имеет вид, аналогичный (19),

$$\tilde{H}^{(20)} = H^{(20)}_{Stark} + H^{(20)}_{Lamb} + H^{(20)}_D. \quad (21)$$

Приведем явный вид слагаемых, отвечающих в (21) эффектам лэмбовского сдвига и эффективного взаимодействия атомов из-за наличия внешнего поля:

$$H^{(20)}_{Lamb} = \sum_i \int d\omega |\epsilon(\omega)|^2 \times \\ \times \sum_{k,j} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj}-\omega)}|E^{(i)}_k\rangle\langle E^{(i)}_k|, \quad (22)$$

$$H^{(20)}_D = -\int d\omega |\epsilon(\omega)|^2 \times \\ \times \sum_{i\neq i',k,j} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj}-\omega)}|E^{(i)}_k\rangle\langle E^{(i)}_j||E^{(i')}_j\rangle\langle E^{(i')}_k|. \quad (23)$$

Первое слагаемое в правой части (21) отвечает штарковскому взаимодействию с возбужденным полем. Для нас это слагаемое будет несущественным, так как оно не обладает алгебраическими свойствами широкополосного поля с нулевой плотностью фотонов (см. ниже формулы (44)). Этот важный факт является следствием невозможности построения невинеровского считывающего процесса для широкополосного поля с ненулевой плотностью фотонов. В дальнейшем его не учитываем.

Из сравнения представленных формул нетрудно заметить, что $H^{(20)}_{Stark}$ получается из $H^{(02)}_{Stark}$ путем замены

$$\int d\omega \, b^\dagger(\omega)\Gamma(\omega) \to \epsilon^+(t), \quad \int d\omega \, b(\omega)\Gamma(\omega) \to \epsilon^-(t)$$

с распространением интегрирования по частотам в $\epsilon^\pm(t)$ на следующие за ним множители. Также замены

$$\int d\omega \, b^\dagger(\omega)\Gamma(\omega) \to \kappa b^\dagger_c, \quad \int d\omega \, b(\omega)\Gamma(\omega) \to \kappa b_c, \\ \omega \to \omega_c$$

в формуле для $H^{(02)}_{Stark}$ дают операторы штарковского взаимодействия атомов с модой одномодового резонатора, характеризуемого частотой ω_c и операторами рождения и уничтожения фотонов моды $b^\dagger_c$ и b_c.

Итак, с помощью метода унитарного преобразования, основанием которого является унитарная симметрия, получен эффективный гамильтониан, представляющий в рассматриваемой задаче сумму

$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(00)} + \tilde{H}^{(10)} + \tilde{H}^{(01)} + \tilde{H}^{(11)} + \tilde{H}^{(02)} + \tilde{H}^{(20)},$$

операторы в которой заданы соотношениями (16), (18), (19) и (21) соответственно.

В исходном уравнении нетрудно теперь перейти к картине взаимодействия по оператору свободной энергии атомов и квантованных полей, после чего сделать унитарное преобразование, учитывающее лэмбовский сдвиг энергетических уровней. Оператор последнего, согласно (20), (22), имеет диагональный вид. В результате уравнение для волновой функции атомной системы и квантованных полей $|\Psi\rangle$ после этих преобразований приобретает вид

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle,$$

где эффективный гамильтониан взаимодействия определен выражением, которое представим в виде следующей суммы операторов:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}^{TL-F}(t) + \hat{H}^{TL-B}(t) + \hat{H}^{St}(t) + \\ + \hat{H}^{Nonres}(t) + \hat{V}^{TL}(t) + \hat{V}^{Nonres}(t) + \hat{H}^{F-B}(t). \quad (24)$$

Здесь первое слагаемое $\hat{H}^{TL-F}(t)$ описывает резонансное взаимодействие двух рабочих уровней атомной системы с широкополосным внешним квантованным полем однофотонного источника:

$$\hat{H}^{TL-F}(t) = \sum_i E^+(t)\, d_{12} |E_1^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| + \\ + \sum_i E^-(t)\, d_{21} |E_2^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|, \quad (25)$$

где

$$E^-(t) = \epsilon^-(t) e^{i\omega_0 t} = \int d\omega\, \epsilon(\omega) a(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)t},$$
$$E^+(t) = \epsilon^+(t) e^{-i\omega_0 t} = \int d\omega\, \epsilon^*(\omega) a^\dagger(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)t},$$

а резонансная частота перехода ω_0 учитывает и лэмбовские сдвиги резонансных уровней:

$$\omega_0 = \omega_{21} + \int d\omega \Big(\Gamma^2(\omega) + |\epsilon(\omega)|^2\Big) \times \\ \times \sum_j \frac{|d_{2j}|^2}{\hbar^2(\omega_{2j} - \omega)} - \int d\omega \Big(\Gamma^2(\omega) + |\epsilon(\omega)|^2\Big) \times \\ \times \sum_j \frac{|d_{1j}|^2}{\hbar^2(\omega_{1j} - \omega)}.$$

Второе слагаемое в правой части (24) описывает взаимодействие резонансных уровней атомной системы с широкополосным полем с нулевой плотностью числа фотонов и определено выражением

$$\hat{H}^{TL-B}(t) = \sum_i \int d\omega\, \Gamma(\omega) b^\dagger(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)t} \times \\ \times d_{12} |E_1^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| + \sum_i \int d\omega\, \Gamma(\omega) b(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)t} \times \\ \times d_{21} |E_2^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|. \quad (26)$$

Поскольку значения средних $\langle E_1^{(i)}|\hat{H}^{TL-F}|E_2^{(i)}\rangle$, $\langle E_1^{(i)}|\hat{H}^{TL-B}|E_2^{(i)}\rangle$ отличны от нуля, операторы (25) и (26) описывают реальные переходы в атомной системе под действием квантованных полей.

Третье слагаемое в правой части (24), имеющее вид

$$\hat{H}^{St}(t) = \int d\omega \int d\omega'\, \Gamma(\omega)\Gamma(\omega') b^\dagger(\omega) b(\omega') \times \\ \times e^{-i(\omega'-\omega)t} \sum_{i,k=1,2} \frac{1}{2}\big(\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')\big) \times \\ \times |E_k^{(i)}\rangle\langle E_k^{(i)}|, \quad (27)$$

отвечает штарковскому взаимодействию резонансных уровней с широкополосным источником с нулевой плотностью фотонов. Среднее значение $\langle E_1^{(i)}|\hat{H}^{St}(t)|E_2^{(i)}\rangle = 0$, следовательно, этот оператор описывает виртуальные переходы рождения–уничтожения фотонов и отвечает за сдвиги атомных уровней атома. Более того, средние этого оператора имеют следующий порядок по взаимодействию атома с широкополосным вакуумным полем по сравнению со средними оператора (26). Тем не менее, само взаимодействие может существенным образом проявляться в коллективной системе, состоящей из большого числа атомов, поэтому оператором (27) пренебрегать нельзя.

Явный вид слагаемого, отвечающего оператору $\hat{H}^{Nonres}(t)$, который определяет штарковское взаимодействие нерезонансных уровней атомной системы с широкополосным полем с нулевой плотностью фотонов, в данной задаче нам не потребуется. Проекция этого оператора на резонансные уровни атомной системы дает нуль [19], и нерезонансные уровни не чувствительны к штарковскому взаимодействию резонансных уровней с широкополосным полем в вакуумном состоянии.

Следующий оператор в равенстве (24) определяет диполь-дипольное взаимодействие резонансных уровней атомов и задан выражением

$$\hat{V}^{TL}(t) = -\int d\omega \Big(\Gamma^2(\omega) + |\epsilon(\omega)|^2\Big) \times \\ \times \sum_{i\neq i'} \frac{|d_{21}|^2}{\hbar(\omega + \omega_0)} |E_1^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}||E_2^{(i')}\rangle\langle E_1^{(i')}|.$$

Он отвечает за сдвиги энергетических уровней в результате обмена возбуждениями разных атомов системы. Его величина имеет тот же порядок по параметру связи с полем в вакуумном состоянии, что и (27). Остальные слагаемые оператора $H^{(02)}$ представлены в (24) слагаемым $\hat{V}^{Nonres}(t)$, явный вид которого нам в дальнейших рассуждениях не потребуется также вследствие их обнуления при проецировании на резонансные атомные состояния.

Наконец, последний оператор $\hat{H}^{F-B}(t)$ в (24) описывает процессы уничтожения фотона одного из широкополосных полей и одномоментное рождение фотона другого поля при взаимодействии с атомной системой. Аналогично уже рассмотренным операторам, он может быть представлен в виде суммы двух слагаемых, отвечающих взаимодействию с резонансными уровнями системы и взаимодействию с остальными. Вклад от последнего взаимодействия с нерезонансными уровнями системы при последующем выделении только резонансных уровней путем проецирования на них также будет равен нулю, аналогично проявлению нерезонансного взаимодействия от операторов $\hat{H}^{Nonres}(t), \hat{V}^{Nonres}(t)$. Приведем явный вид оставшейся части:

$$\hat{H}^{F-B}(t) = \int d\omega' \, E^{+}(t)\Gamma(\omega')b(\omega')e^{i(\omega'-\omega_0)t} \times \\ \times \sum_{k=1,2} \frac{1}{2}\big(\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')\big)|E_k^{(i)}\rangle\langle E_k^{(i)}| + \text{H.c.}$$

Это слагаемое описывает процессы обмена возбуждением между широкополосными фотонными подсистемами в результате их воздействия на атомы и в этом смысле является интерференционным слагаемым второго порядка по полевым операторам.

Динамика атомной системы для двух резонансно взаимодействующих уровней при взаимодействии с квантованными широкополосными полями, которую опишем функцией $|\Psi^{TL+F+B}(t)\rangle$, оказывается замкнутой и определяется уравнением

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi^{TL+F+B}(t)\rangle}{\partial t} = \\ = (\hat{H}^{TL}(t) + \hat{V}^{TL}(t))|\Psi^{TL+F+B}(t)\rangle, \quad (28)$$

операторы взаимодействия в котором перепишем через коллективные атомные операторы

$$R_3 = \frac{1}{2}\sum_i \Big(|E_2^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| - |E_1^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|\Big), \\ R^{+} = \sum_i |E_2^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|, R^{-} = \sum_i |E_1^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}|.$$

Эти введенные операторы отвечают коммутационным соотношениям

$$\big[R_3; R^{\pm}\big] = \pm R^{\pm}, \quad \big[R^{+}; R^{-}\big] = 2R_3$$

и вместе с единичным оператором двухуровневой системы

$$\hat{\mathbb{1}} = \sum_i |E_2^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| + |E_1^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|$$

являются образующими алгебры su(2). Выражения для

$$\hat{H}^{TL} = \hat{H}^{TL-F}(t) + \hat{H}^{TL-B}(t) + \hat{H}^{St}(t) + \hat{H}^{F-B}(t)$$

и $\hat{V}^{TL}$ принимают вид

$$\hat{H}^{TL-F}(t) = E^{+}(t)\, d_{12}R^{-} + E^{-}(t)\, d_{21}R^{+}, \quad (29)$$

$$\hat{H}^{TL-B}(t) = \int d\omega\, \Gamma(\omega)b^{\dagger}(\omega)e^{i(\omega-\omega_0)t}d_{12}R^{-} + \\ + \int d\omega\, \Gamma(\omega)b(\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)t}d_{21}R^{+}, \quad (30)$$

$$\hat{H}^{St}(t) = \int d\omega \int d\omega'\, b^{\dagger}(\omega)b(\omega')\Gamma(\omega)\Gamma(\omega') \times \\ \times e^{-i(\omega'-\omega)t}\left(\Pi_{+}(\omega,\omega')\frac{N}{2} + \Pi_{-}(\omega,\omega')R_3\right), \quad (31)$$

$$\hat{H}^{F-B}(t) = \int d\omega'\, E^{+}(t)b(\omega')\Gamma(\omega')e^{i(\omega'-\omega_0)t} \times \\ \times \left(\Pi_{+}(\omega,\omega')\frac{N}{2} + \Pi_{-}(\omega,\omega')R_3\right) + \text{H.c.}, \quad (32)$$

$$\hat{V}^{TL}(t) = -\int d\omega\, \frac{\big(\Gamma^2(\omega) + |\epsilon(\omega)|^2\big)\,|d_{21}|^2}{\hbar(\omega+\omega_0)} \times \\ \times \Big(R^{-}R^{+} + R^{+}R^{-} - N\Big), \quad (33)$$

где параметры штарковского взаимодействия атомов с широкополосным вакуумным полем равны

$$\Pi_{\pm}(\omega,\omega') = \frac{1}{2}\Big[(\Pi_2(\omega)+\Pi_2(\omega')) \pm (\Pi_1(\omega)+\Pi_1(\omega'))\Big].$$

Итак, мы получили эффективный гамильтониан $(\hat{H}^{TL}(t)+\hat{V}^{TL}(t))$, определяющий динамику коллективной атомной системы в квантованном поле однофотонного широкополосного пакета и широкополосного окружения с нулевой плотностью фотонов.

4. ИНКРЕМЕНТ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ

Чтобы построить искомое управляющее кинетическое уравнение для матрицы плотности подсистемы, используем метод построения квантового стохастического дифференциального уравнения. Решение полученного уравнения (28) для волновой функции всей системы $|\Psi^{TL+F+B}(t)\rangle$ представим в виде преобразования $\mathcal{U}(t)$ начального состояния системы $|\Psi^{TL+F+B}(0)\rangle$,

$$|\Psi^{TL+F+B}\rangle(t) = \mathcal{U}(t)|\Psi^{TL+F+B}(0)\rangle,$$

для которого оператор эволюции $\mathcal{U}(t)$ определяется решением уравнения

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t) = \hat{\mathcal{H}}\mathcal{U}(t), \\ \hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{H}^{TL}(t) + \hat{V}^{TL}(t) = \hat{H}^{TL-F}(t) + \\ + \hat{H}^{TL-B}(t) + \hat{H}^{St}(t) + \hat{H}^{F-B}(t) + \hat{V}^{TL}(t), \quad (34)$$

с начальным условием $\mathcal{U}(0) = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор. Решение уравнения (28) представим в виде упорядоченной по времени экспоненты или ряда:

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{T}\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\int\limits_0^t dt'\hat{\mathcal{H}}(t')\right) = = \mathcal{I} + \frac{1}{i\hbar}\int\limits_0^t dt'\big(\hat{H}^{TL}(t') + \hat{V}^{TL}(t')\big) + + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t'} dt'dt''\big(\hat{H}^{TL}(t') + \hat{V}^{TL}(t')\big) \times \times \big(\hat{H}^{TL}(t'') + \hat{V}^{TL}(t'')\big) + \ldots \quad (35)$$

Будем считать начальное состояние всей системы факторизованным

$$|\Psi^{TL+F+B}(0)\rangle = |\Psi^{TL}(0)\rangle \otimes |\Psi^F(0)\rangle \otimes |\Psi^B(0)\rangle,$$

что означает независимое, некоррелированное начальное состояние атомов $|\Psi^{TL}(0)\rangle$, широкополосное поле однофотонного источника $|\Psi^F(0)\rangle$ и вакуумное окружение $|\Psi^B(0)\rangle$. Заметим, что в данном случае мы задаем начальное состояние подсистем соответствующими волновыми функциями только для простоты рассуждений. В общем случае возможно задание описания начального состояния подсистем посредством соответствующих матриц плотности, что не приводит в дальнейшем к принципиально новым рассуждениям, а лишь к усложнению математического аппарата. Кинетическое уравнение для описания атомной системы мы строим до первого неисчезающего порядка по степеням свободы широкополосного поля в возбужденном состоянии.

Начальное состояние однофотонного широкополосного поля задано его источником, который имеет два способа физической реализации. Во-первых, в качестве источника может выступать оптический процесс генерации однофотонного состояния, при описании которого необходимо решение своей динамической задачи. Во-вторых, такой источник может быть реализован при проекционном измерении. В этом случае источником поля служит процесс параметрической генерации бифотонного состояния. Далее один из фотонов бифотонной пары направляется на атомную систему, с которой и происходит его рассматриваемое взаимодействие, а другой — в схему детектирования. Тогда регистрация последнего приводит к проекционному измерению оптического поля бифотонов и контролируемой генерации однофотонного состояния в системе для его последующего взаимодействия. Отметим, что в обоих случаях нетрудно получить широкополосное однофотонное состояние поля [46]. Широкополосность в данном случае понимается в том смысле, что частотная полоса источника считается существенно больше характерной скорости релаксации взаимодействующей с таким полем системы. В нашей задаче будем считать источник однофотонного излучения заданным. Положим, что центральная частота пакета равна частоте ω_0 перехода между резонансными уровнями атомной системы, а состояния поля разных частот независимы. Для такого источника

$$\begin{aligned} &\langle\Psi^F(0)|a^\dagger(\omega)a(\omega')|\Psi^F(0)\rangle = \delta(\omega-\omega'),\\ &\langle\Psi^F(0)|a^\dagger(\omega)a^\dagger(\omega')|\Psi^F(0)\rangle = \\ &\qquad = \langle\Psi^F(0)|a(\omega)a(\omega')|\Psi^F(0)\rangle = 0, \qquad (36)\\ &\langle\Psi^F(0)|a^\dagger(\omega)|\Psi^F(0)\rangle = \\ &\qquad = \langle\Psi^F(0)|a(\omega)|\Psi^F(0)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Для дальнейшего вывода кинетического уравнения удобно перейти к безразмерным уравнениям. Поэтому введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, нормированные частоты $\nu = \omega/\omega_0$ и определим операторы $a(\nu) = \sqrt{\omega_0}a(\omega)$. Будем считать, что параметр связи с полем однофотонного пакета γ не зависит от частоты и является действительной постоянной. Кроме того, положим, что однофотонный пакет имеет гауссово частотное распределение плотности вероятности обнаружения фотона

$$|\epsilon(\nu)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta}\exp\left(-\frac{(\nu-1)^2}{\delta^2}\right),$$

в котором нормированная спектральная ширина $\delta = \Delta/\omega_0$ определена полосой генерации источника Δ. Эти свойства позволяют записать слагаемое в (35) от оператора взаимодействия атомов с полем однофотонного пакета (29) в виде

$$\hat{\mathcal{H}}^{TL-F}(\tau)\,d\tau = \mu^* R^- dE_\nu^+(\tau) + \mu R^+ dE_\nu^-(\tau), \quad (37)$$

где мы обозначили $\mu = \gamma d_{21}/\hbar\omega_0$ и ввели дифференциалы $dE_\nu^\pm(\tau) = E_\nu^\pm(\tau)\,d\tau$ безразмерных амплитуд напряженностей поля однофотонного пакета,

$$\begin{aligned} E_\nu^+(\tau) &= \int d\nu\,\epsilon^*(\nu)a^\dagger(\nu)\exp\big(i(\nu-1)\tau\big),\\ E_\nu^-(\tau) &= \int d\nu\,\epsilon(\nu)a(\nu)\exp\big(-i(\nu-1)\tau\big). \end{aligned} \quad (38)$$

Состояния окружения системы с нулевой плотностью числа фотонов, отвечающие разным частотам, также являются независимыми. При усреднении по этим состояниям имеем следующие средние:

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi^B(0)|b(\omega)b^\dagger(\omega')|\Psi^B(0)\rangle = \delta(\omega-\omega'),\\
&\langle\Psi^B(0)|b^\dagger(\omega)b(\omega')|\Psi^B(0)\rangle =\\
&\qquad = \langle\Psi^B(0)|b^\dagger(\omega)b^\dagger(\omega')|\Psi^B(0)\rangle =\\
&\qquad = \langle\Psi^B(0)|b(\omega)b(\omega')|\Psi^B(0)\rangle = 0,\\
&\langle\Psi^B(0)|b^\dagger(\omega)|\Psi^B(0)\rangle =\\
&\qquad = \langle\Psi^B(0)|b(\omega)|\Psi^B(0)\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Свойства (39) позволяют рассматривать вакуумное окружение системы в качестве термостата с центральной частотой $\Omega = \omega_0$. Именно в этом смысле каждый резонансный переход системы выделяет в вакуумном окружении свой независимый широкополосный источник в соответствии с теорией Лакса [33]. Теперь стандартным образом введем операторы

$$\begin{aligned}
b(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\big(-i(\omega-\omega_0)t\big)b(\omega),\\
b^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\big(i(\omega-\omega_0)t\big)b^\dagger(\omega),
\end{aligned} \tag{40}$$

которые отвечают коммутационным соотношениям

$$\big[b(t), b^\dagger(t')\big] = \delta(t-t'),$$

поскольку область интегрирования в (40) соответствует интервалу $(-\infty,\infty)$. Именно эти операторы и определяют инкременты стохастических источников, отвечающих порождающему и уничтожающему винеровским процессам

$$\begin{aligned}
B^+(t) &= \int\limits_0^t dt' b^\dagger(t'),\\
dB^+(dt) &= B^+(t+dt) - B^+(t),\\
B^-(t) &= \int\limits_0^t dt' b(t'),\\
dB^-(dt) &= B^-(t+dt) - B^-(t),
\end{aligned} \tag{41}$$

коммутатор которых равен

$$\big[B^-(t_1), B^+(t_2)\big] = \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{t'} dt'dt''\delta(t'-t'') = \min(t_1,t_2).$$

Эти же операторы определяют и инкремент считывающего процесса, порождаемый оператором числа фотонов

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &= \int\limits_0^t dt' b^\dagger(t')b(t'),\\
d\Lambda(dt) &= \Lambda(t+dt) - \Lambda(t),
\end{aligned} \tag{42}$$

который является одним из образующих невинеровской алгебры вакуумного состояния поля.

Наряду с введенными соотношениями положим, что параметры связи $\Gamma(\omega) = \Gamma(\Omega)$ и параметры штарковского взаимодействия $\Pi_k(\omega) = \Pi_k(\Omega)$, $k = 1,2$ не зависят от частоты ω. Пределы интегрирования при определении стохастических источников и соотношения для констант взаимодействия отвечают условиям марковости во взаимодействии системы с широкополосным вакуумным термостатом, когда динамика последнего не зависит от его состояния в более ранние моменты времени, а определяется исключительно его состоянием в данный момент времени.

Переходя к безразмерному времени, нормированным частотам и определяя операторы $b(\nu) = \sqrt{\omega_0}b(\omega)$, переопределим операторы (40):

$$b(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp\big(-i(\nu-1)\tau\big)b(\nu),$$

$$b^\dagger(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp\big(i(\nu-1)\tau\big)b^\dagger(\nu),$$

и инкременты случайных процессов (41), (42):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}^+(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' b^\dagger(\tau'), \quad \mathcal{B}^-(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' b(\tau'),\\
&\Lambda(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' b^\dagger(\tau')b(\tau').
\end{aligned} \tag{43}$$

Для вакуумного широкополосного состояния поля, обладающего нулевой плотностью числа фотонов, введенные инкременты стохастических процессов подчиняются алгебре Хадсона – Партасарати со следующими характерными соотношениями для данного выделенного случайного источника:

$$\begin{aligned}
&d\Lambda d\Lambda = d\Lambda, \quad d\Lambda d\mathcal{B}^+ = d\mathcal{B}^+,\\
&d\mathcal{B}^- d\Lambda = d\mathcal{B}^-, \quad d\mathcal{B}^- d\mathcal{B}^+ = d\tau,\\
&d\Lambda d\tau = d\Lambda d\mathcal{B}^- = d\mathcal{B}^+ d\Lambda = d\Lambda\, d\Lambda =\\
&\quad = d\mathcal{B}^+ d\mathcal{B}^+ = d\mathcal{B}^+ d\tau = d\mathcal{B}^- d\tau = d\tau\, d\tau = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Любые разные шумовые источники являются (считаются) независимыми, и произведение их инкрементов равно нулю.

Представим теперь слагаемые, входящие в решение (35), от взаимодействия атомной системы и ее вакуумного термостата (30), (31) на основе введенных соотношениями (43) операторов в следующем безразмерном виде:

$$\begin{gathered}\hat{\mathcal{H}}^{TL-B}(\tau)\,d\tau = \chi^* R^- d\mathcal{B}^+(\tau) + \chi R^+ d\mathcal{B}^-(\tau),\\ \hat{\mathcal{H}}^{St}(\tau)\,d\tau = \left(\eta_+\frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) d\Lambda(\tau).\end{gathered} \tag{45}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\chi = \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(\Omega)\,d_{21}}{\hbar\sqrt{\omega_0}}, \quad \eta_\pm = \frac{2\pi}{\hbar}\Gamma^2(\Omega)\left[\Pi_2(\Omega) \pm \Pi_1(\Omega)\right].$$

С помощью введенных инкрементов случайных процессов для вакуумного состояния поля (43) и операторов напряженности для поля однофотонного широкополосного пакета (38) запишем оставшиеся слагаемые в полном решении от оператора (32), которые отвечают интерференции их амплитуд при совместном воздействии на атомную систему:

$$\begin{gathered}\hat{\mathcal{H}}^{F-B}(\tau) = \xi\left(\eta_+\frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) \times\\ \times E_\nu^+(\tau)\,d\mathcal{B}^-(\tau) + \text{H.c.},\end{gathered} \tag{46}$$

а также диполь-дипольному взаимодействию между атомами ансамбля:

$$\hat{\mathcal{V}}^{TL}(\tau)\,d\tau = -\kappa\Big(R^-R^+ + R^+R^- - N\Big)\,d\tau, \tag{47}$$

где

$$\xi = (2\pi)^{-3/2}\frac{\gamma}{\Gamma(\Omega)\sqrt{\omega_0}}, \quad \kappa = \int d\nu\frac{\dfrac{|\chi|^2}{2\pi} + |\mu|^2|\epsilon(\nu)|^2}{\nu+1}.$$

Соотношения (44), наряду со свойствами однофотонного пакета, определяемыми операторами напряженности поля (38) и дифференциалами последних, доопределяют вычисления в (35).

Для того чтобы интегральные выражения, представляющие решение в виде (35), были корректными, их необходимо воспринимать как интегрирование по Ито:

$$\int\limits_0^\tau f(\tau')\,d\beta = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N f(\tau_{i-1})\Big(\beta(\tau_i) - \beta(\tau_{i-1})\Big),$$

где $\beta = \mathcal{B}^-, \mathcal{B}^+, \Lambda$, а предел понимается в среднеквадратичном смысле. Это означает, что любую операторозначную функцию $f(\tau)$ подынтегрального выражения с инкрементом случайного процесса следует считать неупреждающей функцией времени и, следовательно, коммутирующей с инкрементами случайных процессов:

$$\Big[f(\tau), d\mathcal{B}^-(\tau)\Big] = \Big[f(\tau), d\mathcal{B}^+(\tau)\Big] = \Big[f(\tau), d\Lambda(\tau)\Big] = 0.$$

Решение (35) запишем в виде

$$\begin{gathered}\mathcal{U}(\tau) = \lim_{N\to\infty}\Big[\exp\Big(\frac{\hat{\mathcal{H}}(\tau_{N-1})}{i}\big(\tau_N - \tau_{N-1}\big)\Big)\ldots\\ \ldots\exp\Big(\frac{\hat{\mathcal{H}}(\tau_0)}{i}\big(\tau_1 - \tau_0\big)\Big)\Big]\end{gathered}$$

и определим инкремент оператора эволюции

$$d\mathcal{U} = \mathcal{U}(\tau + d\tau) - \mathcal{U}(\tau)$$

через инкременты случайных процессов с учетом (37) в виде

$$\begin{gathered}d\mathcal{U}(\tau) = \Big[\exp\Big(-i\big(\hat{\mathcal{V}}^{TL}(\tau)\,d\tau + \mu^* R^- dE_\nu^+(\tau) +\\ +\mu R^+ dE_\nu^-(\tau)\big) + \left(\chi R^+ + \xi\left(\eta_+\frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)E_\nu^+(\tau)\right) \times\\ \times d\mathcal{B}^-(\tau) + \left(\chi^* R^- + \xi^*\left(\eta_+\frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)E_\nu^-(\tau)\right) \times\\ \times d\mathcal{B}^+(\tau) + \left(\eta_+\frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) d\Lambda(\tau)\Big) - 1\Big]\mathcal{U}(\tau).\end{gathered} \tag{48}$$

Из этого выражения следует справедливость правила дифференцирования Ито

$$\begin{gathered}d\Big(\mathcal{U}(\tau)\mathcal{U}^\dagger(\tau)\Big) = \Big(d\mathcal{U}(\tau)\Big)\mathcal{U}^\dagger(\tau) + \mathcal{U}(\tau)\Big(d\mathcal{U}^\dagger(\tau)\Big) +\\ + \Big(d\mathcal{U}(\tau)\Big)\Big(d\mathcal{U}^\dagger(\tau)\Big)\end{gathered}$$

и унитарность оператора эволюции.

С помощью разложения экспоненты (48) в ряд, последующего применения правил алгебры Хадсона – Партасарати (44) и использования свойств однофотонного широкополосного источника получим выражение для инкремента оператора эволюции в рассматриваемой задаче:

$$d\mathcal{U}(t) = \Big[- i\Big(\hat{\mathcal{V}}^{TL}(\tau)\,d\tau + \\ + \mu^* R^- dE_\nu^+(\tau) + \mu R^+ dE_\nu^-(\tau)\Big) - \\ - \frac{|\mu|^2}{2\gamma^2}\Big(R^+R^- dE_\nu^-(\tau)\,dE_\nu^+(\tau) + \\ + R^-R^+ dE_\nu^+(\tau)\,dE_\nu^-(\tau)\Big) + \\ + \Big(\chi R^+ + \xi\mathcal{R}E_\nu^+(\tau)\Big)\frac{\mathcal{Y}+i\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2} \times \\ \times \Big(\chi^* R^- + \xi\mathcal{R}E_\nu^-(\tau)\Big)\,d\tau + \\ + \Big(\chi R^+ + \xi\mathcal{R}E_\nu^+(\tau)\Big)\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{R}}d\mathcal{B}^-(\tau) + \\ + \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{R}}\Big(\chi^* R^- + \xi\mathcal{R}E_\nu^-(\tau)\Big)\,d\mathcal{B}^+(\tau) + \\ + \mathcal{Y}d\Lambda(\tau)\Big]\mathcal{U}(\tau), \quad (49)$$

где введены следующие операторозначные функции:

$$\mathcal{Y} = \exp\big(-i\mathcal{R}\big) - 1, \quad \mathcal{R} = \eta_+\frac{N}{2} + \eta_- R_3.$$

Операторные выражения, содержащие функцию $\mathcal{Y}$, здесь и в дальнейшем понимаются как их разложения в ряд по оператору $\mathcal{R}$. Уравнение (49) при отсутствии («выключении») поля однофотонного источника переходит в известное уравнение для инкремента оператора эволюции невинеровской кинетики атомной системы, взаимодействующей с полем вакуумного термостата. Отметим значимость полученного выражения, поскольку оно является порождающим для кинетического квантового стохастического уравнения всей системы.

Отметим также следующее. Как и в случае штарковского взаимодействия широкополосного поля с атомным ансамблем [18, 19], в нашем случае действия дополнительного однофотонного поля константа связи между атомами и полем с нулевой плотностью фотонов «встраивается» в характерные параметры, определяющие процессы одноквантовых переходов в атомах (слагаемые в (49), содержащие $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{R}$). Подчеркнем, что, в отличие от результатов [18, 19], в формуле (49), помимо слагаемых, которые описывают переходы в атоме в поле однофотонного источника, присутствуют и интерференционные слагаемые с упомянутой «встроенной» константой. Этому отвечает типичная для квантовой теории интерпретация. В рассматриваемой нами системе имеем три интерферирующих между собой альтернативы. Атом может участвовать в процессах поглощения кванта из однофотонного поля, переизлучения кванта в однофотонное или вакуумное поле и в процессах переизлучения виртуальных квантов, формирующих штарковское взаимодействие. Последнее иногда представляют также в терминах дополнительного локального поля, действующего на атомы [7]. И именно описание переизлучения квантов при формировании штарковского взаимодействия в марковском приближении дается в терминах квантового считывающего процесса с алгеброй (44), которая и позволяет учесть аналитически все произведения в формуле (48), или, иначе, просуммировать формальное представление для оператора эволюции квантовой системы в виде ряда, что отвечает суммированию квантовых альтернатив.

5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОДСИСТЕМЫ

Выражение (49) порождает стохастическое уравнение эволюции всей системы, которую опишем матрицей плотности ρ:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = \mathcal{U}(\tau)\rho(0)\mathcal{U}^\dagger(\tau),$$

где начальная матрица плотности $\rho(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$ отвечает факторизованному состоянию атомов и широкополосных полей

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi^A(0)\rangle \otimes |\Psi^F(0)\rangle \otimes |\Psi^B(0)\rangle.$$

Определим инкремент матрицы плотности всей системы в рамках стохастического интегрирования,

$$d\rho(\tau) = \rho(\tau+d\tau) - \rho(\tau) = \Big(d\mathcal{U}\Big)\rho(0)\mathcal{U}^\dagger + \\ + \mathcal{U}\rho(0)\Big(d\mathcal{U}^\dagger\Big) + \Big(d\mathcal{U}\Big)\rho(0)\Big(d\mathcal{U}^\dagger\Big), \quad (50)$$

на основе которого можно построить управляющее кинетическое уравнение для выделенной подсистемы. Для его построения следует использовать алгебру (44), свойства источника широкополосного поля с нулевой плотностью числа фотонов (39), а также свойства широкополосного однофотонного источника (36), в качестве которого, не умаляя общности, выбран гауссов пакет.

Управляющее кинетическое уравнение для матрицы плотности атомной системы ρ^A получим, усредняя уравнение (50) по вакуумному состоянию окружения и состоянию однофотонного широкополосного пакета. При усреднении по вакуумной составляющей следует учесть также соотношения

$$\mathrm{Sp}_B\Big(|\Psi^B(0)\rangle\langle\Psi^B(0)|d\mathcal{B}\Big) = 0, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}^-, \mathcal{B}^+, \Lambda,$$

а при усреднении по состоянию однофотонного пакета — равенство нулю средних от операторов:

$$\mathrm{Sp}_F\Big(|\Psi^F(0)\rangle\langle\Psi^F(0)|E^{\pm}_{\nu}(\tau)\Big) = 0.$$

В итоге управляющее кинетическое уравнение, описывающее эволюцию коллективной атомной двухуровневой системы, резонансным образом взаимодействующей с однофотонным широкополосным пакетом и широкополосным полем с нулевой плотностью числа фотонов, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho^A}{\partial\tau} = -i\Big[\mathcal{V}^{TL},\rho^A\Big] + |\chi|^2\left(R^+\frac{\mathcal{Y}+i\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2}R^-\rho^A + \right.\\ \left. + \rho^A R^+\frac{\mathcal{Y}^\dagger - i\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2}R^- + \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{R}}R^-\rho^A R^+\frac{\mathcal{Y}^\dagger}{\mathcal{R}}\right) - \\ - \mathcal{K}(\tau)|\mu|^2\Big(R^+R^-\rho^A + \rho^A R^+R^- - 2R^-\rho^A R^+\Big) - \\ - \frac{1}{2}\mathcal{K}(\tau)|\mu|^2\Big(R^-R^+\rho^A + \rho^A R^-R^+ - 2R^+\rho^A R^-\Big) - \\ - \xi^2\Big(\big(\mathcal{Y}+i\mathcal{R}\big)\rho^A + \rho^A\big(\mathcal{Y}^\dagger - i\mathcal{R}\big) + \mathcal{Y}\rho^A\mathcal{Y}^\dagger\Big), \quad (51)\end{aligned}$$

где временная функция $\mathcal{K}(\tau) = 2\big(\mathrm{erf}(\delta\tau/2)\big)$ продуцирована гауссовым частотным распределением пакета.

Условия получения уравнения для открытой атомной системы отвечают усреднениям по состоянию возбужденного и невозбужденного ширкополосных квантованных полей, в рамках которых бозонные системы играют роль термостатов. Это означает, что кинетика атомов отвечает временам, когда атомно-полевые корреляции еще не появляются, и мы пренебрегаем влиянием динамики атомной системы на поля окружения, что отвечает поведению атомов в заданном поле. Вместе с тем заметим, что уравнение (49) для инкремента оператора эволюции всей системы позволяет получить уравнение не только исключительно для атомной системы, но и для объединенной системы из атомов и однофотонного пакета. Это уравнение в общем случае описывает развитие объединенной системы, в том числе и возникающие взаимные и автокорреляционные особенности систем, которые, естественно, определяются и их начальными связями. В этой статье, однако, мы ограничиваемся только рассмотрением кинетики атомной подсистемы, чтобы выделить и проанализировать роль кинетических слагаемых, обусловленных взаимодействием широкополосного однофотонного поля и поля с нулевой плотностью числа фотонов на атомной системе.

Первое слагаемое уравнения (51) определяется динамическим развитием атомной системы посредством диполь-дипольного взаимодействия резонансных атомов. В случае воздействия на систему каких-либо дополнительных внешних (в том числе и квантованных) полей, резонансных выделенному переходу, их воздействие описывается аналогичным слагаемым, где оператор взаимодействия с атомной системой следует определить в представлении взаимодействия. Второе слагаемое определяет релаксацию атомной системы в широкополосном поле с нулевой плотностью числа фотонов с учетом штарковского взаимодействия. Отметим, что алгебраический метод получения управляющего уравнения позволил учесть это взаимодействие во всех порядках стандартной теории возмущений. Это оказывается возможным благодаря наличию алгебраических свойств базовых компонент квантовых стохастических процессов, определенных соотношениями алгебры Хадсона – Партасарати. Следующие два слагаемых уравнения (51) описывают процессы релаксации атомной системы при взаимодействии с широкополосным полем однофотонного пакета с гауссовым частотным распределением. Первое из них отвечает процессам перехода атома с верхнего состояния на нижнее, а второе определяет вынужденные переходы под действием поля из нижнего состояния в верхнее. Наличие в пакете именно одного фотона и учет наряду с процессом вынужденного перехода также и спонтанного перехода, обусловленного коммутационными соотношениями операторов однофотонного поля, проявляется в два раза большим значением величины первого из рассматриваемых слагаемых. Эти слагаемые изменяют величину эффективной скорости релаксации атомной системы. Заметим, что обсуждаемые слагаемые определены величиной второго порядка по взаимодействию атом – возбужденное состояние поля. Слагаемые первого порядка указанного взаимодействия оказываются равными нулю ввиду свойств усреднения квантованного однофотонного пакета. Наконец, последнее слагаемое в правой части (51) обусловлено как интерференцией операторов рождения и уничтожения возбужденного и вакуумного широкополосных полей при взаимодействии с резонансными состояниями атомной системы, так и свойствами алгебры Хадсона – Партасарати. Это слагаемое является новым в кинетическом уравнении для открытой атомной системы. Оно появляется благодаря возможности суммирования всего бесконечного ряда обычной теории возмущений посредством применяемой здесь процедуры вывода искомого уравнения.

Выведенное уравнение (51) эволюции атомной системы в квантованных широкополосных полях может быть переписано в форме уравнения Линдблада

$$\frac{\partial \rho^A}{\partial \tau} = -i\left[\mathcal{H}^{ext}, \rho^A\right] - \hat{\Gamma}\rho^A. \qquad (52)$$

Здесь первое слагаемое описывает динамику системы посредством гамильтониана $\mathcal{H}^{ext}$ в представлении взаимодействия с внешними электромагнитными полями, не включенными нами в рассматриваемую задачу, и представляет собой аддитивный вклад в рассматриваемое уравнение. Второе слагаемое является релаксационным, его происхождение обусловлено взаимодействием системы с широкополосными полями, а само оно включает слагаемые двух типов. Во-первых, это динамические слагаемые, описывающие сдвиги резонансных уровней из-за диполь-дипольного взаимодействия атомов, штарковского взаимодействия с внешним широкополосным полем с нулевой плотностью фотонов, а также сдвиг, связанный с интерференцией широкополосных однофотонного и вакуумного полей на атомной системе:

$$\Gamma^H \rho^A = -i\left[\mathcal{V}^{TL}, \rho^A\right] - i\left[\mathcal{H}^B, \rho^A\right] - i\left[\mathcal{H}^{FB}, \rho^A\right].$$

Оператор $\mathcal{V}^{TL}$ определен формулой (47), а явный вид двух других операторов представлен соотношениями

$$\mathcal{H}^B = |\chi|^2 \times \\ \times \left(R^+ \frac{\sin\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - \left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)}{\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)^2} R^- \right),$$

$$\mathcal{H}^{FB} = \xi^2 \left(\sin\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - \left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)\right).$$

Во-вторых, это релаксационные слагаемые, описывающие необратимые процессы. Два из них,

$$\hat{\Gamma}^B \rho^A = |\chi|^2 \left(R^+ \frac{\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1}{\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)^2} R^- \rho^A + \right. \\ + \rho^A R^+ \frac{\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1}{\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)^2} R^- + \\ + \left[\frac{\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1}{\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3} - \right. \\ \left. - i \frac{\sin\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)}{\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3} \right] R^- \rho^A R^+ \times \\ \times \left[\frac{\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1}{\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3} + \right. \\ \left.\left. + i \frac{\sin\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right)}{\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3} \right] \right),$$

$$\hat{\Gamma}^{FB} \rho^A = \xi^2 \left(\left[\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1 \right] \rho^A + \right. \\ + \rho^A \left[\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1 \right] + \\ + \left[\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1 - i \sin\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) \right] \times \\ \times \rho^A \left[\cos\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) - 1 + \right. \\ \left.\left. + i \sin\left(\eta_+ \frac{N}{2} + \eta_- R_3\right) \right] \right),$$

не зависят от времени и порождаются штарковским и интерференционным взаимодействиями атомов с окружением. Наконец, последнее релаксационное слагаемое описывает индуцированные внешним однофотонным полем переходы, а также спонтанные переходы вследствие учета его коммутационных соотношений и является функцией времени:

$$\hat{\Gamma}^F(\tau) \rho^A = \\ = -\mathcal{K}(\tau)|\mu|^2 \left(R^+ R^- \rho^A + \rho^A R^+ R^- - 2R^- \rho^A R^+ \right) - \\ - \frac{1}{2}\mathcal{K}(\tau)|\mu|^2 \left(R^- R^+ \rho^A + \rho^A R^- R^+ - 2R^+ \rho^A R^- \right).$$

Вид этой зависимости определяется фурье-преобразованием частотного распределения квадрата модуля амплитуды однофотонного поля. Оставляя за скобками вопрос о марковости кинетики атомной системы в рассматриваемом случае (здесь можно говорить о целой иерархии немарковских приближений, в которой конечный этап каждого приближения все равно оканчивается принятием марковских условий для того или иного коррелятора), релаксационный оператор уравнения (52) представим в виде

$$\hat{\Gamma} \rho^A = \left(\hat{\Gamma}^H + \hat{\Gamma}^B + \hat{\Gamma}^{FB} + \hat{\Gamma}^F(\tau) \right) \rho^A.$$

Уместно обсудить отличия уравнения для атомной системы в рассматриваемом случае ее возбуждения квантованным источником от уравнения в случае аналогичного широкополосного однофотонного классического источника. В последнем случае в (48) операторы рождения $a^{\dagger}(\nu)$ и уничтожения $a(\nu)$ следует представить комплексными c-числовыми амплитудами $\alpha^*(\nu)$, $\alpha(\nu)$ и повторить процедуру вывода уравнения. В итоге имеет место уравнение первого порядка по взаимодействию атом – возбужденное широкополосное поле:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho^A}{\partial \tau} = -i\Big[\mathcal{V}^{TL}, \rho^A\Big] - \\ - i\Big[\big(\mu^* R^- \mathcal{E}^*(\tau) + \mu R^+ \mathcal{E}(\tau)\big), \rho^A\Big] + \\ + |\chi|^2 \left(R^+ \frac{\mathcal{Y} + i\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2} R^- \rho^A + \rho^A R^+ \frac{\mathcal{Y}^\dagger - i\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2} R^- + \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{R}} R^- \rho^A R^+ \frac{\mathcal{Y}^\dagger}{\mathcal{R}}\right) - \\ - \xi^2 \Big(\big(\mathcal{Y} + i\mathcal{R}\big)\rho^A + \rho^A\big(\mathcal{Y}^\dagger - i\mathcal{R}\big) + \mathcal{Y}\rho^A\mathcal{Y}^\dagger\Big), \quad (53)\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{E}(\tau) = \int d\nu\, \epsilon(\nu) \langle \alpha(\nu) \rangle \exp\big(i(\nu - 1)\tau\big),$$

а угловыми скобками обозначено среднее значение безразмерной амплитуды поля на данной частоте. Слагаемые полученного уравнения, отвечающие описанию взаимодействия резонансных уровней атомной системы с широкополосным полем в вакуумном состоянии, а также отвечающие интерференционному взаимодействию широкополосных полей на атомной системе, остаются прежними. Из (53) следует система уравнений для матричных элементов атомной системы, которая в условиях адиабатического исключения недиагональных элементов сводится к балансным кинетическим уравнениям только для ее диагональных элементов. Последние соответствуют второму порядку по взаимодействию атомная система – однофотонное широкополосное поле и описывают только вынужденные переходы между рабочими уровнями. Описание спонтанных переходов, происходящих из-за учета коммутационных свойств операторов поля возбуждения, в этом случае оказывается невозможно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от многочисленных современных исследований, мы не представили в статье никаких численных расчетов, а продемонстрировали технику получения эффективного гамильтониана и кинетического уравнения в новом случае, когда становятся существенными процессы второго порядка по взаимодействию атомных систем с широкополосным вакуумным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов. Эти процессы определяются штарковским взаимодействием атомной (открытой) системы с вакуумным электромагнитным полем окружения. Мы проследили, как этому конкретному слагаемому эффективного гамильтониана отвечает слагаемое в кинетическом уравнении, которое в условиях марковского приближения имеет форму Линдблада. Заметим, что в последнее время математики активно исследуют решения уравнений Линдблада (см., например, недавние работы [47, 48]), а физики посредством этих уравнений начинают формулировку задач (см. [49–51]), тогда как для адекватности основных уравнений рассматриваемой физической задачи необходимо сначала представлять вывод или формулировку эффективного гамильтониана задачи, иначе в марковском приближении могут быть получены парадоксальные результаты (см. [38], где разобран конкретный пример).

Что касается роли штарковских взаимодействий в квантовой оптике, то традиционно ими всегда пренебрегается. Главным основанием этого пренебрежения служило то обстоятельство, что среднее от оператора штарковского взаимодействия равняется нулю и его вклад в традиционный вывод кинетического уравнения (см., например, [52]) в первых приближениях также равен нулю. При этом сам оператор штарковского взаимодействия с учетом всех энергетических уровней был корректно получен в случае взаимодействия классического поля с открытой системой методом усреднения Боголюбова – Митропольского еще в работах 1967–1970 гг. (см. ссылки и вывод в монографии [53]), что собственно и послужило основанием получения корректных результатов в первых работах по применению алгебраической теории возмущений [40–44]. Затем с учетом вырождения энергетических состояний и поляризационных эффектов в алгебраической теории возмущений оператор штарковского взаимодействия был получен в работе [54]. В случае вакуумного электромагнитного поля штарковское взаимодействие было получено методами квантовой электродинамики и методом усреднений [55, 56]. И хотя некоторые принципы алгебраической теории возмущений были сформулированы еще в монографии [57], применение алгебраической теории возмущений к задачам квантовой оптики в широкополосных полях началось, по-видимому, с работы [10]. Методы алгебраической теории возмущений позволяют легко учитывать различные резонансные, комбинационные и интерференционные процессы наряду с анализом квантовой стохастичности в условиях марковского приближения. В работах [18, 19] штарковское взаимодействие было представлено квантовым считывающим процессом в случае пространственно-локализованной атомной системы и обоснована необходимость его учета в марковском приближении в типичном случае малости константы штарковского взаимодействия по сравнению с константой однофотонного резонансного взаимодействия при росте числа атомов в ансамбле.

В данной работе получен эффективный гамильтониан и кинетическое уравнение открытой системы, позволяющее учитывать влияние штарковских процессов взаимодействия наряду с резонансным взаимодействием однофотонного поля на открытую систему. Методы алгебраической теории возмущений позволили просто определить интерференционное слагаемое, описывающее «взаимодействие» между рассмотренными полями. Из уравнений (51) видно, что, несмотря на явное взаимодействие открытой системы с однофотонным источником, который, собственно, и должен превалировать, механизмы невинеровской динамики сохраняются. То есть возможна ситуация, описанная в работах [7, 18, 19], когда возбужденные состояния атомной системы стабилизируются по отношению к коллективному распаду штарковским взаимодействием и возможно взаимодействие «только» с однофотонным источником. При этом есть и дополнительное интерференционное релаксационное слагаемое, которое обычно не учитывают при применении феноменологических уравнений в форме Линдблада в различных задачах, как, например, в работе [6]. Подчеркнем, что в каждой конкретной задаче интерференционное слагаемое имеет свой вид, но оно наряду с штарковским взаимодействием присутствует всегда и влияет на динамику (см., например, [4, 10]). Чтобы увидеть конкретную роль интерференционного слагаемого в динамике описанной нами системы, необходимо дополнительное исследование на основании полученного уравнения.

Представленный вывод эффективного гамильтониана в технике алгебраической теории возмущений определенно показывает, что штарковское взаимодействие является величиной того же порядка или существеннее, что и взаимодействия прямых двухквантовых, комбинационных и прочих многофотонных переходов с излучением или переизлучением квантов. В разд. 3 мы намеренно остановились на описании в предложенном подходе процессов штарковского взаимодействия в маломодовых полях, что обычно имеет место в микрорезонаторах. Поэтому вызывает удивление громадное и растущее количество работ по численному исследованию процессов и эффектов, сопровождающих двухфотонные взаимодействия, в которых важными и как минимум того же порядка слагаемыми пренебрегается (см., например, недавние работы [58–61]).

Существенным ограничением условий применимости полученного нами кинетического уравнения является использованное приближение локализованного атомного ансамбля. Выход за рамки этого приближения на основе метода квантовых СДУ делает актуальным построение моделей пространственно-разделенных открытых систем с их «локальным» окружением, которое также взаимодействует с другими локальными полями окружения на границах раздела. Такая актуальность связана с относительной простотой и прозрачностью всех аналитических выводов в методе СДУ в представлении эффективного гамильтониана, которые мы постарались продемонстрировать в этой работе. Модель, основанная на обобщении алгебры дифференциалов Ито квантовых случайных процессов, недавно предложена в работе одного из авторов [62]. Но возможны и другие подходы, свободные от ограничения приближения локализованного атомного ансамбля. Методы на основе квантовой центральной предельной теоремы [28] и ренормгруппового преобразования оператора эволюции [30] относятся к числу таких, на наш взгляд, весьма перспективных методов. Нам пока не ясно, возможно ли в ренормгрупповом подходе точное и аналитическое суммирование всех слагаемых разложения оператора эволюции при учете операторов штарковского взаимодействия, как в продемонстрированном методе квантовых СДУ, но представляется несомненно важным сравнение подходов при использовании одного и того же эффективного гамильтониана с учетом штарковского взаимодействия открытой системы с окружающими ее полями, в том числе и полученного в нашей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).

2. V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, Rep. Math. Phys. **13**, 149 (1978).

3. A. M. Basharov, V. N. Gorbachev, and A. A. Rodichkina, Phys. Rev. A **74**, 042313 (2006).

4. A. M. Basharov, J. Phys. Conf. Ser. **613**, 012007 (2015).

5. S. M. Chumakov, A. B. Klimov, and C. Saavedra, Phys. Rev. A **61**, 033814 (2000).

6. A. V. Dodonov, Phys. Scripta **86**, 025405 (2012).

7. А. М. Башаров, ЖЭТФ **142**, 419 (2012).

8. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).

9. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2000, 2004).

10. А. М. Башаров, ЖЭТФ **102**, 1126 (1992).

11. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **132**, 355 (2007).

12. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **135**, 227 (2009).

13. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **138**, 616 (2010).

14. F. Benatti, F. Carollo, and R. Floreanini, J. Math. Phys. **57**, 062208 (2016).

15. P.-O. Guimond, H. Pichler, A. Rauschenbeutel, and P. Zoller, Phys. Rev. A **94**, 033829 (2016).

16. A. Barchielli, Rep. Math. Phys. **77**, 315 (2016).

17. K. Ohki, K. Tsumura, and R. Takeuchi, J. Phys. B **50**, 125503 (2017).

18. A. M. Basharov, Phys. Rev. A **84**, 013801 (2011).

19. А. М. Башаров, ЖЭТФ **140**, 431 (2011).

20. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Comm. Math. Phys. **93**, 301 (1984).

21. A. M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Sociedad Matematica Mexicana (2000).

22. А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ (2003).

23. B. Q. Baragiola, R. L. Cook, A. M. Branczyk, and J. Combes, Phys. Rev. A **86**, 013811 (2012).

24. A. Dabrowska, G. Sarbicki, and D. Chruscinski, Phys. Rev. A **96**, 053819 (2017).

25. A. Dabrowska, arXiv:1611.06359v5 [quant-ph] (2017).

26. B. Q. Baragiola and J. Combes, Phys. Rev. A **96**, 023819 (2017).

27. K. M. Gheri, K. Ellinger, T. Pellizzari, and P. Zoller, Fortschr. Phys. **46**, 401 (1998).

28. F. Benatti, F. Carollo, and R. Floreanini, J. Math. Phys. **57**, 062208 (2016).

29. J. A. Gross, C. M. Caves, G. J. Milburn, and J. Combes, arXiv:1611.06359v5 [quant-ph] (2017).

30. K. A. Fischer et al., arXiv:1710.02875v3 [quant-ph] (2017).

31. V. Link and W. T. Strunz, Phys. Rev. Lett. **119**, 180401 (2017).

32. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).

33. M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966).

34. H. Frohlich, Phys. Rev. **79**, 845 (1950).

35. Г. Л. Бир, Г. Е. Пикус, *Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках*, Наука, Москва (1972).

36. Ю. А. Фирсов, *Поляроны*, Наука, Москва (1975).

37. M. Wagner, *Unitary Transformations in Solid State Physics*, North-Holland, Amsterdam (1986).

38. A. M. Basharov, J. Phys. Conf. Ser. **859**, 012003 (2017).

39. V. N. Bogaevski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer (1991).

40. M. Takatsuji, Phys. Rev. **155**, 980 (1967).

41. M. Takatsuji, Phys. Rev. B **2**, 340 (1970).

42. M. Takatsuji, Phys. Rev. A **4**, 808 (1971).

43. M. Takatsuji, Physica **51**, 265 (1971).

44. M. Takatsuji, Phys. Rev. A **11**, 619 (1975).

45. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, ГИФМЛ, Москва (1958).

46. K. G. Katamadze, N. A. Borshchevskaya, I. V. Dyakonov et al., Phys. Rev. A **92**, 023812 (2015).

47. А. Е. Теретёнков, Матем. заметки **102**, 908 (2017).

48. J. R. Bolanos-Servin and F. Fagnola, J. Phys. Conf. Ser. **819**, 012003 (2017).

49. C. Ou, R. V. Chamberlin, and S. Abe, Physica A **466**, 450 (2017).

50. H. C. F. Lemos and T. Prosen, Phys. Rev. E **95**, 042137 (2017).

51. O. Furtmaier and M. Mendoza, Phys. Rev. A **96**, 022134 (2017).

52. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).

53. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).

54. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Э. А. Маныкин, ЖЭТФ **84**, 487 (1983).

55. P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Acad. Press, Boston (1994).

56. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2003).

57. В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1956).

58. Zhiguo Lu et al., J. Phys. A **50**, 074002 (2017).

59. L. Garbe, I. L. Egusquiza, E. Solano, C. Ciuti, T. Coudreau, P. Milman, and S. Felicetti, Phys. Rev. A **95**, 053854 (2017).

60. J. Peng, C. Zheng, G. Guo, X. Guo, X. Zhang, C. Deng, G. Ju, Z. Ren, L. Lamata, and E. Solano, J. Phys. A **50**, 174003 (2017).

61. Y.-Z. Zhang, Rev. Math. Phys. **29**, 1750013 (2017).

62. А. М. Башаров, ЖЭТФ **153**, 375 (2018).