ЖЭТФ, 2018, том 154, вып. 2 (8), стр. 321–325

О ЧИСЛЕ ФОТОНОВ В КЛАССИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

***Р. М. Фещенко*[*], А. В. Виноградов*[**]**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
199991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 марта 2018 г.

Обсуждаются соотношения, определяющие число фотонов в электромагнитном поле с точки зрения классической электродинамики. Получено релятивистски инвариантное выражение для числа излученных фотонов через заряды и токи, создавшие электромагнитное поле. Рассмотрены примеры вычисления числа фотонов в электромагнитном поле для случаев поля излучения электрического диполя, а также поля конечного и пространственно-ограниченного электромагнитного импульса.

DOI: 10.1134/S0044451018080102

1. ВВЕДЕНИЕ

Как показано в работе [1], в классическом свободном электромагнитном поле сохраняется величина

$$N = \frac{1}{16\pi^3 c\hbar} \times \\ \times \iint \frac{\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\mathbf{E}(t,\mathbf{r}') + \mathbf{H}(t,\mathbf{r})\mathbf{H}(t,\mathbf{r}')}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\, d^3r\, d^3r', \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — пространственные координаты, t — время, c — скорость света. В квантовой теории величина (1) имеет смысл числа фотонов [1]. В западной литературе она получила название инварианта Зельдовича [2, 3].

Однако ряд смежных вопросов остался не выясненным. В частности, выражение (1) в явной форме не является релятивистски инвариантным, и поэтому его независимость от выбора системы отсчета не очевидна. Также осталась неясной связь числа фотонов в свободном электромагнитном поле со свойствами электрических зарядов и токов, его породивших.

Релятивистская инвариантность числа фотонов в классическом свободном электромагнитном поле изучалась в работе [2], где попытка его вычисления внутри резонатора Фабри – Перо изначально привела к неинвариантной величине, зависящей от выбора системы отсчета. Этот недостаток был частично исправлен путем корректного суммирования числа фотонов по модам поля, распространяющихся в разных направлениях, в виде, перекликающемся с работой [4]. Однако окончательно вопрос решен не был.

Целью настоящей работы является классическое рассмотрение задачи излучения зарядами и токами фотонов в смысле определения (1). Показано, что результат, а именно число фотонов (1), является релятивистским инвариантом для свободного поля и может быть выражен через заряды и токи, его породившие. В качестве примеров обсуждаются поле излучения диполя и поле конечного и ограниченного электромагнитного импульса.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ СИСТЕМОЙ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ

Понятие числа фотонов можно ввести в классическую электродинамику, если воспользоваться известным выражением для энергии-импульса, излученного движущейся заряженной частицей ([5], с. 225). Это выражение можно обобщить на случай произвольной конечной и ограниченной системы токов и зарядов следующим образом:

$$P^i = -\frac{1}{2\pi^2 c^3} \int \theta(k^0)\delta(k^m k_m) k^i j^l(k) j_l^*(k)\, d^4k, \quad (2)$$

где $j^l(k)$ — четырехмерное преобразование Фурье от компонент четырехмерного тока,

[*] E-mail: rusl@sci.lebedev.ru
[**] E-mail: vinograd@sci.lebedev.ru

$$j^i(k) = \int j^i(x) e^{ikx} d^4x, \tag{3}$$

а сам четырехмерный ток определен как $j^l(x) = (c\rho(t,\mathbf{r}), \mathbf{j}(t,\mathbf{r}))$, где ρ — объемная плотность зарядов, а $\mathbf{j}$ — трехмерная плотность тока. Также $\theta(k^0)$ — тета-функция, селектирующая положительно-частотную часть, $k = (k^0, \mathbf{k})$ — четырехмерный волновой вектор и $x = (ct, \mathbf{r})$ — четырехмерные координаты. Как обычно, по повторяющимся верхнему и нижнему индексам предполагается суммирование. Символ «$*$» в (2) и во всех последующих выражениях означает комплексное сопряжение.

Выражение (2) можно переписать в виде

$$P^i = \int p^i n(k)\, d^4k, \tag{4}$$

где $p^i = \hbar k^i$ — 4-импульс одного фотона с волновым вектором k^i, а $n(k)$ — величина, имеющая смысл фазовой плотности фотонов в импульсном фазовом пространстве. Из выражений (2) и (4) следует, что

$$n(k) = -\frac{1}{2\pi^2 c^3 \hbar}\, \theta(k^0)\delta(k^m k_m) j^l(k) j_l^*(k). \tag{5}$$

Соответственно, полное число фотонов может быть получено из соотношения (5) интегрированием по d^4k:

$$N = -\frac{1}{2\pi^2 c^3 \hbar} \int \theta(k^0)\delta(k^m k_m) j^l(k) j_l^*(k)\, d^4k. \tag{6}$$

Число фотонов, определенное таким образом, является явно релятивистски инвариантным, не зависящим от времени, и вещественным, однако его знак не очевиден. В трехмерных обозначениях и после интегрирования по k^0 выражение (6) можно переписать как

$$N = \frac{1}{4\pi^2 c^3 \hbar} \int \frac{|\mathbf{j}(|\mathbf{k}|, \mathbf{k})|^2 - c^2 |\rho(|\mathbf{k}|, \mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|}\, d^3k. \tag{7}$$

Всякий четырехмерный ток j^l должен удовлетворять уравнению непрерывности, выражающему закон сохранения электрического заряда и имеющему в импульсном представлении вид $k^m j_m = 0$. После перехода к трехмерным обозначениям получаем выражение $ck^0\rho - \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$, из которого можно выразить ρ и подставить в соотношение (7). Тогда для полного числа фотонов получим

$$N = \frac{1}{4\pi^2 c^3 \hbar} \int \frac{|\mathbf{j}_\perp(|\mathbf{k}|, \mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|}\, d^3k, \tag{8}$$

где $\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})/|\mathbf{k}|^2$ — компоненты тока, перпендикулярные волновому вектору. Из формулы (8) следует, что число фотонов — всегда величина неотрицательная.

Для преобразования выражения (6) в координатную форму заметим, что по аналогии с разложением кулоновского потенциала по плоским волнам имеет место следующая формула:

$$\int \theta(k^0)\delta(k^m k_m) \exp(-ik_m x^m)\, d^4k = -\frac{2\pi}{x^m x_m}. \tag{9}$$

Теперь, используя формулы (3) и (9), можно показать, что

$$N = \frac{1}{\pi c^3 \hbar} \iint \frac{j^l(x) j_l(x')}{(x - x')^2}\, d^4x\, d^4x'. \tag{10}$$

Это выражение в трехмерной форме выглядит как

$$N = \frac{1}{\pi c \hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iint \frac{c^2 \rho(t,\mathbf{r})\rho(t',\mathbf{r}') - \mathbf{j}(t,\mathbf{r})\mathbf{j}(t',\mathbf{r}')}{c^2(t-t')^2 - (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \times \\ \times d^3r\, d^3r'\, dt\, dt'. \tag{11}$$

Согласно формуле (10), число фотонов N имеет вид четырехмерного автокоррелятора с сингулярным ядром, удовлетворяющим волновому уравнению

$$\Box \frac{1}{(x - x')^2} = 0, \tag{12}$$

где $\Box = \partial^m \partial_m = \partial^2/(c\partial t)^2 - \Delta$ — оператор Даламбера, $\partial_i = \partial/\partial x^i$, а Δ — лапласиан. Выражения (10) и (11) представляют основной результат данной работы.

3. ЧИСЛО ФОТОНОВ В СВОБОДНОМ ПОЛЕ

Изучим теперь связь формулы (10), выражающей число фотонов в электромагнитном поле через заряды и токи, его излучившие, и формулы (1), где это число выражено через сами поля. Для этого перепишем формулу (10) в виде

$$N = \frac{1}{c^2 \hbar} \int j_l(x) A^l_{rad}(x)\, d^4x, \tag{13}$$

где

$$A^l_{rad}(x) = \frac{1}{\pi c} \int \frac{j^l(x')}{(x - x')^2}\, dx'^4 \tag{14}$$

— четырехмерный потенциал некоторого поля излучения. Из уравнения (12) следует, что $\Box A^l_{rad} = 0$. По сути, число фотонов представляется в виде действия для лагранжиана взаимодействия этого поля излучения с зарядами и токами.

Будем считать, что токи существуют лишь в течение ограниченного времени и что при $t \to -\infty$ и $t \geq t_0$, где t_0 — некоторое время, они равны нулю. Другими словами, область интегрирования по четырехмерному пространству-времени в выражении (13) фактически ограничена гиперплоскостью $t = t_0$, на которой в области $t > t_0$ зарядов и токов уже нет. Будем также считать, не ограничивая общности, что электромагнитное поле описывается четырехмерным вектор-потенциалом $A^m = (A^0, \mathbf{A})$ в калибровке Лоренца, т. е. выполняется условие $\partial^m A_m = 0$. Тогда этот четырехмерный потенциал удовлетворяет уравнению Даламбера $\Box A^l = 4\pi j^l/c$. Подставляя это выражение в формулу (14) и дважды используя четырехмерную теорему Гаусса ([5], с. 37), получим, что с учетом равенства потенциалов нулю на бесконечности и волнового уравнения для A_{rad} число фотонов равно

$$N = \frac{1}{4\pi c\hbar} \int \left(A^k_{rad} \partial_i A_k - A_k \partial_i A^k_{rad} \right) dS^i, \qquad (15)$$

где интегрирование идет по уже упомянутой гиперплоскости, $dS^i = n^i dS$ и n^i — единичный 4-вектор, ортогональный гиперплоскости интегрирования.

Проделывая то же самое в формуле (14), получим

$$A^l_{rad}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int \left(\partial_i A^l(x') \frac{1}{(x-x')^2} - A^l(x') \frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{1}{(x-x')^2} \right) dS'^i, \qquad (16)$$

где интегрирование идет по той же гиперплоскости, что и в (15).

Подставляя теперь выражение (16) в (15), получим

$$N = \frac{1}{16\pi^3 c\hbar} \iint \left(\partial_i A_k(x) \partial_m A^k(x') + \frac{2A_k(x) A^k(x')}{(x-x')^2} g_{im} \right) \frac{dS^i dS'^m}{(x-x')^2}, \qquad (17)$$

где учтено, что, поскольку двойное интегрирование в (17) идет по одной и той же гиперплоскости, в этом случае (т. е. когда $t = t'$)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x'^m} \frac{1}{(x-x')^2} = \frac{2g_{im}}{(x-x')^4},$$

где $g_{im} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор.

Как уже было сказано, гиперплоскость интегрирования располагается за пределами области пространства-времени, где имеются заряды и токи. Поэтому, сохраняя лоренцеву калибровку, можно наложить дополнительное калибровочное условие на потенциалы этого уже свободного электромагнитного поля, потребовав, например, чтобы скалярный потенциал A^0 был равен нулю. Тогда выражение (17) можно представить в трехмерной форме:

$$N = \frac{1}{16\pi^3 c\hbar} \iint \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}(t,\mathbf{r})}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}(t,\mathbf{r}')}{\partial t} - \frac{2\mathbf{A}(t,\mathbf{r})\mathbf{A}(t,\mathbf{r}')}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \right) \frac{d^3r\, d^3r'}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}, \qquad (18)$$

где учтено, что $(x-x')^2 = -(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2$, поскольку $t = t'$. Дальнейшее преобразование соотношения (18) проводится с учетом выражений для электрического и магнитного полей через трехмерный вектор-потенциал $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad (19)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad (20)$$

а также с использованием трехмерной теоремы Гаусса, условия калибровки $\nabla \mathbf{A} = 0$ и равенства $\Delta(1/(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2) = -2/(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^4$. В итоге получаем выражение (1).

В четырехмерной форме выражение (1) можно записать в виде

$$N = \frac{1}{16\pi^3 c\hbar} \times \iint \frac{F_{ik}(x) F_m{}^k(x') + \tilde{F}_{ik}(x) \tilde{F}^k_m(x')}{(x-x')^2} dS^i dS'^m, \qquad (21)$$

где $\tilde{F}_{ik} = \epsilon_{ikmn} F^{mn}/2$ — тензор, дуально-сопряженный к тензору электромагнитного поля.

Выражение (1) можно преобразовать, используя трехмерные фурье-гармоники полей, в следующую форму:

$$N = \frac{1}{64\pi^4 c\hbar} \int \frac{|\mathbf{E}(t,\mathbf{k})|^2 + |\mathbf{H}(t,\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|} d^3k, \qquad (22)$$

которая имеет смысл суммы числа фотонов по фурье-гармоникам электромагнитного поля и используется в работе [1] как отправная точка для вывода формулы (1).

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ДИПОЛЕМ

Рассмотрим применение полученных выше формул к излучающей системе, состоящей из электрического диполя, у которого дипольный момент быстро осциллирует и медленно затухает. Например, можно использовать следующее выражение:

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{d}_0 \cos(\omega_0 t)\, e^{-\gamma t/2}, \qquad (23)$$

где $\mathbf{d}_0$ — временнáя фурье-гармоника дипольного момента, ω_0 — частота его осцилляций, а $\gamma \ll \omega_0$ — декремент затухания. Чтобы получить выражение для числа фотонов, излученных этим осциллирующим дипольным моментом, заметим, что в дипольном приближении, когда длина волны излучения много больше размеров системы, выполняется соотношение

$$ck^0 \frac{\partial \rho(k^0, 0)}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{j}(k^0, 0),$$

которое может быть получено из уравнения непрерывности для токов дифференцированием по $\mathbf{k}$ и подстановкой $\mathbf{k} = 0$. Подставляя это соотношение в формулу (6), получим

$$N = -\frac{1}{2\pi^2 c\hbar} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(k^0)\delta({k^0}^2 - \mathbf{k}^2)(k^\alpha k^\beta - {k^0}^2\delta^{\alpha\beta}) \times \\ \times \nabla^\alpha_{\mathbf{k}} \rho(k^0, 0) \nabla^\beta_{\mathbf{k}} \rho^{*0}(k^0, 0)\, dk^0 d^3k. \quad (24)$$

После интегрирования по k^0 и телесному углу с использованием среднего $\overline{k^\alpha k^\beta} = |\mathbf{k}|^2 \delta^{\alpha\beta}/3$ (где $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, а индексы $\alpha, \beta = 1, 2, 3$) выражение (24) сводится к

$$N = \frac{2}{3\pi c^3 \hbar} \int\limits_0^\infty \omega^3 |\mathbf{d}_\omega|^2\, d\omega, \quad (25)$$

где $\mathbf{d}_\omega = \nabla^\alpha_{\mathbf{k}} \rho(|\mathbf{k}|, 0)/c$ — фурье-преобразование по времени от дипольного момента $\mathbf{d}(t)$, а $\omega = c|\mathbf{k}|$. Выражение (25) может быть преобразовано к координатной форме следующим образом:

$$N = \frac{2}{3\pi c^3 \hbar} P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{\mathbf{d}}(t) \ddot{\mathbf{d}}(t')}{t - t'}\, dt\, dt'. \quad (26)$$

Тем самым оно приобретает вид одномерного коррелятора с сингулярным ядром, в котором интеграл понимается в смысле главного значения. Для справки, выражение для полной излученной электрическим диполем энергии имеет вид [5]

$$E = \frac{2}{3c^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{d}}^2(t)\, dt. \quad (27)$$

Подставляя выражение (23) в (26) и (27) и учитывая, что $\gamma \ll \omega_0$, получаем следующие выражения для числа излученных фотонов и излученной энергии:

$$N \approx \frac{4}{3c^3\hbar} \frac{\omega^3}{\gamma} |\mathbf{d}_0|^2, \quad (28)$$

$$E \approx \frac{4}{3c^3} \frac{\omega^4}{\gamma} |\mathbf{d}_0|^2. \quad (29)$$

Выражение (28) равно единице, если декремент затухания равен естественной ширине линии перехода $\gamma \approx 4(\omega/c)^3 |\mathbf{d}_0|^2/3\hbar$ ([6], формула (8.3-9) на с. 166). Это представляется естественным, поскольку такая система должна испустить только один фотон с энергией $E_{ph} = \hbar\omega_0$, что и следует из формул (28) и (29).

5. ЧИСЛО ФОТОНОВ В ПОЛЕ КОНЕЧНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА

Рассмотрим число фотонов в конечном и пространственно-ограниченном электромагнитном импульсе, описываемом следующим вектор-потенциалом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \times \nabla f(t, \mathbf{r}), \quad (30)$$

где $\mathbf{P}$ — произвольный вектор, имеющий размерность поля, а функция

$$f(t, \mathbf{r}) = a^3 \frac{g(ct + r) - g(ct - r)}{r} \quad (31)$$

удовлетворяет свободному волновому уравнению при произвольной функции $g(s)$ [7]. Параметр a имеет размерность длины. Пространственные фурье-компоненты вектор-потенциала (30) и выражающиеся через него посредством формул (19), (20) фурье-компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют вид

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{k}) = [\mathbf{P} \times \mathbf{k}] f(t, \mathbf{k}), \quad (32)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{k}) = \frac{1}{c} [\mathbf{P} \times \mathbf{k}] \dot{f}(t, \mathbf{k}), \quad (33)$$

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{k}) = [\mathbf{k} \times [\mathbf{P} \times \mathbf{k}]] f(t, \mathbf{k}), \quad (34)$$

где пространственная фурье-гармоника функции f выражается как

$$f(t, \mathbf{k}) = \frac{4\pi a^3}{k} \left[a_{\mathbf{k}} \cos(kt) - b_{\mathbf{k}} \sin(kt)\right], \quad (35)$$

$$a_{\mathbf{k}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s) \cos(ks)\, ds, \quad (36)$$

$$b_{\mathbf{k}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s) \sin(ks)\, ds \quad (37)$$

и $k = |\mathbf{k}|$. После подстановки формул (33)–(37) в (1) получается следующее выражение для числа фотонов в поле электромагнитного импульса:

$$N = \frac{2a^6}{3\pi c\hbar} |\mathbf{P}|^2 \int\limits_0^\infty k^3 (a^2_{\mathbf{k}} + b^2_{\mathbf{k}})\, dk, \quad (38)$$

которое можно сравнить с полной энергией этого импульса

$$E = \frac{2a^6}{3\pi}|\mathbf{P}|^2 \int\limits_0^\infty k^4(a_\mathbf{k}^2 + b_\mathbf{k}^2)\,dk. \tag{39}$$

Координатные эквиваленты формул (38), (39) имеют вид

$$N = \frac{2a^6}{3\pi c\hbar}|\mathbf{P}|^2\, P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(s)g''(s')}{s-s'}\,ds\,ds', \tag{40}$$

$$E = \frac{2a^6}{3}|\mathbf{P}|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} g''^2(s)\,ds, \tag{41}$$

откуда следует, что число фотонов опять является некоторым автокоррелятором полевых функций.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках классической электродинамики выведены соотношения для числа фотонов в классическом электромагнитном поле, которые выражают его через заряды и токи, это поле создавшие. В координатном представлении число фотонов является автокоррелятором четырехмерного тока с сингулярным ядром во всем пространстве-времени. Полученная четырехмерная форма выражения для числа фотонов явно демонстрирует, что число фотонов в электромагнитном поле, порожденном системой зарядов и токов, является релятивистским инвариантом и не зависит от времени. Из уравнения непрерывности для зарядов и токов также следует, что число фотонов является величиной неотрицательной.

Исследована связь полученных выражений с известными ранее результатами для свободного электромагнитного поля. Приведено доказательство релятивистской инвариантности соответствующей формулы.

Приведены два примера вычисления числа фотонов в электромагнитном поле. В качестве первого примера рассмотрен излучающий электрический диполь, для которого число излученных им фотонов выражено через производные его дипольного момента в виде некоторого автокоррелятора. В качестве второго примера выбран сферически-симметричный, конечный и пространственно-ограниченный электромагнитный импульс, для которого получены выражения для числа фотонов в импульсном и координатном представлениях.

Хотя понятие фотона обычно ассоциируется с квантовой теорией электромагнитного поля, выражения, по смыслу соответствующие числу фотонов, могут быть записаны и для классического электромагнитного поля. Это обстоятельство не является удивительным, поскольку, как правило, каждая дискретная квантовая величина имеет классический аналог в форме адиабатического инварианта [1, 2]. Классические формулы для числа фотонов могут иметь как чисто методическое значение, так и найти полезные применения в теории излучения электромагнитных волн зарядами и токами. Они, например, могут упростить вычисление числа излученных фотонов в классических системах, где квантовыми эффектами можно пренебречь, т. е. в случае большого числа излученных фотонов.

Авторы выражают благодарности О. Н. Крохину, А. М. Федотову и И. А. Артюкову за стимулирующие дискуссии. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 7 «Актуальные проблемы фотоники, зондирование неоднородных сред и материалов».

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, ДАН СССР **63**, 1359 (1965).
2. J. Avron, E. Berg, D. Goldsmith, and A. Gordon, Eur. Phys. J. **20**, 153 (1999).
3. K. T. McDonald, http://cosmology.princeton.edu/mcdonald/examples/uoveromega.pdf.
4. A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 891 (1905).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (1973).
6. A. Yariv, *Quantum Electronics*, Wiley, New York (1989).
7. A. M. Fedotov, K. Y. Korolev, and M. V. Legkov, SPIE Proc. **6726**, 672613 (2007).