ЖЭТФ, 2018, том 154, вып. 2 (8), стр. 407–414 © 2018

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ ЗАРЯЖЕННЫХ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ

*О. С. Ваулина**, *Э. А. Саметов*

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия

Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 13 марта 2018 г.

Представлены результаты аналитического и численного исследований динамики ограниченных ансамблей заряженных броуновских частиц в потенциальном поле электростатической ловушки. Моделирование выполнялось для кластерных систем, состоящих из частиц с кулоновским взаимодействием (приблизительно до тысячи), в широком диапазоне их параметров. Выполнено сравнение спектральных и структурных характеристик моделируемых систем. Представлен анализ зависимости формы парной корреляционной функции и размеров кластерных систем от температуры и количества частиц. Исследована связь спектральной плотности смещений центра масс и отдельных частиц со структурными характеристиками и параметром неидеальности моделируемых ансамблей.

DOI: 10.1134/S0044451018080199

1. ВВЕДЕНИЕ

Броуновское движение в системах взаимодействующих частиц широко распространено в природе и наблюдается, например, в биологических и полимерных коллоидных растворах, в плазме продуктов сгорания, в атмосфере Земли и т. д. [1–6]. Однако на настоящий момент аналитические модели для броуновской динамики частиц разработаны только для двух простейших случаев: невзаимодействующие частицы и одиночная заряженная частица, движение которой ограничено потенциальным полем ловушки. Анализ этих задач не позволяет исследовать влияние числа взаимодействующих частиц, N, на характер их броуновского движения. Для этой цели широко используется численное моделирование.

Экспериментальный, теоретический и численный анализы теплового движения взаимодействующих пылевых частиц в протяженных и ограниченных ансамблях, формирующихся в газоразрядной плазме, представлены в работах [7–13]. Отметим, что в обычных тлеющих разрядах (как переменного, так и постоянного тока) в центре газоразрядных камер наблюдается некоторое превышение концентрации ионов плазмы над ее электронной концентрацией [14]. Данное обстоятельство приводит к формированию эффективных ловушек для отрицательно заряженных частиц пыли [5, 6].

Тем не менее, несмотря на большое количество работ по исследованию динамики заряженных броуновских частиц в потенциальных полях электрических ловушек [7–13, 15–18], некоторые вопросы на настоящий момент остаются невыясненными. Например, зависимость формы парной корреляционной функции от температуры взаимодействующих частиц в ограниченных ансамблях, спектральная плотность смещений отдельных частиц как в кластерных, так и в протяженных ансамблях, а также ее связь со структурными характеристиками и параметром неидеальности исследуемых систем и т. д.

В настоящей работе представлены результаты аналитического и численного исследований динамики ограниченных ансамблей заряженных броуновских частиц в потенциальном поле электростатической ловушки. Так, в разд. 2 представлены результаты решения уравнения движения заряженной броу-

* E-mail: olga.vaulina@bk.ru

новской частицы в потенциальном поле электростатической ловушки, а также аналитические приближения для спектра колебаний и парной корреляционной функции ансамблей частиц. В разд. 3 приводятся результаты численного моделирования для систем, состоящих из заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона, количество которых составляет от одной до 500. Вычисления выполнялись для частиц различных масс M и зарядов Q в широком диапазоне температур T и при различных коэффициентах трения ν частиц за счет их столкновений с нейтральными частицами буферного газа.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Запишем уравнение движения (уравнение Ланжевена) для одной заряженной частицы массой M и зарядом Q в постоянном электрическом поле линейной изотропной ловушки $\mathbf{E} = [E_x, E_y, E_z]$ под воздействием случайной силы $\mathbf{F}_b = [F_{bx}, F_{by}, F_{bz}]$, которая является источником стохастической (тепловой) энергии частиц:

$$\frac{dV_x}{dt} = -\nu V_x - \omega_t^2 x + \frac{F_{bx}}{M}. \qquad (1)$$

Здесь $x = x(t)$ — смещение частицы от ее положения равновесия на одну степень свободы, $V_x\ (t) = dx/dt$ — скорость частицы, ν — коэффициент трения заряженных частиц из-за их столкновений с нейтральными частицами окружающего газа, $\omega_t = (Q\alpha/M)^{1/2}$ — характерная частота ловушки, α — величина градиента внешнего электрического поля $\mathbf{E}$.

Средний квадрат отклонений $\langle x(t)^2\rangle$ от положения равновесия такой частицы, среднеквадратичное смещение частицы от ее начального положения $\langle \Delta x(t)^2\rangle$ и автокорреляционная функция $\langle x(0)x(t)\rangle$ могут быть представлены в форме [7, 8, 19]

$$\langle x(t)^2\rangle = \frac{T}{M\omega_t^2} \times \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu t}{2}\right)\left(\mathrm{ch}(\nu t\psi) + \frac{\mathrm{sh}(\nu t\psi)}{2\psi}\right)\right], \qquad (2)$$

$$\langle \Delta x(t)^2\rangle \equiv \langle (x(t) - x(0))^2\rangle = \frac{2T}{M\omega_t^2} \times \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu t}{2}\right)\left(\mathrm{ch}(\nu t\psi^*) + \frac{\mathrm{sh}(\nu t\psi^*)}{2\psi^*}\right)\right], \qquad (3)$$

$$\langle x(0)x(t)\rangle = \frac{2T}{M\omega_t^2} \times \left[\exp\left(-\frac{\nu t}{2}\right)\left(\mathrm{ch}(\nu t\psi^*) + \frac{\mathrm{sh}(\nu t\psi^*)}{2\psi^*}\right)\right]. \qquad (4)$$

Здесь и далее T — температура частиц в энергетических единицах, $\psi = (1 - 8\xi^2)^{1/2}/2$, $\psi^* = (1 - 4\xi^2)^{1/2}/2$, $\xi = \omega_t/\nu$, а угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ обозначают усреднение по всем отрезкам времени, равным t.

Для анализа теплового движения взаимодействующих пылевых частиц удобно пользоваться еще одной характеристикой случайных процессов, а именно, спектральной плотностью. Спектральная плотность определяется как преобразование Фурье автокорреляционной функции физических характеристик анализируемого процесса. При этом спектральная плотность случайного процесса является косинус-преобразованием Фурье для соответствующей автокорреляционной функции [19, 20]. Таким образом, спектральная плотность для смещений заряженной частицы в ловушке (спектральная плотность классического осциллятора) может быть записана как [4, 21, 22]

$$G(\omega) = \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_t^2)\omega^2 + \omega_t^4}, \qquad (5)$$

что, соответственно, является косинус-преобразованием Фурье для функции (4). Добавим также, что уравнения типа (1) могут использоваться для анализа движения центра масс для произвольного ансамбля частиц с попарным взаимодействием, а также для любой частицы в ограниченной системе, когда влиянием межчастичного взаимодействия можно пренебречь.

Для анализа физических свойств однородных структур заряженных частиц (т. е. систем, которые можно характеризовать постоянной концентрацией n) широко используется параметр неидеальности $\Gamma = Q^2 n^{1/3}/T$. При этом в линейном электрическом поле концентрация частиц может быть получена из уравнения Пуассона: $n \cong 3\alpha/4\pi Q$, и, соответственно, для среднего межчастичного расстояния имеет место соотношение $l_p \cong (4\pi Q/3\alpha)^{1/3}$, а для оценки радиуса ограниченной структуры (в первом приближении) можно использовать соотношение $R \cong (3N/4\pi n)^{1/3}$, где N — число частиц в системе. По своей сути, величина R является минимальным радиусом такой структуры. Реальный (эффективный) радиус ансамбля будет расти с увеличением температуры частиц. При этом расстояние между частицами системы будет также расти и меняться в пространстве. Последнее обстоятельство не позволяет характеризовать систему постоянным значением n (а соответственно, постоянной величиной l_p). Таким образом, параметр неидеальности в виде $\Gamma = Q^2 n^{1/3}/T \equiv Q^2/l_p T$ не будет отражать

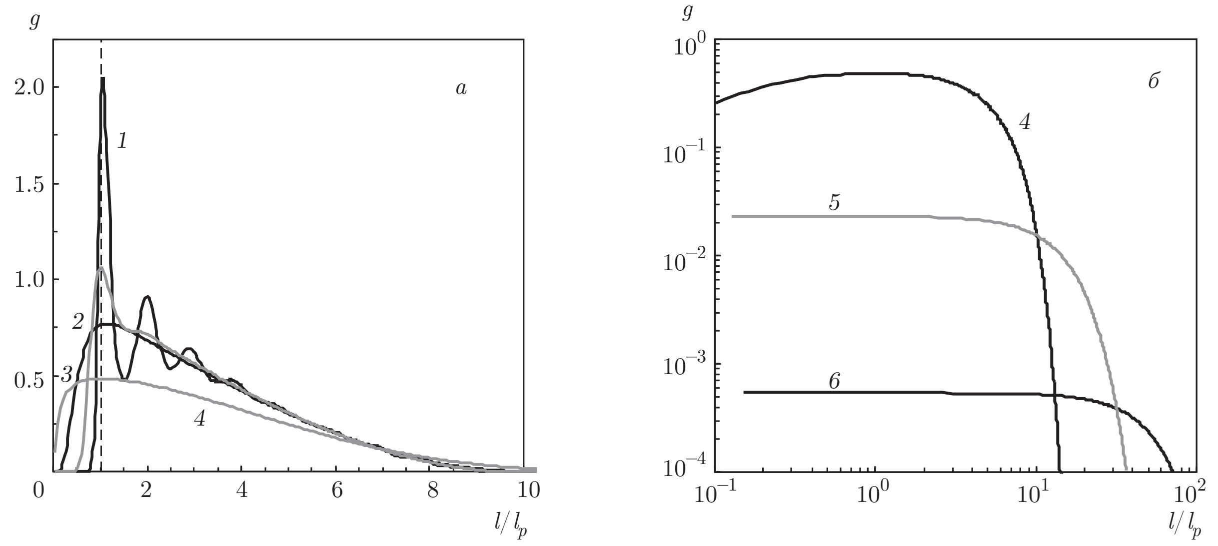

Рис. 1. Парная корреляционная функция $g(l/l_p)$ для ансамблей из $N = 500$ частиц с различными параметрами $\Gamma = 90$ (*1*), 9 (*2*), 0.9 (*3*), 0.09 (*4*), 0.009 (*5*), 0.0009 (*6*). Здесь $l_p \cong (4\pi Q/3\alpha)^{1/3}$

физических свойств анализируемых неоднородных систем.

Для анализа слабонеидеальных ограниченных систем (размер которых зависит от температуры частиц) можно ввести дополнительный параметр $\gamma = \delta x/R$, где $R = (3N/4\pi n)^{1/3}$ — радиус однородной структуры при $T \to 0$, а $\delta x^2 = T/(M\omega_t^2)$ — средний квадрат теплового смещения отдельной частицы относительно центра ловушки, $\langle x(t)^2 \rangle$, при $t \to \infty$, см. (2). Легко предположить, что при $\gamma \approx 1$ (или $\gamma \geq 1$) формирование однородных ограниченных структур окажется невозможным.

Что касается протяженных систем и ограниченных ансамблей, состоящих из N частиц, $N \gg 1$, то для анализа их структурных характеристик широко используется парная корреляционная функция. Парная корреляционная функция $g(l)$ определяет вероятность нахождения двух частиц на расстоянии l друг от друга и является мерой трансляционного порядка в системе взаимодействующих частиц. При этом для протяженных и однородных систем, которые можно характеризовать постоянной концентрацией n, имеет место соотношение

$$N_R = 4\pi n \int_0^R g(l) l^2 dl, \tag{6}$$

где N_R — число частиц в сфере радиусом R.

В случае слабонеидеальных систем $\Gamma \ll 1$, парная корреляционная функция может быть представлена как [23]

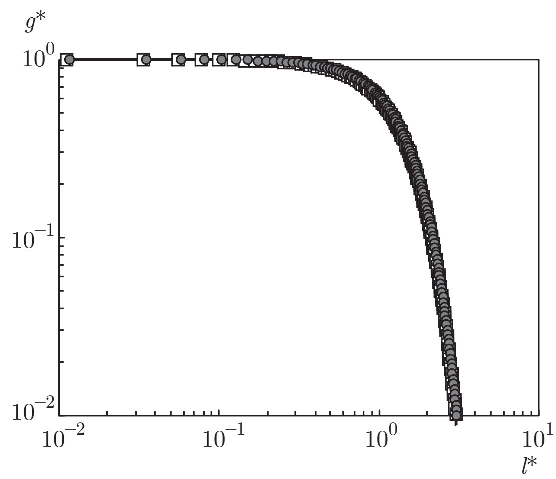

Рис. 2. Нормированная парная корреляционная функция $g^* = g(l)/g_{max}$ в зависимости от l^* для ансамблей из $N = 500$ частиц с различными параметрами $\Gamma = 0.009$ ($\circ$), 0.0009 ($\square$). Сплошная линия — аналитическое решение (7), символы — результаты численного моделирования задачи, g_{max} — максимальное значение функции $g(l)$, $l^* = l/R_T$, $R_T = (2T/M\omega_t^2)^{1/2}$

$$g(l) \cong \exp\left(-\frac{Q\varphi(l)}{T}\right), \tag{7}$$

где $\varphi(l)$ — распределение потенциала в системе частиц. Для ограниченного ансамбля частиц в ловушке (в пренебрежении их межчастичным взаимодействием) это дает

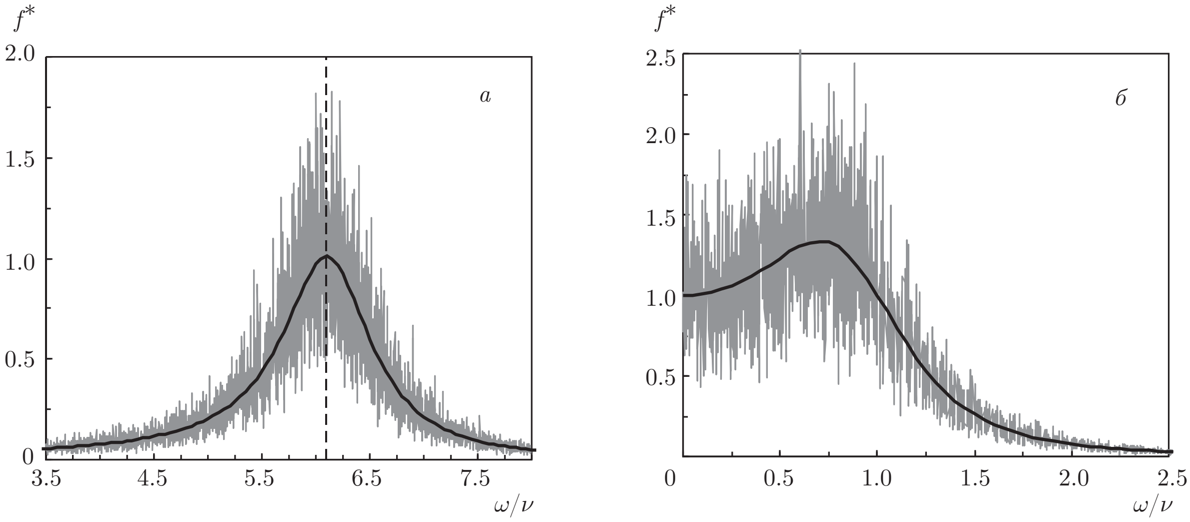

Рис. 3. Нормированные спектральные плотности (серые линии) для одной частицы и аналитическое решение (5) (черные линии) при $\omega_t/\nu \approx 6.1$ (*а*), 1 (*б*); здесь $f^*(\omega) = G(\omega)/(2T/M\omega_t^2\nu)$

$$g(l) \approx \exp\left(-\frac{Q\alpha r^2}{2T}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\delta x^2}\right), \quad (8)$$

где r — расстояние от центра ловушки, а $\delta x^2 = T/(M\omega_t^2)$.

Тогда число частиц в ловушке можно определить как

$$N = 4\pi n_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2\delta x^2}\right) r^2 dr. \quad (9)$$

Иначе говоря, распределение концентрации частиц в данных условиях (при $\Gamma \ll 1$, $\gamma > 1$) не является однородным, а подчиняется закону Больцмана: $n(r) \cong n_0 \exp(-r^2/2\delta x^2)$, где $n_0 \cong N/(2\pi\delta x^2)^{3/2}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Численное моделирование динамики систем заряженных частиц в линейной и изотропной электростатической ловушке выполнялось методом молекулярной динамики Ланжевена. Расчеты проводились для одной частицы ($N = 1$) и для ансамблей, состоящих из $N = 50$, 250, 500 частиц. Техника моделирования подробно описана в работах [5, 6]. Шаг интегрирования составлял от $\Delta t \cong (40\max[\omega_t;\nu])^{-1}$ до $\Delta t \cong (100\max[\omega_t;\nu])^{-1}$ в зависимости от начальных условий задачи. Время расчетов t_c после установления равновесия в моделируемых системах варьировалось от $10^3/\min[\omega_t;\nu]$ до $10^4/\min[\omega_t;\nu]$.

Расчеты проводились для систем частиц с кулоновским взаимодействием в широком диапазоне их параметров неидеальности: от $\Gamma \sim 0.001$ до $\Gamma \sim 100$. Коэффициент трения частиц ν варьировался в пределах от $0.1\omega_t$ до $2.5\omega_t$.

Во всех рассмотренных случаях моделируемые системы являлись устойчивыми. Температура частиц не отличалась от заданной, а их функции распределения по скоростям соответствовали распределению Максвелла. Так, при $t \to \infty$ среднеквадратичные смещения центра масс исследуемых ансамблей от их положения равновесия по всем степеням свободы были равны

$$\langle x^2\rangle \cong \langle y^2\rangle \cong \langle z^2\rangle \approx T/(NM\omega_t^2),$$

а значения среднеквадратичного смещения центра масс системы от его начального положения составляли

$$\langle(\Delta x)^2\rangle \cong \langle \Delta y^2\rangle \cong \langle \Delta z^2\rangle \approx 2T/(NM\omega_t^2).$$

Парные корреляционные функции $g(l)$ для ансамблей из $N = 500$ частиц с различными параметрами Γ показаны на рис. 1. В качестве нормировки величины $g(l)$, представленной на этом рисунке, использовалось предположение однородной концентрации частиц, равной $n \cong 3\alpha/(4\pi Q)$. Легко увидеть, что первый пик функции $g(l)$ для $\Gamma \geq 0.1$ хорошо соответствует величине $l_p \cong (4\pi Q/3\alpha)^{1/3}$, полученной в приближении однородной системы, см. рис. 1*а*. Кроме того, численное моделирование показало, что для оценки радиуса неидеальных систем

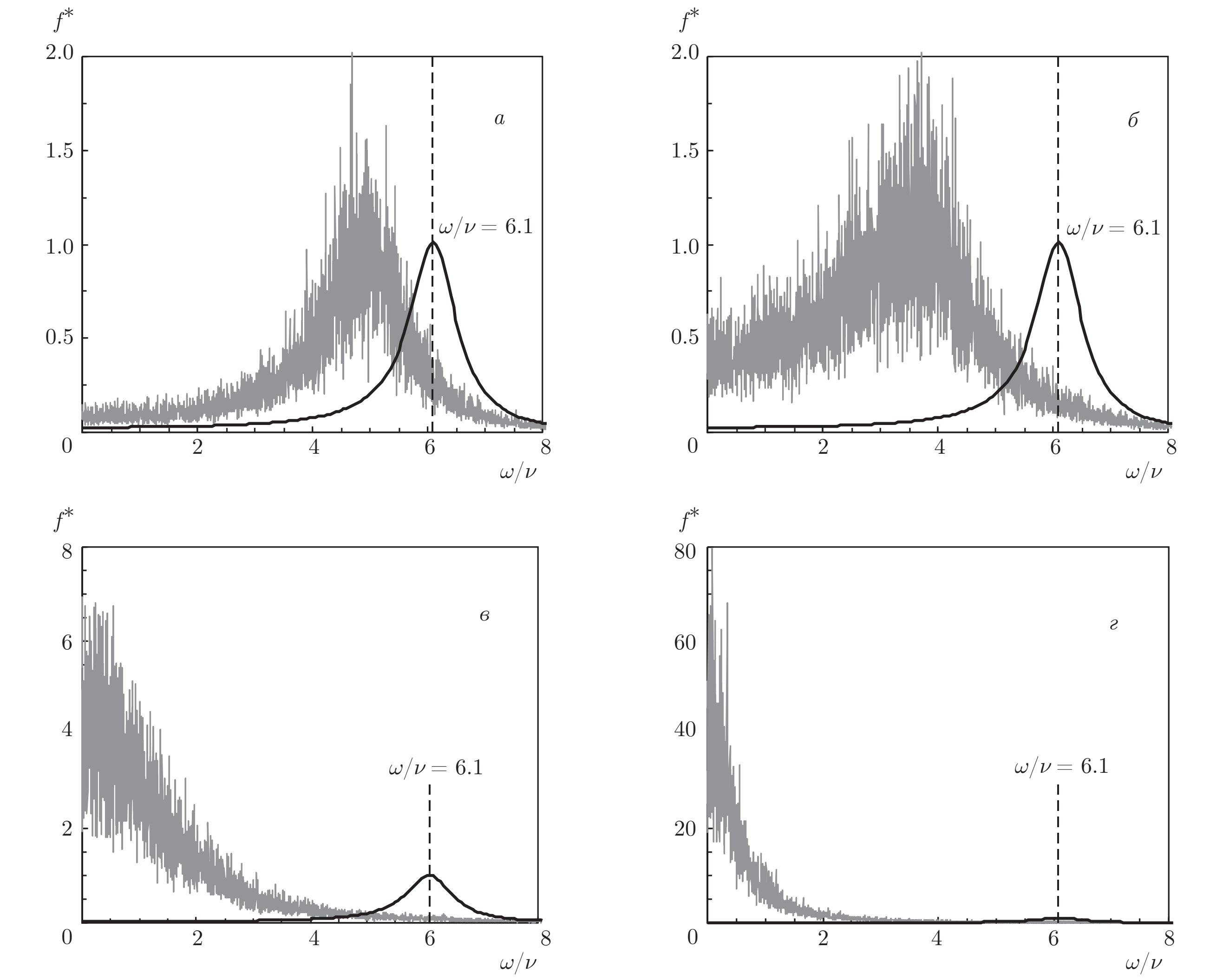

Рис. 4. Нормированные спектральные плотности $f^*(\omega/\nu)$ для отдельных частиц ансамбля (серые линии), состоящего из $N = 50$ частиц, при $\omega_t/\nu \approx 6.1$ и различных параметрах $\Gamma = 0.18$ (*а*), 0.45 (*б*), 1.8 (*в*), 4.5 (*г*). Черными линиями показаны функции $f^*_N(\omega) = NG(\omega)/(2T/M\omega_t^2\nu)$ для центра масс системы

при $\Gamma \geq 1$ может быть использовано соотношение $R \cong (3N/4\pi n)^{1/3}$, которое имеет место для однородных систем.

С уменьшением величины Γ от 1 до 0.1 и далее наблюдалось увеличение размеров моделируемых ансамблей, см. рис. 1. При параметрах $\Gamma < \Gamma^0 \sim 0.01$ ($\gamma > 1$) величина эффективного радиуса системы становилась пропорциональна тепловой скорости частиц и достигала значений $R_T = (2T/M\omega_t^2)^{1/2}$ (см. рис. 2), что соответствовало среднеквадратичному смещению одиночной частицы от ее начального положения при $t \to \infty$ (3).

Численное моделирование показало, что для всех исследуемых систем с параметром $\Gamma < \Gamma^0$, содержащих $N \geq 50$ частиц, форма функций $g(l)$ хорошо аппроксимировалась соотношением (7), см. рис. 2. При $t \to \infty$ для среднеквадратичных смещений отдельных частиц в таких ансамблях выполнялись соотношения

$$\langle x^2 \rangle \cong \langle y^2 \rangle \cong \langle z^2 \rangle \approx T/(M\omega_t^2),$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \cong \langle \Delta y^2 \rangle \cong \langle \Delta z^2 \rangle \approx 2T/(M\omega_t^2),$$

что полностью соответствует результатам моделирования и аналитическим решениям, полученным для одной частицы в ловушке. Отметим, что распределение концентраций частиц в ловушке при параметрах $\Gamma < \Gamma^0$ также соответствовало формуле (7), т. е. было пропорционально нормальному распределению Гаусса. Таким образом, концентрация частиц

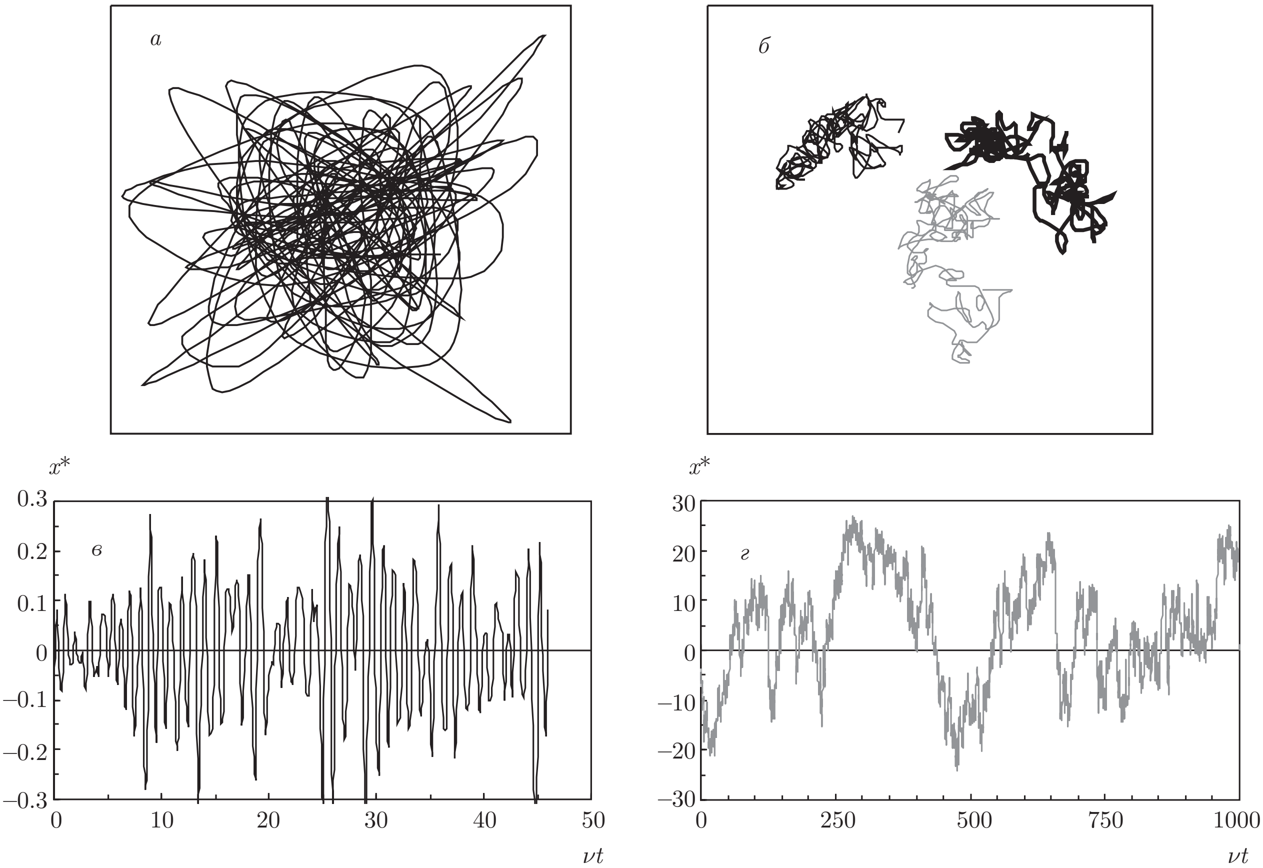

Рис. 5. Иллюстрация траекторий центра масс (*а*) и трех произвольно выбранных частиц (*б*) в плоскости $[x, z]$ за время $t \approx 50/\nu$, а также зависимости нормированных смещений x^* центра масс (*в*) и произвольно выбранной частицы (*г*) от νt для системы с параметрами $N = 50$, $\omega_t/\nu \approx 6.1$, $\Gamma \approx 45$. Здесь $x^* = x/\delta x$, $\delta x \equiv (T/M\omega_t^2)^{1/2}$

была существенно неоднородна и, соответственно, параметр неидеальности $\Gamma = Q^2/l_p T$, где $l_p \cong \text{const}$, не подходит для анализа физических свойств таких систем, см. разд. 2.

Нормированные спектральные плотности $f^*(\omega) = G(\omega)/(2T/M\omega_t^2\nu)$, полученные для одной частицы в ловушке ($N = 1$), а также аналитическое решение (5) задачи при $\omega_t/\nu \approx 6.1$ и $\omega_t/\nu \approx 1$ показаны на рис. 3. Отметим, что аналогичный вид $f^*(\omega)$ имеет место и для любых произвольных частиц ансамбля при $N > 1$ с параметрами неидеальности $\Gamma < \Gamma^0$ ($\gamma > 1$), а также для центра масс ограниченной системы при любом значении Γ с учетом соответствующей нормировки на количество частиц: $f_N^*(\omega) = NG(\omega)/(2T/M\omega_t^2\nu)$. (Вычисления спектральной плотности проводились на основе численных расчетов смещений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ при помощи процедуры «N–D fast Fourier transform» в пакете прикладных программ MATLAB.)

Численные исследования показали, что отклонения формы спектральных распределений для отдельных частиц ансамбля от аппроксимирующей функции (5) наблюдаются при $\Gamma > \Gamma^1 \sim 0.1$ ($\gamma < 10$). Нормированные спектральные плотности для системы, состоящей из $N = 50$ частиц, при $\omega_t/\nu \approx 6.1$ при различных параметрах неидеальности ($\Gamma > 0.1$) представлены на рис. 4. Легко заметить, что с ростом величины Γ характерная частота спектра смещается в сторону меньших частот относительно частоты колебаний центра масс системы. Следует отметить, что простая подгонка численных данных, полученных для отдельных частиц таких систем (при $\Gamma > 0.1$), аналитическим соотношением (5) не позволяет получить физически обоснованные результаты.

Иллюстрация траекторий центра масс и трех произвольно выбранных частиц плоскости $[x, z]$ за время $t \approx 50/\nu$, а также зависимость нормированных смещений x^* центра масс и произвольно вы-

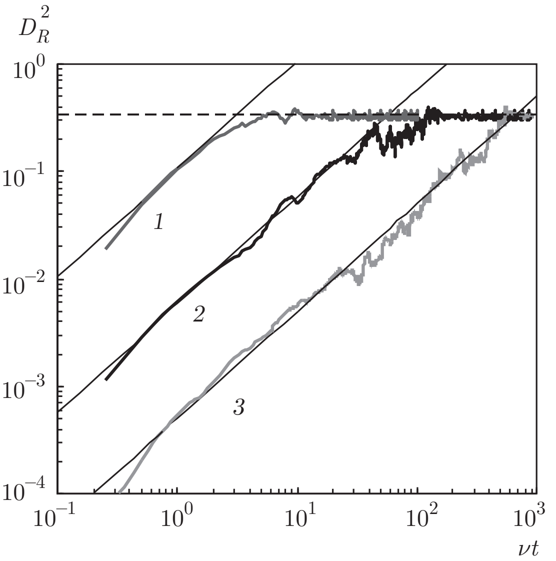

Рис. 6. Зависимости $D_R^2 = (\langle\Delta x^2\rangle+\langle\Delta y^2\rangle+\langle\Delta z^2\rangle)/3R^2$ от νt для отдельных частиц системы с параметрами $N = 50$, $\omega_t/\nu \approx 6.1$ при $\Gamma \approx 4.5$ (*1*), 45 (*2*), а также для системы с параметрами $N = 500$, $\omega_t/\nu \approx 1$, $\Gamma \approx 12.7$ (*3*). Тонкие линии — функции $f(\nu t) \propto t$; штриховая линия — $\langle(\Delta x)^2\rangle/R^2 = 1/3$

бранной частицы от νt представлены на рис. 5 для системы с параметрами $N = 50$, $\omega_t/\nu \approx 6.1$ и $\Gamma \approx 45$. При этом $x^* = x/\delta x$, где $\delta x \equiv (T/M\omega_t^2)^{1/2}$.

Зависимости отношения

$$D_R^2 = \frac{\langle\Delta x^2\rangle + \langle\Delta y^2\rangle + \langle\Delta z^2\rangle}{3R^2}$$

от νt для отдельных частиц систем с различными параметрами $(\omega_t/\nu, \Gamma)$, состоящих из $N = 50$ и $N = 500$ частиц, показаны на рис. 6; здесь $R = (3N/4\pi n)^{1/3}$, $n = 3\alpha/(4\pi Q)$. Отметим, что на начальных этапах наблюдения (при $\nu t > 0.75$) режим движения частиц был близок к диффузионному, т. е. значения $\langle\Delta x^2\rangle \cong \langle\Delta y^2\rangle \cong \langle\Delta z^2\rangle$ были практически пропорциональны времени наблюдения t. С ростом времени (с ростом νt) кривые D_R^2 стремились к постоянному значению, примерно равному 1/3. При этом длительность участков с динамикой отдельных частиц, близкой к диффузионному режиму движения, а также время перехода функции $D_R^2(\nu t)$ к постоянному значению, увеличивались с ростом размера системы ($R \cong (3N/4\pi n)^{1/3}$) и параметра Γ. Последнее обстоятельство отражает влияние температуры частиц на скорость их теплового движения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлены результаты аналитического и численного исследований динамики ограниченных ансамблей заряженных броуновских частиц в потенциальном поле электростатической ловушки. Моделирование выполнялось для кластерных систем, состоящих из частиц (приблизительно до тысячи) с кулоновским взаимодействием, в широком диапазоне их параметров. Выполнено сравнение спектральных и структурных характеристик моделируемых систем. Исследована временна́я зависимость среднеквадратичных смещений отдельных частиц в ограниченных ансамблях.

Представлен анализ зависимостей формы парной корреляционной функции $g(l)$ и размеров кластерных систем от температуры и количества частиц. Численное моделирование показало, что для анализа положения первого пика функций $g(l)$ и оценки радиуса неидеальных систем при параметре $\Gamma \geq 1$ могут быть использованы аналитические соотношения, полученные в приближении однородной системы. С дальнейшим уменьшением параметра неидеальности Γ до $\Gamma \sim 0.1$ и далее наблюдалось заметное увеличение размеров ансамбля. Так, при $\Gamma < 0.01$ ($\gamma > 1$) величина эффективного радиуса системы становилась пропорциональной тепловой скорости частиц и достигала значений $(2T/M\omega_t^2)^{1/2}$. При этом как парные корреляционные функции, так и распределения концентраций частиц в электростатической ловушке хорошо описывались функцией, пропорциональной нормальному распределению Гаусса.

Исследована связь спектральной плотности смещений центра масс и отдельных частиц со структурными характеристиками и параметром неидеальности моделируемых ансамблей. Получено, что для слабонеидеальных систем ($\Gamma < 0.01$, $\gamma > 1$) их динамические и структурные характеристики, а также форма распределения спектральной плотности не зависят от числа частиц в анализируемых ансамблях. При этом характерные частоты таких ансамблей могут быть получены путем аналитического решения системы уравнений для одной заряженной частицы с помощью известных аналитических соотношений. Показано, что с ростом величины Γ (при $\Gamma > 0.1$) характерная частота спектра смещается в сторону меньших частот относительно частоты колебаний центра масс системы.

Результаты настоящей работы применимы для ограниченных систем при любом типе попарных взаимодействий и могут быть полезны для разработки новых методов диагностики физических характеристик таких систем, а также для анализа условий формирования различных кластеров, которые представляют интерес в физике плазмы, медицине, биологии, физике полимеров и коллоидных систем.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-08-00594), а также в рамках Программы Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy*, ed. by H. Z. Cummins and E. R. Pike, Plenum, New York (1974).
2. Я. И. Френкель, *Кинетическая теория жидкостей*, Наука, Ленинград (1975).
3. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley Interscience, Chichester (1975).
4. А. А. Овчинников, С. Ф. Тимашев, А. А. Белый, *Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов*, Химия, Москва (1986).
5. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, *Пылевая плазма: эксперимент и теория*, Физматлит, Москва (2009).
6. *Complex and Dusty Plasmas*, ed. by V. E. Fortov and G. E. Morfill, CRC Press (2010).
7. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, ЖЭТФ **133**, 1091 (2008).
8. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **134**, 367 (2008).
9. О. С. Ваулина, Е. А. Лисин, А. В. Гавриков, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **137**, 751 (2010).
10. O. S. Vaulina and E. A. Lisin, Phys. Plasmas **16**, 113702 (2009).
11. В. Е. Фортов, О. Ф. Петров, О. С. Ваулина, К. Г. Косс, Письма в ЖЭТФ **97**, 366 (2013).
12. G. A. Hebner, M. E. Riley, and K. E. Greenberg, Phys. Rev. E **66**, 046407 (2002).
13. O. S. Vaulina and I. E. Drangevski, Phys. Scripta **73**, 577 (2006).
14. Ю. П. Райзер, *Физика газового разряда*, Наука, Москва (1987).
15. H. Totsuji, T. Kishimoto, Y. Inoue et al., Phys. Lett. A **221**, 215 (1996).
16. H. Totsuji, T. Kishimoto, and C. Totsuji, Phys. Rev. Lett. **78**, 3113 (1997).
17. R. Huang, I. Chavez, K. M. Taute et al., Nat. Phys. **7**, 576 (2011).
18. P. N. Pusey, Science **332**, 802 (2011).
19. S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943).
20. А. А. Воронов, *Теория автоматического управления*, ч. 2, Высш. шк., Москва (1986).
21. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Phys. Lett. A **375**, 4113 (2011).
22. А. А. Щегольков, Молодежный научно-технический вестник **8**, 24 (2013).
23. S. Ichimaru, Rev. Mod. Phys. **54**, 1017 (1982).