

СТОХАСТИЧЕСКИЕ БИСТАБИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ: КОНКУРИРУЮЩИЕ ГИСТЕРЕЗИС И СОСУЩЕСТВОВАНИЕ ФАЗ

М. К. Верма^{a*}, *А. Кумар*^{b**}, *А. Паттанаяк*^c

^a *Department of Physics, Indian Institute of Technology Kanpur
208016, Kanpur, India*

^b *Applied Mathematics Research Centre, Coventry University
CV15FB, Coventry, The United Kingdom*

^c *Department of Physics, Indian Institute of Technology Bombay
400076, Powai, India*

Поступила в редакцию 8 марта 2018 г.

(Перевод с английского)

STOCHASTIC BISTABLE SYSTEMS: COMPETING HYSTERESIS AND PHASE COEXISTENCE

M. K. Verma, A. Kumar, A. Pattanayak

Описано решение для стохастической бистабильной системы с динамической точки зрения. Показано, как единый подход с переменным шумом может объяснить как гистерезис при нулевой температуре, так и сосуществование двух состояний в присутствии шума. Эти особенности аналогичны свойствам фазового перехода в термодинамике. Представленная математическая модель бистабильных систем также объясняет уменьшение ширины петли гистерезиса в присутствии шума и то, как изменение начальных условий может приводить такие системы к разным конечным состояниям.

DOI: 10.1134/S0044451018090000

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие системы в природе совершают переход из одного состояния в другое в зависимости от величины параметров. Например, в магнитных системах парамагнитное состояние превращается в ферромагнитное при изменении температуры термостата [1–5]. Такой термодинамический переход в приближении среднего поля описывается свободной энергией в виде

$$F = d(T)X^2 + X^4, \quad (1)$$

где X означает параметр порядка (в данном случае — намагничённость), а $d(T) \propto T - T_c$, где T

и T_c — соответственно температура и критическая температура [1–5]. Было показано, что упомянутый выше переход и переход жидкость – пар вблизи критической температуры принадлежат к одному и тому же классу, известному как переходы второго рода, поскольку параметр порядка увеличивается плавно от нуля до ненулевой величины [1, 6]. Однако, вдали от T_c в этих системах существует переход первого рода, при котором параметр порядка меняется скачкообразно на конечную величину. В приближении среднего поля свободная энергия таких систем аппроксимируется следующим выражением:

$$F = d(T)X^2 - X^4 + X^6. \quad (2)$$

Упомянутые выше переходы в основном изучаются в рамках равновесной статистической механики [1–5].

* E-mail: mkv@iitk.ac.in

** E-mail: abhishek.kir@gmail.com

Интересно, что динамические системы также демонстрируют похожие переходы, которые часто изучают в рамках теории бифуркаций [7]. В соответствии с уравнениями (1), (2), зависящее от времени изменение параметра порядка задается уравнениями

$$\dot{X} = cX - X^3, \quad (3)$$

$$\dot{X} = cX + X^3 - X^5. \quad (4)$$

Уравнение (3) описывает суперкритическую бифуркацию типа вилки, в то время как уравнение (4) — субкритическую бифуркацию типа вилки и тангенциальную (седло-узловую) бифуркацию, что ведет к гистерезису [7]. Модели, описываемые уравнениями (3), (4), применяли к исследованию большого количества неравновесных систем. Например, магнитогидродинамические системы асимптотически приходят либо в состояние без магнитного поля, либо в состояние с конечным и постоянным (во времени) магнитным полем. Авторы работ [8, 9] смоделировали такие динамо-переходы, используя уравнения (3), (4).

Другое интересное явление — обращение полярности магнитных полей Земли и Солнца. Магнитное поле Солнца сменяет полярность квазипериодически каждые одиннадцать лет. В то же время интервал между двумя последовательными обращениями геомагнитного поля является случайным и в среднем составляет 200000 лет. В работе [10] была предпринята попытка смоделировать динамику обращений, используя уравнения для амплитуды, по форме схожие с уравнениями (3), (4).

Системы с двумя стабильными конфигурациями называют бистабильными системами. Бистабильность наблюдается в лазерах (например, возбужденное и невозбужденное состояния атомов) [11], климате (например, ледниковый период и теплый период Земли) [12], экологии (например, размножение и вымирание видов) [13] и переходе к турбулентности [14, 15]. Наряду с критическими параметрами такие системы подвергаются воздействию случайного шума со стороны окружения. Следовательно, стохастичность часто используется для моделирования таких систем. Стохастическая версия динамической системы называется стохастической бистабильной системой. Такие системы были изучены в литературе. Хакен [16] исследовал неравновесные фазовые переходы и формирование структур (паттернов), используя стохастические версии уравнений (3), (4). В работе [17] изучались стохастические бистабильные системы и была проведена классификация поведения таких систем на основе временного масштаба

и силы шума. Связанным явлением является стохастический резонанс [18], при котором слабый сигнал усиливается комбинацией влияний нелинейности и шума.

В настоящей работе мы фокусируемся на уравнении (4), которое демонстрирует стабильные состояния при $X = 0$ и $X = X_{S\pm}$ (см. разд. 2). Мы анализируем некоторые свойства описываемых таким образом систем с динамической точки зрения. Например, при нулевом или слабом шуме такая система обладает гистерезисом. Однако если сила шума становится сравнимой с величиной потенциального барьера [19], то фазы сосуществуют. Мы также показываем, что конечное состояние зависит от начальных условий.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 мы рассматриваем гистерезисное поведение уравнения (4). В разд. 3 мы показываем, как определенный выбор силы шума ведет к переходу из одной фазы в другую с промежуточным сосуществованием двух фаз. В разд. 4 мы показываем, как гистерезис может уменьшаться под действием слабого шума. Выводы представлены в разд. 5. В Приложении А мы выводим уравнение движения для стохастического нелинейного осциллятора с затуханием, а в Приложении В мы показываем, что гистерезис и сосуществование фаз проявляются в другой бистабильной системе.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВИСТАБИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ: ГИСТЕРЕЗИС

Популярная динамическая модель для перехода первого рода описывается уравнением

$$\dot{X} = cX + X^3 - X^5, \quad (5)$$

где X обозначает среднее поле, а c — параметр системы [1–5]. В Приложении А обсуждается связь уравнения (5) с затухающим нелинейным осциллятором,

$$\gamma \dot{X} = -X + \gamma(X^3 - X^5) = F(X), \quad (6)$$

где X и \dot{X} — соответственно амплитуда и скорость осцилляций, $\gamma = 1/|c|$ коэффициент трения, а $F(X)$ — внешняя сила. Мы полагаем, что собственная частота осциллятора равна единице, а X^3 и X^5 — нелинейные члены. Здесь сила вязкого трения настолько велика, что она сравнивается с внешней силой, что отвечает квазистатическому пределу осциллятора.

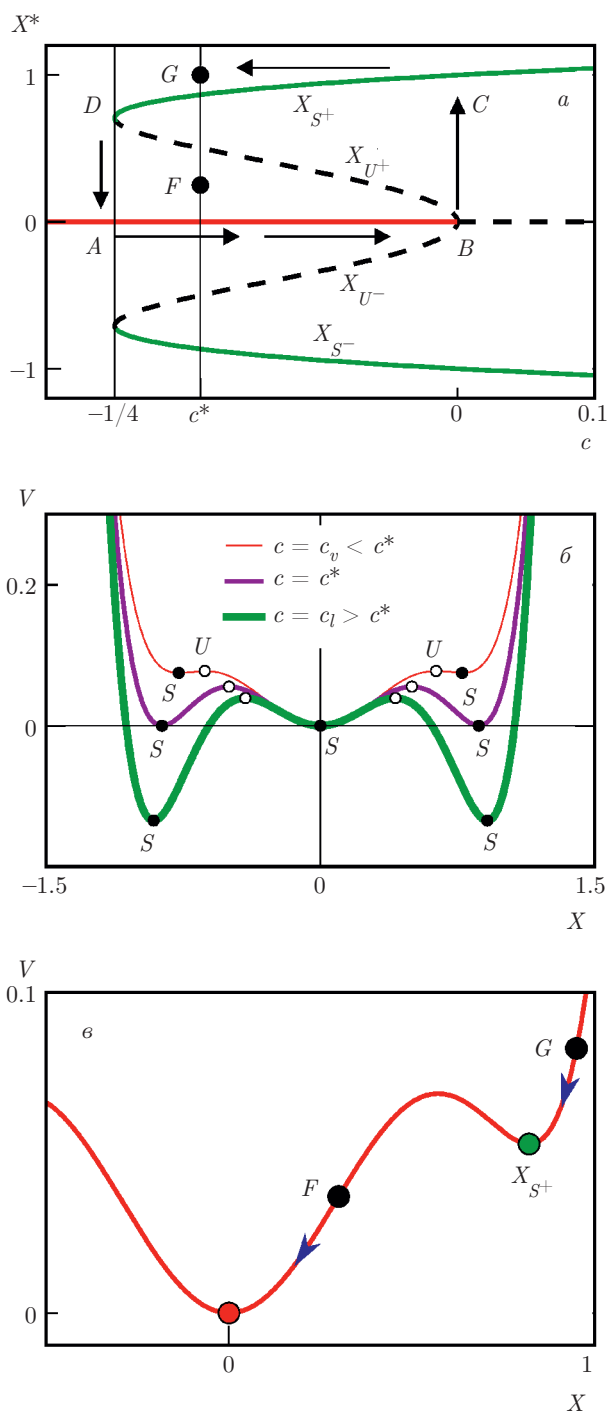


Рис. 1. (В цвете онлайн) Фиксированные точки X^* для системы, описываемой уравнением $\dot{X} = cX + X^3 - X^5 = cF(X)$, и потенциал $V(X) = -\int^X F(X')dX'$. а) Стабильные фиксированные точки $X = 0, X_{S\pm}$ и нестабильные точки $X_{U\pm}$. б) Графики $V(X)$ для значений параметра $c = c_v, c^*, c_v < c^* < c_l$. в) Для некоторого значения параметра c система с начальным условием F приходит к значению $X = 0$, в то время как система с начальным значением G приходит к значению $X = X_{S+}$, таким образом демонстрируя чувствительность к начальным условиям

Стационарные решения уравнения (5), полученные подстановкой $\dot{X} = F(X) = 0$, показаны на рис. 1а. Устойчивые решения, $X = 0$ и

$$X_{S\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}}, \tag{7}$$

показаны соответственно красной и зеленой кривыми, в то время как неустойчивые решения

$$X_{U\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}}, \tag{8}$$

показаны черной штриховой линией [7]. Когда мы относим упомянутую выше динамическую систему к переходу жидкость – пар, красная линия соответствует состоянию пара, а зеленые кривые описывают симметричные состояния жидкости. В интервале параметров $[-1/4, 0]$ система может попадать в одно из трех стабильных состояний: X, X_{S+} , и X_{S-} .

Система, описываемая уравнением (5), обладает гистерезисом, как описано ниже. Предположим, что система находится в состоянии A на ветви $X = 0$ на рис. 1а. При увеличении параметра c система остается на ветви $X = 0$ до точки B , после чего перепрыгивает в точку C . Когда мы уменьшаем параметр c , система следует из точки C по ветви X_{S+} до точки D . Дальнейшее уменьшение параметра c перемещает систему в точку A . Это явление, называемое гистерезисом [1–4, 7], наблюдается во многих физических случаях, например, для ферромагнетика во внешнем магнитном поле, в атмосфере [12], в оптике [11] и в экологии [13], при описании динамо-перехода [8, 9] и т. д. Интересно отметить, что конечное состояние системы зависит от начального состояния. Система с начальным состоянием в точке F на рис. 1в приходит к $X = 0$, в то время как из точки G система спускается в X_{S+} . Это поведение не исследовано глубоко во многих приложениях статистической физики, поскольку временная зависимость d/dt обычно отсутствует в равновесной статистической физике. Мы полагаем, что изучение такой чувствительности к выбору начального состояния в эксперименте может дать интересные прогнозы для таких систем.

Потенциал

$$V(X) = -\int^X F(X') dX', \tag{9}$$

изображенный на рис. 1б, также помогает нам понять динамику перехода. Минимумы потенциала, соответствующие стабильным решениям и помеченные буквой S на рис. 1б, отделены друг от

друга максимумами потенциала, соответствующими нестабильным состояниям, которые на рис. 1б отмечены буквой U . Три кривые на рис. 1б соответствуют значениям параметра $c = c_v, c^*, c_l$. При $c = c^*$ значения потенциала при $X = 0$ и $X = X_{S\pm}$ совпадают.

Из графика потенциала также видно, что конечное состояние системы зависит от начальных условий. Например, на рис. 1в система с конфигурацией F будет приходить к $X = 0$, в то время как конфигурация G стремится к $X = X_{S+}$. Следует отметить, что система скатывается в локальный минимум, который может не быть глобальным минимумом. В работе [9] авторы показали наличие зависимости конечного состояния системы от начальных условий для динамо-перехода. Они провели численное моделирование уравнений магнитогидродинамики с двумя разными начальными условиями при одинаковых значениях параметров и наблюдали, что одни начальные условия приводят к нулевому магнитному полю, в то время как другие дают ненулевое магнитное поле.

В следующем разделе мы введем шум в уравнение (5) и изучим сосуществование состояний в стохастической бистабильной системе.

3. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД И СОСУЩЕСТВОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Система, описываемая уравнением (5), лишена шума, что можно интерпретировать как нулевую температуру. Возникает естественный вопрос, могут ли в такой системе сосуществовать фазы, как в случаях фазовых переходов плавления (твердое тело – жидкость) или кипения (жидкость – пар). Мы показываем ниже, как введение случайного шума может привести к появлению таких свойств у системы. С шумом динамическое уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\dot{X} = cX + X^3 - X^5 + \eta(t), \quad (10)$$

где

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2|c|k_B T \delta(t - t'), \quad (11)$$

T и $k_B T$ – температура и тепловая энергия [2, 5] (см. Приложение А), а k_B – постоянная Больцмана. В последующем обсуждении мы соотнесем состояние $X = 0$ с газовой фазой, а состояние $X = X_{S+}$ с жидкой фазой. Тепловая энергия «работает» против потенциального барьера:

$$\Delta V_v = V(X_{U+}) - V(0) \quad (12)$$

для газообразного состояния и

$$\Delta V_l = V(X_{U+}) - V(X_{S+}) \quad (13)$$

для жидкого состояния. Эти барьеры показаны на рис. 2б.

При моделировании фазовых переходов при конечной температуре обычно полагают $c \propto (T - T^*)$, где T^* – температура перехода [1–4, 7]. Следовательно, параметр системы c является функцией температуры. Обратим приведенное выше соотношение:

$$T = T^* - 0.1(c - c^*), \quad (14)$$

где $c = c^*$ при $T = T^*$, как показано на рис. 2в. Заметим, что температура уменьшается с увеличением $|c|$ или уменьшением γ . При учете конечной температуры система может переходить из одного минимума потенциальной энергии в другой при условии, что тепловая энергия системы достаточно большая, чтобы преодолеть потенциальный барьер, соответствующий нестабильной конфигурации. Такие скачки не возможны без шума.

Уравнение (10) представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение, которое может быть решено аналитически [16] или численно. В настоящей работе мы решаем это уравнение, используя численное моделирование и метод Рунге – Кутты второго порядка, описанный ранее Робертсом [20]. Из уравнения (11) мы можем вывести следующую форму η :

$$\eta = \sqrt{\frac{2|c|k_B T}{\Delta t}} \xi, \quad (15)$$

где ξ – гауссов шум с нулевым средним значением. Разделим временной домен на N равных интервалов $N + 1$ точкой (включая краевые). Здесь размер шага $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Переход к очередному значению времени в уравнении (10) включает вычисление

$$X_{n+1} = X_n + \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad (16)$$

где [20]

$$k_1 = \Delta t [f(X_n, t_n) + \eta_n + S_n], \quad (17)$$

$$k_2 = \Delta t [f(X_n + k_1, t_n + \Delta t) + \eta_n - S_n], \quad (18)$$

значения $S_n = \pm 1$ выбираются случайно с вероятностью, равной $1/2$, а η_n – случайная переменная с распределением, описываемым уравнением (15). Моделирование проведено для $2 \cdot 10^6$ временных шагов с фиксированным шагом $\Delta t = 0.1$. Далее статистика стационарного состояния системы описывается с использованием второй половины временных интервалов, чтобы отбросить переходное поведение.

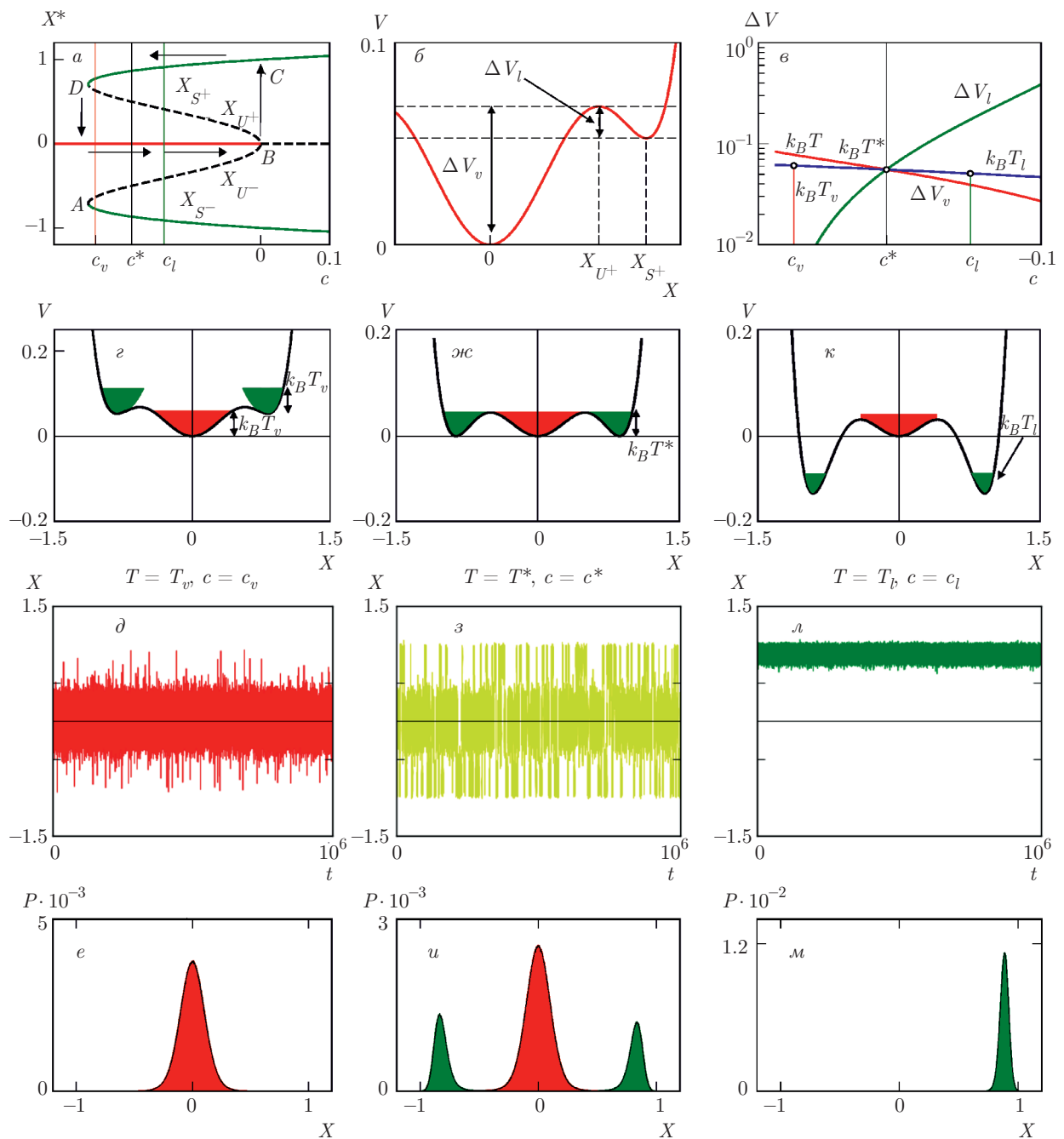


Рис. 2. (В цвете онлайн) Иллюстрация к описанию фазового перехода и сосуществования фаз в стохастической системе с двумя состояниями. *а*) Зависимость фиксированной точки X^* от c . *б*) Зависимость $V(X)$, изображающая разности потенциалов $\Delta V_v = V(X_{U^+}) - V(0)$ и $\Delta V_l = V(X_{U^+}) - V(X_{S^+})$. *в*) Графики $\Delta V_v(c)$, $\Delta V_l(c)$ и температуры $T = T^* - 0.1(c - c^*)$, где T^* — критическая температура. *з*) Зависимость $V(X)$ для парообразного состояния, $T = T_v$ или $c = c_v$; закрашенная область показывает тепловую энергию $k_B T_v$ при $\Delta V_l < k_B T_v < \Delta V_v$. *д*) Временные ряды $X(t)$ для парообразного состояния. *е*) Функция распределения вероятности $P(X)$ для парообразного состояния. *жс, з, u*) Зависимости $V(X)$, $X(t)$ и $P(X)$ при температуре перехода, $T = T^*$ или $c = c^*$. *κ, л, м*) Зависимости $V(X)$, $X(t)$ и $P(X)$ для жидкого состояния, $T = T_l$ или $c = c_l$

В дальнейшем обсуждении мы исследуем состояние системы при трех температурах, T_v , T_l и T^* , показанных на рис. 2в. Этим температурам соответствуют величины c_v , c_l и c^* (см. рис. 2а), которые, как показано ниже, отвечают парообразному состоянию, жидкому состоянию и сосуществованию фаз в ходе перехода жидкость – пар.

При $T = T_v$ или $c = c_v$ тепловая энергия T_v удовлетворяет неравенству $\Delta V_l < k_B T_v < \Delta V_v$, как показано на рис. 2в,г. Следовательно, тепловая энергия является достаточно большой, чтобы система преодолела потенциальный барьер ΔV_l . Таким образом, система избегает жидкого состояния и остается в парообразном. Мы решаем уравнение (10) численно со случайным шумом, соответствующим $T = T_v$, и получаем временной ряд $X(t)$ и распределение вероятности X (обе функции показаны соответственно на рис. 2д,е). Видно, что функция $X(t)$ флуктуирует около глобального минимума $X = 0$ и средний квадрат величины флуктуаций пропорционален температуре. Существует, однако, небольшая вероятность, что система «прыгнет» из глобального минимума в локальный со скоростью, определяемой правилом Крамерса [2].

При $T = T_l$ или $c = c_l$ справедливо неравенство $\Delta V_v < k_B T_l < \Delta V_l$, как показано на рис. 2ж. Следуя аргументам, подобным изложенным выше, заключаем, что температура будет выводить систему из парообразного состояния ($X = 0$) и переводить ее в жидкое ($X = X_{S+}$ или $X = X_{S-}$). Временной ряд $X(t)$ и распределение вероятностей $P(X)$, представленные на рис. 2л,м, также указывают на то, что система задерживается в одном из двух жидких состояний.

Наконец, при $T = T^*$ или $c = c^* = -3/16$ имеем $k_B T^* = \Delta V_l = \Delta V_v$ (см. рис. 2жс). В данном случае температура заставляет систему флуктуировать между жидким и парообразным состояниями, как это показывают временной ряд $X(t)$ и распределение вероятностей $P(X)$ (см. рис. 2з,у). Это — явление сосуществования фаз. В статистической механике и термодинамике условие $k_B T^* = \Delta V_l = \Delta V_v$ соответствует выравниванию свободных энергий двух фаз в точке перехода, как в построении Максвелла [1–4].

Таким образом, для профиля потенциала на рис. 2б при данной температуре стохастическая система двигается к глобальному минимуму при этой температуре. Мы наблюдаем, что два состояния сосуществуют при $T = T^*$. Таким образом, наша стохастическая модель приблизительно описывает термодинамическое поведение среднего поля. Наш рас-

чет также показал, что критическая температура T^* связана с высотой энергетического барьера между стабильной и нестабильной конфигурациями. Это полезное предсказание, и оно требует информации о нестабильной конфигурации.

Интересно найти связь описанных выше явлений с термодинамикой. Возникает соблазн связать переход между двумя фазами при T^* со скрытой теплотой перехода L , т.е. $k_B T^* = L$. Это, однако, неверно — свободная энергия относится к стабильной конфигурации (например, к жидкой/твердой/газообразной фазам). Приравнивая свободные энергии двух фаз, которые участвуют в фазовом переходе, получаем

$$F = E_1 - T^* S_1 = E_2 - T^* S_2, \quad (19)$$

где E_i и S_i — внутренние энергии и энтропии двух состояний. Следовательно,

$$\Delta E = T^* \Delta S = L, \quad (20)$$

где ΔS — разность энтропий между двумя фазами. Таким образом,

$$\frac{L}{RT^*} = \frac{\Delta S}{R}, \quad (21)$$

где R — универсальная газовая постоянная, а величина ΔS выражена в Дж/моль·К. Согласно правилу Трутона, величина $L/RT^* \approx 8 \dots 15$ для переходов жидкость – пар и $L/RT^* \approx 1 \dots 3$ для переходов плавления (твердое тело – жидкость) для широкого диапазона материалов при нормальных давлении и температуре [21]. Таким образом, мы показали, что $L \neq RT^*$. Скорее, температура T^* определяется величиной барьера между стабильной фазой и нестабильной конфигурацией. Насколько нам известно, вычисления энтропии нестабильной конфигурации, расположенной между двумя стабильными фазами, не проводилось. Например, для перехода жидкость – пар система должна переходить из жидкого состояния в парообразное после преодоления потенциального барьера, соответствующего нестабильной конфигурации. Было бы интересно изучить такую конфигурацию при моделировании фазовых переходов методом Монте-Карло.

В этой статье мы связываем параметр c с температурой T , для того чтобы смоделировать тепловые фазовые переходы. Отметим, однако, что различные формы зависимости $c(T)$ могут соответствовать различному поведению. Также величины c и T могут меняться независимо, что придает гибкость моделированию различных сложных материалов.

Особенности, обсужденные в этом разделе, являются общими, они наблюдаются и в других бистабильных системах. В Приложении В мы покажем, что система, описываемая уравнением

$$\dot{X} = -\lambda + 3X - X^3, \tag{22}$$

ведет себя подобно системе, задаваемой уравнением (4). В работе [17] авторы изучали зашумленную версию этой системы и связали амплитуду шума с типом перехода, названного ими переходом между состояниями (state transition), переходом между бассейнами (basin transition) и переходу распределения (distribution transition). В нашей работе мы даем более простую динамическую интерпретацию.

Стохастические бистабильные системы также обладают другими интересными особенностями, например, сжатием петли гистерезиса, которое мы обсудим в следующем разделе.

4. СЖАТИЕ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА ИЗ-ЗА СЛУЧАЙНОГО ШУМА

Гистерезис, показанный выше на рис. 1, не имеет шума. В стохастических бистабильных системах при введении случайного шума или температуры гистерезис сжимается. Гистерезис при нулевой температуре задается петлей $ABCD$ на рис. 3а. Однако введение слабого шума может вызвать переход из состояния $X = 0$ в состояние $X = X_{S+}$ в точке E (рис. 3а), а не в точке B , и переход с ветви $X = X_{S+}$ в состояние $X = 0$ в точке G , а не в точке D . Соответствующие потенциалы показаны соответственно на рис. 3б,в. Таким образом, при наличии шума ширина петли гистерезиса сжалась с $ABCD$ до $HEFG$ (рис. 3а).

Такое явление сжатия петли гистерезиса уже общалось в других областях науки. Например, авторы работы [22] показали, что область бистабильности в экосистемах (описываемых такими параметрами, как поступление питательных веществ и дождевой воды) уменьшается при учете слабого шума. Аналогично, в работе [23] наблюдалось сжатие петли гистерезиса в трубке Рейке при введении небольшого шума.

Приведенный выше анализ показывает, что параметрическое исследование силы шума и зависимости $c(T)$ позволяет обнаружить интересные особенности поведения таких систем.

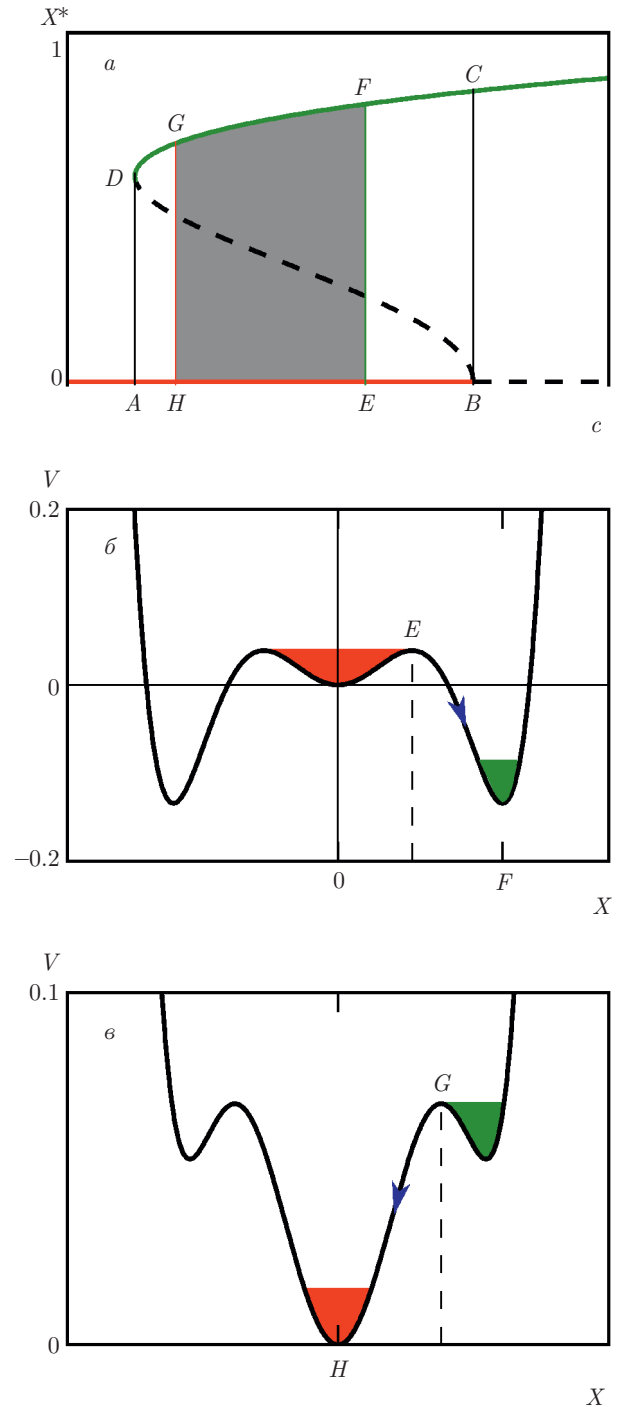


Рис. 3. (В цвете онлайн) Сжатие петли гистерезиса в присутствии слабого шума. а) Петля гистерезиса $ABCD$ в отсутствие шума и петля гистерезиса $HEFG$ при наличии шума. б) На графике $V(X)$ при наличии шума происходит переход из точки E в точку F до достижения точки B . в) При наличии шума происходит переход из точки G в точку H до достижения точки D

5. ВЫВОДЫ

В этой статье мы представляем изучение влияния случайного шума на бистабильные системы. При нулевом или малом уровне шума в системе наблюдается гистерезис, но ширина петли гистерезиса уменьшается с ростом уровня шума. Подходящим подбором уровня шума и параметров системы можно моделировать как переходы системы между состояниями, так и сосуществование фаз при критической температуре. Эти результаты могут быть интересны для исследования бистабильных систем в оптике, экологии, экономике и т. д.

Мы благодарим С. Фова (Stephan Fauve), М. Росси (Maurice Rossi), А. Дутта (Amit Dutta), Д. Френкеля (Daan Frenkel), Р. Сужита (R. Srijith) и А. Лакшминараяма (Arul Lakshminarayam) за ценные замечания. Работа поддержана грантами SERB/F/3279 Комиссии по научным и инженерным исследованиям Индии и PLANEX/PHY/2015239 Индийской организации по космическим исследованиям.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Стохастический нелинейный затухающий осциллятор в пределе сильной диссипации

Уравнение Ланжевена с постоянной внешней силой F и случайным шумом $\zeta(t)$ имеет вид

$$m\dot{v} + \gamma v = F(X) + \zeta(t). \quad (23)$$

Это уравнение описывает движение частицы массой m , на которую действуют сила трения $-\gamma v$, внешняя сила F и случайная сила $\zeta(t)$. Положение и скорость частицы обозначены соответственно как X и v . Решением этого уравнения является [2]

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) + \left[\frac{1}{m} \exp\left(-\frac{\gamma t}{m}\right) \times \int_0^t [F + \zeta(t')] \exp\left(\frac{\gamma t'}{m}\right) dt' \right]. \quad (24)$$

В пределе сильной диссипации величина $\exp(-\gamma t/m)$ стремится к нулю, следовательно,

$$v = \dot{X} = \frac{1}{\gamma}(F + \zeta(t)), \quad (25)$$

где X — положение частицы. Для уравнения Ланжевена [2]

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = 2\gamma k_B T \delta(t - t'), \quad (26)$$

где T — температура, а k_B — постоянная Больцмана.

Выберем внешнюю силу следующего вида:

$$F(X) = -X + \gamma(X^3 - X^5), \quad (27)$$

а $\zeta = \gamma\eta$. Тогда

$$\dot{X} = -cX + \gamma(X^3 - X^5) + \eta, \quad (28)$$

где $\gamma = 1/|c|$. Таким образом, система соответствует нелинейному стохастическому осциллятору с собственной частотой $\omega_0 = 1$. Используя уравнение (26), получаем

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{1}{\gamma^2} \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = 2|c|k_B T \delta(t - t'). \quad (29)$$

Мы применяем выведенное выше уравнение для моделирования поведения стохастической бистабильной системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Гистерезис и сосуществование фаз для частного случая системы, описываемой уравнением $\dot{X} = -\lambda + 3X - X^3 + \eta$

Здесь мы изучим другую зашумленную бистабильную систему и покажем, что в этой системе также наблюдаются гистерезис и сосуществование фаз, как и в системах, обсуждаемых в разд. 2 и 3. Рассматриваемый пример часто используется для описания фазового перехода первого рода [5].

Сначала опишем новую бистабильную систему. Потенциал этой системы имеет вид

$$V(X) = \lambda X - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4}X^4, \quad (30)$$

где λ — контрольный параметр. Соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{X} = -\lambda + 3X - X^3 + \eta(t), \quad (31)$$

где $\eta(t)$ — сила шума, задаваемая уравнением

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 6k_B T \delta(t - t'), \quad (32)$$

где $k_B T$ — тепловая энергия [2].

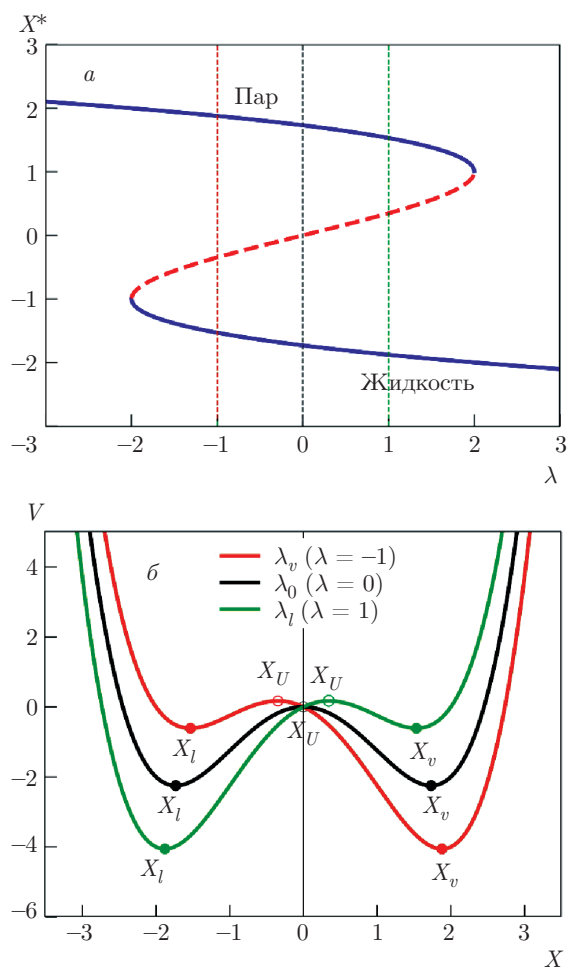


Рис. 4. (В цвете онлайн) *a*) Бифуркационная диаграмма, соответствующая уравнению (31). Верхняя и нижняя ветви соответствуют парообразному и жидкому состояниям. *б*) Графики зависимости потенциала $V(X)$ для $\lambda = \lambda_l = 1$ (зеленая кривая, жидкое состояние), $\lambda = \lambda_* = 0$ (черная кривая, сосуществование фаз) и $\lambda = \lambda_v = -1$ (красная кривая, парообразное состояние)

В первую очередь рассмотрим уравнение (31) в отсутствие шума. На рис. 4*a* построена бифуркационная диаграмма в координатах контрольный параметр λ и фиксированная точка X^* . На рисунке видно, что у системы имеются три фиксированных точки: стабильные точки X_l и X_v , а также нестабильная точка X_U , здесь индексы «*l*» и «*v*» соответствуют жидкой и парообразной фазам. Такая интерпретация становится понятной при рассмотрении стохастического уравнения.

На рис. 4*б* построены графики потенциала для трех случаев, $\lambda = \pm 1, 0$. Для $\lambda = -1$ глобальный минимум возникает при $X^* > 0$ (парообразное состояние). Поэтому обозначим $\lambda = -1$ как λ_v . В противо-

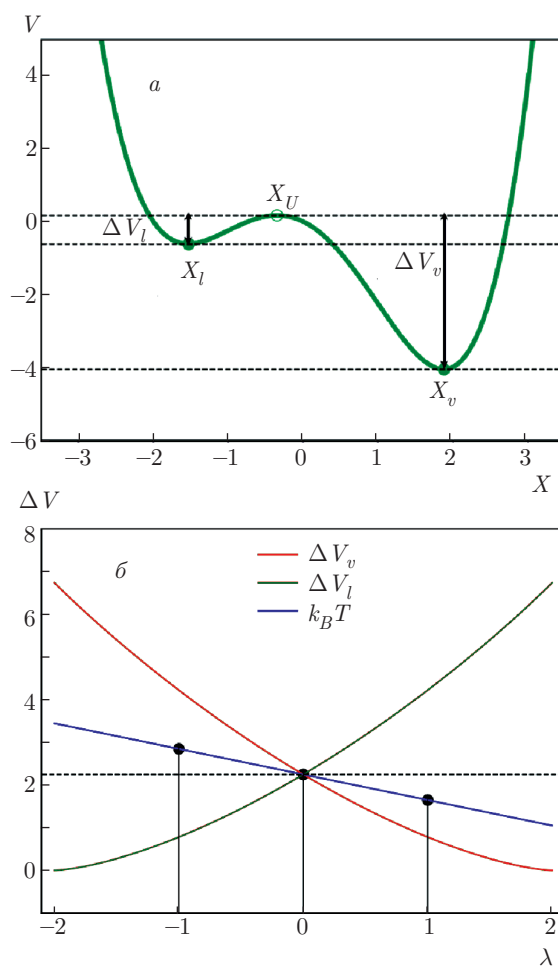


Рис. 5. (В цвете онлайн) *a*) График зависимости потенциала $V(X)$, иллюстрирующий обозначения величин ΔV_l и ΔV_v . *б*) Зависимости ΔV_l , ΔV_v и $T = T^* - 0.6(\lambda - \lambda^*)$ от контрольного параметра λ

положность этому, глобальный минимум при $\lambda = 1$ возникает при $X^* < 0$ (жидкое состояние); мы обозначим $\lambda = 1$ как λ_l . Для $\lambda = 0$ имеем $V(X_l) = V(X_v)$ и, следовательно, $\lambda = 0$ соответствует сосуществованию фаз; мы обозначим это значение как λ_* . Обратите внимание, что максимум потенциала соответствует нестабильной фазе. Так как система имеет два минимума и один максимум потенциала, у нее имеется два потенциальных барьера, как показано на рис. 5*a*:

$$\begin{aligned} \Delta V_l &= V(X_U) - V(X_l), \\ \Delta V_v &= V(X_U) - V(X_v). \end{aligned} \tag{33}$$

Теперь мы добавим случайный шум и решим уравнения, используя такую же процедуру, как и в разд. 3. Будем использовать температуру, определяемую уравнением

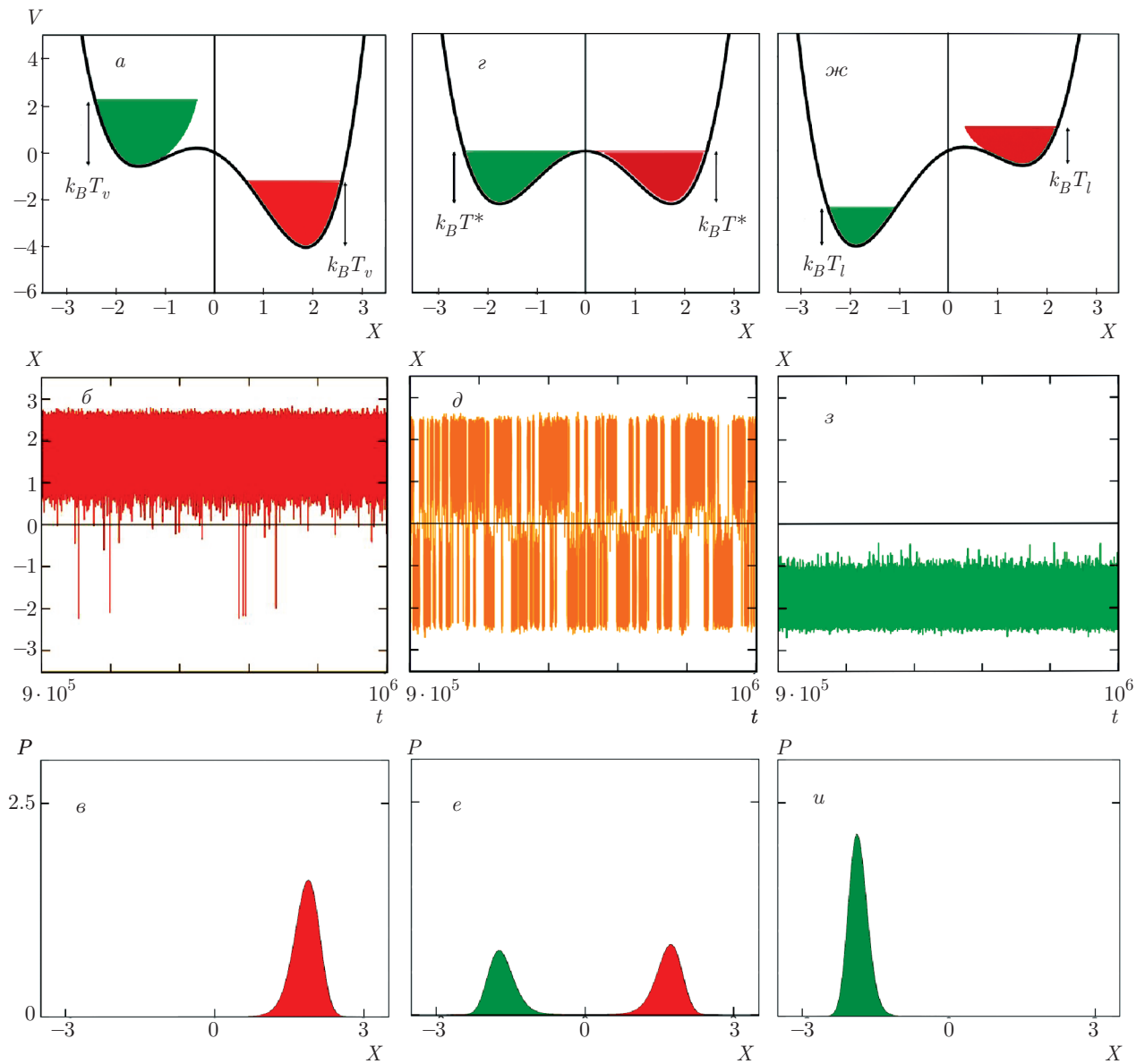


Рис. 6. (В цвете онлайн) К описанию системы, динамика которой задана уравнением (31). *a–в*) Графики потенциала $V(X)$, временных рядов $X(t)$ и функции распределения вероятности $P(X)$ для парообразной фазы при $T = T_v$. *г–е*) Соответствующие графики для режима сосуществования фаз. *ж–и*) Соответствующие графики для жидкого состояния. На всех графиках обозначения те же, что и на рис. 2, красный и зеленый цвета соответствуют парообразному и жидкому состояниям

$$T = T^* - 0.6(\lambda - \lambda^*), \tag{34}$$

что проиллюстрировано графически на рис. 5б. На этом рисунке точками показаны температуры $T_{l,v,*}$, соответствующие значениям контрольного параметра $\lambda_{l,v,*}$. Отметим, что T_* соответствует состоянию с сосуществованием фаз, $T < T_*$ — состоянию жидкости, а $T > T_*$ — состоянию пара. Для заданной температуры мы решаем уравнение (31) чис-

ленно, используя метод, описанный в разд. 3. На рис. 6 представлены потенциал $V(X)$, зависимость $X(t)$ и функция распределения вероятности $P(X)$ для жидкого и парообразного состояний, а также для режима сосуществования фаз.

Для $\lambda = -1$ и $T = T_v$, как показано на рис. 5б и 6а, тепловая энергия $k_B T_v$ превышает высоту барьера ΔV_l , но остается меньше ΔV_v . Следовательно, система флуктуирует вблизи фиксированной точки

X_v , т. е. парообразного состояния. Это наглядно иллюстрируется зависимостью $X(t)$ и функцией распределения $P(X)$, показанными на рис. 6б,в. Обратите внимание, что время от времени система пересекает барьер при $X = 0$.

Для $\lambda = 1$ и $T = T_l$, как показано на рис. 5б и 6ж, имеем $\Delta V_v < k_B T_v < \Delta V_l$. Следовательно, система предпочитает осциллировать в окрестности жидкого состояния $X = X_l$. Зависимость $X(t)$ и функция распределения $P(X)$ проиллюстрированы на рис. 6з,и. Для этого случая размах флуктуаций меньше, чем для $T = T_v$ из-за более низкой температуры.

Для $T = T_*$ имеем $\Delta V_v = k_B T_v = \Delta V_l$, следовательно, система флуктуирует в окрестности обоих минимумов, что соответствует сосуществованию фаз.

Таким образом, мы показали, что уравнение (31) в зависимости от температуры описывает существование двух стабильных фаз или сосуществование двух фаз. Этот пример, а также пример, рассмотренный в разд. 3, показывают, что эти особенности являются типичными для зашумленных бистабильных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976).
2. L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, Wiley, New York (2016).
3. R. K. Pathria and P. D. Beale, *Statistical Mechanics*, Academ. Press (2011).
4. F. Schwabl, *Statistical Mechanics*, Springer, Berlin (2006).
5. P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge Univ. Press (2000).
6. K. G. Wilson, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
7. S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Westview Press (2014).
8. V. Morin and E. Dormy, Int. J. Mod. Phys. B **23**, 5467 (2009).
9. M. K. Verma and R. K. Yadav, Phys. Plasmas **20**, 072307 (2013).
10. F. Pétrélis, S. Fauve, E. Dormy, and J.-P. Valet, Phys. Rev. Lett. **102**, 144503 (2009).
11. E. Abraham and S. D. Smith, Rep. Progr. Phys. **45**, 815 (1982).
12. E. Hawkins, R. S. Smith, L. C. Allison et al., Geophys. Res. Lett. **38**, L10605 (2011).
13. C. Folke, S. Carpenter, B. Walker, and M. Scheffer, Annu. Rev. Ecol. Syst. **35**, 557 (2004).
14. Y. Pomeau, Physica D **23**, 3 (1986).
15. Y. Pomeau, Comptes Rendus — Mécanique **343**, 210 (2015).
16. H. Haken, *Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology*, Springer Series in Synergetics, Springer, Berlin (1978).
17. J. Shi, T. Li, and L. Chen, Phys. Rev. E **93**, 032137 (2016).
18. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998).
19. W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-Induced Transitions*, Springer-Verlag, Berlin (1984).
20. A. J. Roberts, *Model Emergent Dynamics in Complex Systems*, SIAM, Philadelphia (2014).
21. H. J. Bernstein and V. F. Weisskopf, Amer. J. Phys. **55**, 974 (1987).
22. V. Guttal and C. Jayaprakash, Ecol. Modell. **201**, 420 (2007).
23. E. A. Gopalakrishnan and R. I. Sujith, J. Fluid Mech. **776**, 334 (2015).