ЖЭТФ, 2018, том 154, вып. 3 (9), стр. 679–685

КВАЗИУСТОЙЧИВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ТОРИЧЕСКИХ ВИХРЕВЫХ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

В. П. Рубан[*]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 6 мая 2018 г.

В рамках регуляризованного закона Био – Савара численно промоделирована динамика торических вихревых конфигураций $V_{n,p,q}$ в сверхтекучей жидкости при нуле температуры (n — число квантованных вихревых нитей, p — число витков каждой нити вокруг оси симметрии тора, q — число витков нити вокруг его центральной окружности; радиусы тора R_0 и r_0 в начальный момент времени велики по сравнению с шириной ξ кора вихря). Время существования вихревых систем до момента их значительной деформации вычислено с мелким шагом по параметру $B_0 = r_0/R_0$ для различных значений параметра $\Lambda = \ln(R_0/\xi)$. Оказалось, что для некоторых значений n, p и q имеются области квазиустойчивости в плоскости параметров (B_0, Λ), где вихри остаются в среднем практически неизменными в течение многих десятков и даже сотен характерных времен.

DOI: 10.1134/S0044451018090225

1. ВВЕДЕНИЕ

Вихревые узлы и зацепления являются объектом интереса в классической гидродинамике еще с XIX столетия. В частности, лорд Кельвин [1] выдвинул гипотезу о том, что в идеальной жидкости могут существовать равномерно вращающиеся и продвигающиеся (вдоль определенной оси) симметричные стационарные конфигурации из n тонких вихревых нитей, каждая с циркуляцией Γ. При этом форма нитей близка к торическим вихрям $V_{n,p,q}$, которые определяются параметрически следующими выражениями:

$$X_j(\beta) = \left[R_0 + r_0 \sin\left(q\beta + \frac{2\pi j}{np} - \Theta_0\right)\right]\cos(p\beta), \quad (1)$$

$$Y_j(\beta) = \left[R_0 + r_0 \sin\left(q\beta + \frac{2\pi j}{np} - \Theta_0\right)\right]\sin(p\beta), \quad (2)$$

$$Z_j(\beta) = r_0 \cos\left(q\beta + \frac{2\pi j}{np} - \Theta_0\right) + Z_0, \quad (3)$$

где $j = 1, \ldots, n$ — номер вихря, n — число квантованных вихревых нитей, продольный параметр β пробегает интервал $0 \le \beta < 2\pi$, а Θ_0 и Z_0 — линейные функции времени t. Натуральные числа p и q не должны иметь общих множителей. Нетрудно видеть, что p — число витков каждой нити вокруг оси симметрии тора, q — число витков вокруг его центральной окружности. Если $p > 1$ и $q > 1$, то каждая вихревая линия является торическим узлом $\mathcal{T}_{p,q}$. Если хотя бы одно из чисел, p или q, равно единице, то каждая линия представляет собой «неузел» (unknot), $\mathcal{U}_{p,1}$ либо $\mathcal{U}_{1,q}$, но при этом она зацеплена со всеми остальными (при $n \ge 2$). Если $p = 1$ и $q = 1$, то получается зацепление из n колец.

Несмотря на столь долгую историю вопроса, лишь совсем недавно подобные вихревые узлы и зацепления были впервые созданы экспериментально [2].

Отметим, что наиболее близкими к теории реальными объектами оказываются квантованные вихревые нити в сверхтекучих жидкостях, например в гелии при достаточно низкой температуре, когда влияние нормальной компоненты пренебрежимо мало. В этом случае $\Gamma = 2\pi\hbar/m_{at}$ — квант циркуляции скорости (m_{at} — масса атома гелия), а ширина кора каждого вихря равна ξ. К сожалению, для квантовых вихрей экспериментальная методика создания узлов и зацеплений пока не разработана.

Надо сказать, что точные стационарные конфигурации торического типа до сих пор не найдены (даже численно), а их устойчивость не исследована. Затруднения в немалой мере обусловлены тем фак-

[*] E-mail: ruban@itp.ac.ru

том, что стационарные решения соответствуют не минимуму функционала энергии при заданных значениях импульса и углового момента, а лишь седловой точке. Поэтому пока приходится иметь дело с приближенными формулами (1)–(3). Опубликован ряд работ, в которых численно моделировалась динамика торических вихрей для небольшого числа наборов параметров и на не слишком долгих временах, когда вихри успевали продвинуться вдоль оси z не более чем на несколько десятков R_0 (R_0 и r_0 — радиусы тора), а затем деформация нитей нарастала [3–11]. В квантовом случае это приводило к перезамыканиям. Казалось бы, такие результаты свидетельствуют о (хотя и относительно слабой, но все же) неустойчивости торических узлов и зацеплений.

В действительности ситуация оказывается более сложной и интересной. В недавней работе автора [12] на примере простейших узлов $\mathcal{T}_{2,3}$ и $\mathcal{T}_{3,2}$ было показано, что в пространстве параметров

$$B_0 = \frac{r_0}{R_0}, \quad \Lambda = \ln\left(\frac{R_0}{\xi}\right)$$

(ξ — ширина кора вихря) существуют области квазиустойчивости, представляющие собой промежутки между основными параметрическими резонансами различных типов, и там узел остается в среднем практически неизменным в течение многих десятков и даже сотен характерных времен, проходя при этом иногда тысячи начальных радиусов R_0. Другими словами, торическая форма вихря содержит в себе моды возмущений по отношению к соответствующей (неизвестной) стационарной конфигурации, и не всегда амплитуды этих мод нарастают со временем.

Чтобы найти квазиустойчивые области, потребовалось выполнить компьютерные вычисления времени жизни узлов до момента их значительной деформации с достаточно мелким шагом по параметру B_0 при заданной величине Λ. Все найденные в работе [12] квазистабильные зоны узла-трилистника $\mathcal{T}_{2,3}$ имеют небольшую ширину $\Delta B_0 \lesssim 0.01$ и соответствуют относительно «тонким» торам $B_0 \lesssim 0.2$ (см. верхний из рис. 1, представленных ниже). Существенно, что максимальные значения B_0 достигаются при $\Lambda \approx 3.5$. При $\Lambda \lesssim 3$ зоны отсутствуют, а при $\Lambda \gtrsim 6$ они сдвигаются к малым $B_0 \lesssim 0.1$ Эти области не были обнаружены ранее, скорее всего, именно по причине их «периферийного» расположения и малости размеров.

Естественно задаться вопросом: а как обстоят дела для других узлов и зацеплений? Целью данной работы является поиск аналогичных квазиустойчивых конфигураций и для других $V_{n,p,q}$, помимо $V_{1,2,3}$ и $V_{1,3,2}$. Как мы увидим далее, не для всяких наборов $\{n,p,q\}$ такие конфигурации существуют, по крайней мере — в интересующей нас области $B_0 \gtrsim 0.1$ (которая в случае небольших n соответствует достаточным расстояниям $l \sim 2r_0 \gtrsim 4\xi$ между корами вихрей при $\Lambda \approx 3$).

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Напомним, что динамика нескольких тонких вихревых нитей с хорошей точностью определяется регуляризованным законом Био – Савара в сочетании со вкладом локальной индукции (см., например, работы [13–15] и многочисленные ссылки в них),

$$\dot{\mathbf{X}}_j(\beta,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\tilde{\mathbf{X}}_i' \times (\mathbf{X}_j - \tilde{\mathbf{X}}_i)}{\mathrm{reg}_\xi |\mathbf{X}_j - \tilde{\mathbf{X}}_i|^3}\, d\tilde{\beta} + \\ + \frac{\Gamma\Lambda_0}{4\pi} \varkappa_j \mathbf{b}_j, \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i(\tilde{\beta},t)$, $\tilde{\mathbf{X}}_i' = \partial\mathbf{X}_i(\tilde{\beta},t)/\partial\tilde{\beta}$, Λ_0 — безразмерный положительный параметр порядка единицы, характеризующий кор вихря, $\varkappa_j$ — локальная кривизна j-й нити, $\mathbf{b}_j$ — локальный единичный вектор бинормали. Способ регуляризации логарифмически расходящихся интегралов почти не влияет на динамику нити, если параметр Λ_0 определяется согласованно. Часто выбирают так называемое приближение Розенхеда – Мура (Rosenhead–Moore approximation):

$$\mathrm{reg}_\xi |\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1|^3 = \sqrt{(|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1|^2 + \xi^2)^3}. \quad (5)$$

Очевидно, что динамика вихревых нитей как одномерных объектов в трехмерном пространстве инвариантна по отношению к произвольным (регулярным) заменам продольного параметра β. Этот факт позволяет добавить в правые части уравнений движения (4) слагаемые вида $\mu_j \mathbf{X}_j'/|\mathbf{X}_j'|$ с произвольными функциями μ_j. Выбрать их можно так, чтобы в процессе численного моделирования избежать неконтролируемого чрезмерного сгущения либо разрежения дискретных точек, аппроксимирующих вихревую линию. Например, можно взять μ_j в виде $\mu_j = C|\mathbf{X}_j'|'$, и это будет создавать благоприятную тенденцию к равномерному распределению точек вдоль кривой. Другой вариант — выбрать μ_j так, чтобы азимутальная компонента вектора $\dot{\mathbf{X}}_j$ обратилась в нуль — годится для ситуаций, когда геометрический центр возмущенной торической вихревой структуры не уходит с течением времени далеко от оси z. В данной работе применялись оба варианта.

С практической точки зрения также важно, что длинноволновая динамика системы (4) слабо чувствительна к замене параметров

$$\xi \to \delta, \quad \Lambda_0 \to \Lambda_0 + \ln(\delta/\xi), \tag{6}$$

где δ — произвольная величина порядка ξ, если только конфигурация нитей достаточно далека от пересечений. В частности, можно переопределить параметр ξ таким образом, что $\Lambda_0 = 0$. Это и будет предполагаться в дальнейшем. Данная замена оставляет неизменным полный параметр локальной индукции

$$\Lambda = \ln(R_0/\xi) = \ln(R_0/\delta) + \tilde{\Lambda}_0, \tag{7}$$

где $\tilde{\Lambda}_0 = \ln(\delta/\xi)$. Указанное свойство системы (4) позволяет проводить компьютерное моделирование с меньшими массивами дискретных точек, чем того требовали бы малые значения ξ/R_0, если при этом брать δ больше нескольких ξ. В описываемых далее численных экспериментах основными параметрами были Λ и δ (обычно бралось значение $\delta/R_0 = 0.05$ и иногда для сравнения $\delta/R_0 = 0.025$). Использовались безразмерные переменные, так что $\Gamma = 2\pi$, $R_0 = 1$. Коэффициент C в функциях μ_j выбирался не слишком большим из условия численной устойчивости.

Следует отметить, что в рассматриваемой системе имеются такие стандартные законы сохранения, как гамильтониан $\mathcal{H}$ (энергия), импульс $\mathbf{P}$ и момент импульса $\mathbf{M}$:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}\sum_j \sum_i \oint\oint \frac{(\mathbf{X}'_j \cdot \tilde{\mathbf{X}}'_i) d\beta d\tilde{\beta}}{\sqrt{|\mathbf{X}_j - \tilde{\mathbf{X}}_i|^2 + \delta^2}} + \frac{\tilde{\Lambda}_0}{2}\sum_j \oint |\mathbf{X}'_j| d\beta, \tag{8}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\sum_j \oint [\mathbf{X}_j \times \mathbf{X}'_j] d\beta, \tag{9}$$

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{2}\sum_j \oint |\mathbf{X}_j|^2 \mathbf{X}'_j d\beta, \tag{10}$$

а уравнения движения с учетом свободы перепараметризации обладают неканонической гамильтоновой структурой $[\mathbf{X}'_j \times \dot{\mathbf{X}}_j] = \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{X}_j$. Динамику торических вихрей можно представить в канонической форме, если перейти к цилиндрическим координатам и ввести n пар $2\pi p$-периодических по азимутальному углу φ функций $Z_j(\varphi, t)$ и $S_j(\varphi, t) = R_j^2(\varphi, t)/2$, описывающих форму вихревых нитей. Соответствующую подстановку следует провести и в гамильтониане (8), в результате чего получится довольно громоздкое выражение, которое мы здесь не приводим. Существенно, что тогда уравнения движения будут иметь канонический вид:

$$\dot{Z}_j = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta S_j}, \quad -\dot{S}_j = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta Z_j}. \tag{11}$$

Гамильтоново описание может оказаться полезным в будущих аналитических исследованиях торических вихрей, в частности — для теоретической интерпретации приведенных ниже численных результатов.

При численном моделировании в данной работе применялась псевдоспектральная схема по переменной β и схема Рунге – Кутта четвертого порядка для интегрирования по времени. Форма каждой нити аппроксимировалась L точками $\mathbf{X}_{j,l}(t) = \mathbf{X}_j(2\pi l/L, t)$ (типичные значения $L = 512$ и $L = 1024$). При этом

$$\mathbf{X}_{j,l} = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{K-1} \hat{\mathbf{X}}_{j,k} \exp\left(\frac{2\pi ikl}{L}\right). \tag{12}$$

На каждом шаге по времени в процедуре Рунге – Кутта участвовали $K \approx (3/8)L$ соответствующих фурье-гармоник $\hat{\mathbf{X}}_{j,k}$, после чего оставлялись только гармоники не старше $K_{eff} \approx L/4$, а остальные приравнивались к нулю. Такая методика зарекомендовала себя весьма неплохо в самых разных задачах. В нашем случае она также показала хорошую устойчивость и позволила сохранять интегралы движения $\mathcal{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ с точностью до пяти–семи десятичных знаков на протяжении большей части эволюции (а в зонах квазиустойчивости — и до самого конца прогона).

Продвижение по времени заканчивалось, когда деформация нитей становилась достаточно сильной либо достигалось определенное большое время T_{max} (типично $T_{max} = 80$, но в дополнительных уточняющих экспериментах устанавливалось $T_{max} = 320$). При этом для каждого набора параметров фиксировалось достигнутое время T_{final}. Мерой деформации кривых в наших численных экспериментах служила максимальная величина нескольких гармоник с номерами вблизи K_{eff} (как правило, рост далеких гармоник свидетельствовал о сближении некоторых участков нитей и приближении момента перезамыкания). Время T_{final}, вообще говоря, зависит от того, какие μ_j используются, но, как показала практика вычислений, точный вид критерия завершения

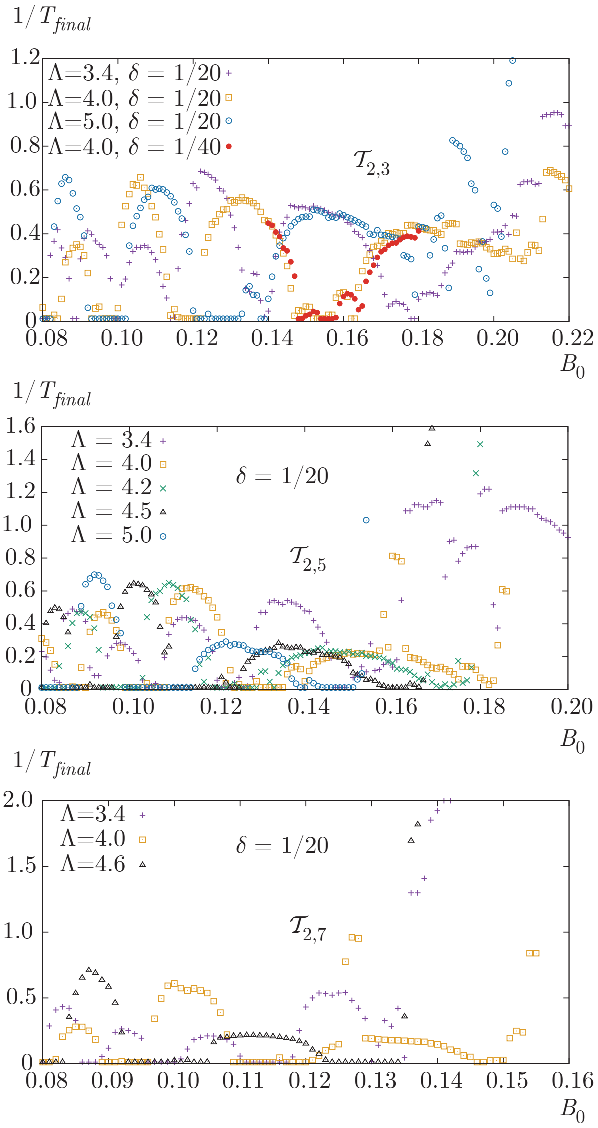

Рис. 1. (В цвете онлайн) Обратное время жизни вихревых узлов $\mathcal{T}_{2,q}$ для $q = 3, 5, 7$ при разных параметрах Λ и B_0. На всех трех рисунках видны зоны квазиустойчивости в виде близких к горизонтальной оси участков графиков

отдельного прогона не очень важен для нахождения квазиустойчивых конфигураций, поэтому мы здесь не приводим всех подробностей.

Поскольку симметрия возможных неустойчивых мод не обязана совпадать с исходной симметрией торических вихрей, в начальные условия было необходимо добавить возмущения, содержащие «зародыши» несимметричных мод. При $n = 1$ снятие симметрии достигалось умножением правых частей выражений (1) и (2) соответственно на $(1+\epsilon)$ и $(1+\epsilon)^{-1}$ (где $\epsilon \sim 0.01$), использованием несоизмеримого с 2π параметра Θ_0, а в некоторых случаях (для четных

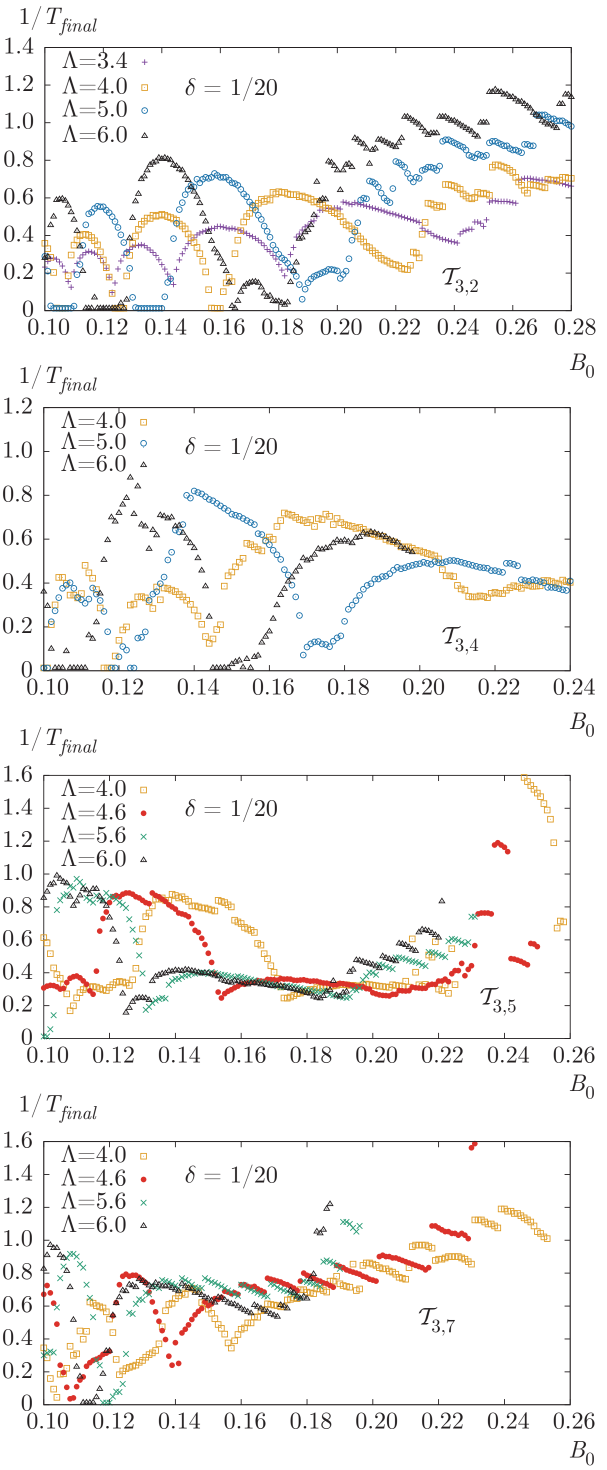

Рис. 2. (В цвете онлайн) Обратное время жизни вихревых узлов $\mathcal{T}_{3,q}$ для $q = 2, 4, 5, 7$. Наиболее отчетливо зоны квазиустойчивости проявляются при $q = 2$ и при $q = 4$

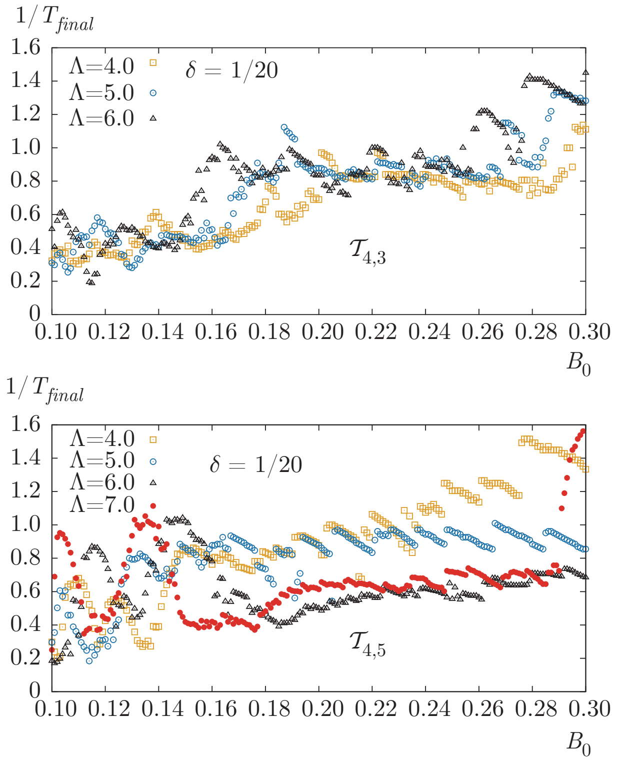

Рис. 3. (В цвете онлайн) Обратное время жизни вихревых узлов $\mathcal{T}_{4,3}$ и $\mathcal{T}_{4,5}$. Зоны квазиустойчивости отсутствуют

q) — умножением первого слагаемого в выражении (3) на $1 + 0.005\sin(p\beta)$. При $n \geq 2$ для нарушения симметрии достаточно слегка сместить один из вихрей в плоскости xy.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численно найденные зависимости (обратного) времени жизни от параметра B_0 при фиксированных значениях Λ для различных узлов, не-узлов и зацеплений показаны на рис. 1–7. Прокомментируем представленные рисунки, которые, собственно, являются главными результатами данной работы.

Прежде всего надо сказать, что некоторая нерегулярность в расположении точек на графиках, в особенности при не очень малых B_0, объясняется, по всей видимости, заметным отличием начальных условий от стационарных конфигураций.

Подчеркнем, что вычисленное обратное время жизни не есть инкремент неустойчивости, поскольку начальные и конечные амплитуды неустойчивых мод не были фиксированы, да и сами такие моды не были известны. Время жизни в целом зависит от выбора начальных возмущений формы торических

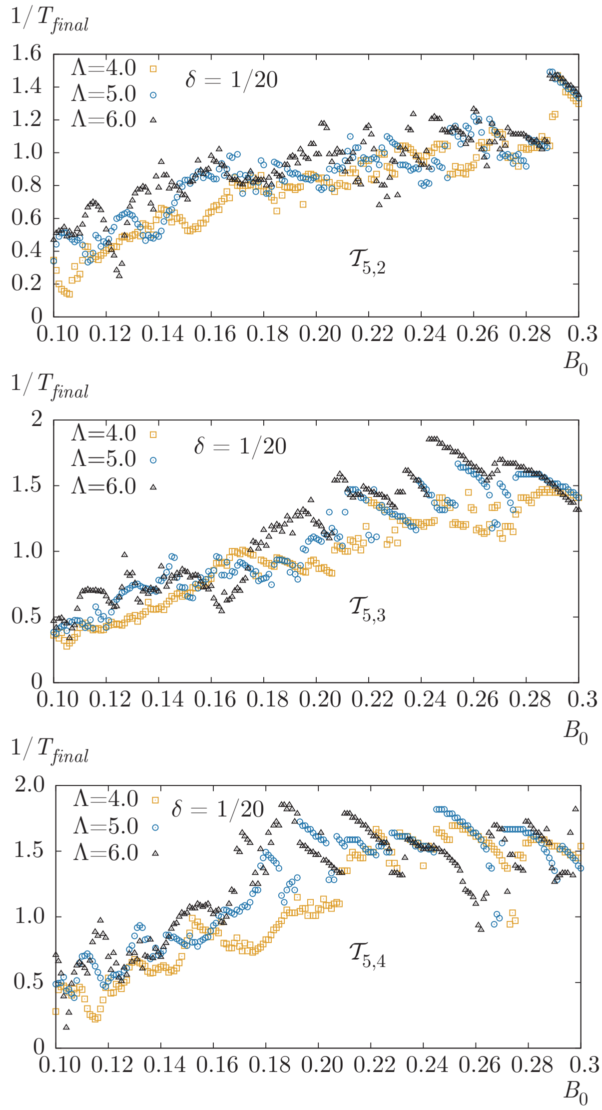

Рис. 4. (В цвете онлайн) Обратное время жизни вихревых узлов $\mathcal{T}_{5,q}$ для $q = 2, 3, 4$. Зоны квазиустойчивости отсутствуют

вихрей. Более-менее независимы от этого только те (наиболее интересные) участки графиков, где точки близки к горизонтальной оси.

Типичные значения $1/T_{final}$ во всех случаях оказываются порядка единицы. Однако на некоторых графиках имеются небольшие, но конечные участки, где обратное время жизни не превышает малой величины $1/T_{max}$. Вблизи их краев обратное время жизни проявляет примерно корневую зависимость. Это и есть искомые зоны квазиустойчивости. Они появляются обычно с увеличением Λ, когда соседние параметрические резонансы динамической системы перестают перекрываться. Особенно отчетли-

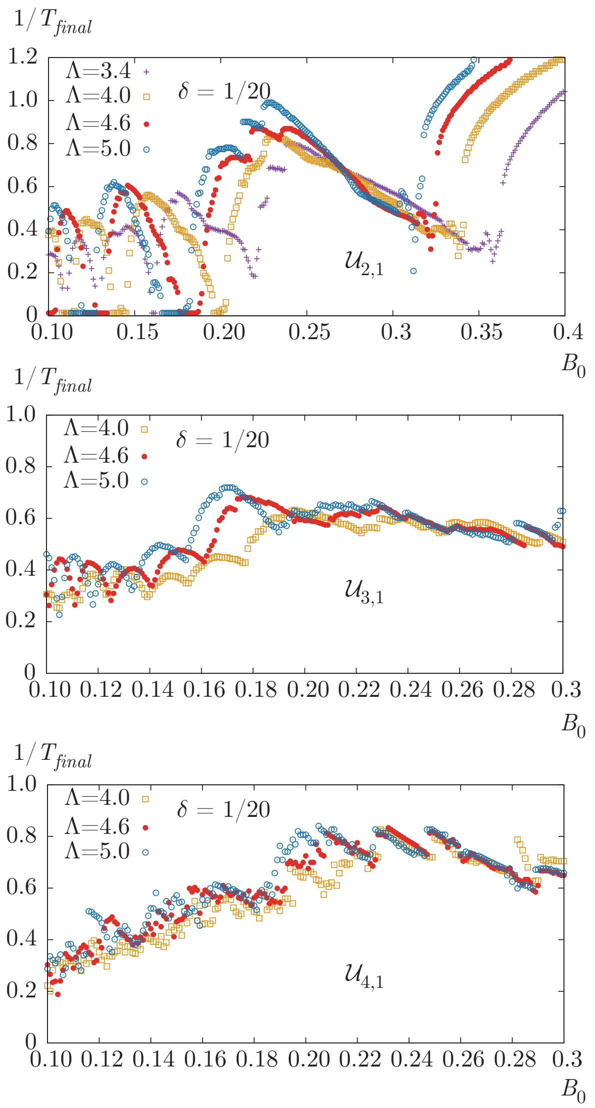

Рис. 5. (В цвете онлайн) Обратное время жизни вихревых не-узлов $\mathcal{U}_{2,1}$, $\mathcal{U}_{3,1}$, и $\mathcal{U}_{4,1}$. В случае $\mathcal{U}_{2,1}$ имеются квазиустойчивые конфигурации даже на довольно больших $B_0 \approx 0.2$

во такой механизм появления квазистабильных зон виден на примерах узла $\mathcal{T}_{3,2}$, не-узла $\mathcal{U}_{2,1}$ и простейшего зацепления из двух колец $V_{2,1,1}$. Для многих других $V_{n,p,q}$ окна квазиустойчивости так и не появляются. В частности, узлы $\mathcal{T}_{4,q}$, $\mathcal{T}_{5,q}$, не-узлы $\mathcal{U}_{p\geq 3,1}$ и три кольца в конфигурации $V_{3,1,1}$ практически всегда неустойчивы.

На верхнем рис. 1 видно, что при фиксированном значении Λ различие результатов, соответствующих разным δ, довольно невелико в согласии со сделанным ранее замечанием. Но различия все же имеются, так как из-за нелинейных взаимодействий на больших временах появляются коротковолновые

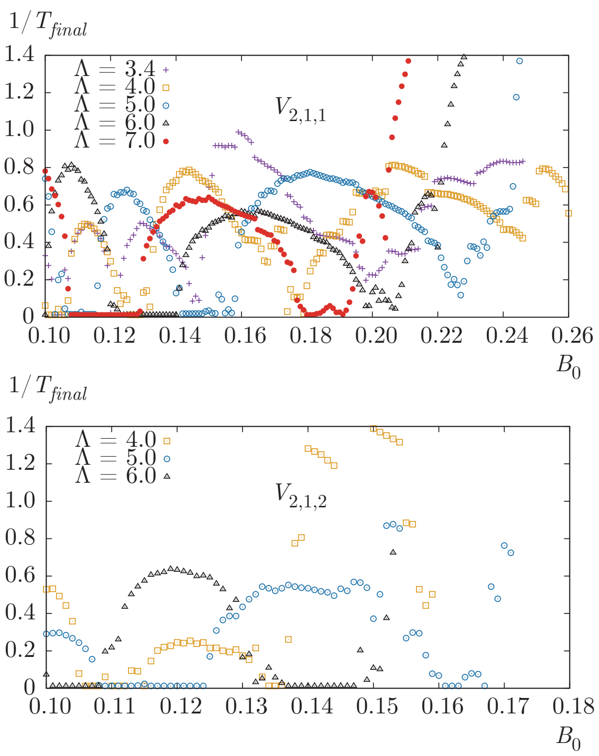

Рис. 6. (В цвете онлайн) Обратное время жизни зацеплений $V_{2,1,1}$ и $V_{2,1,2}$

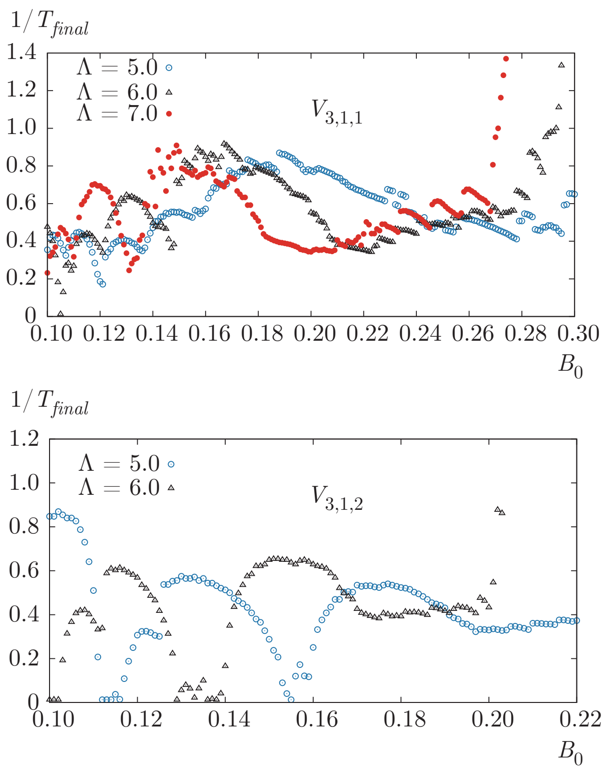

Рис. 7. (В цвете онлайн) Обратное время жизни зацеплений $V_{3,1,1}$ и $V_{3,1,2}$

возбуждения формы нити, несомненно чувствующие разницу между разными δ. Поэтому максимально аккуратное моделирование в рамках уравнений (4), по-видимому, все-таки требует использования оригинальных (непереопределенных) параметров ξ и Λ_0. Это замечание не отменяет основной вывод о наличии квазиустойчивых областей в плоскости параметров (B_0, Λ).

Интересно отметить, что в ряде случаев квазистабильные зоны располагаются при достаточно больших значениях $B_0 = 0.16\ldots0.20$, когда начальный тор уже нельзя назвать в полной мере тонким. При этом отличие начальных условий от стационарных решений оказывается настолько большим, что говорить о сохранении формы вихрей можно только в среднем. Фактически вихревые нити довольно сильно осциллируют в нелинейном режиме, но, что интересно, эти осцилляции не приводят к разрушению системы в течение весьма долгого времени. Так, в некоторых дополнительных вычислениях вихревые узлы и зацепления с параметрами из таких зон устойчивости без существенных изменений проходили более тысячи начальных радиусов R_0. Существование подобных решений представляется автору наиболее нетривиальным результатом данного исследования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенные численные эксперименты выявили наличие весьма долгоживущих конфигураций для некоторых видов торических вихревых узлов и зацеплений. Эти результаты несомненно увеличили объем наших знаний о весьма «почтенной» гидродинамической задаче. Кроме того, они обладают эстетической привлекательностью. Вместе с тем возникает множество новых вопросов, поскольку на данном этапе строгое теоретическое описание этого феномена практически начисто отсутствует. Пока также неясно, удастся ли в ближайшем будущем приготовить и пронаблюдать такие квазиустойчивые квантовые вихревые структуры экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Thomson (Lord Kelvin), Proc. Roy. Soc. Edin. **9**, 59 (1875).
2. D. Kleckner and W. T. M. Irvine, Nature Phys. **9**, 253 (2013).
3. R. L. Ricca, D. C. Samuels, and C. F. Barenghi, J. Fluid Mech. **391**, 29 (1999).
4. F. Maggioni, S. Alamri, C. F. Barenghi, and R. L. Ricca, Phys. Rev. E **82**, 026309 (2010).
5. O. Velasco Fuentes, Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 189 (2010).
6. A. Romero Arteaga, *Vórtices Eslabonados Cuasi-Estacionarios*, Master's thesis, CICESE (2011).
7. O. Velasco Fuentes and A. Romero Arteaga, J. Fluid Mech. **687**, 571 (2011).
8. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, Phys. Rev. E **85**, 036306 (2012).
9. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, J. Phys.: Conf. Ser. **544**, 012022, (2014).
10. P. Clark di Leoni, P. D. Mininni, and M. E. Brachet, Phys. Rev. A **94**, 043605 (2016).
11. D. Kleckner, L. H. Kauffman, and W. T. M. Irvine, Nature Phys. **12**, 650 (2016).
12. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **107**(5), 325 (2018).
13. K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **31**, 5782 (1985).
14. M. Tsubota, T. Araki, and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. B **62**, 11751 (2000).
15. A. W. Baggaley and C. F. Barenghi, Phys. Rev. B **83**, 134509 (2011).