

# ВОЛНА РИМАНА КОНЕЧНОЙ АПЕРТУРЫ

*Л. Н. Пятницкий\**

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 мая 2018 г.

Волна сжатия Римана описывает плоское течение за бесконечным волновым фронтом, но применяется для описания ее распространения в каналах. При этом влияние стенок на процесс ее распространения не учитывается. Однако трение о стенки и дифракционная расходимость элементарных плоских волн, компенсирующих трение, меняют условия распространения волны. Эти явления, неизбежные в канале, нарушают постоянство энтропии и струйность течения, что противоречит определению «простая волна». Анализ дифракционной расходимости позволяет решить задачу формирования простой волны конечной апертуры (волнового пучка большой рэлеевской длины). Развитие процессов трения объясняет возникновение турбулентного течения и позволяет уточнить механизм спонтанного перехода дефлаграции в детонацию.

DOI: 10.1134/S004445101810019X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Всякое тело понуждается к движению приложенной силой. В жидкости и газе такой силой является градиент давления. Примером может служить одномерная простая волна сжатия Римана, движущаяся по оси  $x$ . При одномерном изэнтропическом течении без образования разрывов, распределение скорости  $U$  в волне определяется соотношениями (см., например, [1], § 101)

$$U = \int \frac{dP}{\rho c}, \quad x = t(U + c(U)) + f(U) \dots, \quad (1)$$

$P$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $c$  — местная скорость звука,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $f(U)$  — функция, зависящая от начальных граничных условий. В политропном газе ([1], § 99)

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} U, \quad \frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{U}{c_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{U}{c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}.$$

Безусловно, полезная одномерная модель простой волны при движении в канале не учитывает двух особенностей течения в простой волне, вызванных взаимодействием текущей среды со стенками

канала, а также изменения формы фазовой поверхности элементарных звуковых волн, компенсирующих потери энергии на трение.

Последовательность изложения. Анализируются критерий Рейнольдса и оценивается вызванный трением поток поперечного импульса. Этот поток включается в уравнения Прандтля для пограничного слоя, и вычисляется распределение давления в поперечном сечении потока с максимумом у стенок. Рост давления у стенок служит основой для волнового механизма образования турбулентности.

Элементарные волны течения, компенсирующие потерю энергии простой волны на трение, испытывают дифракционную расходимость. Обращение волновых векторов расходящейся волны позволяет создать простую волну без ограничивающих стенок. Приводятся примеры радиального и продольного распределений поля такой волны.

## 2. ТРЕНИЕ И КРИТЕРИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Рассмотрим роль трения в простом случае ламинарного течения несжимаемой жидкости или газа (при  $M \ll 1$ ), движущегося вдоль оси  $x$  канала в виде пары плоских параллельных пластин, отстоящих на расстоянии  $z = d = 1$  друг от друга. Трение замедляет течение. Компонента  $\mathbf{j}$  вектора  $\mathbf{J}$  плотности потока импульса через поверхность, перпендикулярную одной из осей в направлении нормали  $\mathbf{n}$  к

\* E-mail: pyat7@mail.ru

ней, выражается через тензор  $\Pi_{ik}$  плотности потока импульса ([1], § 15):

$$J_i = \Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho U_i U_k n_k - \sigma'_{ik} n_k. \quad (3)$$

Здесь первый член представляет реальную силу давления. Второй член описывает обратимый перенос импульса, вызванный движением элементов жидкости. Последнее слагаемое указывает на необратимый перенос импульса. Этот импульс связан с трением и определяется тензором напряжений  $\sigma'_{ik}$ , зависящим от коэффициента динамической вязкости  $\eta$ :

$$\sigma'_{ik} = \eta (\partial U_i / \partial x_k + \partial U_k / \partial x_i) n_k. \quad (4)$$

Скорость стационарного ламинарного течения (поток Пуазейля) имеет параболический профиль. В плоском канале ( $V = W = 0$ ) профиль может быть представлен простой формулой

$$u/U_0 = z(1-z). \quad (5)$$

Тогда  $x$  и  $z$  компоненты потока импульса в средней части канала  $z = d/2$  приобретают вид

$$J_x = p + \rho U_0^2, \quad J_z = p. \quad (6)$$

На поверхности стенки нет движения жидкости, следовательно,

$$\begin{aligned} J_{x0} &= p, \\ J_{z0} &= p - \eta(U_0/d). \end{aligned} \quad (7)$$

Второй член в  $J_{z0}$  означает дополнительный поток импульса вдоль оси  $z$ :

$$j_{z0} = \sigma'_{xz} = \eta(\partial U / \partial z) = \eta(U_0/d). \quad (8)$$

Составляя отношение динамической части потока продольного импульса (6) к потоку (8) поперечного импульса, мы получаем критерий Рейнольдса:

$$J_x / j_{z0} = \rho U_0 d / \eta = \text{Re}. \quad (9)$$

Таким образом, число Рейнольдса представляет собой долю потока импульса, затрачиваемую на преодоление вязкого трения. При этой ориентации потока импульса выражение (8) означает, что существует градиент давления, направленный от стенки:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} > 0. \quad (10)$$

Передача импульса всегда связана с переносом энергии, так что критерий Рейнольдса описывает

также диссипацию энергии. Распределение диссипации в поперечном сечении потока дает следующая формула ([1], гл. 16):

$$\frac{\partial E}{\partial t} \approx -2\eta \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 dx dz. \quad (11)$$

Градиент  $\partial U / \partial z$  быстро увеличивается по мере приближения к стенке, и диссипация локализуется в пограничном слое у стенки. Этот слой определяет поперечное перемещение  $\delta$  потенциального течения, вызванного замедлением движения из-за трения ([1], § 39):

$$\delta = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{U}{U_0} \right) dz. \quad (12)$$

Такая интерпретация предполагает наличие поперечной скорости течения,  $W > 0$ , что возможно только под действием градиента давления (10).

### 3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнения Прандтля используются для описания ламинарного пограничного слоя стационарного течения. Вывод этих уравнений основан на предположении о малой поперечной скорости,  $W \ll U$ , и постоянстве давления в поперечном сечении потока:

$$\partial P / \partial z = 0. \quad (13)$$

Именно условие (13) дает возможность решить уравнения движения в пограничном слое, с помощью значения давления, действующего в потенциальной части потока, которое в этом случае можно найти из уравнения Бернулли:

$$\frac{dP}{dx} \approx -\rho U \frac{dU}{dx}, \quad P + \frac{\rho U^2}{2} \approx \text{const}. \quad (14)$$

Такой подход значительно упрощает решение задачи, хотя и на основе другой системы уравнений движения. Действительно, система уравнений содержит уравнение Навье–Стокса, компоненты которого для двумерного потока могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \\ U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Из условия  $W = 0$  следует, что производные по  $z$  из первого уравнения исчезают, а второе уравнение заменяется функцией  $P(x)$ , которую в данных условиях можно определить с помощью уравнения (14). Смысл этих изменений состоит в том, чтобы упростить задачу, отказавшись от учета диссипации в уравнениях Прандтля. Поэтому от решения данных уравнения вряд ли можно ожидать правильных результатов. Между тем уравнение Бернулли не исключает, в принципе, учета движения жидкости в других направлениях, как и диссипации ([1], § 5). Их учет позволяет оценить фактическое распределение давления в поперечном сечении потока.

Система уравнений, включающая формулы (15), описывает течение несжимаемой жидкости. К этой категории можно отнести и газ при медленном движении,  $M \ll 1$ . При более высокой скорости течения газа, но без образования разрывов, уравнения (15) следует дополнить слагаемыми, зависящими от вторых производных  $\partial^2 U / \partial x^2$  и  $\partial^2 W / \partial z^2$ . Это дополнение несколько меняет распределение давления, но основной приведенный в разд. 4 результат, повышение давления у стенки, сохранится.

#### 4. КОРРЕКЦИЯ ОСНОВОПОЛАГАЮЩЕГО ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Параметр «const» (14) сохраняет свое значение во всем объеме простой волны, если течение является адиабатическим, иначе он сохраняется только вдоль линии тока. Каждая линия тока в пограничном слое имеет свой собственный уровень значения диссипации. Процесс диссипации является необратимым, поскольку некоторая часть механической энергии потока превращается в тепло. Чтобы применить уравнение Бернулли (14) к реальным условиям, в нем необходимо учесть удельные потери мощности  $\nu(\partial W / \partial z)$  и движения вдоль оси  $z$ ,  $W^2/2$ . Указанная модификация приводит к уравнению

$$\frac{1}{\rho} P_0 + \frac{U_0^2}{2} \approx \frac{1}{\rho} P + \frac{U^2}{2} + \frac{W^2}{2} + \nu \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (16)$$

Следуя стандартной методике ([1], § 39) решения уравнения (14), перейдем к безразмерной форме уравнения (16). Для этого выразим компоненты вектора скорости через функцию тока  $\psi$  согласно (17) и введем переменные Блазиуса (18):

$$U(x, z) = \partial\psi / \partial z, \quad W(x, z) = \partial\psi / \partial x, \quad (17)$$

$$\zeta = z\sqrt{U_0/\nu x}, \quad \psi = \sqrt{\nu x U_0} f(\zeta). \quad (18)$$

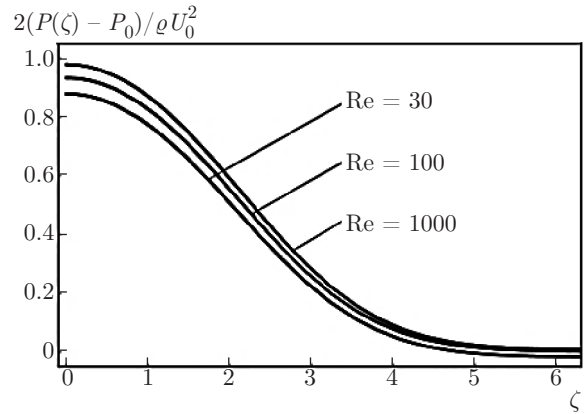


Рис. 1. Профиль давления в пограничном слое

Переписывая уравнение (16) в новых переменных, мы представляем его как зависимость относительного распределения давления от безразмерной функции тока и ее производных [2]:

$$\frac{P(\zeta) - P_0}{\rho U_0 / 2} = 1 - f'^2 - \frac{1}{4 \text{Re}} (\zeta f' - f)^2 - \frac{2}{\sqrt{\text{Re}}} f''. \quad (19)$$

Здесь  $\text{Re} = xU_0/\nu$ , производная  $f'(\zeta)$  представляет продольную компоненту скорости, разность  $\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)$  соответствует ее поперечной компоненте,  $f''(\zeta)$  обозначает силу трения, функция  $f(\zeta)$  является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$2f''' + ff'' = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (19) дает профиль давления в сечении потока. На рис. 1 показаны профили давления для набора чисел Рейнольдса  $\text{Re} = 30, 100, 1000$ . Они демонстрируют рост давления у стенки. Этот рост невелик, несколько процентов от  $P_0$ . Но он нарушает изэнтропию и струйность течения.

Заметим, увеличение давления у стенки не является неожиданным. Уже из уравнения Бернулли видно, что падение скорости может вызвать это увеличение. Вопрос только в том, успевает ли оно выравняться по сечению.

Скорость в волне Римана обычно рассматривается как монотонная функция. Реальная простая волна отличается от волны в предельном случае малых амплитуд ([1], § 28.101). Согласно соотношениям (1), скорость точки простой волны можно представить в виде суперпозиции возмущений, распространяющихся со скоростью звука  $c$  относительно газа и самого движения газа со скоростью  $U$ .

Поскольку скорость разных точек в волне различна, расстояние между ними не остается постоянным и продольный профиль простой волны меняет

свою форму, проявляя тенденцию к дискретизации. В конце концов, в потоке могут образоваться и разрывы. Дискретизация возникает и у параметров у стенок, образуя локальные зоны повышенного давления.

Известно ([1], §70), что зона локального избыточного давления эмиттирует сферические акустические волны. Эти волны, оригинальные и отраженные от стенок, заполняют область течения, образуя пространственно-временное поле возмущений, которые выглядят как стохастические акустические колебания [2]. Пока число Рейнольдса невелико,  $Re < Re_{cr}$ , эти колебания не заметны на фоне других возмущений. Но когда число Рейнольдса превышает значение  $Re_{cr}$ , эти колебания становятся заметными и течение называется турбулентным.

Х. А. Лоренц [3] полагал, что течение и турбулентные пульсации суть разные явления и, соответственно, их должны описывать разные уравнения. Однако физический процесс возникновения турбулентности в то время не был известен. Было ясно только, что причина явления связана с трением на стенках. Представленные здесь результаты позволяют построить волновой механизм процесса, объясняющий возникновение турбулентности, ее развитие во времени и в пространстве, а также перемежаемость, формирование пограничного слоя и образование вихрей [2].

## 5. ТЕЧЕНИЕ В ПРОСТОЙ ВОЛНЕ КАК ВОЛНОВОЙ ПУЧОК

Теперь рассмотрим эволюцию звуковых волн в канале, которые компенсируют потери энергии простой волны на трение. Существует три способа возбуждения простой волны сжатия в трубе [4]: создание разности давлений на открытом конце трубы, использование большого объема в качестве источника течения и поршень, движущийся, например, в трубе. Возмущения на входе в трубу в первых двух вариантах затрудняют анализ свойств потока непредсказуемыми способами. Поэтому вариант с поршнем выглядит предпочтительным.

Решение задачи в случае одномерного движения хорошо известно (см., [1], §101). Поршень начинает движение в момент  $t = 0$  из точки  $z = 0$  в направлении  $z > 0$  со скоростью  $Z'(t)$ . Перед ним образуется простая волна. Поток газа волны простирается от положения поршня  $\int Z(t) dt$  до фронта волны  $Z_0 = c_0 t$ . В этой области скорость потока  $U(z, t)$  и за-

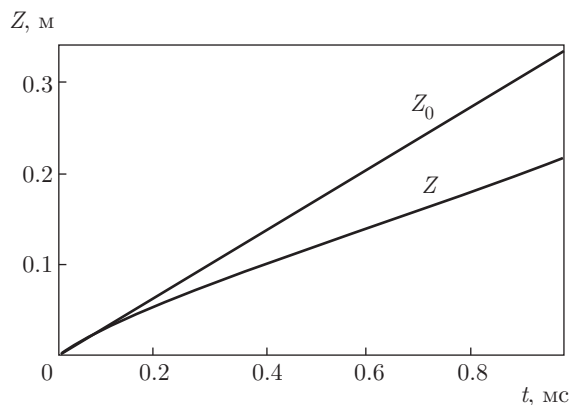


Рис. 2. Траектории фронта  $Z_0$  простой волны и поршня  $Z$ , построенные по формулам (23):  $c_0 = 340$  м/с,  $U_0 = 200$  м/с,  $\tau = 0.1$  мс

висящее от него распределение параметров потока (2) описывают параметрические уравнения

$$\begin{aligned} U &= Z(t), \\ x &= Z(t) + (T - t) \left[ c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} Z'(t) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Скорость  $Z'(t)$  сначала возрастает, а затем стремится к пределу  $U_0$ . Пусть для определенности

$$Z' = U_0 (1 - \exp(-t/\tau)). \quad (22)$$

Траектории  $Z_0(t)$  волнового фронта волн поршня  $Z(t)$  описывают соотношения

$$Z_0 = c_0 t, \quad Z = U_0 t + U_0 \tau [1 + \exp(-t/\tau)], \quad (23)$$

которые изображены на рис. 2 для параметров  $c_0 = 340$  м/с,  $U_0 = 200$  м/с,  $\tau = 0.1$  мс.

Протяженность течения в простой волне увеличивается со временем, и одновременно растет сила трения. Тем не менее течение не ослабевает, поскольку поршень излучает акустические волны сжатия, обеспечивающие энергией развитие процесса. Предполагается, что каждая такая волна имеет плоский фронт, а ее апертура ограничена сечением трубы, т. е. процесс одномерный.

Такая удобная идея значительно упрощает решение многих проблем. Однако это не тот случай, когда простая волна распространяется в трубе. Фактически течение ограниченной апертуры является волновым пучком. Как известно, волновой пучок подвержен дифракционной расходимости и вместо цилиндрической формы он приобретает вид сферического сегмента. Диаметр  $D(z)$  и радиус кривизны  $R(z)$  фронта этого сегмента увеличиваются в процессе его распространения [5]:

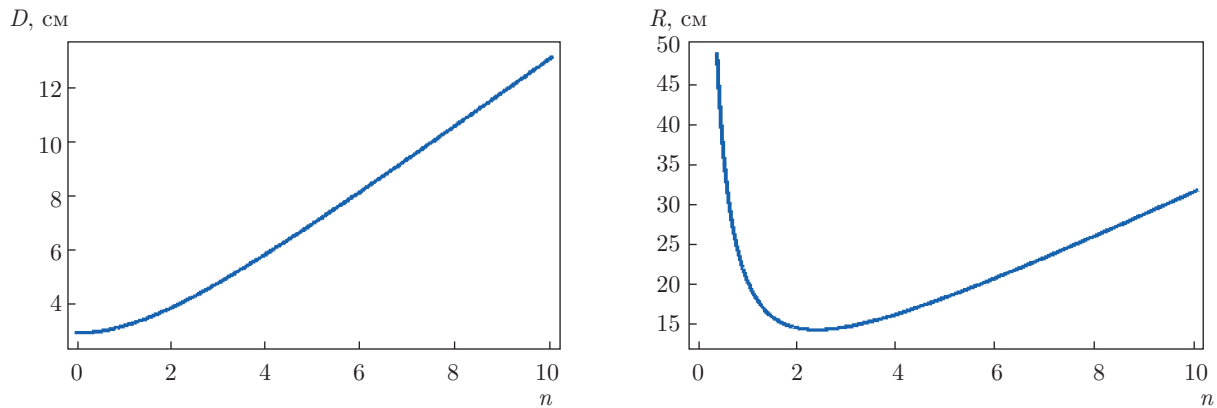


Рис. 3. Зависимости диаметра  $D(z)$  и радиуса кривизны  $R(z)$  фронта волны от пройденного расстояния, выраженного в калибрах трубы

$$\begin{aligned} D(z) &= d \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi r^2}\right)^2}, \\ R(z) &= z \left(1 + \left(\frac{\pi r^2}{\lambda z}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $\lambda$  — длина волны пучка,  $d = 2r$  — начальный диаметр волнового фронта пучка, определяемый поперечным сечением трубы,  $z$  — расстояние, пройденное расходящейся волной. Зависимости  $D(z)$  и  $R(z)$  приведены на рис. 3, где расстояние выражено в калибрах трубы,  $n = z/d$ .

Образующая расходящегося пучка имеет вид гиперболы с асимптотой, ориентированной под углом  $\theta$  к оси симметрии

$$\theta \approx \lambda/d. \quad (25)$$

Поскольку вблизи плоской волны диаметр гиперболоида возрастает медленно, расходимостью в ее окрестности можно пренебречь. Удвоенное расстояние, на котором такое пренебрежение приемлемо, называется длиной Рэлея [6]

$$L_R = \pi d^2/\lambda. \quad (26)$$

Явление дифракционной расходимости существует и в трубе. Однако стенки трубы ограничивают распространение гиперболоида в радиальном направлении. Соответственно, внешнее кольцо гиперболоида, диаметр которого превышает диаметр трубы, отражается от стенок и распространяется в области течения.

Параметры расходимости (24)–(26) зависят от длины волны  $\lambda$ . Последняя определяется характером движения поршня (22), т. е. постоянной времени  $\tau$ , и равна  $\lambda = c\tau$ . Располагая данными о длине

волны и диаметре трубы, можно оценить параметры расходимости. Пусть труба имеет диаметр  $d = 3$  см. В условиях, выбранных для построения рис. 2, из (24), (26) находим  $\lambda = 3.4$  см, длина Рэлея  $L_R = 8.4$  см, угол расходимости  $\theta \approx 67^\circ$ .

Как видно на рис. 3, диаметр  $D$  значительно превышает диаметр трубы  $d$ , начиная с расстояния  $L_R/2 = 4.2$  см. Превышение быстро увеличивается, и часть энергии движения потока переходит к колебательным модам. Таким образом, в трубе течение за волновым передним фронтом не отвечает определению «простая волна» и, скорее, напоминает процесс в акустическом волноводе, хотя и с некоторой оговоркой. В отличие от обычного волновода, в дополнение к модам колебаний в объеме присутствует направленное течение жидкости и пространственно-временное поле пульсаций параметров, вызванных трением.

## 6. ПРОСТАЯ ВОЛНА КОНЕЧНОЙ АПЕРТУРЫ

Явление дифракционной расходимости волны не может быть устранено и как неизбежный фактор ограничивает практическое применение волновых пучков. Однако расходимость можно компенсировать. Аскарьян [7] показал, что радиальный градиент показателя преломления в плазменном канале удерживает пучок лазерного излучения в пределах конечной апертуры.

Дурнин [8] исследовал проблему дифракционной расходимости путем преобразования оптического гауссова пучка бесконечной апертуры в пучок с радиальным профилем поля в виде функции Бессе-

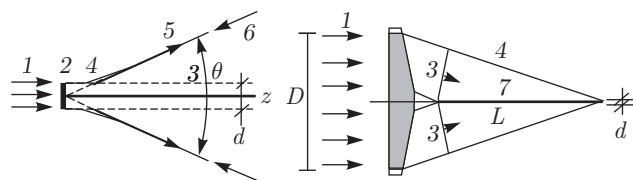


Рис. 4. Дифракционная расходимость (слева) и ее компенсация (справа):  $A$  — аксикон,  $1$  — исходный пучок,  $2$  — фронт волны,  $3$  — фронт расходящейся волны,  $4$  — граница ее перемещения,  $5$  — ее волновой вектор,  $6$  — волновой вектор обращенной волны,  $7$  — бesselев пучок

ля. Такого рода преобразование оптических волновых пучков конечной апертуры было рассмотрено в работе [9]. В качестве преобразователя пучков служила коническая линза — аксикон [10] или киноформ [11]. Создание акустического волнового пучка конечной апертуры было предложено в работе [12]. В случае акустических волновых пучков обычный аксикон следует заменить преобразователем типа внутреннего конуса или акустической версией киноформа.

Опуская подробности обоснования процесса компенсации дифракционной расходимости и громоздкие выкладки, приведенные в работе [13], проиллюстрируем идею метода. Схема формирования бesselева пучка показана на рис. 4 с аксиконом как наиболее наглядным примером преобразователя.

Плоская волна  $2$  гауссова пучка  $1$  диаметром  $d$  в процессе расходимости принимает форму фронта  $3$  сферического сегмента растущего диаметра в пределах угла  $\theta$ . Волновые векторы  $6$  являются обращенными векторами  $5$  волны  $3$ . Они направлены в точку  $2$  на оси симметрии, но в силу дифракции образуют в этой точке плоскую волну, аналогичную волне  $2$ , диаметр которой не может быть меньше величины порядка  $\lambda$ . Схему обращения можно реализовать например, с помощью аксикона, как показано на рис. 4.

Плоская волна диаметром  $D$ , прошедшая аксикон, становится конической с углом наклона к оси  $\gamma = \theta/2$ . Каждый кольцевой элемент аксикона радиусом  $R$  и шириной  $\delta R$  создает на оси элемент волнового пучка, образованного волной, прошедшей расстояние  $\delta z$ :

$$\delta z = \delta R / \gamma. \quad (27)$$

Соответственно, аксикон радиусом  $R = A$  формирует волновой пучок длиной

$$L = \frac{A}{\operatorname{tg} \gamma} \sim \frac{A}{\gamma}. \quad (28)$$

Величину  $L$  такого пучка определяет уже не длина волны  $\lambda$ , а диаметр  $D = 2A$  исходного пучка и угол фокусировки  $\gamma$ . Складывается уникальная ситуация: длина Рэлея оказывается равной фокальному отрезку фокусирующей системы. При этом величина  $L$  может быть весьма значительной. Так, если  $A = 2.5$  см,  $\gamma = 0.5^\circ$ , то  $L = 3$  м. При аналогичных параметрах сферической фокусировки релеевская длина пучка не превысила бы одного миллиметра.

Возникает вопрос о механизме удержания апертуры пучка. В трубе расширение потока препятствуют стенки за счет отражения расходящихся волн, поддерживающих течение. Кольцо  $D - d$  такой волны и его отражение вместе с основной частью волны диаметром  $d$  образуют тройную конфигурацию отражения Маха ([1], § 111). Уравновешивая импульсы волн, эта тройная конфигурация составляет основу механизма удержания пучка.

В отличие от сферической фокусировки, фокусировка коническая означает боковой подвод энергии к оси, что определяет бesselев профиль поля пучка. Плоская осевая волна бesselева пучка образуется в результате дифракционных процессов в точке пересечения волновых векторов на оси симметрии. В итоге на границе осевой волны образуется структура, аналогичная тройной конфигурации Маха, которая и осуществляет удержание.

Коническая фокусировка осуществляет преобразование типа  $\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ . Операция  $\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$  реализуется, когда основанием конуса является окружность. Тогда и профиль пучка имеет вид функции Бесселя первого рода нулевого порядка  $J_0(r)$ . В случае цилиндрической симметрии возможно преобразование  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \psi)]$ ,  $\psi$  — азимутальный угол [14]. Если шаг спирали соответствует целому числу длин волн  $n\lambda$ , профиль пучка следует функции Бесселя порядка  $n$ ,  $J_n(r)$ , и пучок приобретает трубчатую форму.

На рис. 5 приведены радиальные распределения интенсивности в волновых пучках, формируемых несколькими преобразователями. Для сравнения показан профиль интенсивности гауссова пучка  $G_N^2(r)$  при  $N = 5$  в фокусе сферической линзы, а также бesselева пучка  $J_n^2(kr \sin \gamma)$ , для  $n = 0, 5, 10$  и  $\gamma = 5^\circ$ .

Фотографии распределения интенсивности гауссова ( $N = 5$ ) и бesselевых  $n = 0, 1$  и  $5$  пучков представлены на рис. 6. У каждого кадра помещена денситограмма интенсивности по линии, проходящей через центр симметрии. Визуализировать изображение профиля интенсивности акустических по-

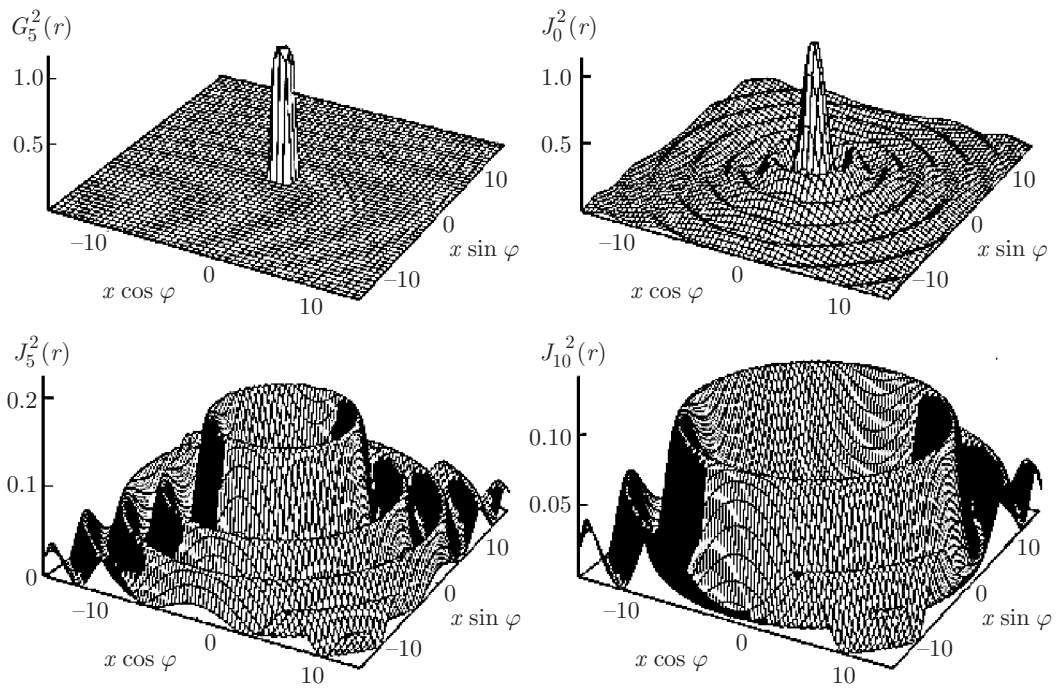


Рис. 5. Радиальное распределение интенсивности: гауссов пучок  $G_5^2(r)$  и бesselев пучок  $J_n^2(r)$  для  $n = 0, 5, 10$

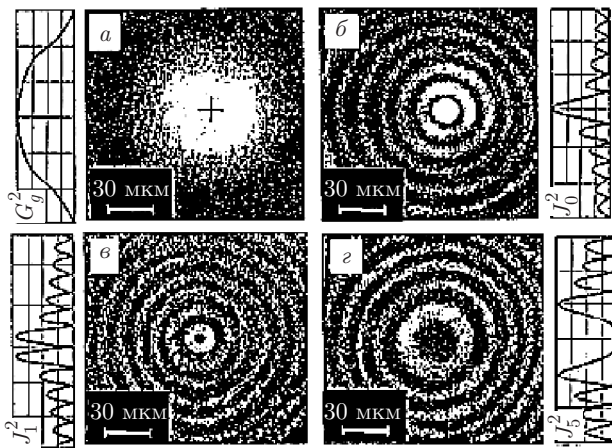


Рис. 6. Фотографии и денситограммы интенсивности радиальных распределений гауссова ( $N = 5$ ) пучка (a) и бesselевых пучков:  $n = 0$  (б), 1 (в), 5 (z)

лей не представляется возможным. Но поскольку волновые уравнения в акустике и в оптике одинаковы, для иллюстрации результатов экспериментов приведены фотографии, полученные с лазерным излучением.

Таким образом, коническая система фокусировки позволяет создавать почти не расходящийся волновой пучок, волны которого являются плоскими. В



Рис. 7. Плазменный канал бesselева пучка  $J_0(r)$  [13]:  $\lambda = 1.06$  мкм,  $D = 4.5$  см,  $N = 5$ ,  $\theta = 1^\circ$ ,  $L = 1.3$  м,  $d = 50$  мкм

этом смысле мы имеем дело с волной Римана, хотя с некоторым отличием: вместо гауссова профиля стал бesselевым. Оценим теперь протяженность бesselева волнового пучка, равную длине фокального отрезка  $L_f$ , и продольное распределение интенсивности. По подсказке рис. 4, мы можем сразу написать

$$L_f = \frac{R}{\text{tg } \gamma}. \tag{29}$$

Для демонстрации свойств этого пучка вновь воспользуемся оптической аналогией, используя лазерный импульс энергией 200 Дж, длительностью 50 нс. На рис. 7 показана интегральная по времени фотография плазменного канала, возникшего в поле бesselева пучка  $J_0(r)$  с параметрами  $\lambda = 1.06$  мкм,  $N = 5$ ,  $D = 4.5$  см,  $\gamma = 1^\circ$ ,  $n = 0$ ,  $L \approx L_f = 1.3$  м,  $d = 50$  мкм. Напомним, что распределение поля в гауссовом пучке можно представить соотношением

$$G_N = \exp[-(r/N)^2]. \tag{30}$$

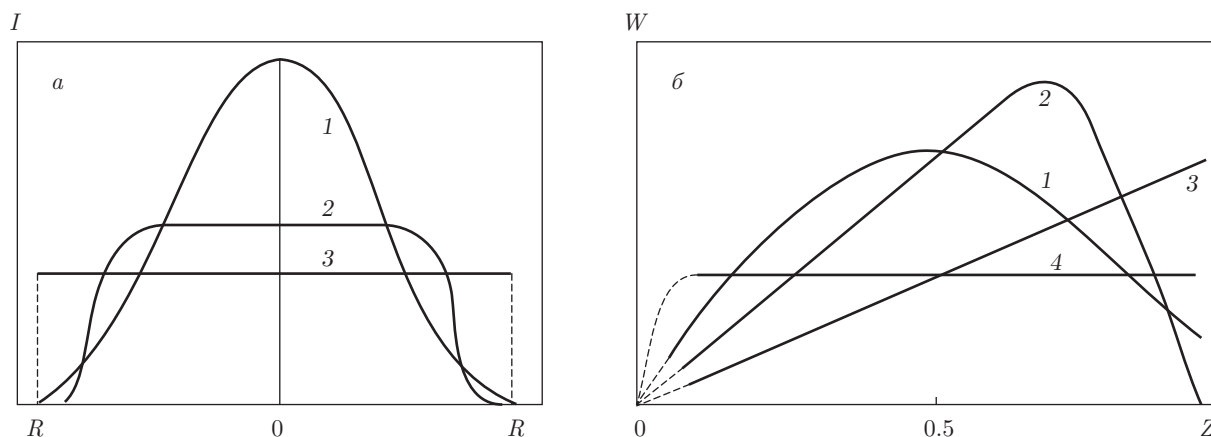


Рис. 8. Профили интенсивности падающего пучка (а) и продольное распределение мощности пучка (б):  $N = 1$  (кривая 1), 5 (2),  $\infty$  (3)

Несколько комментариев к рис. 7. На фотографии видно, что между аксиконом и плазмой имеется некоторый зазор, а сечение плазменного канала меняется с расстоянием до аксикона. Причина в том, что диаметр оптического разряда определяет удельная мощность греющего излучения. Продольное распределение мощности бesselева пучка  $W(z)$  зависит от профиля интенсивности исходного гауссова пучка,  $I_N(R)$ . В свою очередь, интенсивность является функцией параметра  $N$  в распределении (30).

Соотношение между функциями  $I_N(R)$  и  $W(z)$ , и их зависимость от  $N$  показаны на рис. 8 для  $N = 1$  (кривая 1),  $N = 5$  (2),  $N = \infty$  (3). Согласно фотографии, максимум диаметра канала расположен на расстоянии  $L_f/3$  от конца фокального отрезка, что, судя по кривой 2 на графике  $W(z)$  рис. 8, соответствует значению параметра  $N = 5$ . Это значение параметра точно соответствует свойствам лазерного излучения, используемого в эксперименте.

Графики на рис. 8 обнаруживают сильную зависимость распределения мощности  $W(z)$  от профиля  $I_N(R)$ . Но угол наклона  $\gamma$  волнового вектора к оси может служить той же цели. Такой вариант может оказаться даже более эффективным, создавая возможность управлять распределением мощности  $W(z)$ . В частности, гиперболическая поверхность конуса создает продольное распределение бesselева пучка постоянной мощности. Примером служит распределение 4 на рис. 8.

Вернемся теперь к преобразованию  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + n\psi)]$  и покажем, что его применение создает бesselев пучок трубчатого типа. Некоторое осложнение на пути доказательства состоит в том,

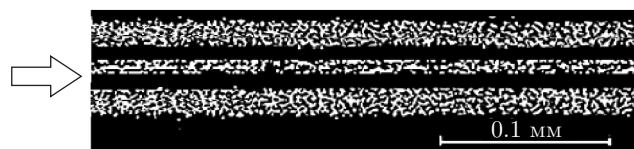


Рис. 9. Часть бesselева пучка  $J_5(r)$  в аргоне:  $\lambda = 1.06$  мкм,  $D = 4.5$  см,  $N = 5$ ,  $\gamma = 2^\circ$ ,  $d = 50$  мкм,  $\tau = 5$  нс

что внешний цилиндр препятствует визуализации внутренней структуры трубки. Поэтому прямое фотографирование, как на рис. 7, становится неэффективным. Задачу удалось решить путем подбора энергии и мощности греющего лазерного излучения, а также момента съемки. На рис. 9 приведена мгновенная фотография ( $\tau = 5$  нс) структуры бesselева пучка в аргоне ( $\lambda = 1.06$  мкм,  $D = 4.5$  см,  $N = 5$ ,  $\gamma = 2^\circ$ ,  $d = 50$  мкм).

Верхняя и нижняя полосы отображают границы цилиндра бesselева плазменного пучка пятого порядка  $J_5(r)$ . Плазменный цилиндр генерирует две цилиндрические ударные волны. Одна из них, внешняя, затухает на расстоянии. Наоборот, волна, движущаяся к центру, усиливается и возбуждает на оси скачок давления и температуры. Этот скачок создает аксиальный плазменный канал, который на фотографии выглядит как центральная полоса.

Важным свойством бesselева пучка  $J_n(r)$  является симметрия, близкая к идеальной. Это качество сдерживает развитие нестабильностей канала и способствует образованию более мощных ударных волн на оси. Такой пучок, как и плазменный канал, может быть создан в удалении от преобразователя и в любой среде, прозрачной для выбранного вида гре-



ющего излучения. Наконец, совершенная цилиндрическая конфигурация канала удобна для удержания плазмы в продольном магнитном поле.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Течение в канале представляет собой движение с ограниченным поперечным сечением, и его можно было бы считать волной Римана конечной апертуры. Однако трение о стенки и дифракционная расходимость означают лишь формальное применение термина «конечная апертура». Реальное течение в канале не соответствует определению «волна Римана».

Действительно, вызванная трением диссипация порождает акустические волны на стенках канала, которые создают пространственно-временное поле пульсаций параметров течения. Пока число Рейнольдса невелико, пульсации незаметны на фоне других возмущений и течение выглядит как ламинарное. При увеличении числа Рейнольдса пульсации становятся заметными и течение называется турбулентным. Дифракционная расходимость волн, восполняющих потери энергии на трение, образуют моды колебаний в канале. Они нарушают струйность течения, что также несовместимо с условиями существования волны Римана.

Для удержания волны Римана в пределах конечной апертуры необходимо избавиться от трения и дифракционной расходимости. Однако оба эти явления не устранимы в принципе. Фактически канал и является одним из способов удержания течения, но ценой изменения уравнений движения и появления указанных выше осложнений. Другой способ удержания основан на принципе компенсации дифракционной расходимости, когда коническая фокусировка трансформирует гауссов волновой пучок в бесселев волновой пучок. Сразу возникает вопрос, расходится ли бесселев пучок. Ответ на этот вопрос дает решение волнового уравнения с соответствующими граничными условиями [13].

Как и в случае функции Гаусса, аргумент функции Бесселя не имеет радиального предела, а дифракционная расходимость присуща и бесселеву пучку. Казалось бы, этот пучок должен расходиться так же, как гауссов. Но цилиндрической симметрии бесселева пучка соответствует гораздо более сложный профиль поля, поскольку боковой подвод энергии создает вокруг волн пучка структуры, подобные конфигурации отражения Маха в канале. Они про-

тиводействуют расходимости пучка. Результат противодействия зависит от диаметра исходного пучка.

Полная компенсация расходимости происходила бы при бесконечном диаметре исходной волны [8] и беспредельной длине бесселева пучка. Как видно на рис. 4, пучок конечного диаметра создает бесселев пучок ограниченной протяженности из-за сокращения длины фокального отрезка преобразователя. При этом полной компенсации расходимости не происходит. Вообще говоря, чем короче фокальный отрезок, тем больше расходимость. В пределе бесконечно малой ширины кольца преобразователя результат будет тот же, что и при сферической фокусировке. Соответственно, протяженность перетяжки каустической поверхности, где фазовый фронт волны можно считать плоским, условно определяется длиной Рэлея.

Таким образом, метаморфозы волны Римана в канале приводят к значительным изменениям волны, поскольку трение сопровождается диссипацией энергии движения, а дифракционная расходимость создает в канале моды колебаний как в волноводе. С другой стороны, анализ рассмотренных «побочных» процессов позволил сформировать волновой бесселев пучок конечной апертуры, а также объяснить возникновение гидродинамической турбулентности и уточнить процесс перехода дефлаграции в детонацию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
2. Л. Н. Пятницкий, *Уравнение Навье–Стокса и турбулентные пульсации*, Граница, Москва (2006).
3. Н. А. Lorentz, *Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluß dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren*, Abh. Theor. Physik. Teubner, Leipzig (1907), s. 43.
4. J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge Univ. Press (1979).
5. П. В. Короленко, *Оптика когерентного излучения*, МГУ, Москва (1997).
6. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
7. Г. А. Аскарьян, УФН 111, 249 (1973).
8. J. Durnin, J. Opt. Soc. of America A 4, 651 (1987).

9. Н. Е. Андреев, Л. Я. Полонский, Л. Н. Пятницкий, ЖЭТФ **100**, 1756 (1991).
10. J. H. McLeod, J. Opt. Soc. of America **44**, 592 (1954); **50**, 166 (1959).
11. L. B. Lesem, P. M. Hirsch, and J. A. Jordan, IBM J. Res. Develop. **13**, 150 (1969).
12. Л. Н. Пятницкий, Письма в ЖТФ **28**, 66 (2002).
13. Л. Н. Пятницкий, *Волновые бесселевы пучки*, Физматлит, Москва (2012).
14. Л. Н. Пятницкий и др., *Устройство для генерации бесселевых пучков электромагнитного излучения в прозрачных средах*, А.С. 1753446. Бюлл. изобретений № 29 (1992), р. 184.