

ВТОРАЯ ГРАНИЦА ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ И УГЛОВЫЕ ДИАГРАММЫ ПРОВОДИМОСТИ ДЛЯ МЕТАЛЛОВ СО СЛОЖНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ФЕРМИ

А. Я. Мальцев*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 27 апреля 2018 г.

Рассмотрены некоторые общие аспекты зависимости магнитопроводимости от магнитного поля в металлах, имеющих сложные поверхности Ферми. Как известно, нетривиальное поведение проводимости в металлах в сильных магнитных полях обычно связано с появлением незамкнутых квазиклассических электронных траекторий на поверхности Ферми в магнитном поле. Структура траекторий электронов сильно зависит от направления магнитного поля и обычно наибольший интерес вызывают открытые траектории, устойчивые по отношению к малым вращениям направления \mathbf{B} . Геометрия соответствующих зон устойчивости на угловой диаграмме в пространстве направлений \mathbf{B} представляет собой очень важную характеристику электронного спектра в металле, связывающую параметры спектра с экспериментальными данными. Здесь мы рассмотрим некоторые весьма общие особенности, присущие угловым диаграммам металлов с поверхностями Ферми самой произвольной формы. В частности, мы покажем, что любая зона устойчивости имеет в действительности вторую границу, ограничивающую большую область с определенным поведением проводимости. Кроме того, мы обсудим общие вопросы сложности угловых диаграмм для проводимости и предложим теоретическую схему разделения угловых диаграмм на «простые» и «сложные» диаграммы. Предложенная схема в действительности будет также тесно связана с поведением холловской проводимости в металле в сильных магнитных полях. В заключение мы также обсудим взаимосвязь рассматриваемых вопросов с общими особенностями (абстрактной) угловой диаграммы, описывающей поведение квазиклассических траекторий электронов на всех уровнях энергии в зоне проводимости.

DOI: 10.1134/S0044451018120131

$$\mathbf{a}_1 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)}, \quad \mathbf{a}_2 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)},$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)},$$

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе будут рассмотрены явления, связанные с некоторыми специальными свойствами квазиклассического движения электронов вдоль поверхности Ферми в нормальных металлах. Согласно стандартному подходу, будем описывать электронные состояния в металле с помощью номера энергетической зоны и величины квазиимпульса \mathbf{p} . Как хорошо известно, каждое из значений \mathbf{p} должно в действительности рассматриваться как бесконечное множество «эквивалентных» значений $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, различающихся векторами обратной решетки L^* . Базис обратной решетки может быть задан векторами

где $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ представляют базис прямой решетки металла. Энергия электронного состояния в зоне s задается 3-периодической функцией $\epsilon_s(\mathbf{p})$ в \mathbf{p} -пространстве, которая также может рассматриваться как функция на трехмерном торе \mathbb{T}^3 , задающемся факторизацией \mathbf{p} -пространства по векторам обратной решетки:

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*.$$

Хорошо известно также, что электронные состояния в нормальном металле являются занятыми, если их энергия меньше энергии Ферми, $\epsilon_s(\mathbf{p}) < \epsilon_F$, и являются свободными, если $\epsilon_s(\mathbf{p}) > \epsilon_F$. Таким образом, в любом нормальном металле мы имеем конечное число полностью заполненных энерге-

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

тических зон, конечное число частично заполненных энергетических зон (зон проводимости) и бесконечное количество пустых энергетических зон. Поверхность Ферми S_F нормального металла определяется как объединение поверхностей $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ в \mathbf{p} -пространстве, где индекс s нумерует все зоны проводимости. Будем предполагать, что поверхность Ферми представляет собой гладкую 3-периодическую несамопересекающуюся поверхность в \mathbf{p} -пространстве, которая может содержать различные компоненты связности.

Более точно, коллективное электронное состояние в металле может быть описано в кинетическом приближении одночастичной функцией распределения $f(\mathbf{p})$, которая может отличаться от нуля или единицы только в узкой области вблизи поверхности Ферми. Таким образом, все кинетические свойства нормального металла определяются в действительности электронными состояниями вблизи поверхности S_F .

Квазиклассическая эволюция электронных состояний при наличии внешних электрических и магнитных полей может быть описана с помощью адиабатической системы

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] + e\mathbf{E},$$

которая может рассматриваться как динамическая система на торе \mathbb{T}^3 .

Функция $f(\mathbf{p})$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$f_t + \frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]^l \frac{\partial f}{\partial p^l} + e \sum_{l=1}^3 E^l \frac{\partial f}{\partial p^l} = I[f](\mathbf{p}, t),$$

где $I[f]$ — интеграл столкновений.

Будем рассматривать электрическое поле \mathbf{E} как бесконечно малое. В то же время предполагается, что величина B магнитного поля достаточно велика. Более точно, будем предполагать выполнение условия $\omega_B \tau \gg 1$, где τ играет роль времени свободного пробега электрона и $\omega_B = eB/m^*c$ имеет значение электронной циклотронной частоты в кристалле. Как следствие указанного условия, рассматриваемые явления будут в действительности тесно связаны с геометрией траекторий системы

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]. \quad (1.1)$$

Система (1.1) сохраняет энергию электронного состояния, а также проекцию квазиимпульса \mathbf{p} на

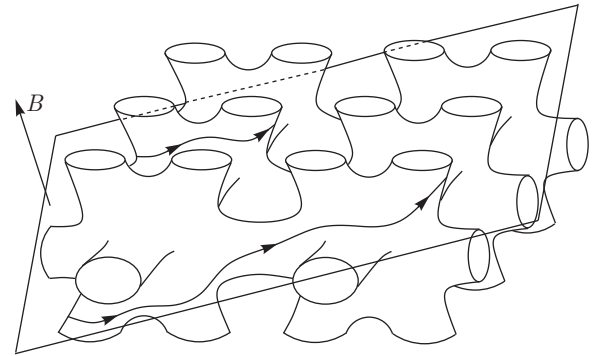


Рис. 1. Квазиклассические траектории на поверхности постоянной энергии сложной формы

направление \mathbf{B} . Таким образом, траектории системы (1.1) в \mathbf{p} -пространстве могут быть получены как пересечения поверхностей постоянной энергии $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \text{const}$ с плоскостями, ортогональными \mathbf{B} . Надо сказать, тем не менее, что, несмотря на такую аналитическую интегрируемость системы (1.1), геометрия ее траекторий в \mathbf{p} -пространстве на самом деле может быть довольно сложной для энергетических поверхностей, имеющих сложную форму (рис. 1). Легко видеть также, что в кинетических явлениях в нормальных металлах существенную роль могут играть только траектории, лежащие на поверхности Ферми.

Важная роль геометрии траекторий системы (1.1) для магнитотранспортных явлений в металлах была впервые открыта школой И. М. Лифшица (И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, В. Г. Песчанский) в 1950-х гг. В частности, принципиальное различие между замкнутыми и открытыми траекториями системы (1.1), которое проявляется в поведении магнитопроводимости в сильных магнитных полях, было впервые подробно описано в работах [1–3]. Так, в работе [1] впервые было указано, что замкнутые и открытые периодические траектории системы (1.1) дают совершенно различные вклады в магнитопроводимость в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , в пределе $\omega_B \tau \gg 1$. Говоря более точно, вклад замкнутых траекторий в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , является почти изотропным в пределе $\omega_B \tau \gg 1$ и быстро убывает при $\omega_B \tau \rightarrow \infty$. Общий вид тензора проводимости $\sigma^{kl}(B)$ при наличии только замкнутых траекторий на уровне Ферми может быть выражен следующей асимптотической формулой:

$$\sigma^{kl} \approx \frac{ne^2\tau}{m^*} \times \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty,$

где $\hat{z} = \mathbf{V}/B$, которая аналогична той же формуле для газа свободных электронов.

В то же время вклад открытых периодических траекторий в проводимость сильно анизотропен в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и убывает только в одном направлении (совпадающим со средним направлением открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве) в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$. Общая формула для асимптотического поведения тензора проводимости в этом случае может быть записана в виде

$$\sigma^{kl} \approx \frac{ne^2\tau}{m^*} \times \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty,$

где направление оси x совпадает со средним направлением открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве (здесь и всюду ниже «*» означает некоторую константу порядка 1).

Открытые траектории системы (1.1), рассматривавшиеся в работах [2, 3], имеют более общий вид и не являются периодическими в \mathbf{p} -пространстве. Тем не менее, все (квазипериодические) траектории, рассматривавшиеся в работах [2, 3], имеют среднее направление в \mathbf{p} -пространстве и также дают анизотропный вклад в проводимость в сильных магнитных полях. Вообще говоря, асимптотическое поведение тензора проводимости не может быть описано здесь простой формулой (1.3), однако оно также показывает исчезновение проводимости лишь вдоль одного направления в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и конечную проводимость в ортогональном направлении в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$. Многие аспекты, связанные с геометрией траекторий системы (1.1), были описаны в работах [4–8]. Конечно, приведенные здесь ссылки не дают полного списка работ, которые можно было бы упомянуть в связи с этой довольно широкой областью.

Общая проблема классификации открытых траекторий системы (1.1) была поставлена Новиковым [9] и интенсивно изучалась в его топологической

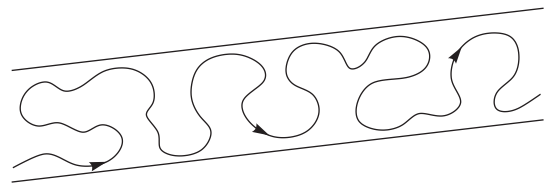


Рис. 2. Вид устойчивых открытых траекторий системы (1.1) в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} в \mathbf{p} -пространстве

школе (С. П. Новиков, А. В. Зорич, С. П. Царев, И. А. Дынников). Благодаря довольно глубоким математическим результатам (см. [10–14]), полученным при исследовании этой проблемы с топологической точки зрения, проблема описания возможных типов открытых траекторий системы (1.1) может считаться в настоящее время решенной, и мы можем в действительности использовать полную классификацию траекторий системы (1.1) в нашем исследовании транспортных явлений в нормальных металлах.

Наиболее важную роль в классификации открытых траекторий системы (1.1) играет в действительности описание устойчивых открытых траекторий (1.1), т.е. открытых траекторий, которые существенно не меняют своей глобальной геометрии при малых вращениях \mathbf{V} или вариации уровня энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_0$. Как следует из результатов работ [10, 11, 13], устойчивые открытые траектории системы (1.1) обладают следующими замечательными свойствами:

- 1) всякая устойчивая открытая траектория системы (1.1) в \mathbf{p} -пространстве лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и проходит ее от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 2);
- 2) среднее направление всех устойчивых открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве задается пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , с некоторой локально устойчивой целочисленной плоскостью Γ в \mathbf{p} -пространстве.

Заметим здесь также, что свойство (1) в действительности было впервые сформулировано Новиковым в работе [9] в форме гипотезы и позднее было доказано в работах [10, 11, 13] для открытых траекторий, обладающих свойствами устойчивости в указанном выше смысле.

Замечательные свойства устойчивых открытых траекторий системы (1.1) можно наблюдать при непосредственных измерениях магнитопроводимости нормальных металлов в сильных магнитных полях. Так, в силу геометрических свойств устойчивых открытых траекторий, их вклад в проводимость в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , является сильно ани-

зотропным в пределе $\omega_{BT} \gg 1$, так что направление наименьшей проводимости (в \mathbf{x} -пространстве) совпадает со средним направлением траекторий в \mathbf{p} -пространстве. Благодаря устойчивости таких траекторий относительно малых вращений \mathbf{B} , эта же ситуация имеет место и для всех близких направлений \mathbf{B} , что позволяет наблюдать также целочисленную плоскость Γ , определяемую свойством (2), в случае наличия устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми. Отметим здесь, что мы называем плоскость в \mathbf{p} -пространстве целочисленной, если она порождается двумя векторами обратной решетки $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\lambda \mathbf{q}_1 + \mu \mathbf{q}_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}, \\ \mathbf{q}_1 &= n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{q}_2 &= m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3, \\ &(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

В \mathbf{x} -пространстве та же самая плоскость может быть представлена несократимой тройкой целых чисел (M_1, M_2, M_3) с помощью уравнения

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{l}_1) + M_2(\mathbf{x}, \mathbf{l}_2) + M_3(\mathbf{x}, \mathbf{l}_3) = 0,$$

где векторы $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ представляют базис прямой решетки.

Числа (M_1, M_2, M_3) были введены в работе [15] как топологические характеристики электронных спектров в металлах, которые можно наблюдать в явлениях переноса в сильных магнитных полях. Согласно [16, 17], эти числа можно называть топологическими квантовыми числами, наблюдаемыми в проводимости нормальных металлов. В соответствии с представленной выше картиной, мы можем в целом выделить специальные зоны устойчивости в пространстве направлений \mathbf{B} (на единичной сфере \mathbb{S}^2), соответствующие наличию устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми, которые можно наблюдать при исследовании магнитопроводимости в сильных магнитных полях.

По определению мы будем называть зоной устойчивости $\Omega_\alpha \in \mathbb{S}^2$ полную область в пространстве направлений \mathbf{B} , где у нас есть устойчивые открытые траектории системы (1.1) на поверхности Ферми, соответствующие одним и тем же топологическим квантовым числам $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$. Зоны устойчивости, определенные таким образом, могут также называться точными математическими зонами устойчивости и представляют некоторые области с кусочно-гладкими границами на единичной сфере (рис. 3). Нетрудно видеть, что любая зона устойчивости инвариантна относительно преобразования

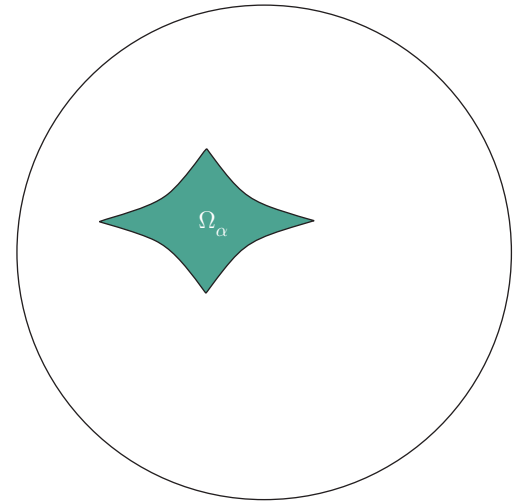


Рис. 3. Точная математическая зона устойчивости на единичной сфере \mathbb{S}^2

$\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ и в большинстве случаев состоит из двух противоположных областей на единичной сфере.

Отметим здесь, что геометрия зон устойчивости и значения $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$ представляют собой довольно нетривиальные характеристики электронных спектров в металлах, которые не определяются только топологией поверхности Ферми и зависят также от ее геометрических параметров довольно нетривиальным образом. Отметим также, что полные наборы точных математических зон устойчивости Ω_α и топологических чисел $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$ могут также быть довольно нетривиальными для металла со сложной поверхностью Ферми. Мы хотели бы здесь привести ссылку на работу [18], содержащую описание многих математических результатов, связанных с поведением траекторий системы (1.1) с произвольным дисперсионным соотношением и геометрией соответствующих зон устойчивости в пространстве направлений \mathbf{B} . Мы хотели бы также особо упомянуть здесь работу [19], в которой представлен довольно удобный метод исследования геометрии зон устойчивости для конкретных дисперсионных соотношений, а также содержатся приложения этого метода к важным аналитическим примерам. Отметим также, что большое количество физических следствий, связанных с результатами математического исследования системы (1.1), было представлено в работах [16, 17, 20, 21].

Числа $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$ описывают «геометрические свойства» тензора $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ для $\mathbf{B}/B \in \Omega_\alpha$ и представляют хорошо наблюдаемые экспериментальные величины в пределе $\omega_{BT} \gg 1$. В то же вре-

мя аналитическая зависимость тензора $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ как от величины, так и от направления \mathbf{V} для $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$ может быть в действительности достаточно нетривиальной даже при выполнении условия $\omega_{BT} \gg 1$ [22]. Причиной такого поведения проводимости является в действительности появление периодических открытых траекторий системы (1.1) для специальных направлений $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$, которые вызывают иррегулярность в предельных значениях $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ при $B \rightarrow \infty$. В результате, угловая зависимость тензора $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ на самом деле довольно нерегулярна при $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$, даже для достаточно больших значений параметра ω_{BT} . Заметим, что появление периодических открытых траекторий системы (1.1) для иррациональных направлений \mathbf{V} представляет в общем случае нетривиальный факт, тесно связанный с возникновением специальных целочисленных плоскостей Γ_α для каждой из зон устойчивости. Так, периодические открытые траектории системы (1.1) возникают на поверхности Ферми при $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$ всякий раз, когда пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и плоскости Γ_α имеет рациональное направление. Нетрудно видеть, что соответствующие направления \mathbf{V} образуют в общем случае всюду плотное множество в зоне Ω_α .

Другой важной особенностью периодических открытых траекторий системы (1.1), вытекающей из ее топологической структуры для $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$, является то, что они в действительности существуют и на некоторых специальных множествах вне зоны устойчивости вблизи ее границы (отметим здесь также, что это явление может появляться и для некоторых специальных примеров простых поверхностей Ферми, см., например, [23]). Соответствующие направления \mathbf{V} не включаются в зоны устойчивости, поскольку периодические траектории уже не являются устойчивыми вне зон Ω_α . В общем случае мы можем иметь либо периодические открытые траектории, либо очень длинные замкнутые траектории на поверхности Ферми для направлений \mathbf{V} , близких к границе зоны устойчивости Ω_α . В результате, точная граница зоны устойчивости Ω_α , как правило, не наблюдается в прямых измерениях проводимости даже при условии $\omega_{BT} \gg 1$. Как указывалось в работе [22], мы должны в действительности ввести на угловой диаграмме расширенные экспериментально наблюдаемые зоны устойчивости $\hat{\Omega}_\alpha$, которые возникают как наблюдаемые зоны устойчивости при прямых измерениях проводимости (рис. 4).

В то же время точная граница зоны устойчивости представляет собой важную характеристику электронного спектра в металле, тесно связанную

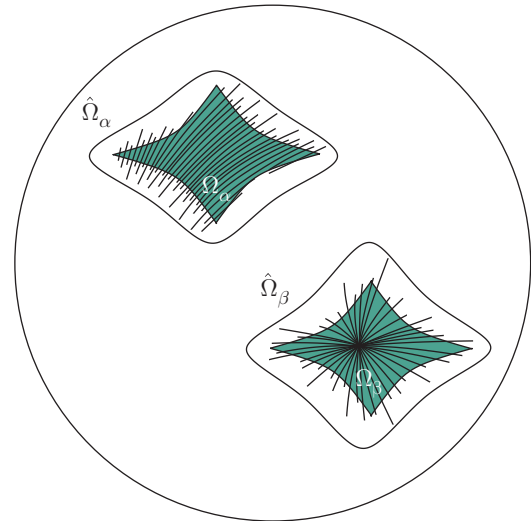


Рис. 4. Математические зоны устойчивости, специальные направления \mathbf{V} , соответствующие появлению периодических открытых траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми, и «экспериментально наблюдаемые» зоны устойчивости на угловой диаграмме

с геометрическими параметрами поверхности Ферми. Как было отмечено в работе [24], граница точной математической зоны устойчивости Ω_α может быть в действительности определена при изучении осцилляционных явлений в металлах, таких как явление циклотронного резонанса или разных типов квантовых осцилляций. Как показано в работе [24], картина (классических или квантовых) осцилляций претерпевает резкие изменения на границе точной математической зоны устойчивости, которая может быть четко зарегистрирована по зависимости осцилляций от значения B . Более точно, изменение зависимости осциллирующих значений от величины $1/B$ определяется резким исчезновением одного из основных осциллирующих членов (одной осциллирующей гармоники) после пересечения границы Ω_α на угловой диаграмме.

В настоящей работе мы рассмотрим некоторые общие аспекты угловой диаграммы проводимости и структуру зон устойчивости на S^2 для металлов, имеющих (произвольные) сложные поверхности Ферми. В частности, мы покажем здесь, что зоны устойчивости обладают в действительности «вторыми границами» на угловой диаграмме в пространстве направлений \mathbf{V} , которые также могут быть обнаружены в таких же исследованиях осцилляционных явлений в сильных магнитных полях. Область Σ_α , ограниченная второй границей зоны устойчивости Ω_α , всегда содержит зону Ω_α и мо-

жет иметь разные размеры в зависимости от геометрии поверхности Ферми. Таким образом, мы можем иметь как ситуации, когда вторая граница близка к (первой) границе зоны устойчивости, так и когда она расположена довольно далеко от границы Ω_α . В частности, область Σ_α может содержать либо всю экспериментально наблюдаемую зону устойчивости $\hat{\Omega}_\alpha$ в данном экспериментальном исследовании проводимости, либо только часть зоны $\hat{\Omega}_\alpha$.

Одним из существенных свойств области между первой и второй границами зоны устойчивости является то, что она не может содержать направлений \mathbf{V} , соответствующих наличию любых устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми (в то же время здесь могут возникать неустойчивые периодические траектории для специальных направлений \mathbf{V} , упомянутых выше). В настоящей работе рассматриваются различные явления, возникающие в области $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ при различных направлениях магнитного поля. Как будет показано, картина (классических и квантовых) осцилляций в этой области имеет довольно специфические особенности, которые в действительности могут быть использованы для исследования геометрии поверхности Ферми. В то же время, прямые измерения проводимости (при $\Omega = 0$) также проявляют здесь особенности, которые будут обсуждаться в следующих разделах.

Мы также рассмотрим здесь наиболее общие особенности расположения зон устойчивости и соответствующих им дополнительных областей $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ на угловой диаграмме.

Другим аспектом, который мы затронем в настоящей работе, является распределение зон устойчивости на угловой диаграмме общего вида. Мы покажем, что естественно разделить в общем случае все угловые диаграммы на «более простые» (типа А) и «более сложные» (типа В) диаграммы. Оба типа (А и В) представляют собой абсолютно общие классы, которые охватывают весь набор угловых диаграмм и одинаково возможны с теоретической точки зрения. В то же время кажется, что для большинства реальных материалов мы должны ожидать появления диаграмм типа А с гораздо большей вероятностью, чем диаграмм типа В. В большинстве случаев угловые диаграммы типа А характеризуются наличием лишь конечного числа зон устойчивости на S^2 , в то время как угловые диаграммы типа В в общем случае содержат бесконечное число различных зон устойчивости на единичной сфере. Еще одна важная особенность угловых диаграмм типа В состоит в том, что здесь следует ожидать особых направлений \mathbf{V} , соответствующих появлению более сложных

(хаотических) открытых траекторий на поверхности Ферми, что приводит к появлению весьма специальных асимптотических режимов поведения проводимости в сильных магнитных полях. Как следствие, появление угловой диаграммы типа В дает гораздо большее разнообразие различных типов поведения проводимости, наблюдаемых экспериментально. Как мы также покажем, угловые диаграммы разных типов удобно различать путем изучения холловской проводимости вне зон устойчивости при $\omega_B \tau \rightarrow \infty$.

В разд. 2, 3 мы подробно рассмотрим структуру системы (1.1) для $\mathbf{V}/B \in \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ и рассмотрим явления, связанные с особенностями ее траекторий в этой области. Наши рассуждения будут основаны на результатах, полученных в недавних топологических исследованиях задачи Новикова [10, 11, 13, 14, 18] и описывающих топологию «носителей открытых траекторий» при наличии устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми. Как мы увидим, топологическое описание структуры системы (1.1) в зонах устойчивости дает на самом деле также хорошую возможность для описания свойств ее траекторий в области $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$. Как уже говорилось, основные рассуждения будут связаны с осцилляционными явлениями в этой области, имеющими классическую или квантовую природу.

В разд. 4 обсуждаются различные типы угловых диаграмм и их связь с типами границ зон устойчивости и поведением холловской проводимости вне зон устойчивости.

В разд. 5 обсуждается связь между угловыми диаграммами проводимости металлов и угловыми диаграммами для полного дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$, описывающими поведение траекторий системы (1.1) на всех уровнях энергии ϵ . Заметим здесь, что хотя введение угловой диаграммы для полного дисперсионного соотношения имеет несколько абстрактный характер в теории нормальных металлов, такое сравнение, как нам кажется, весьма полезно с методологической точки зрения.

2. СТРУКТУРА ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ И ГЕОМЕТРИЯ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ (1.1) ДЛЯ $\mathbf{V}/B \in \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$

Начнем с описания структуры поверхности Ферми для $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$, которое также даст описание ее структуры в области $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$. Как следует из довольно глубоких топологических теорем, доказанных в работах [10, 11, 13, 14, 18], при наличии устойчивых открытых траекторий на уровне $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ струк-

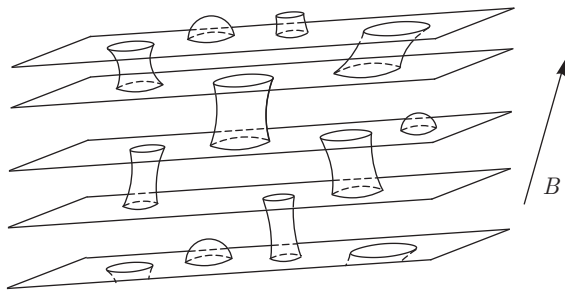


Рис. 5. Структура связной компоненты поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории системы (1.1)

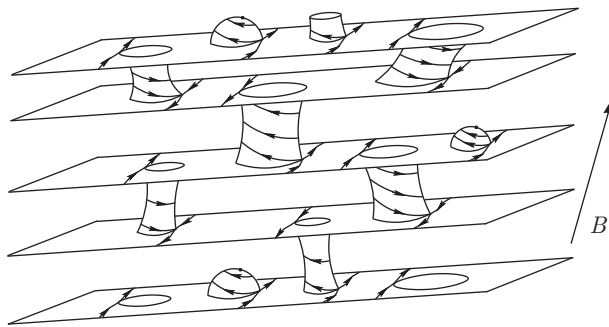


Рис. 6. Открытые и замкнутые траектории системы (1.1) на поверхности Ферми при $\mathbf{B}/B \in \Omega_\alpha$

тура соответствующей связной компоненты поверхности Ферми может быть описана следующим образом.

Представим себе набор параллельных целочисленных плоскостей в \mathbf{p} -пространстве, соединенных цилиндрами конечных высот (рис. 5).

Нетрудно видеть, что если мы выберем направление \mathbf{B} близким к направлениям осей цилиндров, то мы получим цилиндр замкнутых траекторий на каждом из цилиндров, показанных на рис. 5, ограниченный сингулярными замкнутыми траекториями на поверхности Ферми (рис. 6). Отметим, что мы здесь допускаем также появление цилиндров замкнутых траекторий, имеющих точку в качестве основания. Цилиндры последнего типа можно назвать тривиальными с топологической точки зрения. Теоретически можно также допустить составную структуру цилиндров, соединяющих плоскости. Это, однако, не влияет на дальнейшие выводы и крайне маловероятно для реальных поверхностей Ферми, так что мы не будем рассматривать здесь это усложнение.

В этом случае мы можем видеть, что целочисленные плоскости на рис. 6 в действительности отделе-

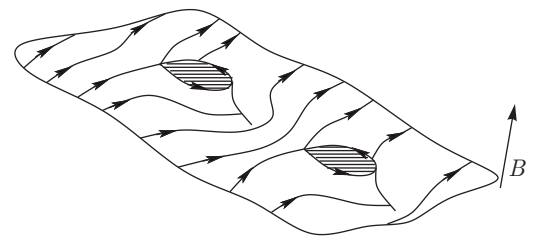


Рис. 7. Носитель устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми для $\mathbf{B}/B \in \Omega_\alpha$

ны друг от друга цилиндрами замкнутых траекторий и представляют собой «носители открытых траекторий» системы (1.1) на поверхности Ферми. Таким образом, каждый носитель открытых траекторий представляет собой периодически деформированную целочисленную плоскость (с отверстиями) в \mathbf{p} -пространстве, локально устойчивую при малых вращениях \mathbf{B} (рис. 7). Легко видеть, что каждая открытая траектория на рис. 6 имеет среднее направление в \mathbf{p} -пространстве, заданное пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{B} , и целочисленной плоскости, соответствующей носителям открытых траекторий.

Отметим здесь, что рис. 5, 6 представляют собой лишь топологическую структуру поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории, и могут быть визуальным образом сложнее. Представление поверхности Ферми, показанное на рис. 5, 6, не определено однозначно, так, мы получим разные представления (одной и той же поверхности Ферми) в виде рис. 5, 6 для направлений \mathbf{B} , лежащих в двух разных зонах устойчивости $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$. В то же время существование структуры, показанной на рис. 5, 6, на любой поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории системы (1.1), представляет собой строгую топологическую теорему, верную в самом общем случае (см. [10, 11, 13, 14, 18]).

Легко видеть, что целочисленные плоскости на рис. 6 можно в действительности разделить на два типа в соответствии с направлением движения электрона (назад или вперед) на соответствующих открытых траекториях. Таким же образом все цилиндры замкнутых траекторий можно разделить на два различных типа согласно типу замкнутых траекторий (электронного или дырочного типа) на них. Мы будем предполагать, что в представлении поверхности Ферми у нас имеются лишь две неэквивалентные целочисленные плоскости (имеющие разные типы) согласно рис. 5, 6. Как можно показать, поверхности Ферми, имеющие большее число неэквивалент-

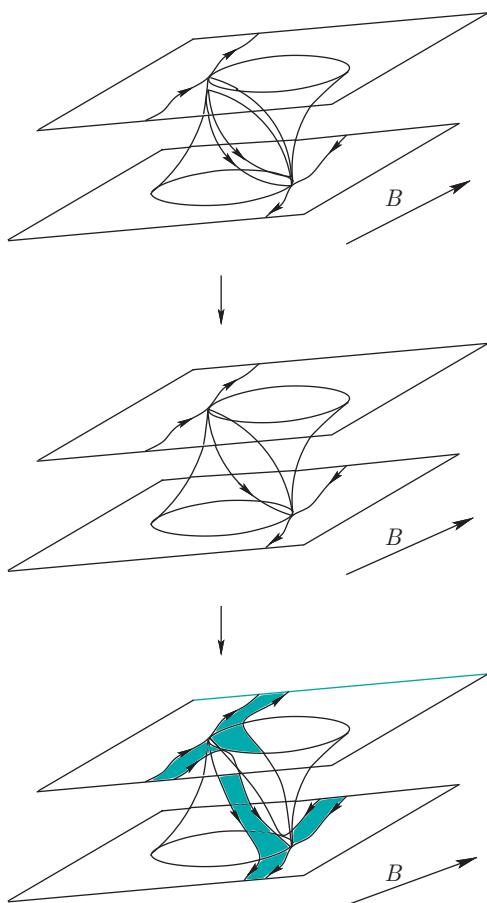


Рис. 8. Исчезновение цилиндра замкнутых траекторий на поверхности Ферми после пересечения границы зоны устойчивости на угловой диаграмме

ных целочисленных плоскостей в \mathbf{p} -пространстве в их представлении выше, должны иметь на самом деле очень высокий род, поэтому эта ситуация должна быть на самом деле довольно редкой для реальных металлов. В то же время мы будем предполагать, что в представлении поверхности Ферми мы имеем по крайней мере два или более неэквивалентных цилиндра замкнутых траекторий в соответствии с рис. 5, 6 (где число топологически нетривиальных цилиндров в действительности равно $g - 1$).

Точная граница зоны устойчивости Ω_α определяется исчезновением одного из цилиндров из множества неэквивалентных нетривиальных цилиндров замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Так, для направлений \mathbf{B} , близких к границе зоны устойчивости, высота соответствующего цилиндра замкнутых траекторий становится очень малой и обращается в нуль на границе Ω_α . После пересечения границы Ω_α соответствующий цилиндр больше не

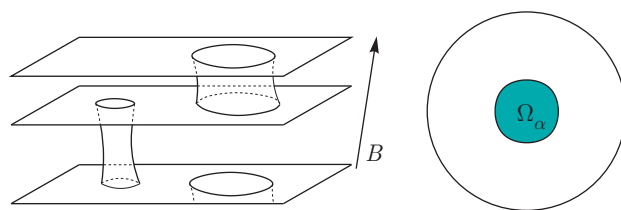


Рис. 9. Пример поверхности Ферми, имеющей зону устойчивости Ω_α с простой границей

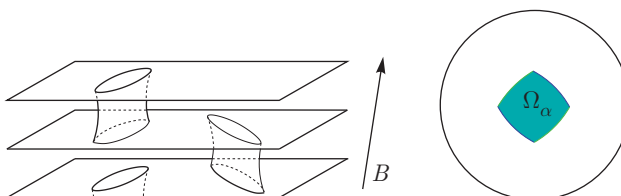


Рис. 10. Пример поверхности Ферми, имеющей зону устойчивости Ω_α с составной границей

разделяет пару целочисленных плоскостей, поэтому траектории теперь могут перескакивать с одной плоскости на другую (рис. 8).

Заметим здесь, что в общем случае мы можем иметь как ситуацию, когда вся граница зоны устойчивости определяется исчезновением одного и того же цилиндра замкнутых траекторий, так и ситуацию, когда разные части границы Ω_α соответствуют исчезновению различных цилиндров из множества. Скажем здесь, что в первом случае зона устойчивости имеет простую границу (рис. 9), а во втором случае зона устойчивости имеет составную границу (рис. 10). Наши рассуждения будут применимы к обоим указанным случаям.

Как мы уже сказали, после исчезновения одного из цилиндров замкнутых траекторий на рис. 6 целочисленные плоскости больше не отделены друг от друга и траектории системы (1.1) могут теперь перепрыгивать с одной плоскости на другую. В то же время геометрию траекторий (1.1) все еще можно легко описать вблизи границы зоны Ω_α . Действительно, в непосредственной близости от границы Ω_α поверхность Ферми, показанная на рис. 6, по-прежнему разделена на пары связанных целочисленных плоскостей, отделенных друг от друга оставшимися цилиндрами замкнутых траекторий системы (1.1). Эта ситуация будет иметь место до тех пор, пока второй цилиндр замкнутых траекторий на поверхности Ферми не исчезнет, и не станут возможны скачки траекторий системы (1.1) между связанными парами прежних носителей открытых траекторий. Назовем соответствующую кривую в простран-

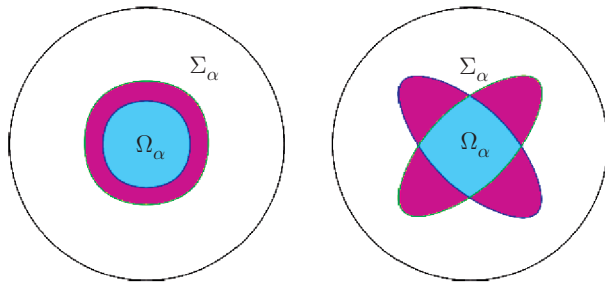


Рис. 11. Зоны устойчивости, имеющие простую и составную вторые границы на угловой диаграмме

стве направлений \mathbf{B} второй границей зоны устойчивости Ω_α и обозначим через Σ_α область, ограниченную этой кривой на угловой диаграмме. Заметим здесь, что вторая граница зоны устойчивости Ω_α также может быть простой или составной (рис. 11) в зависимости от геометрии поверхности Ферми. В общем случае форма второй границы зоны устойчивости не связана тесно с формой ее первой границы, как видно из примеров, приведенных на рис. 12.

По определению, область $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ определяется как область, примыкающая к Ω_α , в которой поверхность Ферми может быть представлена как совокупность пар связанных целочисленных плоскостей с топологическими числами $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$, разделенных цилиндрами замкнутых траекторий системы (1.1). Как можно видеть, область $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ может быть связной (рис. 12а,в,д,жс) или может состоять из нескольких компонент связности (рис. 12б,г,е). Границу каждой связной компоненты области $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ можно разделить на две части, т.е. внутреннюю границу (смежную с Ω_α) и внешнюю границу. Здесь важно то, что для каждой связной компоненты $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ ее внутренняя и внешняя границы соответствуют исчезновению цилиндров замкнутых траекторий противоположных типов (электронного или дырочного типа) (рис. 12). Видно также, что мы можем иметь обе ситуации, когда связанные пары бывших носителей открытых траекторий определены однозначно для всей области $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ (рис. 12а,в,д,жс), или представлены разными способами в разных частях $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ (рис. 12б,г,е). Еще одна особенность, которую можно отметить, состоит в том, что даже для заданного набора связанных пар прежних носителей открытых траекторий мы можем иметь части $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$, где они соединены через один бывший цилиндр замкнутых траекторий, или где они соединены через два (или более) бывших цилиндра замкнутых траекторий (области I и II на рис. 12д,е,жс). Соответствующие области также

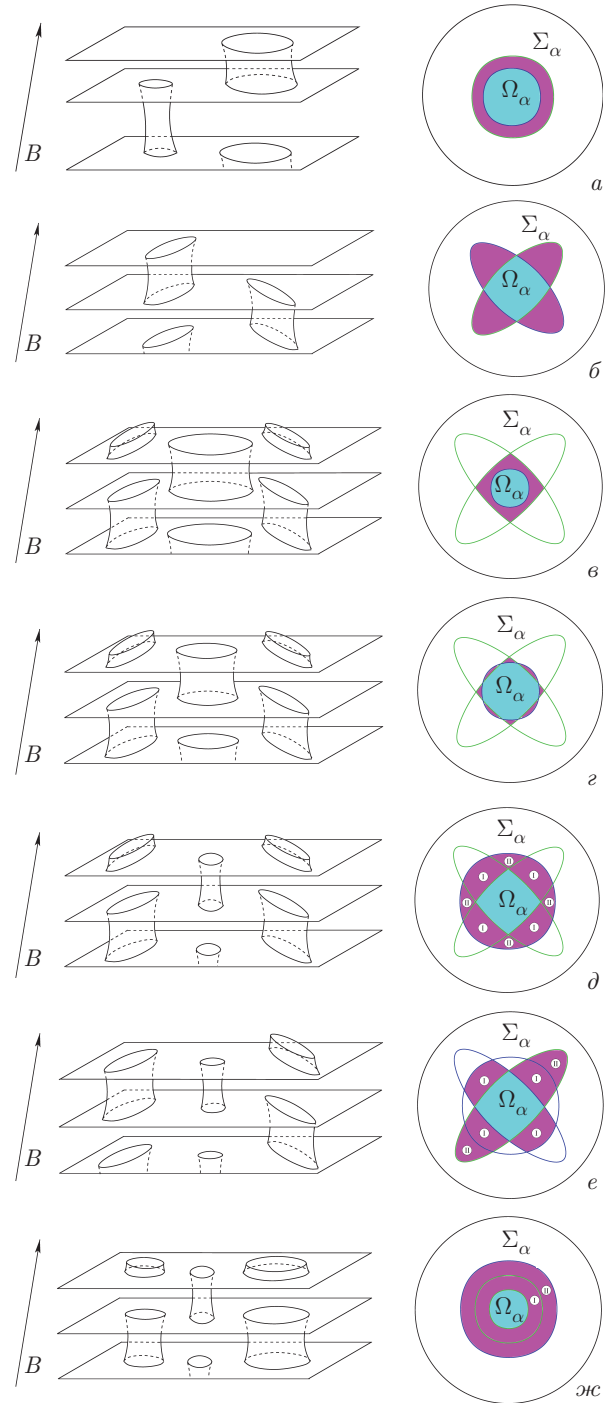


Рис. 12. Примеры поверхностей Ферми, имеющих разные типы зон Ω_α (центральные части) и Σ_α (все окрашенные области)

разделены линиями, где наблюдается исчезновение или появление цилиндра (коротких) замкнутых траекторий, что также можно заметить при изучении осцилляционных явлений в соответствующем диапазоне частот.

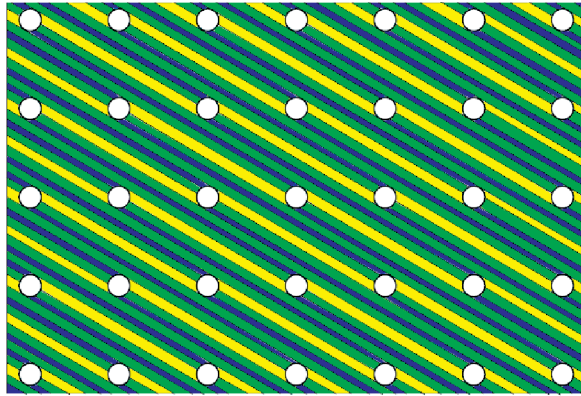


Рис. 13. Схематическое деление пары бывших носителей открытых траекторий на слои длинных замкнутых траекторий, разделенных сингулярными замкнутыми траекториями

Область

$$\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$$

можно назвать «производной» зоны устойчивости Ω_α , поскольку поверхность Ферми сохраняет здесь часть своего специального представления в зоне Ω_α , что по-прежнему дает эффективное описание траекторий системы (1.1) в этой области.

Для описания траекторий системы (1.1) на связанных парах бывших носителей открытых траекторий мы должны сначала отметить, что траектории, имеющие скачки на фиксированном цилиндре, соединяющем пару целочисленных плоскостей (рис. 8), образуют узкие полосы, ограниченные двумя сингулярными траекториями с близкими значениями p_z . Величина p_z постоянна на каждой траектории системы (1.1), поэтому все эти полосы представлены прямыми узкими полосками после проекции на плоскость, содержащую вектор \mathbf{V}/V . Используя проекцию на плоскость, содержащую вектор \mathbf{V}/V , мы можем отметить соответствующие цилиндры кружками (или отрезками) соответствующего размера (Δp_z), которые образуют периодическую структуру в плоскости (рис. 13). Каждая траектория системы (1.1) будет представлена теперь прямой $p_z = \text{const}$, которая может иметь конечные точки на кругах, определенных выше. Особые траектории системы (1.1) представлены линиями, касательными к окружностям, и разделяют траектории существенно различной геометрии на поверхности Ферми. Нетрудно видеть, что для направлений \mathbf{V} общего положения, таких что пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и плоскости Γ_α имеет иррациональное направление в \mathbf{p} -пространстве, каждая траектория системы (1.1) будет в действительности

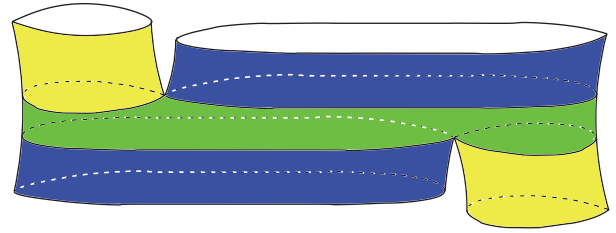


Рис. 14. Схематическое представление слоев длинных замкнутых траекторий на связной паре бывших носителей открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве

представлена линией конечного размера, ограниченной двумя кругами на обоих концах. В результате пара бывших носителей открытых траекторий будет разделена на цилиндры замкнутых траекторий системы (1.1), которые будут иметь довольно большие размеры, если направление \mathbf{V}/V является близким к границе зоны Ω_α .

Рассмотрим здесь простейшую ситуацию, когда скачки траекторий между двумя бывшими носителями открытых траекторий происходят только на одном цилиндре из множества бывших цилиндров замкнутых траекторий, соединяющих эти носители. Рисунок 13 представляет схематическое деление связанной пары бывших носителей открытых траекторий на слои длинных замкнутых траекторий после пересечения границы зоны Ω_α . Каждая цветная полоса на рис. 13 представляет проекции траекторий примерно одного и того же вида на плоскость (Π) , содержащую вектор \mathbf{V}/V . Как легко видеть, мы будем иметь ровно три неэквивалентных слоя существенно различных длинных замкнутых траекторий, разделенных сингулярными замкнутыми траекториями, на каждой связной паре бывших носителей открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве (рис. 14).

В то же время, если пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и плоскости Γ_α имеет рациональное направление в \mathbf{p} -пространстве, а значение Δp_z достаточно мало, то мы все еще можем иметь периодические открытые траектории на бывших носителях открытых траекторий после пересечения границы зоны Ω_α (рис. 15). В этом случае мы будем иметь только один слой длинных замкнутых траекторий и два (противоположных) слоя периодических открытых траекторий на связной паре бывших носителей открытых траекторий. Легко видеть, что в описанной выше картине мы не можем иметь открытых траекторий системы (1.1), которые могли бы быть устойчивыми относительно всех малых поворотов направления \mathbf{V} .

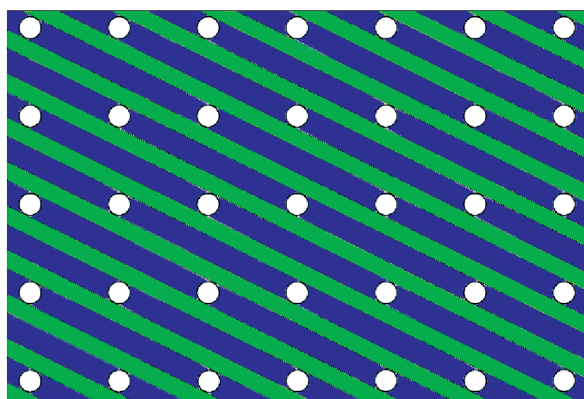


Рис. 15. Слои периодических открытых траекторий и длинных замкнутых траекторий на связной паре бывших носителей открытых траекторий

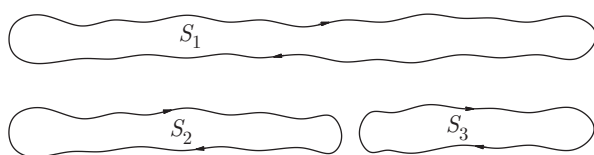


Рис. 16. Три различные длинные замкнутые траектории, возникающие на поверхности Ферми вблизи границы зоны Ω_α в области $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$

Заметим, что длинные замкнутые траектории, возникающие вблизи границы зоны устойчивости Ω_α , имеют весьма специальную форму, представленную на рис. 16. Таким образом, здесь должны присутствовать три разных «набора» длинных замкнутых траекторий по числу неэквивалентных слоев существенно различных замкнутых траекторий на поверхности Ферми.

Можно написать приближенное равенство

$$S_1 \approx S_2 + S_3$$

для площадей, ограниченных траекториями, показанными на рис. 16, в плоскости, ортогональной \mathbf{B} в \mathbf{p} -пространстве.

Аналогично, можно также написать

$$T_1 \approx T_2 + T_3$$

для периодов движения по траекториям, показанным на рис. 16, или

$$1/\omega_1 \approx 1/\omega_2 + 1/\omega_3$$

для соответствующих циклотронных частот.

Более точно, слои длинных замкнутых траекторий, показанные на рис. 14, должны содержать

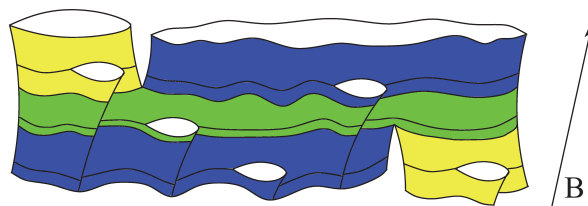


Рис. 17. Геометрия цилиндров длинных замкнутых траекторий на связной паре бывших носителей открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве (схематично)

дополнительные особенности, возникающие на основаниях цилиндров коротких замкнутых траекторий, разделяющих пары бывших носителей открытых траекторий (рис. 17). Эти особенности всегда появляются на границах сингулярных двумерных дисков, ортогональных \mathbf{B} , которые в действительности невидимы при проектировании на плоскость Π . Это на самом деле означает, что число топологически неэквивалентных цилиндров длинных замкнутых траекторий (разделенных особыми траекториями) на самом деле больше, чем 3. Тем не менее, если длина замкнутых траекторий очень велика, то мы все же можем ввести три семейства похожих длинных замкнутых траекторий, соответствующих трем существенно различным периодам T_1, T_2, T_3 , как показано на рис. 17. Можно также отметить, что когда длинные замкнутые траектории становятся короче, мы должны иметь «расщепление» периодов T_1, T_2, T_3 на большее множество $\{T_i\}$, соответствующее числу экстремальных траекторий на всех топологически различных цилиндрах замкнутых траекторий, описанных выше.

Можно также показать, что в случае, когда число неэквивалентных цилиндров, соединяющих бывшие носители открытых траекторий, равно 2, можно ввести пять периодов T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 (число цилиндров длинных замкнутых траекторий на самом деле больше), которые можно пронумеровать таким образом, что мы можем написать соотношения

$$T_4 \approx T_2 + T_3, \quad T_5 \approx T_1 + T_2 + T_3 \quad (2.1)$$

или

$$S_4 \approx S_2 + S_3, \quad S_5 \approx S_1 + S_2 + S_3. \quad (2.2)$$

Как мы уже говорили, такая ситуация может возникнуть в особых областях в области Ω'_α (области Π на рис. 12*d, e, жс*), разделенных специальными кривыми, наблюдаемыми при изучении осциллирующих явлений на высоких частотах ($\Omega \approx \omega_B$). Следует также отметить, что соотношения (2.1) и (2.2)

могут быть записаны только для достаточно длинных замкнутых траекторий, и здесь мы также должны наблюдать расщепление периодов T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 на большее множество, когда траектории становятся короче. Теоретически мы можем рассмотреть и еще более сложные случаи, когда число типичных периодов может быть еще больше, однако они в действительности весьма маловероятны для реальных металлов. В частности, мы всегда будем иметь ситуацию с тремя периодами T_1, T_2, T_3 в окрестности «регулярных» точек первой границы зоны устойчивости (области I на рис. 12*d,e,ж*).

3. ГЕОМЕТРИЯ ДЛИННЫХ ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ И ПОВЕДЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ В ОБЛАСТИ Ω'

Что мы можем сказать о поведении магнитопроводимости или, в более общем плане, эффектах, связанных с наличием сильного магнитного поля в случае, когда направление \mathbf{B} принадлежит области $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$? Отметим, прежде всего, что область $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ всегда содержит узкий участок вблизи границы зоны Ω_α , где длина длинных замкнутых траекторий очень велика. Как следствие этого, условие $\tau/T \gg 1$ в этой части, очевидно, нарушено и длинные замкнутые траектории неотличимы здесь от открытых траекторий с экспериментальной точки зрения. Тензор проводимости (для доступных значений B) имеет здесь те же геометрические свойства, что и в зоне устойчивости Ω_α , и то же самое справедливо и для его аналитических свойств (см. [22]). Как мы уже говорили, положение границы Ω_α может в общем случае быть установлено путем изучения особенностей явления циклотронного резонанса (при высоких внешних частотах) или других (квантовых) осцилляционных явлений (см. [24]), которые связаны с исчезновением цилиндра (коротких) замкнутых траекторий на поверхности Ферми.

Как было отмечено ранее, положение второй границы зоны устойчивости в какой-то мере не зависит от положения первой границы. В частности, мы можем иметь ситуацию, когда вторая граница зоны устойчивости очень близка к ее первой границе, так что область Ω'_α представляет собой узкую зону в окрестности границы Ω_α . В этом случае период T движения электрона по длинным замкнутым траекториям может быть очень большим и условие $\tau/T \gg 1$ будет в действительности нарушено всюду в Ω'_α (рис. 18). В этом случае можно наблюдать первую и вторую границы зоны устойчивос-

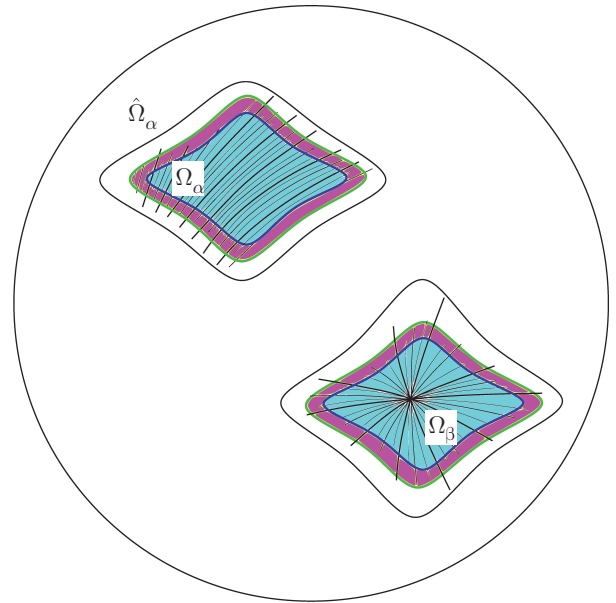


Рис. 18. Узкие зоны $\Omega'_\alpha, \Omega'_\beta$ (розовые) внутри «экспериментально наблюдаемых» зон устойчивости $\hat{\Omega}_\alpha, \hat{\Omega}_\beta$ (схематично)

ти лишь с помощью изучения осцилляционных явлений внутри экспериментально наблюдаемой зоны устойчивости $\hat{\Omega}_\alpha$.

Заметим здесь, что в стандартной постановке экспериментального исследования явления циклотронного резонанса часто удобно выбирать направление электрического поля \mathbf{E}_{inc} в падающей волне ортогональным направлению постоянного магнитного поля \mathbf{B} . В этом случае конечные точки на «тривиальных» цилиндрах замкнутых траекторий (рис. 6) не дают вклада в картину осцилляций, поэтому только экстремальные траектории на топологически нетривиальных цилиндрах замкнутых траекторий привносят осциллирующие члены в зависимость физических величин от величины B (или Ω). Если предположить, что каждый топологически нетривиальный цилиндр замкнутых траекторий содержит только одну экстремальную траекторию, то число осциллирующих членов внутри зоны устойчивости должно быть в точности $g - 1$, где g — род поверхности Ферми.

Как было указано в работе [24], картина осцилляций должна испытывать резкие изменения на границе любой зоны устойчивости из-за исчезновения цилиндра замкнутых траекторий при пересечении границы Ω_α на угловой диаграмме. Так, для поверхности Ферми рода 3 мы должны наблюдать быструю трансформацию картины, содержащей два ос-

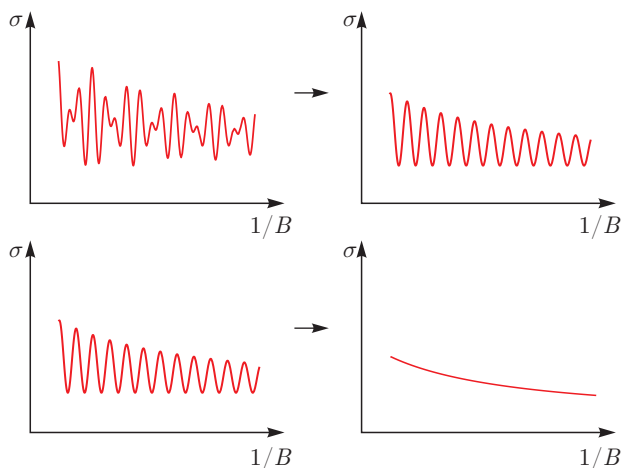


Рис. 19. Трансформация картины осцилляций циклотронного резонанса на внутренней и внешней границах узкой зоны Ω'_α вокруг зоны устойчивости Ω_α для поверхности Ферми рода 3. (Направление электрического поля в падающей волне ортогонально направлению постоянного магнитного поля \mathbf{B})

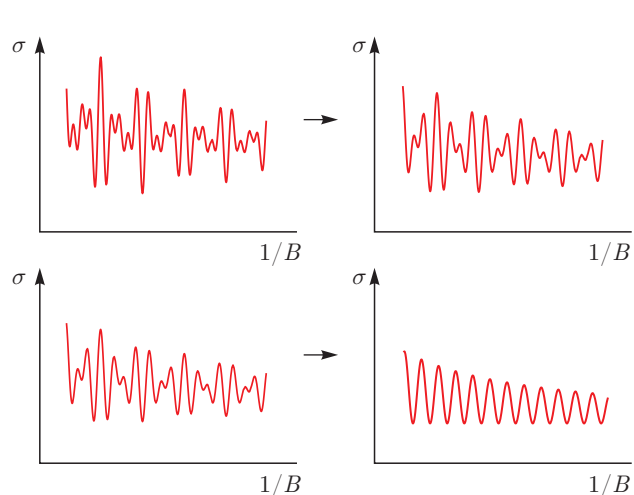


Рис. 20. Трансформация картины осцилляций циклотронного резонанса на внутренней и внешней границах узкой зоны Ω'_α вокруг зоны устойчивости Ω_α для поверхности Ферми рода 4. (Направление электрического поля в падающей волне ортогонально направлению постоянного магнитного поля \mathbf{B})

циллирующих члена, к картине, содержащей только один осциллирующий член, на первой границе зоны устойчивости. Если предположить теперь, что вторая граница очень близка к первой границе зоны устойчивости, а длинные замкнутые траектории не дают никакого вклада в осцилляционные явления внутри области $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$, то мы должны ожидать быструю трансформацию картины, содержащей только один осциллирующий член, к картине, не содержащей осциллирующих членов, на второй границе зоны устойчивости Ω_α (рис. 19). Для поверхностей Ферми более высоких родов картина осцилляций должна быть более сложной. Для сравнения, для поверхности Ферми рода 4 мы должны наблюдать быструю трансформацию картины, содержащей три осциллирующих члена, к картине, содержащей два осциллирующих члена, на первой границе зоны устойчивости и быструю трансформацию картины, содержащей два осциллирующих члена, к картине, содержащей только один осциллирующий член, на второй границе (рис. 20). Отметим также, что изображения, представленные на рис. 19, 20, могут быть несколько схематичными по своему характеру, так как форма колебаний в осциллирующих членах может быть различной в разных ситуациях.

Еще одной особенностью, которая может возникнуть на сложных поверхностях Ферми, является исчезновение дополнительных цилиндров замкнутых траекторий между первой и второй границами зоны устойчивости (рис. 12d,e,жс). В этом случае пол-

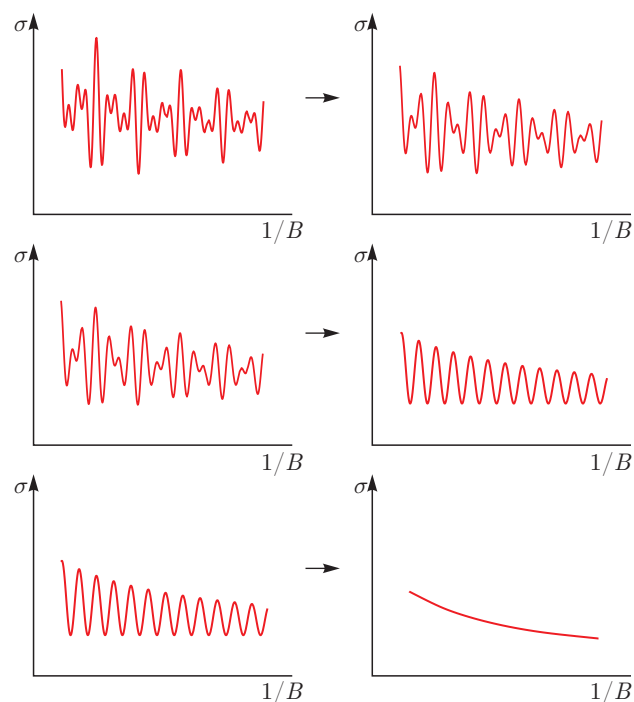


Рис. 21. Трансформация картины осцилляций циклотронного резонанса на внутренней границе, специальной кривой внутри зоны Ω'_α и внешней границе узкой зоны Ω'_α вокруг зоны устойчивости Ω_α для поверхности Ферми рода 4. (Направление электрического поля в падающей волне ортогонально направлению постоянного магнитного поля \mathbf{B})

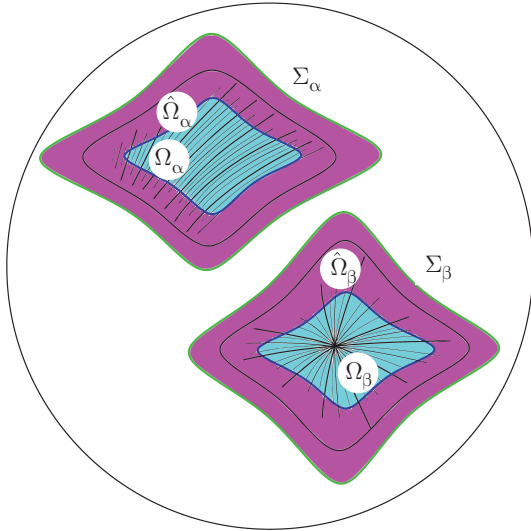


Рис. 22. (В цвете онлайн) Области $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$, $\Omega'_\beta = \Sigma_\beta \setminus \Omega_\beta$ (розовые), имеющие «промежуточные» размеры на угловой диаграмме (схематично)

ная картина трансформаций циклотронных осцилляций, вызванных вращением \mathbf{B} , может напоминать ситуацию, показанную на рис. 21.

Как мы уже сказали, в случае узкой области $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$, целиком лежащей в экспериментально наблюдаемой зоне устойчивости $\hat{\Omega}_\alpha$, резкие трансформации осцилляционной картины, аналогичные показанным на рис. 19–21, дают единственное свидетельство существования первой и второй границ зоны устойчивости Ω_α .

Мы можем теперь рассмотреть «промежуточную ситуацию», когда длинные замкнутые траектории в области Ω'_α могут иметь «промежуточную длину», так что мы имеем отношения

$$T^{-1} \ll \omega_B = \frac{eB}{m^*c}, \quad \frac{\tau}{T} \gg 1, \quad (3.1)$$

где T — период движения электрона по длинной замкнутой траектории. Это означает, что область Ω'_α имеет лишь частичное пересечение с «экспериментально наблюдаемой» зоной устойчивости $\hat{\Omega}_\alpha$ (рис. 22), и мы можем наблюдать некоторые специальные особенности поведения проводимости в области Ω'_α .

Легко видеть, что здесь мы должны наблюдать особую картину осцилляционных явлений (классических или квантовых), связанных с длинными замкнутыми траекториями, возникающими в Ω'_α . Обсудим здесь особо картину осцилляций циклотронного резонанса, связанную с замкнутыми траекториями, удовлетворяющими условию (3.1).

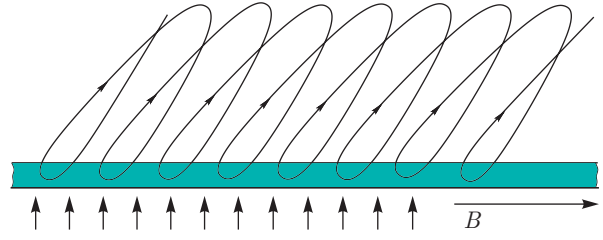


Рис. 23. Движение электрона через скин-слой в x -пространстве, соответствующее движению по длинным замкнутым траекториям в области Ω'_α

В стандартной постановке экспериментального исследования явления циклотронного резонанса мы предполагаем, что магнитное поле \mathbf{B} параллельно поверхности металлического образца, и мы исследуем поведение поверхностного тока в поле падающей электромагнитной волны. Взаимодействие электронов с волновым полем происходит в узком скин-слое, который обычно намного меньше размера циклотронной орбиты в x -пространстве. В общем случае длинные замкнутые траектории наклонены относительно поверхности образца в x -пространстве, поэтому мы имеем картину движения электрона через скин-слой, схематически представленный на рис. 23. Можно видеть, что в x -пространстве траектория электрона имеет в общем случае также дрейф вдоль направления \mathbf{B} . Заметим здесь, что для длинных замкнутых траекторий этот дрейф на самом деле довольно мал, так как среднее значение v_{gr}^z близко к нулю на траекториях этого типа. (Строго говоря, это свойство может быть в действительности нарушено для очень сложных поверхностей Ферми очень высоких родов.)

Согласно стандартной теории циклотронного резонанса (см., например, [7, 25–28]), каждая экстремальная замкнутая траектория дает осциллирующий член в поверхностную проводимость (в ситуации аномального скин-эффекта), который вызван совпадением частоты падающей волны Ω со значениями $2\pi n/T_i$, $n \in \mathbb{N}$, где T_i — время обращения электрона по экстремальной замкнутой траектории. Можно видеть тогда, что каждая экстремальная замкнутая траектория дает осциллирующий вклад $\Delta_i \sigma(\Omega)$ в поверхностную проводимость с периодом

$$\Delta_i \Omega = 2\pi T_i^{-1}.$$

Эквивалентно, эти вклады можно рассматривать как осциллирующие функции $1/B$ при фиксированном значении Ω , имеющие периоды, определяемые геометрией замкнутых экстремальных траекторий в \mathbf{p} -пространстве.

Мы видим, однако, что в случае длинных замкнутых траекторий, возникающих вблизи границы зоны устойчивости, все траектории, принадлежащие одному и тому же слою (за исключением траекторий, очень близких к сингулярным), соответствуют почти одинаковой величине периода T_i . Как следствие этого, осциллирующие члены в этом случае создаются фактически целыми слоями длинных замкнутых траекторий и представляют вклады конечных частей поверхности Ферми. В простейшей ситуации, описанной выше, слои длинных замкнутых траекторий должны давать три осциллирующих члена с тремя разными периодами, удовлетворяющими условию

$$(\Delta_1\Omega)^{-1} = (\Delta_2\Omega)^{-1} + (\Delta_3\Omega)^{-1}$$

или

$$\left(\Delta_1\left(\frac{1}{B}\right)\right)^{-1} = \left(\Delta_2\left(\frac{1}{B}\right)\right)^{-1} + \left(\Delta_3\left(\frac{1}{B}\right)\right)^{-1}.$$

К осциллирующим членам, соответствующим длинным замкнутым траекториям, должны быть в действительности добавлены осциллирующие члены, приходящие от коротких экстремальных замкнутых траекторий, возникающих на поверхности Ферми. Нетрудно видеть, однако, что осцилляции, задаваемые длинными замкнутыми траекториями, должны в действительности наблюдаться на более низких частотах по сравнению с осцилляциями, заданными короткими экстремальными траекториями. Действительно, первые пики осцилляций, порождаемых длинными замкнутыми траекториями, возникают на частотах

$$\Omega_{1,2,3} = 2\pi/T_{1,2,3},$$

которые должны быть намного меньше ω_B согласно (3.1).

Укажем здесь еще одну особенность вклада длинных замкнутых траекторий в поверхностную проводимость в сильных магнитных полях. Как уже говорилось, осцилляции, вызванные длинными замкнутыми траекториями, создаются конечными частями поверхности Ферми. В то же время осцилляции, создаваемые короткими траекториями, задаются вкладами экстремальных траекторий на поверхности Ферми, удовлетворяющими условию

$$dT_i/dp_z = 0.$$

Можно видеть тогда, что осциллирующие члены, соответствующие длинным замкнутым траекториям, могут иметь большую амплитуду по сравнению со стандартной ситуацией из-за упомянутого

выше эффекта. В то же время мы можем видеть, что часть времени, проведенного электронами в скин-слое (рис. 23), должна быть дополнительно умножена в этом случае на малый параметр r_B/L , где L — длина длинной замкнутой траектории в x -пространстве. Таким образом, два рассмотренных выше эффекта фактически играют друг против друга в ситуации, представленной на рис. 23. Отметим также, что в области высоких частот $\Omega \sim \omega_B$ первый эффект исчезает, так как типичная вариация периода на каждом цилиндре замкнутых траекторий имеет в действительности порядок $\Delta T_i \sim 1/\omega_B$. Легко видеть, что эта вариация имеет небольшое относительное значение в диапазоне $1/\omega_B \ll 1/\Omega$, тем не менее, она становится важной, если $\Omega \sim \omega_B$. В результате можно ожидать, что осциллирующие члены, отвечающие длинным замкнутым траекториям, имеют довольно малую амплитуду (или почти невидимы) в области $\Omega \sim \omega_B$.

Другой отличительной особенностью осцилляций, отвечающих длинным замкнутым траекториям, является то, что изменение картины осцилляций не имеет здесь резкого характера с изменениями набора соответствующих периодов (скажем, (T_1, T_2, T_3)), вызванного реконструкциями слоев таких траекторий при смещениях направления \mathbf{B} . Действительно, нетрудно видеть, что вклад исчезающего слоя длинных замкнутых траекторий стремится к нулю вместе с площадью, покрываемой соответствующими траекториями на поверхности Ферми. Ситуация является совершенно иной для осциллирующих членов, вызванных экстремальными замкнутыми траекториями, так как траектории такого типа остаются почти неизменными вплоть до исчезновения соответствующего цилиндра замкнутых траекторий.

Обсудим также ситуацию, когда мы тем не менее предполагаем, что в области $\Omega \gtrsim \omega_B$ осцилляции, порождаемые длинными и короткими замкнутыми траекториями, могут сосуществовать, и мы имеем картину осцилляций, заданную суммой осцилляций обоих видов. Легко видеть, что осцилляции, порожденные длинными замкнутыми траекториями, имеют гораздо меньший период, чем осцилляции второго типа, поэтому мы можем отделить эти осциллирующие члены от слагаемых, порожденных короткими замкнутыми траекториями. Так, любая процедура локального усреднения колебаний на графике $\sigma(\Omega)$ (или $\sigma(1/B)$) на соответствующей длине будет подавлять осцилляции первого происхождения и оставит чистую картину осцилляций второго типа. В результате та же схема определения второй

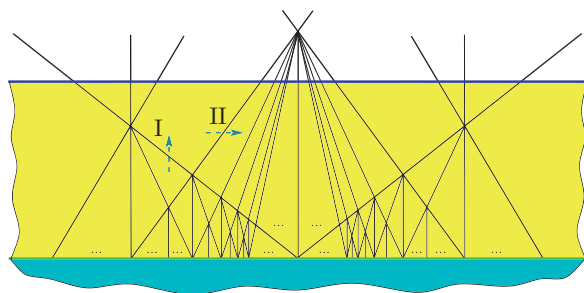


Рис. 24. Разделение области Ω'_α на части, соответствующие различным значениям T_1, T_2, T_3 , между первой и второй границами зоны устойчивости (очень схематично)

границы зоны устойчивости Ω_α , основанная на картинах, аналогичных рис. 19, 20, может применяться также в «промежуточной ситуации» (3.1) без существенных изменений. Отметим, что то же самое справедливо и в ситуации наличия «внутренних границ» внутри области Ω'_α и появления большого числа больших периодов (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) вблизи границы зоны устойчивости.

Разделение области Ω'_α на «островки», соответствующее разным значениям T_1, T_2, T_3 , на самом деле довольно сложно, поскольку плотность «островков» становится бесконечной вблизи первой границы зоны устойчивости (рис. 24). В то же время видно, что соответствующая часть Ω'_α принадлежит обычно экспериментально наблюдаемой зоне устойчивости $\hat{\Omega}_\alpha$, поэтому соответствующие длинные замкнутые траектории на самом деле неотличимы здесь от открытых траекторий в эксперименте.

В той части области Ω'_α , которая не принадлежит зоне $\hat{\Omega}_\alpha$, границы островков, соответствующих разным значениям T_1, T_2, T_3 , могут быть обнаружены приблизительно путем наблюдения изменений картины циклотронного резонанса в частотном диапазоне, соответствующем вкладу длинных замкнутых траекторий. Как мы уже говорили, изменения картины осцилляций здесь не имеют резкой формы на соответствующих границах.

В общем случае значения T_1, T_2, T_3 являются непредсказуемыми, тем не менее, кое-что о поведении этих значений при пересечении границы между двумя разными островками в Ω'_α можно сказать.

Определим теперь «вертикальные» и «горизонтальные» отклонения направления \mathbf{V} на угловой диаграмме вблизи границы зоны устойчивости. Мы будем называть отклонение направления \mathbf{V} в области Ω'_α «вертикальным», если оно не меняет направления пересечения плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и целочисленной плоскости Γ_α (стрелка I на рис. 24).

Легко видеть, что «вертикальные» отклонения направлений \mathbf{V} не меняют средних направлений прямых полос и могут изменять только их ширины (и диаметры окружностей) на диаграмме рис. 13. Легко видеть также, что в окрестности первой границы зоны устойчивости диаметры окружностей на рис. 13 растут, если мы поворачиваем \mathbf{V} от границы Ω_α , и уменьшаются, если мы поворачиваем \mathbf{V} в сторону границы.

Точно так же мы определяем «горизонтальные» отклонения направления \mathbf{V} в Ω'_α , которые не меняют диаметров окружностей и могут изменять средние направления прямых полос на диаграмме рис. 13 (стрелка II на рис. 24).

Предположим теперь, что $T_1 > T_2 > T_3$ (и $T_1 \approx T_2 + T_3$) в окрестности первой границы зоны устойчивости. Тогда мы можем утверждать, что всякий раз, когда мы пересекаем границу между двумя островками в Ω'_α при вертикальном отклонении \mathbf{V} в сторону от границы зоны Ω_α (стрелка I на рис. 24), мы будем иметь одно из следующих простых преобразований тройки (T_1, T_2, T_3) :

$$(T_1, T_2, T_3) \rightarrow (T_2, T_2 - T_3, T_3)$$

(если $T_2 - T_3 > T_3$), или

$$(T_1, T_2, T_3) \rightarrow (T_2, T_3, T_2 - T_3)$$

(если $T_3 > T_2 - T_3$).

Точно так же, всякий раз, когда мы пересекаем границу между двумя островками при вертикальном отклонении \mathbf{V} по направлению к границе зоны Ω_α , мы должны наблюдать одно из следующих обратных преобразований тройки (T_1, T_2, T_3) :

$$(T_1, T_2, T_3) \rightarrow (T_1 + T_3, T_1, T_3)$$

или

$$(T_1, T_2, T_3) \rightarrow (T_1 + T_2, T_1, T_2).$$

Легко видеть, что значения T_i уменьшаются, если мы смещаем направление \mathbf{V} от границы Ω_α , и возрастают, если мы сдвигаем его к границе зоны устойчивости. Отметим, что эта ситуация имеет место только вблизи первой границы зоны устойчивости и может меняться на некотором расстоянии от Ω_α . В последнем случае мы можем в действительности наблюдать все приведенные выше преобразования при любом «вертикальном» отклонении направления \mathbf{V} . Нетрудно также показать, что когда мы пересекаем границу между двумя островками в Ω'_α при горизонтальном отклонении \mathbf{V} (стрелка II на рис. 24), все преобразования тройки (T_1, T_2, T_3) , приведенные выше, являются возможными.

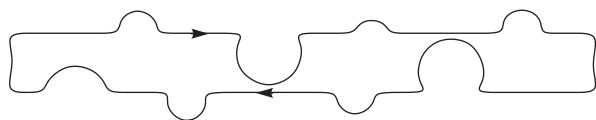


Рис. 25. Более точная типичная форма длинных замкнутых траекторий, возникающих вблизи границы зоны устойчивости

Мы снова можем сказать, что приведенная выше картина сохраняет свои ключевые особенности и в ситуации наличия внутренних границ внутри области Ω'_α и появления большего количества больших периодов (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) вблизи границы зоны устойчивости. Заметим, что все описанные выше основные особенности классических осцилляций имеют место также и для квантовых осцилляций (де Гааза–Ван Альфена или Шубникова–де Гааза) в описанной ситуации.

Среди других особенностей картины циклотронного резонанса, типичных для указанной выше ситуации, можно отметить глубокое проникновение электрического тока и электромагнитного поля внутрь металла в виде «всплесков» на довольно больших расстояниях от поверхности. Действительно, из-за особой формы траекторий, показанных на рис. 23, мы должны наблюдать формирование второго (и следующих) скин-слоев на расстояниях порядка L , который предполагается намного большим, чем значение r_B . Отметим также, что формирование скин-слоев при наличии длинных замкнутых траекторий имеет в действительности и многие другие особенности. Действительно, точная форма длинных замкнутых траекторий достаточно сложна и может быть схематично представлена на рис. 25. Согласно стандартному кинетическому подходу, каждая точка траектории, где скорость электрона параллельна границе образца металла, создает собственный скин-слой на соответствующем расстоянии от границы образца (см., например, [7, 28]). В таком случае, при наличии траекторий, показанных на рис. 25, мы должны иметь довольно сложную структуру множества скин-слоев внутри металла на довольно больших расстояниях от его границы (рис. 26). Это явление можно обнаружить в экспериментальном исследовании «размерных эффектов», таких как отсечение циклотронных резонансных орбит в тонких металлических пленках в сильных магнитных полях (см., например, [7, 28]).

Сделаем еще одно замечание о циклотронном резонансе на длинных замкнутых траекториях, удовлетворяющих условию (3.1). А именно, можно рас-

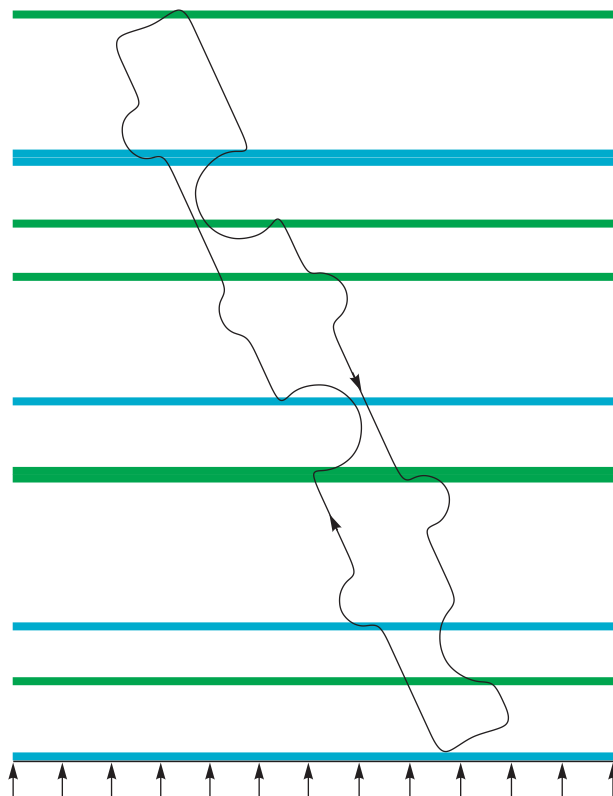


Рис. 26. Скин-слои, возникающие на разных расстояниях от границы образца при наличии длинных замкнутых траекторий

смотреть также ситуацию, когда направление открытых орбит в Ω_α параллельно поверхности образца металла в x -пространстве. Это будет автоматически означать, что длинные замкнутые траектории в области Ω'_α также будут ориентированы вдоль границы металлического образца в x -пространстве (рис. 27), что даст некоторые дополнительные особенности в картине осцилляций.

Заметим прежде всего, что ширина скин-слоя зависит от частоты падающей волны и мы рассматриваем здесь частоты, соответствующие периодам T_i , которые значительно меньше циклотронной частоты ω_B . В качестве теоретической возможности мы могли бы рассмотреть здесь скин-слой шириной δ , сравнимой со стандартным циклотронным радиусом $r_B = m^*v_{gr}/eB$ в металле (рис. 27). Из стандартной кинетической теории циклотронного резонанса следует, что в случае, показанном на рис. 27а, первый резонансный пик ($\Omega = 2\pi/T_i$) в каждом осциллирующем члене должен иметь значительно большую амплитуду по сравнению с другими пиками. В ситуации, представленной на рис. 27б, можно утверждать, что в каждом (из трех) осциллирую-

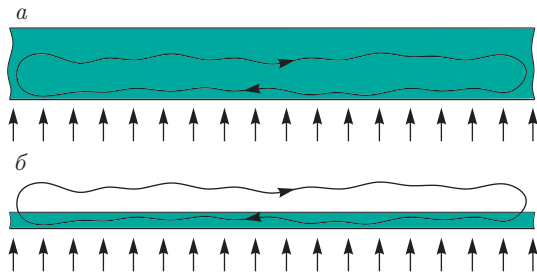


Рис. 27. Длинная замкнутая траектория (проекция на плоскость, ортогональную \mathbf{B}), ориентированная вдоль границы металлического образца в x -пространстве. Ситуации $\delta > r_B$ (а) и $\delta < r_B$ (б)

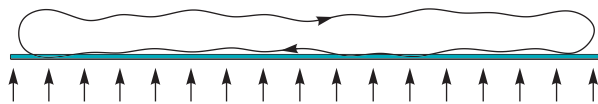


Рис. 28. Длинная замкнутая траектория, ориентированная вдоль границы образца металла в случае $\delta \ll r_B$

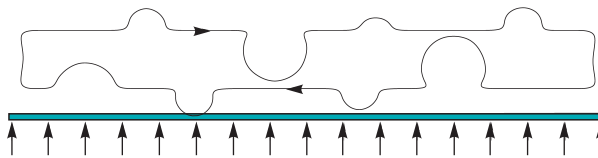


Рис. 29. Короткая часть длинной замкнутой траектории, попадающая в скин-слой вблизи границы металлического образца

ших членов четные ($\Omega = 4\pi n/T_i$) резонансные пики будут сильно подавляться по сравнению с нечетными ($\Omega = 2\pi(2n - 1)/T_i$) резонансными пиками. Отметим, однако, что ситуация, представленная на рис. 27, на самом деле маловероятна в металлах и в эксперименте следует ожидать гораздо более сильного соотношения $\delta \ll r_B$. В этом случае мы должны предположить, что только некоторые «части» траектории попадают в скин-слой, в то время как большая ее часть лежит вне скин-слоя (рис. 28).

Более того, возвращаясь к точной форме длинных замкнутых траекторий (рис. 25), можно предположить, что скин-слой содержит в действительности лишь одну очень короткую часть траектории для большинства длинных замкнутых траекторий (рис. 29). В результате, частотный анализ зависимости $\sigma(\Omega)$ в диапазоне $\Omega \sim 2\pi/T_i$ должен фактически показывать здесь ту же картину, что и в случае «наклонных» длинных замкнутых траекторий (рис. 23). В то же время картина токовых слоев вблизи границы образца должна быть отличной от общего случая, так как все нули величины v_{gr}^\perp расположены теперь на расстоянии порядка r_B от грани-

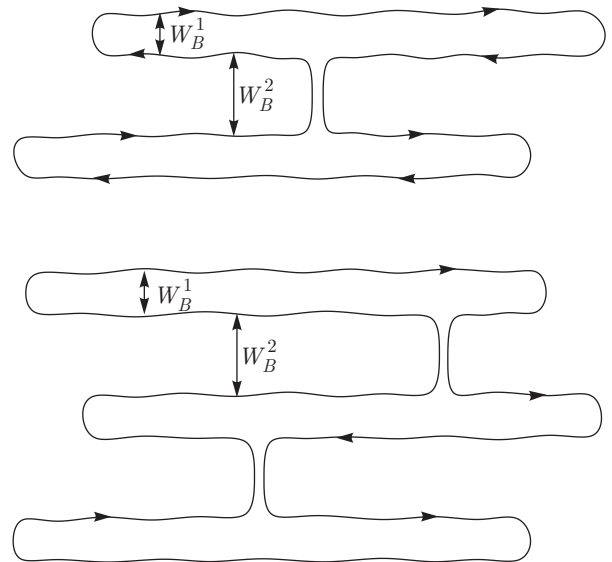


Рис. 30. Сложные длинные замкнутые траектории, возникающие после пересечения второй границы зоны устойчивости

цы образца. Это отличие, в частности, может быть обнаружено при изучении «размерных эффектов» в тонких металлических пленках, упомянутых выше. Заметим также, что благодаря свойству $\langle v_{gr}^z \rangle \approx 0$ на длинных замкнутых траекториях, требование того, чтобы \mathbf{B} было параллельно поверхности образца металла, может быть в действительности опущено во многих рассмотренных здесь ситуациях.

Как мы уже говорили, одним из свойств области Ω'_α является то, что мы не можем иметь устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми при $\mathbf{B}/B \in \Omega'_\alpha$. Отметим здесь, что устойчивые открытые траектории не появляются сразу также после пересечения второй границы зоны устойчивости в точках общего положения. Так, для направлений \mathbf{B} общего положения мы должны сначала наблюдать появление «сложных длинных замкнутых траекторий» (рис. 30) после пересечения границы Σ_α , которые в конечном итоге могут превращаться в открытые траектории.

В общем случае можно констатировать, что пересечение второй границы зоны устойчивости приводит к (резкому) исчезновению одного осциллирующего члена в частотном диапазоне $\Omega \sim \omega_B$ (рис. 19, 20) и появлению дополнительного осциллирующего члена, соответствующего появлению нового периода $T \approx T_{i_1} + T_{i_2}$, в диапазоне «низких» частот.

Одной из особенностей, возникающих при наличии сложных замкнутых траекторий, когда на-

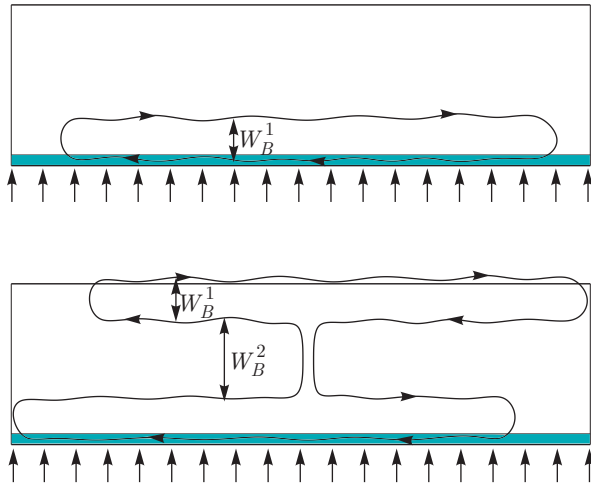


Рис. 31. Отсечение орбиты циклотронного резонанса после пересечения второй границы зоны устойчивости в случае, когда направление открытых траекторий в Ω_α параллельно поверхности металлического образца

правление открытых траекторий в Ω_α параллельно поверхности металлического образца, является формирование довольно сложной картины токовых всплесков внутри образца металла. Другой очевидной особенностью, наблюдаемой при изучении размерных эффектов, является быстрое изменение толщины образца, соответствующее отсечению циклотронных резонансных орбит после пересечения второй границы зоны устойчивости (рис. 31). В этой ситуации для соответствующей толщины образца мы должны наблюдать исчезновение осциллирующего члена в области высоких частот $\Omega \sim \omega_B$ без появления какого-либо осциллирующего члена в диапазоне «низких» частот сразу после пересечения второй границы Ω_α .

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда вторая граница зоны устойчивости далека от ее первой границы (рис. 32). Легко видеть, что в этом случае можно прийти к ситуации, когда «длинные замкнутые траектории» обретают «нормальный размер» (порядка p_F) в \mathbf{p} -пространстве. Осциллирующие члены, приходящие от всех замкнутых траекторий, теперь находятся в одном и том же диапазоне частот, поэтому мы имеем, как правило, более сложную картину осцилляций, чем те, которые показаны на рис. 19, 20 вблизи второй границы зоны устойчивости. Все осциллирующие члены порождаются теперь экстремальными замкнутыми траекториями, поэтому картина осцилляций претерпевает здесь быструю трансформацию на каждой границе между двумя «островками» в области $\Omega'_\alpha \setminus \hat{\Omega}_\alpha$, так

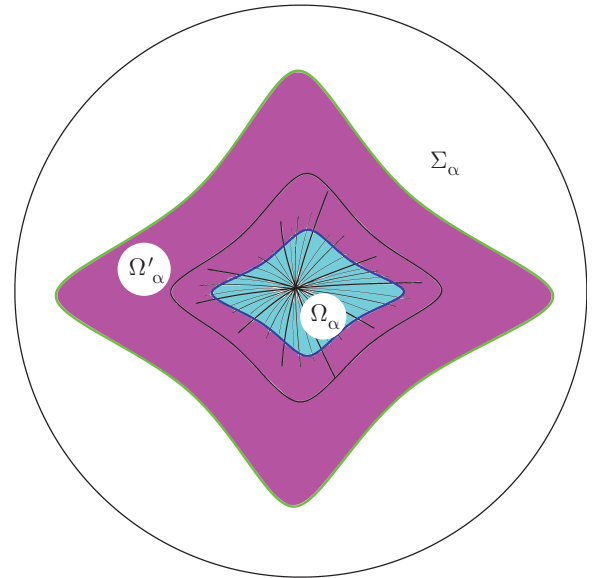


Рис. 32. (В цвете онлайн) Большая область $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ (розовая) на угловой диаграмме (схематично)

же, как и на второй границе зоны устойчивости (а также за второй границей). Вероятнее всего, в этой ситуации наиболее удобным способом отличить вторую границу зоны устойчивости от границы между двумя островками является изучение отсечения резонансных циклотронных орбит в тонких металлических образцах. Так, для соответствующей толщины образца (рис. 31) мы должны наблюдать исчезновение одного осциллирующего члена после пересечения второй границы зоны устойчивости, если среднее направление открытых траекторий в Ω_α параллельно поверхности металла. В то же время, пересекая границу между двумя островками внутри области Ω'_α , мы должны наблюдать резкое изменение периодов T_i осциллирующих членов без изменения их числа.

Мы должны, безусловно, указать еще одну общую особенность, характерную для поведения проводимости в области Ω'_α . Вернемся теперь к формуле (1.2), определяющей асимптотическое поведение тензора проводимости $\sigma^{kl}(B)$ внутри металлического образца в постоянном электрическом поле ($\Omega = 0$). Формула (1.2) дает вклад замкнутых траекторий в проводимость при $\omega_B \tau \gg 1$ и может также использоваться и в той части области Ω'_α , где выполнены условия $\tau \gg T_i$. Тензор проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , можно записать здесь в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} c^{11}(\omega_{BT})^{-2} & c^{12}(\omega_{BT})^{-1} \\ -c^{12}(\omega_{BT})^{-1} & c^{22}(\omega_{BT})^{-2} \end{pmatrix},$$

$\omega_{BT} \rightarrow \infty,$

где $c^{\alpha\beta}$ представляют собой некоторые безразмерные константы. Константы $c^{\alpha\beta}$ имеют порядок 1 для замкнутых траекторий нормального размера, однако они могут иметь очень специальные значения для сложных протяженных траекторий. В частности, для длинных замкнутых траекторий, показанных на рис. 16, 25, значения c^{11} и c^{22} существенно различаются, если ось x выбрана вдоль пересечения плоскости Γ_α и плоскости, ортогональной \mathbf{V} . Как показывает простой анализ, значение c^{22} имеет в этом случае порядок $(\omega_{BT})^2 \gg 1$, в то время как константа c^{11} имеет порядок 1. Можно видеть тогда, что тензор $\sigma^{kl}(B)$ сохраняет в целом анизотропную структуру в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в области Ω'_α с теми же геометрическими свойствами, что и в зоне Ω_α . Заметим, что значения c^{22} могут широко варьироваться в пределах области Ω'_α , в то время как константа c^{11} сохраняет почти одно и то же значение в этой области. Таким образом, вторую границу зоны устойчивости Ω_α можно грубо определить также как границу, за которой проводимость вдоль направления x в нашей специальной системе координат может начинать существенно меняться.

Отметим теперь, что в отличие от зон устойчивости Ω_α , различные области Ω'_α могут перекрываться на угловой диаграмме. Соответствующий пример приведен на рис. 33, где представлены поверхность Ферми в виде «тонкой пространственной сети» и соответствующая ей угловая диаграмма для магнитопроводности. Нетрудно видеть, что угловая диаграмма содержит в этом случае шесть довольно малых областей, которые соответствуют трем зонам устойчивости $\Omega_{1,2,3}$, и шесть довольно больших связанных областей, представляющих области $\Omega'_{1,2,3}$. Области Ω_α и Ω'_α покрывают всю единичную сферу, и можно легко указать области на S^2 , которые покрываются двумя или даже тремя разными областями Ω'_α одновременно. Замкнутые траектории системы (1.1) могут быть описаны в этом случае по-разному в соответствии с разными картинками, соответствующими различным представлениям поверхности Ферми. В общем случае длинные замкнутые траектории в области, покрытой двумя разными областями $\Omega'_\alpha, \Omega'_\beta$, могут простираются только в одном целочисленном направлении (в \mathbf{p} -пространстве), заданном пересечением плоскостей Γ_α и Γ_β . Точно так же в области, покрываемой тремя (или более) областями Ω'_α , мы не должны ожидать появления

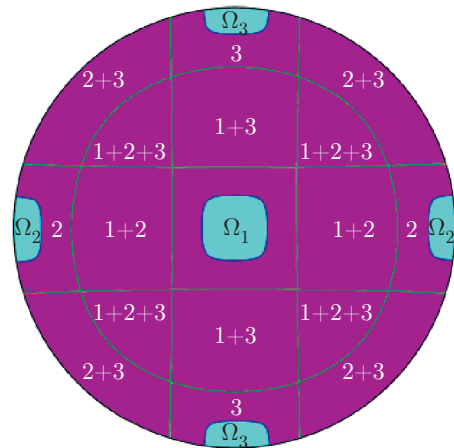
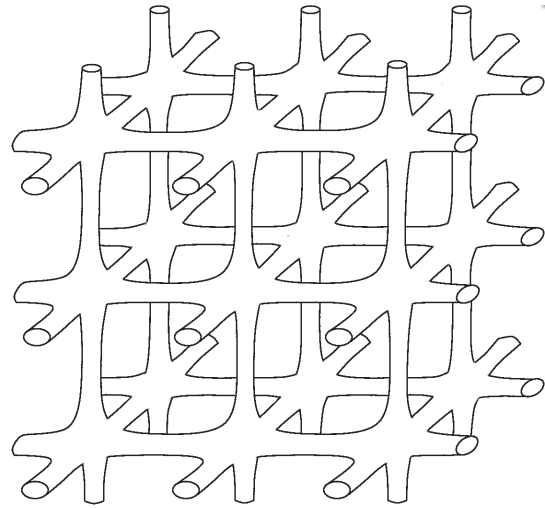


Рис. 33. Ферми-поверхность в виде «тонкой пространственной сети» и соответствующая ей угловая диаграмма

замкнутых траекторий, простирающихся в каком-либо специальном направлении, если соответствующие плоскости Γ_α не имеют общего целочисленного вектора в \mathbf{p} -пространстве. Нетрудно видеть, что последняя ситуация может возникнуть только на значительном удалении от границ зон устойчивости, где длинные замкнутые траектории исчезают в результате описанных выше перестроек.

Заметим, что можно также в общем случае иметь ситуацию, когда вторая граница фактически отсутствует на угловой диаграмме. Это будет означать, что зона Σ_α покрывает всю сферу S^2 и зона устойчивости Ω_α представляет собой единственную зону устойчивости на угловой диаграмме. Возможна также ситуация, когда область Ω'_α связывает противоположные части зоны Ω_α , но соответствующая зона Σ_α не покрывает всю сферу S^2 .

4. ГРАНИЦЫ ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ И ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА УГЛОВОЙ ДИАГРАММЫ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые особенности глобальной структуры угловой диаграммы и ее связь с типами границ зон устойчивости. Наше рассмотрение будет носить несколько топологический характер и будет в значительной степени связано с поведением холловской проводимости на угловой диаграмме.

Отметим сразу, что холловская проводимость в металлах традиционно связана с концентрацией и типом носителей тока в металле, в частности, она может иметь положительный или отрицательный знак в зависимости от типа поверхности Ферми. В большинстве случаев эта классификация носителей в действительности используется для металлов в присутствии внешнего магнитного поля в случае, когда на поверхности Ферми присутствуют только замкнутые траектории. Нам понадобятся, однако, несколько более точные формулировки о поведении холловской проводимости в этой ситуации, поэтому ниже мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

Предположим, что поверхность Ферми представлена гладкой (связной или несвязной) 3-периодической поверхностью в \mathbf{p} -пространстве, заданной уравнением

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F \tag{4.1}$$

для некоторой периодической функции $\epsilon(\mathbf{p})$.

Предположим теперь, что поверхность Ферми (4.1) содержит только замкнутые (в \mathbf{p} -пространстве) траектории системы (1.1) при некотором фиксированном направлении \mathbf{V} . Предположим также, что направление \mathbf{V} не является чисто рациональным, т. е. плоскость, ортогональная \mathbf{V} , не порождается двумя векторами обратной решетки в \mathbf{p} -пространстве. В этом случае во всех плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , будем иметь одну из следующих ситуаций:

I) область больших значений энергии $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ представляет собой «море» в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в то время как области меньшей энергии $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ представляют собой конечные «острова» в этом море («острова» могут содержать «озера» больших значений энергии и т. д., рис. 34а).

II) область меньших значений энергии $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ представляет собой «море» в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в то время как области большей энергии $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ представляют собой конечные «острова» в этом море («острова» могут содержать «озера» меньших значений энергии и т. д., рис. 34б).

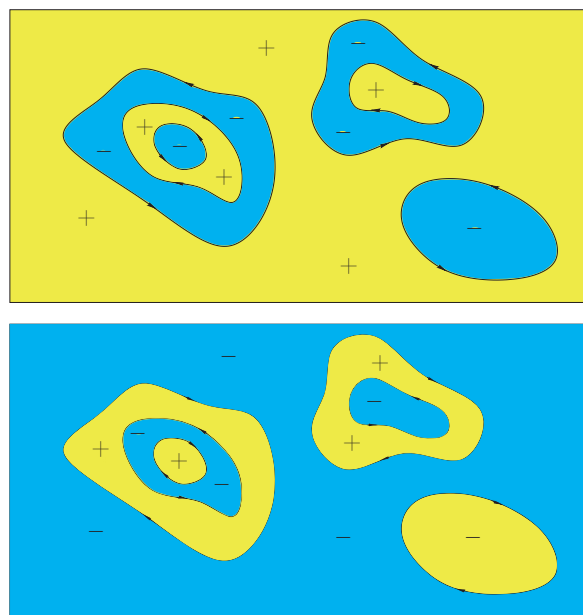


Рис. 34. Две возможные картины траекторий электронов в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , в случае, когда поверхность Ферми содержит только замкнутые траектории в \mathbf{p} -пространстве

При выполнении сформулированных выше условий тип ситуации (I или II) не зависит от плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и является локально устойчивым относительно малых вращений \mathbf{V} . В то же время картина может измениться после большого отклонения направления \mathbf{V} для сложных поверхностей Ферми. Тогда в общем случае можно определить области на угловой диаграмме, соответствующие наличию только замкнутых траекторий на поверхности Ферми и описываемые одной из приведенных выше картин. Нетрудно видеть также, что любые две области, соответствующие различным типам картин, описанных выше, должны быть разделены зонами, соответствующими наличию открытых траекторий на поверхности Ферми.

Если все траектории системы (1.1) замкнуты, то тензор проводимости $\sigma^{kl}(B)$ можно представить в виде регулярного ряда по степеням $(\omega_{BT})^{-1}$ в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ (см., например, [7, 27, 28]) и написать для его главных членов

$$\sigma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a^{11}(\omega_{BT})^{-2} & a^{12}(\omega_{BT})^{-1} \\ -a^{12}(\omega_{BT})^{-1} & a^{22}(\omega_{BT})^{-2} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$\omega_{BT} \rightarrow \infty$

в плоскости, ортогональной \mathbf{V} .

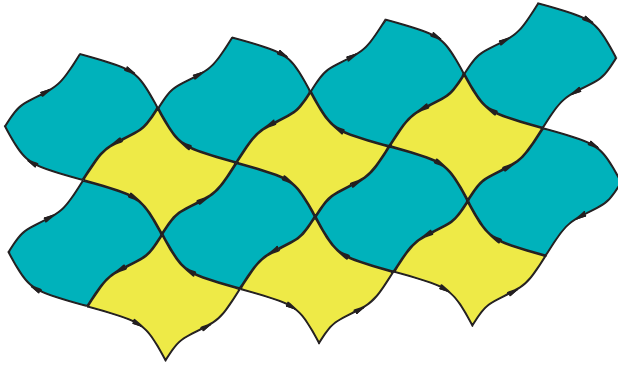


Рис. 35. Периодическая сеть особых траекторий, которая может возникнуть для чисто рациональных направлений \mathbf{V}

Для величины $\sigma^{12} = a^{12}(\omega_B \tau)^{-1}$ можно использовать формулу

$$\sigma^{12} = \frac{ec}{B} (n_e - n_h), \quad (4.3)$$

где n_e и n_h представляют собой соответственно «концентрацию электронов» и «концентрацию дырок». Принимая во внимание спиновые переменные, значения n_e и n_h можно определить как

$$n_e = 2V_e / (2\pi\hbar)^3, \quad n_h = 2V_h / (2\pi\hbar)^3,$$

где V_e и V_h — объемы, ограниченные всеми неэквивалентными цилиндрами замкнутых траекторий электронного и дырочного типов в \mathbf{p} -пространстве.

Таким образом, можно написать формулу для σ^{12} в одной из следующих форм:

$$\sigma^{12} = \frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 B} V_- \quad (\text{ситуация I}), \quad (4.4)$$

$$\sigma^{12} = -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 B} V_+ \quad (\text{ситуация II}), \quad (4.5)$$

где V_- и V_+ — объемы, определенные условиями $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ и $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ в зоне Бриллюэна.

Таким образом, можно отнести даже протяженную поверхность Ферми к электронному или дырочному типу, если она содержит только замкнутые траектории системы (1.1), и это свойство устойчиво при малых вращениях \mathbf{V} . Величина $\sigma^{12}B$ в сильных магнитных полях постоянна для данного типа поверхности Ферми и определяется формулой (4.4) или (4.5). Отметим еще раз, что для протяженных поверхностей Ферми их тип может зависеть от направления \mathbf{V} и не определен, если поверхность Ферми содержит открытые траектории системы (1.1).

Заметим теперь, что описанная выше картина может быть неверной, если направление \mathbf{V}_0 является чисто рациональным. А именно, в этом случае возможна ситуация, когда поверхность Ферми

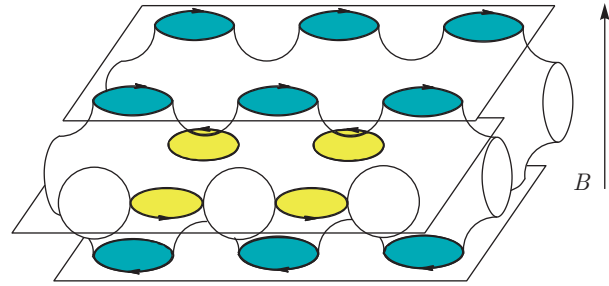


Рис. 36. Картины разных типов (I или II), возникающие в разных плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , для специального рационального направления \mathbf{B}

содержит только замкнутые траектории системы (1.1), однако типы картин, возникающих в плоскостях, ортогональных \mathbf{V}_0 , могут быть различными в разных плоскостях. «Слой» плоскостей, соответствующих разным типам (I или II), разделяются специальными плоскостями в \mathbf{p} -пространстве, содержащими «периодические сети» особых траекторий системы (1.1) (рис. 35). В этом случае ни одна из формул (4.4), (4.5) не может использоваться для величины σ^{12} , хотя формула (4.3) является верной и в этой ситуации. Нетрудно видеть в действительности, что соответствующее направление \mathbf{V}_0 принадлежит в этом случае зоне устойчивости с топологическими числами, определяемыми плоскостью Γ_0 , ортогональной \mathbf{V}_0 . В результате любое небольшое отклонение направления \mathbf{V} вызывает появление открытых траекторий на поверхности Ферми, что препятствует определению ее типа.

Описанную выше ситуацию можно рассматривать в некотором смысле как ситуацию, противоположную той, где направление \mathbf{V} лежит вне любой из зон устойчивости. Как мы уже сказали, в последнем случае можно однозначно определить тип поверхности Ферми (электронный или дырочный тип) даже для протяженных поверхностей Ферми в \mathbf{p} -пространстве.

Пример поверхности, упомянутой выше, можно легко построить, если мы рассмотрим довольно простую поверхность Ферми (ранга 3) и магнитное поле с направлением (001) в базисе обратной решетки (рис. 36). Соответствующее направление \mathbf{V}_0 принадлежит в этом случае зоне устойчивости с топологическими числами, соответствующими плоскости Γ_0 , ортогональной \hat{z} . В то же время для направления $\mathbf{V}_0 = (001)$ открытые траектории отсутствуют и существуют только замкнутые или сингулярные траектории на поверхности Ферми.

Таким образом, описанная выше особая ситуация в некотором смысле является исключительной и соответствует только специальным изолированным направлениям \mathbf{V} . В то же время эта ситуация может быть довольно частой в экспериментах, поскольку она соответствует центральным точкам наиболее симметричных зон устойчивости на угловой диаграмме. В результате, она может появляться довольно часто из-за специальной постановки эксперимента. В силу этого обстоятельства мы должны, таким образом, рассматривать этот случай наравне с общими случаями I и II.

Заметим теперь, что для многих поверхностей Ферми может иметь место ситуация, когда мы наблюдаем только случай I или случай II всюду за пределами зон устойчивости на угловой диаграмме. Эта ситуация возникает, когда все зоны устойчивости имеют первые границы (простые или сложные), соответствующие исчезновению цилиндров замкнутых траекторий одного и того же (электронного или дырочного) типа. Действительно, всякий раз, когда область $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ отделена от зоны Ω_α линией, соответствующей исчезновению цилиндра замкнутых траекторий определенного типа, реализуется ситуация I или II противоположного типа на поверхности Ферми для любого направления $\mathbf{V}/V \in \Omega'_\alpha$ общего положения. В частности, поверхность Ферми не меняет своего типа при перестройке замкнутых траекторий внутри области Ω'_α , описанных в предыдущей главе. Такая же ситуация сохраняется и после пересечения второй границы зоны устойчивости, описанного в предыдущей главе. В частности, описанная выше ситуация должна иметь место для угловых диаграмм, содержащих только конечное число зон устойчивости, которые не делят сферу S^2 на несвязанные области (рис. 37).

Назовем здесь угловые диаграммы, соответствующие приведенной выше ситуации, угловыми диаграммами типа А. Таким же образом мы можем назвать протяженную поверхность Ферми поверхностью Ферми типа А, если она имеет угловую диаграмму типа А.

В то же время ситуация, когда угловая диаграмма имеет различные области, в которых может наблюдаться как ситуация I, так и ситуация II, на поверхности Ферми, также соответствует общему случаю. В частности, такая ситуация должна возникать всякий раз, когда хотя бы одна зона устойчивости имеет составную границу, такую, что ее разные части соответствуют исчезновению цилиндров замкнутых траекторий разных (электронных или дырочных) типов. Действительно, нетрудно видеть, что

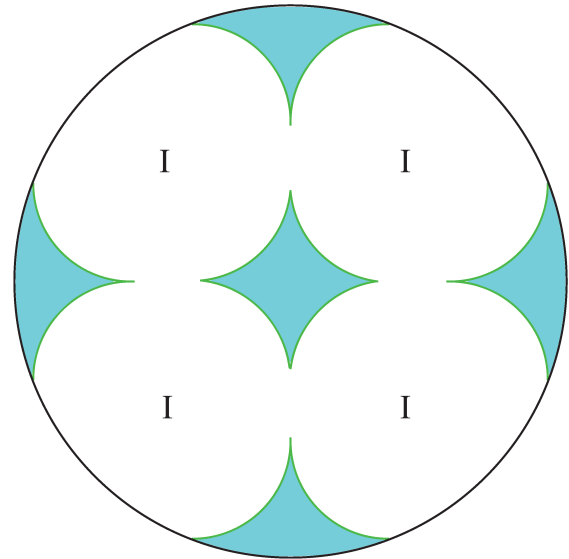


Рис. 37. «Простая» угловая диаграмма, содержащая только конечное число зон устойчивости и соответствующая картине одного и того же типа (I) на поверхности Ферми за пределами зон устойчивости (схематично, показаны только математические границы зон устойчивости)

связные компоненты области Ω'_α , смежные с соответствующими частями первой границы Ω_α , представляют собой области, соответствующие различным картинам (I или II) на поверхности Ферми. Пример такой поверхности Ферми может быть представлен рис. 10. Так, если мы изобразим обе области Ω_α и Σ_α для представления поверхности Ферми, соответствующего рис. 10, то мы увидим, что возникают разные картины (I или II) в разных связных частях области $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ (рис. 38).

Как было отмечено, тип картины замкнутых траекторий на поверхности Ферми не меняется сразу после пересечения второй границы зоны устойчивости, поэтому области I и II на рис. 38 должны быть в действительности расширены за пределы зоны Σ_α и представляют собой в действительности большие области на угловой диаграмме. В общем случае ситуации I и II могут сосуществовать на угловой диаграмме, если соответствующие области разделены множествами зон устойчивости, которые могут иметь довольно сложную структуру в общей ситуации. Таким образом, следует ожидать, что полные области, соответствующие режимам I и II, должны быть разделены на угловой диаграмме цепочками зон устойчивости, которые при детальном рассмотрении могут выглядеть довольно нетривиально. В частности, эти цепочки должны начинаться в угловых точках зоны устойчивости и мо-

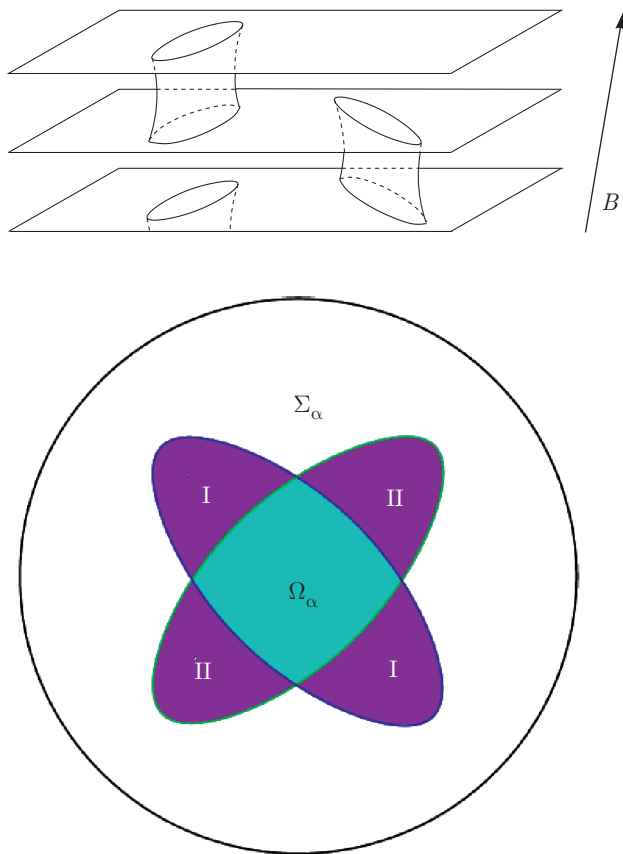


Рис. 38. Пример поверхности Ферми и зоны устойчивости с составной границей, определяемой исчезновением цилиндров замкнутых траекторий разных типов на разных ее частях. Мы имеем здесь различные ситуации (I или II), возникающие на поверхности Ферми в разных связных компонентах области $\Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$

жет наблюдаться ситуация, когда следующая зона устойчивости просто примыкает к угловой точке, и ситуация, когда бесконечное множество мельчайших зон устойчивости концентрируется вблизи угловой точки. Первая ситуация соответствует случаю необщего положения (когда направление \mathbf{V} в угловой точке соответствует появлению периодических траекторий на поверхности Ферми), в то время как вторая ситуация является основной (и соответствует случаю, когда направление \mathbf{V} в угловой точке соответствует иррациональному среднему направлению открытых траекторий). В общем случае области, соответствующие режимам I и II, разделены областями, содержащими бесконечное число уменьшающихся зон устойчивости, которые сосредоточены вдоль некоторых кривых на угловой диаграмме (рис. 39).

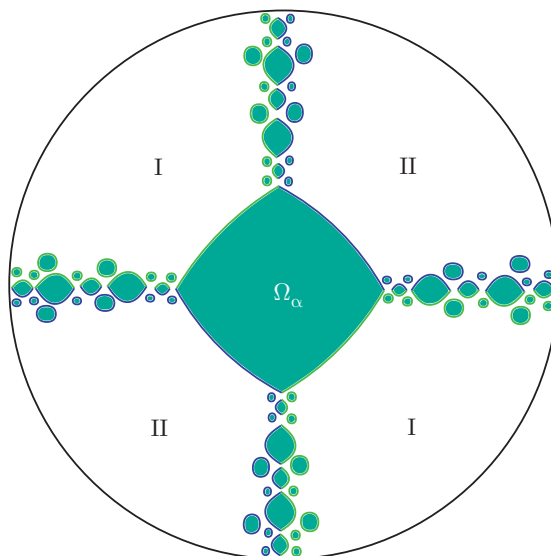


Рис. 39. Схематическое изображение угловой диаграммы, содержащей области, соответствующие различным режимам (I и II) на поверхности Ферми (очень схематично, показаны только границы конечного числа зон устойчивости)

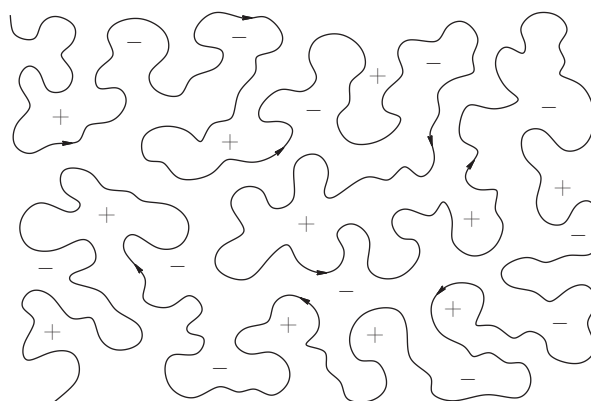


Рис. 40. Схематичное представление хаотической траектории системы (1.1) в плоскости, ортогональной \mathbf{V}

Заметим здесь, что области концентрации мелких зон устойчивости могут также содержать специальные направления \mathbf{V} , которые соответствуют появлению на поверхности Ферми более сложных хаотических траекторий. Поведение таких траекторий в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , может быть схематически представлено рис. 40 и напоминает случайное блуждание на плоскости. В результате, проводимость в сильных магнитных полях также имеет весьма специальное поведение в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ для соответствующих направлений \mathbf{V} [21]. Кроме того, поведение устойчивых открытых траекторий в

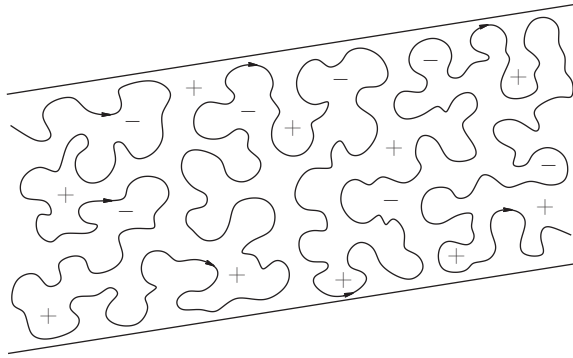


Рис. 41. Схематическое представление устойчивой открытой траектории системы (1.1) в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , для маленькой зоны устойчивости

малых зонах устойчивости имеет в действительности особенности как регулярного, так и хаотического поведения, в зависимости от временных масштабов (рис. 41). В результате, проводимость в сильных магнитных полях может также проявлять особенности как регулярного, так и особого поведения в зависимости от значения ω_{BT} . Назовем угловые диаграммы, содержащие области, соответствующие как ситуации I, так и ситуации II, угловыми диаграммами типа В.

Заметим теперь, что здесь мы рассмотрели ситуацию, когда поверхность Ферми представлена соотношением $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ для некоторого дисперсионного закона $\epsilon_s(\mathbf{p})$. В общем случае можно ожидать, что полная поверхность Ферми задается объединением нескольких компонент, соответствующих нескольким дисперсионным соотношениям. В этом случае мы всегда будем предполагать, что разные компоненты поверхности Ферми не пересекаются друг с другом.

Довольно часто мы можем в действительности иметь ситуацию, когда «протяженная» часть поверхности Ферми задается только одной компонентой $\epsilon_{s_0}(\mathbf{p}) = \epsilon_F$, в то время как остальные компоненты являются компактными в \mathbf{p} -пространстве. Легко видеть, что в этом случае угловая диаграмма проводимости полностью определяется дисперсионным соотношением $\epsilon_{s_0}(\mathbf{p})$. Единственное различие, возникающее здесь, состоит в том, что формулы (4.4), (4.5) для холловской проводимости вне зон устойчивости должны быть теперь заменены их суммой по всем необходимым дисперсионным соотношениям. Таким образом, угловая диаграмма имеет тип А, если холловская проводимость может принимать только одно постоянное значение (при фиксированном значении B , $\omega_{BT} \gg 1$) всюду за пределами зон

устойчивости, и угловая диаграмма имеет тип В, если она может принимать два разных значения вне зон устойчивости.

В общем случае можно предположить, что протяженная часть поверхности Ферми представлена несколькими протяженными компонентами $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon_F$, соответствующими разным дисперсионным соотношениям $\epsilon_s(\mathbf{p})$. Легко видеть, что полная угловая диаграмма проводимости дается суперпозицией угловых диаграмм для соответствующих дисперсионных соотношений. Важно, что при сформулированных выше требованиях зоны устойчивости для разных дисперсионных соотношений могут перекрываться только в том случае, если они соответствуют одним и тем же топологическим числам, определяющим средние направления открытых траекторий. В результате, на самом деле можно описать полную угловую диаграмму в тех же терминах, что и угловую диаграмму для конкретного дисперсионного соотношения, если допустить, что некоторые зоны устойчивости могут иметь «составную» структуру, но те же основные особенности поведения проводимости, что и «простые» зоны устойчивости. Здесь естественно сказать, что полная угловая диаграмма имеет тип В, если по крайней мере одна протяженная компонента поверхности Ферми имеет угловую диаграмму типа В. Можно также видеть, что угловая диаграмма имеет тип В, если холловская проводимость может принимать как минимум два разных значения (при фиксированном значении B , $\omega_{BT} \gg 1$) вне полных зон устойчивости на угловой диаграмме.

5. ПОЛНАЯ УГЛОВАЯ ДИАГРАММА ЗАКОНА ДИСПЕРСИИ И ВТОРЫЕ ГРАНИЦЫ ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МЕТАЛЛОВ

В этом разделе мы сделаем несколько замечаний о связи между полной угловой диаграммой для закона дисперсии и объектами, рассмотренными в предыдущих разделах. Полная угловая диаграмма для закона дисперсии (дисперсионного соотношения) была введена Дынниковым в работе [18] и может быть описана следующим образом.

Рассмотрим произвольное дисперсионное соотношение, заданное 3-периодической функцией $\epsilon(\mathbf{p})$ в \mathbf{p} -пространстве, удовлетворяющей условию $\epsilon_{min} \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_{max}$. Зафиксируем произвольное направление \mathbf{B} и рассмотрим уровни энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$, содержащие незамкнутые траектории системы (1.1). Тогда уровни энергии, содержащие незамкнутые

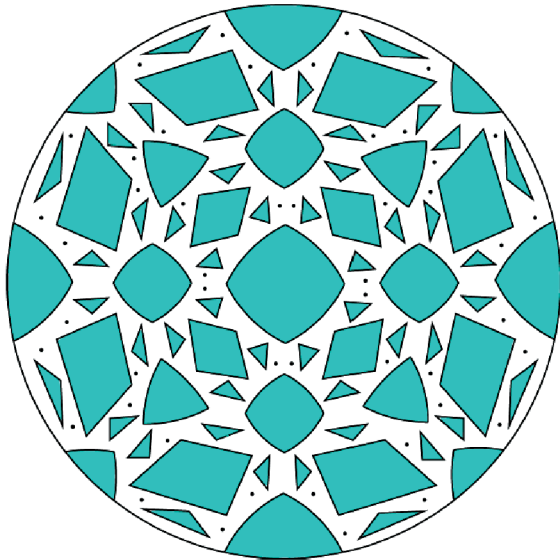


Рис. 42. Угловая диаграмма для всего дисперсионного отношения (очень схематично, показано только конечное число зон устойчивости Ω_α^* и «хаотических направлений»)

траектории системы (1.1), представляют собой либо связный интервал

$$\epsilon_1(\mathbf{V}/B) \leq \epsilon \leq \epsilon_2(\mathbf{V}/B),$$

либо только одну изолированную точку $\epsilon = \epsilon_0(\mathbf{V}/B)$.

Всякий раз, когда незамкнутые траектории появляются в конечном энергетическом интервале $[\epsilon_1(\mathbf{V}/B), \epsilon_2(\mathbf{V}/B)]$, все несобые открытые траектории системы (1.1) имеют регулярную форму, показанную на рис. 2, с одним и тем же средним направлением, заданным пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и некоторой целочисленной плоскости Γ в \mathbf{p} -пространстве.

Открытые траектории и целочисленная плоскость Γ являются устойчивыми относительно малых вращений \mathbf{V} , так что полный набор направлений \mathbf{V} , соответствующих одной и той же плоскости Γ , представляет собой конечную область с кусочно-гладкой границей на угловой диаграмме (единичная сфера S^2). Область Ω_α^* , соответствующая наличию устойчивых открытых траекторий с одной и той же целочисленной плоскостью Γ_α , может быть названа зоной устойчивости для дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$. Отметим также, что границы зон устойчивости в этом случае имеют как «электронный», так и «дырочный» типы, поскольку они соответствуют исчезновению одновременно двух цилиндров замкнутых траекторий противоположных типов. Все зоны устойчивости Ω_α^* образуют плотное множество на

угловой диаграмме (рис. 42), которая может содержать либо одну, либо бесконечно много разных зон устойчивости.

Для направлений \mathbf{V} общего положения величины $\epsilon_1(\mathbf{V}/B)$ и $\epsilon_2(\mathbf{V}/B)$ совпадают со значениями некоторых глобально определенных непрерывных функций $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$ и $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$, таких, что $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$ всюду на границах зон устойчивости. В то же время для тех направлений \mathbf{V} , которые соответствуют чисто рациональным средним направлениям открытых траекторий, мы имеем соотношения

$$\epsilon_1(\mathbf{V}/B) \leq \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B), \quad \epsilon_2(\mathbf{V}/B) \geq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B). \quad (5.1)$$

Дополнение к множеству $\{\Omega_\alpha^*\}$ на единичной сфере представляет собой очень сложное множество (канторова типа) и состоит из направлений \mathbf{V} , соответствующих появлению хаотических открытых траекторий только на одном энергетическом уровне:

$$\epsilon_0(\mathbf{V}/B) = \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B).$$

Отметим только, что структура множества таких специальных направлений и свойств хаотических траекторий в настоящее время интенсивно исследуется и представляет собой очень интересную ветвь теории динамических систем (см., например, [14, 18, 21, 29–31, 33–46]).

Возвращаясь к теории нормальных металлов, мы видим, что незамкнутые траектории возникают на поверхности Ферми, если выполнено одно из следующих соотношений:

$$\epsilon_1(\mathbf{V}/B) < \epsilon_F < \epsilon_2(\mathbf{V}/B) \quad \text{или} \quad \epsilon_F = \epsilon_0(\mathbf{V}/B).$$

В результате в реальных металлах мы можем наблюдать лишь некоторые части Ω_α зон Ω_α^* , которые теперь не являются всюду плотными на единичной сфере. Соотношение (5.1) также дает возможность существования периодических открытых траекторий на поверхности Ферми вне зон устойчивости Ω_α на соответствующей угловой диаграмме.

Таким образом, для любой зоны устойчивости Ω_α мы всегда имеем включение $\Omega_\alpha \subset \Omega_\alpha^*$ на угловой диаграмме. Можно также показать, что всегда имеется включение $\Omega_\alpha^* \subset \Sigma_\alpha$ для областей Σ_α , введенных в предыдущих разделах. Так, можно в действительности утверждать, что производная $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ любой зоны устойчивости Ω_α всегда содержит полную границу соответствующей зоны Ω_α^* . Другая связь между полной угловой диаграммой закона дисперсии и угловой диаграммой для фиксированной поверхности Ферми может быть обнаружена в типе диаграммы (А или В), введенном

в предыдущем разделе. Действительно, тип угловой диаграммы реального металла тесно связан с положением уровня Ферми ϵ_F по отношению к значениям $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/V)$ и $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/V)$ при различных направлениях \mathbf{V} . Так, угловая диаграмма металла имеет тип А, если везде на \mathbb{S}^2 выполняется одно из следующих соотношений:

$$\epsilon_F \leq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/V) \quad (\text{электронный тип})$$

или

$$\epsilon_F \geq \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/V) \quad (\text{дырочный тип}).$$

В то же время угловая диаграмма металла имеет тип В, если в разных частях \mathbb{S}^2 можно найти оба соотношения

$$\epsilon_F > \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/V)$$

и

$$\epsilon_F < \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/V).$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен ряд общих вопросов, касающихся поведения электропроводности нормальных металлов в присутствии сильного магнитного поля. Основные обсуждения были посвящены особенностям угловой диаграммы проводимости в случае появления устойчивых открытых квазиклассических электронных траекторий на поверхности Ферми при определенных направлениях \mathbf{V} . В частности, было показано, что каждая зона устойчивости Ω_α на угловой диаграмме, соответствующая наличию устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми, имеет вторую границу, ограничивающую специальную область Ω'_α вокруг зоны Ω_α . Для направлений \mathbf{V} , принадлежащих области Ω'_α , квазиклассические электронные траектории на поверхности Ферми допускают эффективное описание, связанное с описанием устойчивых открытых траекторий для зоны Ω_α . Эффективное описание квазиклассических электронных траекторий позволяет указать ряд особенностей поведения проводимости и других величин в области Ω'_α , что позволяет отличить эту область от других областей на угловой диаграмме. С экспериментальной точки зрения, наиболее удобным методом определения границ (первой и второй) зоны Ω_α и исследования внутренней структуры области Ω'_α является изучение осцилляционных явлений (классических и квантовых) для соответствующих направлений магнитного поля.

Другим вопросом, обсуждаемым в статье, является сложность распределения зон Ω_α и Ω'_α на угловой диаграмме для металла с произвольной поверхностью Ферми. В частности, мы рассматриваем

здесь теоретическую возможность разделения всех угловых диаграмм на два типа, предполагающих более простую и более сложную структуры для расположения этих зон в пространстве направлений \mathbf{V} . Как можно также показать, сложность угловой диаграммы тесно связана с поведением холловской проводимости вне зон устойчивости в присутствии сильного магнитного поля.

В заключение, мы сравниваем описанные свойства угловых диаграмм для проводимости в металлах со свойствами угловых диаграмм для полных дисперсионных соотношений, которые могут быть введены на теоретическом уровне. В этом случае можно указать на ряд существенных взаимосвязей между угловыми диаграммами обоих типов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00316).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
2. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
3. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).
4. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959).
5. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **78**, 411 (1962).
6. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
7. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
8. M. I. Kaganov and V. G. Peschansky, Phys. Rep. **372**, 445 (2002).
9. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
10. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
11. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
12. С. П. Царев, Частное сообщение (1992-93).
13. И. А. Дынников, Матем. заметки **53**, 57 (1993).
14. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.

15. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
16. А. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Bulletin Braz. Math. Soc., New Series **34**, 171 (2003).
17. А. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
18. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
19. R. De Leo, Physica B: Cond. Matt. **362**, 62 (2005).
20. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
21. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997).
22. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **151**, 944 (2017).
23. Р. Н. Гуржи, А. И. Копелиович, *Низкотемпературная электропроводность чистых металлов*, в сб.: *Электроны проводимости*, под ред. М. И. Каганова, В. С. Эдельмана, Наука, Москва (1985).
24. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **152**, 1053 (2017).
25. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ **32**, 896 (1957).
26. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
27. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974).
28. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
29. A. V. Zorich, Proc. *Geometric Study of Foliations*, ed. by T. Mizutani et al., Tokyo (1993).
30. A. V. Zorich, Annales de l'Institut Fourier **46**, 325 (1996).
31. A. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 173.
32. A. Zorich, Ergodic Theory and Dynamical Systems **17**, 1477 (1997).
33. A. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 197, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
34. Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000).
35. Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003).
36. R. De Leo, Exper. Math. **15**, 109 (2006).
37. A. Zorich, in: *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry*, Vol. 1: *On Random Matrices, Zeta Functions and Dynamical Systems*, Ecole de physique des Houches, France, March 9–21 (2003), P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, and P. Vanhove (Editors), Springer-Verlag, Berlin (2006), p. 439.
38. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Russ. Math. Surv. **62**, 990 (2007).
39. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**, 51 (2009).
40. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Sys. **32**, 643 (2012).
41. A. Skripchenko, Ann. Glob. Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
42. I. Dynnikov and A. Skripchenko, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 234, AMS, Providence, RI (2014), p. 173; arXiv:1309.4884.
43. I. Dynnikov and A. Skripchenko, Trans. Moscow Math. Soc. **76**, 287 (2015).
44. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Invent. Math. **206**, 109 (2016).
45. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Bulletin de la Societe Mathematique de France **144**, 539 (2016).
46. R. De Leo, arXiv:1711.01716.