

# СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ КЕРРА – НЬЮМЕНА

*В. П. Незнамов\**, *И. И. Сафронов*, *В. Е. Шемарулин*

ФГУП «РФЯЦ–ВНИИЭФ»  
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия

Поступила в редакцию 20 июня 2018 г.,  
после переработки 20 июня 2018 г.  
Принята к публикации 12 июля 2018 г.

При использовании для фермионов квантовомеханического уравнения второго порядка с эффективным потенциалом поля Керра–Ньюмена (KN) получены результаты, качественно отличающиеся от результатов, получаемых при использовании уравнения Дирака. При наличии двух горизонтов событий доказано существование вырожденных стационарных связанных состояний заряженных и незаряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями, обращающимися в нуль на горизонтах событий. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий с максимумами плотностей вероятности, отстоящими от горизонтов событий на доли комптоновской длины волны фермионов в зависимости от величин констант связи, от величин углового и орбитального моментов  $j, l$  и от величины азимутального квантового числа  $m_\varphi$ . В случае экстремальных полей KN показано отсутствие стационарных связанных состояний фермионов для любых значений констант связи. Для заряженных и незаряженных фермионов в поле голой сингулярности KN при определенных значениях физических параметров показано существование дискретных энергетических спектров. В квантовой механике с уравнением второго порядка из-за регулярного поведения эффективных потенциалов поля KN в окрестности начала координат голая сингулярность KN не несет угрозы космической цензуре.

DOI: 10.1134/S0044451019010061

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1976 г. Чандрасекар [1, 2], Пейдж [3], Тооп [4] показали, что в уравнении Дирака для точечного фермиона в пространстве-времени Керра [5] и Керра–Ньюмена [6] можно провести разделение угловых и радиальных переменных. С тех пор поведение фермиона во внешних полях Керра и Керра–Ньюмена изучалось в многочисленных работах (см., например, [7–18]). В работах [19–22] уравнение Дирака изучалось в пространстве-времени Керра–Ньюмена в пределе  $G \rightarrow 0$ , где  $G$  — ньютонова постоянная всемирного тяготения.

В работах [23, 24] и позднее в [21, 22] изучалась нетривиальная топология метрик Керра и Керра–Ньюмена, связанная с кольцевой сингулярностью. В работах [23, 24] показано, что максимально аналити-

чески расширенное множество Керра–Ньюмена поперечно связано через кольцо. Такая топология сохраняется для метрики Керра и для «нулевой» гравитации  $G \rightarrow 0$ .

При наличии горизонтов событий в работах [8–10, 15] показано отсутствие стационарных связанных состояний уравнения Дирака для областей определения волновых функций фермиона вне и под горизонтами событий. В данной работе в разд. 2 эти выводы также подтверждаются.

Ситуация качественно изменяется, если движение фермионов описывать самосопряженным уравнением второго порядка со спинорной волновой функцией. Впервые уравнение второго порядка во внешнем электромагнитном поле было предложено Дираком [25]. Используя соотношение между верхним и нижним спинорами дираковского биспинора, уравнение второго порядка можно записать в виде двух отдельных уравнений со спинорными волновыми функциями. При этом для самосопряженности уравнений второго порядка необходимо для каждо-

\* E-mail: vpneznamov@vniief.ru, vpneznamov@mail.ru

го из них проводить неунитарные преобразования подобия (см., например, [26]). В результате при использовании самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями в квантовой механике частиц со спином  $1/2$  во внешних электромагнитных и гравитационных полях могут возникать и возникают новые физические следствия.

В данной работе уравнение второго порядка с эффективным потенциалом используется для описания движения фермионов в геометрии Керра – Ньюмена (KN). При соответствующих значениях начальных параметров это уравнение описывает движение фермионов в полях Шварцшильда [27] и Райсснера – Нордстрёма [28]. При отсутствии гравитации уравнение второго порядка описывает движение фермионов в эффективном кулоновском поле [26].

При наличии двух горизонтов событий метрики KN для заряженных и незаряженных фермионов мы обосновали и доказали существование стационарных связанных состояний фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями, обращающимися в нуль на горизонтах событий. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности обнаружения частиц отстоят от горизонта событий на доли комптоновской длины волны фермионов в зависимости от гравитационной и электромагнитных констант связи, углового момента источника поля KN, квантовых чисел углового и орбитального моментов  $j, l$  и азимутального квантового числа  $m_\varphi$ .

Для экстремального поля KN с единственным горизонтом событий доказана невозможность существования стационарных связанных состояний фермионов.

Для голой сингулярности KN при определенных значениях физических параметров обосновано и численно показано существование дискретных энергетических спектров частиц со спином  $1/2$ .

В геометрии Керра – Ньюмена эффективный потенциал уравнения второго порядка конечен в начале координат. Следовательно, поле голой сингулярности KN в квантовой механике движения фермионов не несет угрозы космической цензуре. Аналогичные выводы ранее были сделаны для голой сингулярности Райсснера – Нордстрёма [28] и для ряда времениподобных голых сингулярностей в квантовой механике бесспиновых частиц [29].

Работа построена следующим образом. В разд. 2 для геометрии KN получено самосопряженное урав-

нение Дирака, проведено разделение переменных, представлена система уравнений для радиальных волновых функций, рассматриваются асимптотики радиальных волновых функций, определяются нерегулярные стационарные решения уравнения Дирака в поле KN. Рассмотрение проводится для случая наличия двух горизонтов событий, для экстремального поля KN с единственным горизонтом событий и для случая голой сингулярности KN.

В разд. 3 в геометрии KN получено самосопряженное уравнение второго порядка со спинорными волновыми функциями фермионов. Обсуждаются особенности эффективных потенциалов и асимптотики радиальной волновой функции уравнения второго порядка.

Особенности эффективных потенциалов и поведение радиальных волновых функций свидетельствуют о возможности существования стационарных связанных состояний фермионов как при наличии двух горизонтов, так и для случая голой сингулярности KN. Отсутствие потенциальной ямы для экстремального поля KN свидетельствует об отсутствии в этом случае связанных состояний фермионов.

В разд. 4 уравнение второго порядка с эффективным потенциалом после преобразования Прюфера [30–33] и введения фазовой функции представляется в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

В разд. 5 приводятся результаты численных расчетов по определению стационарных связанных состояний фермионов в поле KN. Обсуждается тактика проведения расчетов в окрестностях особых точек ( $r = \pm\infty$  – регулярные особые точки,  $r = (r_\pm)_{KN}$ ,  $r = r_{cl}$  – иррегулярные особые точки). Здесь  $(r_\pm)_{KN}$  – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий,  $r_{cl}$  – радиус непроницаемого барьера, который может возникать при определенных значениях физических параметров вблизи начала координат.

В разд. 6 устанавливается отсутствие угрозы космической цензуре в квантовой механике движения фермионов в поле голой сингулярности KN.

В Заключение излагаются и обсуждаются основные результаты работы.

В Приложении приводится явный вид эффективных потенциалов уравнения второго порядка в поле KN.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПОЛЯХ КЕРРА И КЕРРА – НЬЮМЕНА

В работе, как правило, используется система единиц  $\hbar = c = 1$ ; сигнатура метрики плоского пространства Минковского выбрана равной

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

Здесь и ниже подчеркнутые индексы являются локальными. Индексы с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3; индексы с латинскими буквами – значения 1, 2, 3. Используется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

### 2.1. Метрики Керра и Керра – Ньюмена

Стационарная метрика Керра – Ньюмена характеризуется точечным источником с массой  $M$ , зарядом  $Q$ , вращающимся с угловым моментом  $\mathbf{J} = M\mathbf{cs}$ . Метрику Керра – Ньюмена в координатах Бойера – Линдквиста  $(t, r, \theta, \varphi)$  [34] можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2}\right) dt^2 + \frac{2a(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{r_K^2}{\Delta_{KN}} dr^2 - r_K^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2)$$

В (2)

$$r_K^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Delta_{KN} = r^2 f_{KN} = r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2 + a^2}{r^2}\right),$$

$r_0 = 2GM/c^2$  – гравитационный радиус поля Шварцшильда,  $r_Q = \sqrt{G}Q/c^2$ ,  $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света.

1. Если  $r_0 > 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ , то

$$f_{KN} = \left(1 - \frac{(r_+ )_{KN}}{r}\right) \left(1 - \frac{(r_- )_{KN}}{r}\right), \quad (3)$$

где  $(r_{\pm})_{KN}$  – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля Керра – Ньюмена,

$$(r_{\pm})_{KN} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай  $r_0 = 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ ,  $(r_+ )_{KN} = (r_- )_{KN} = r_0/2$  соответствует экстремальному полю Керра – Ньюмена.

3. Случай  $r_0 < 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$  соответствует голой сингулярности поля Керра – Ньюмена. В этом случае  $f_{KN} > 0$ .

4. При  $Q = 0$  метрика Керра – Ньюмена переходит в метрику Керра с

$$\Delta_K = r^2 f_K = r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (5)$$

$$(r_{\pm})_{KN} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2}. \quad (6)$$

### 2.2. Самосопряженное уравнение Дирака

Если записать уравнения Дирака в гамильтоновой форме, то гамильтонианы Чандрасекара [1, 2] и Пейджа [3] будут псевдоэрмитовыми с весовыми множителями Паркера [35] в скалярных произведениях волновых функций. Самосопряженные гамильтонианы с плоскими скалярными произведениями волновых функций можно получить с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [36–38]. В работах [38, 39] такие гамильтонианы были получены для метрик Керра и Керра – Ньюмена. В работе [40] для метрики Керра доказана эквивалентность самосопряженного гамильтониана в [38] и гамильтониана Чандрасекара в [1, 2]. Недостатком гамильтониана в [38] является невозможность проведения разделения переменных. Ниже для метрик Керра и Керра – Ньюмена получены самосопряженные уравнения Дирака, допускающие разделение переменных.

Начнем с уравнений Дирака для метрик Керра и Керра – Ньюмена, полученных в работах Чандрасекара, Пейджа и записанных в форме [9]:

$$(G - 1)\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_+ & \beta_+ \\ 0 & -1 & \beta_- & \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})\alpha_- \\ \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})\bar{\alpha}_- & -\bar{\beta}_+ & -1 & 0 \\ -\bar{\beta}_- & \bar{\alpha}_+ & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \Psi = 0. \quad (7)$$

В (7)  $\Psi$  – биспинорная волновая функция,

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \times \left( i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg} \theta}{2} + \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( \alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (8)$$

$$\bar{\beta}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \times \left( i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg } \theta}{2} - \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( \alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (9)$$

$$\alpha_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{KN}|}} \times \left( i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} - \alpha_{em} \rho \right) \pm \sqrt{\frac{|\Delta_{KN}|}{\rho_K^2}} \times \left( i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{KN}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right), \quad (10)$$

$$\bar{\alpha}_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{KN}|}} \times \left( i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} - \alpha_{em} \rho \right) \pm \sqrt{\frac{|\Delta_{KN}|}{\rho_K^2}} \times \left( i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{KN}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right). \quad (11)$$

Выражения (7)–(11) записаны в безразмерных переменных

$$\rho = \frac{r}{l_c}, \quad \varepsilon = \frac{E}{m}, \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2},$$

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G} Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m \frac{Q}{e}, \quad (12)$$

$$\alpha_a = \frac{a}{l_c}, \quad \alpha_{em} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{qQ}{e^2}.$$

Здесь  $l_c = \hbar/mc$  – комптоновская длина волны частицы со спином  $1/2$ ;  $M_P = \sqrt{\hbar c/G} = 2.2 \cdot 10^{-5}$  г ( $1.2 \cdot 10^{19}$  ГэВ) – планковская масса;  $\alpha_{fs} = e^2/\hbar c \approx 1/137$  – электромагнитная постоянная тонкой структуры;  $\alpha$ ,  $\alpha_{em}$  – гравитационная и электромагнитная константы связи;  $\alpha_Q$ ,  $\alpha_a$  – безразмерные константы, характеризующие источник электромагнитного поля и отношение углового момента  $J$  к массе  $M$  в метрике Керра–Ньюмена.

Величины  $\rho_K^2$ ,  $\Delta_{KN}$  в безразмерных переменных имеют вид

$$\rho_K^2 = \rho^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta, \quad (13)$$

$$R = \begin{pmatrix} i\rho & 0 & \sqrt{|\Delta_{KN}|} D_+ & 0 \\ 0 & -i\rho & 0 & \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN}) \sqrt{|\Delta_{KN}|} D_- \\ \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN}) \sqrt{|\Delta_{KN}|} D_- & 0 & -i\rho & 0 \\ 0 & \sqrt{|\Delta_{KN}|} D_+ & 0 & i\rho \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\Delta_{KN} = \rho^2 f_{KN} = \rho^2 \left( 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2} \right). \quad (14)$$

В присутствии внешнего и внутреннего горизонтов событий  $\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$  и

$$f_{KN} = \frac{(\rho - (\rho_+)_{KN})(\rho - (\rho_-)_{KN})}{\rho^2}, \quad (15)$$

где

$$(\rho_{\pm})_{KN} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}. \quad (16)$$

Для экстремального поля KN  $\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ ,  $(\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha$  и

$$f_{KN} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}. \quad (17)$$

При  $\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$  реализуется случай голой сингулярности поля KN. В формулах (10), (11)

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для получения более симметричного вида уравнения (7), в соответствии с [9], проведем некоторые преобразования. Пусть  $S(\rho, \theta)$  и  $\Gamma(\rho, \theta)$  – диагональные матрицы вида

$$S = |\Delta_{KN}^{1/4}| \times \text{diag} \left[ (\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2} \right], \quad (19)$$

$$\Gamma = -i \text{diag} [(\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho - i\alpha_a \cos \theta), (\rho - i\alpha_a \cos \theta)].$$

Тогда преобразованная волновая функция

$$\hat{\Psi} = S\Psi \quad (20)$$

удовлетворяет уравнению

$$\Gamma S(G - 1)S^{-1}\hat{\Psi} = (R + A)\hat{\Psi} = 0, \quad (21)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_a \cos \theta & 0 & 0 & L_+ \\ 0 & \alpha_a \cos \theta & -L_- & 0 \\ 0 & L_+ & -\alpha_a \cos \theta & 0 \\ -L_- & 0 & 0 & \alpha_a \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (23)$$

В формулах (22), (23)

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \rho} \mp \frac{1}{\Delta_{KN}} \times \left( (\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \alpha_{em} \rho \right), \quad (24)$$

$$L_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \mp i \left( \alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (25)$$

Оператор  $R$  зависит только от радиальной переменной  $\rho$ , а оператор  $A$  — только от угловых переменных  $\theta, \varphi$ .

Если представить функцию  $\hat{\Psi}$  в виде

$$\hat{\Psi}(t, \rho, \theta, \varphi) = e^{-i\epsilon t} e^{im\varphi} \hat{\Phi}(\rho, \theta), \quad (26)$$

где

$$\hat{\Phi}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} R_-(\rho) S_-(\theta) \\ R_+(\rho) S_+(\theta) \\ R_+(\rho) S_-(\theta) \\ R_-(\rho) S_+(\theta) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

то можно получить системы уравнений Чандрасекара–Пейджа отдельно для радиальных функций  $R_{\mp}(\rho)$  и для угловых сферидальных гармоник  $S_{\mp}(\theta)$ .

Уравнения Дирака (7), (21) получены при использовании матриц Дирака с локальными индексами в спинорном представлении (представление Вейля):

$$\gamma_W^0 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_W^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\alpha_W^k = \gamma_W^0 \gamma_W^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}.$$

Ранее для записи гамильтонианов в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма [27, 28] нами использованы матрицы в представлении Дирака–Паули:

$$\gamma_{DP}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{DP}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\alpha_{DP}^k = \gamma_{DP}^0 \gamma_{DP}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы в представлении Дирака–Паули связаны с матрицами в представлении Вейля унитарным преобразованием:

$$\gamma_{DP}^{\mu} = M \gamma_W^{\mu} M^+, \quad M^+ = M^{-1}, \quad (30)$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (31)$$

В (31)  $I$  — двумерная единичная матрица.

Проведем унитарное преобразование (31) волновой функции (26), (27) и уравнения Дирака (21). Преобразованная функция  $\hat{\Phi}_{DP}$  имеет вид

$$\hat{\Phi}_{DP} = M \hat{\Phi}(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (R_- - R_+) S_- \\ (R_+ - R_-) S_+ \\ (R_- + R_+) S_- \\ (R_- + R_+) S_+ \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Далее учтем свойство анзаца радиальных волновых функций Чандрасекара–Пейджа [21, 41],

$$\begin{aligned} R_-(\rho) &= R_+^*(\rho), \\ R_+(\rho) &= R_-^*(\rho), \end{aligned} \quad (33)$$

и введем вещественные радиальные функции

$$\begin{aligned} g(\rho) &= R_-(\rho) + R_+(\rho), \\ f(\rho) &= i(R_+(\rho) - R_-(\rho)). \end{aligned} \quad (34)$$

С учетом (34) функцию  $\hat{\Phi}_{DP}$  можно записать в виде

$$\hat{\Phi}_{DP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f(\rho) i \sigma^3 \xi_{KN}(\theta) \\ g(\rho) \xi_{KN}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Спинор  $\xi_{KN}(\theta)$  равен

$$\xi_{KN}(\theta) = \begin{pmatrix} S_-(\theta) \\ S_+(\theta) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$S_{\mp}(\theta)$  — сферидальные гармоники для спина 1/2, подчиняющиеся угловым уравнениям Чандрасекара–Пейджа. В отсутствие вращения  $\alpha_a = 0$  и

$$\xi_{KN}(\theta) = \xi(\theta) = \begin{pmatrix} -_{1/2}Y(\theta) \\ +_{1/2}Y(\theta) \end{pmatrix},$$

где  $-_{1/2}Y(\theta), +_{1/2}Y(\theta)$  — сферические гармоники для спина 1/2 (см., например, [27, 28, 42]).

Спинор  $\xi_{KN}(\theta)$  удовлетворяет уравнению

$$\left(i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta\right) + \sigma^1 \left(-\alpha_a \varepsilon \sin \theta + \frac{m_\varphi}{\sin \theta}\right) - \sigma^3 \alpha_a \cos \theta\right) \xi_{KN}(\theta) = -\lambda \xi_{KN}(\theta). \quad (37)$$

Из (37) следуют угловые уравнения Чандрасекара – Пейджа для сферoidalных гармоник  $S_{\mp}(\theta)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta\right) S_+ - \left(\alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta}\right) S_+ &= \\ &= -(\lambda - \alpha_a \cos \theta) S_-, \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta\right) S_- + \left(\alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta}\right) S_- &= \\ &= (\lambda + \alpha_a \cos \theta) S_+. \end{aligned} \quad (38)$$

В отличие от полей Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма, константа разделения  $\lambda$  в (38) зависит от  $\varepsilon, \alpha_a, j, l, m_\varphi$ .

Преобразованное уравнение Дирака (21) для функции  $\hat{\Psi}_{DP}$  будет иметь вид

$$(i\gamma^3)M(R+A)M^{-1}\hat{\Psi}_{DP} = 0. \quad (39)$$

В (39) для удобства преобразованное уравнение слева умножено на матрицу  $i\gamma^3$ . Кроме того, для сравнения с уравнением Дирака в полях Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма в уравнении (39) будем использовать волновую функцию

$$\Psi_{KN} = \frac{\hat{\Psi}_{DP}}{\rho\sqrt{f_{KN}}}. \quad (40)$$

Перед тем, как написать уравнение (39) с учетом (40) в явном виде, следует отметить, что при использовании вещественных радиальных волновых функций  $f(\rho), g(\rho)$  будут использоваться положительные значения  $\Delta_{KN} \geq 0, f_{KN} \geq 0$ . В этом случае  $\hat{\varepsilon}(\Delta_{KN}) = 1$ . При наличии горизонтов событий условие  $\Delta_{KN} \geq 0$  исключает из области определения волновых функций сферический слой между внешним и внутренним горизонтами событий.

В результате уравнение Дирака для  $\Psi_{KN}$  (40) имеет вид

$$\begin{aligned} (\omega - \gamma^0 \sqrt{f_{KN}}) \Psi_{KN} &= \\ &= \left\{ -i\gamma^0 \gamma^3 \left( f_{KN} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \frac{\sqrt{f_{KN}}}{\rho} \times \right. \\ &\times \left[ -i\gamma^0 \gamma^5 \alpha_a \cos \theta - i\gamma^0 \gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - \right. \\ &\left. \left. - \gamma^0 \gamma^2 \left( \varepsilon \alpha_a \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) \right] \right\} \Psi_{KN}. \end{aligned} \quad (41)$$

В (41)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega = \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (42)$$

Уравнение (41) является самосопряженным и в отсутствие вращения ( $\alpha_a = 0$ ) совпадает с уравнением Дирака в поле Райсснера – Нордстрёма [28].

### 2.3. Разделение переменных

Для уравнения (41) допустима стандартная процедура разделения переменных. Сначала (41) записывается в виде системы уравнений для верхнего и нижнего спиноров функции  $\Psi_{KN}$ . Затем используется уравнение (37) для  $\xi_{KN}(\theta)$ . В итоге получаются уравнения для вещественных радиальных функций  $F_{KN}(\rho) = f(\rho)/\rho\sqrt{f_{KN}}, G_{KN}(\rho) = g(\rho)/\rho\sqrt{f_{KN}}$ :

$$\begin{aligned} \left( f_{KN} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{\lambda\sqrt{f_{KN}}}{\rho} \right) F_{KN}(\rho) - \\ - \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{KN}} \right) \times \\ \times G_{KN}(\rho) = 0, \\ \left( f_{KN} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\lambda\sqrt{f_{KN}}}{\rho} \right) G_{KN}(\rho) + \\ + \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{KN}} \right) \times \\ \times F_{KN}(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Уравнения (43) по своей структуре схожи с уравнениями для поля Райсснера – Нордстрёма. При  $\alpha_a = 0$  (отсутствие вращения) уравнения (43) совпадают с системой уравнений для поля Райсснера – Нордстрёма.

### 2.4. Асимптотика радиальных волновых функций

#### 2.4.1. Наличие горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}, (\rho_-)_{KN}, \alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$

Из уравнений (43) следует, что при  $\rho \rightarrow \infty$  ведущие члены асимптотик имеют вид

$$\begin{aligned} F_{KN} &= C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}, \\ G_{KN} &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \times \\ &\times \left( -C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

В (44)  $\varphi_1(\rho)$ ,  $\varphi_2(\rho)$  — степенные функции от  $\rho$ ;  $C_1$ ,  $C_2$  — постоянные интегрирования.

При определении связанных состояний дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (44), т.е. в этом случае  $C_2 = 0$ .

При  $\rho \rightarrow \rho_+$  представим функции  $F_{KN}(\rho)$ ,  $G_{KN}(\rho)$  в виде

$$\begin{aligned} F_{KN}|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} &= |\rho - (\rho_+)_{KN}|^{s_+} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(+)} |\rho - (\rho_+)_{KN}|^k, \\ G_{KN}|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} &= |\rho - (\rho_+)_{KN}|^{s_+} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(+)} |\rho - (\rho_+)_{KN}|^k. \end{aligned} \quad (45)$$

Определяющее уравнение для системы (43) приводит к решению

$$\begin{aligned} s_+ &= -\frac{1}{2} \pm i \frac{(\rho_+)_{KN}^2}{(\rho_+)_{KN} - (\rho_-)_{KN}} \times \\ &\times \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{(\rho_+)_{KN}^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_+)_{KN}^2} - \frac{\alpha_{em}}{(\rho_+)_{KN}} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Формулы (45), (46) показывают, что функции  $F_{KN}(\rho)$ ,  $G_{KN}(\rho)$  являются квадратично-неинтегрируемыми на внешнем горизонте событий  $\rho = (\rho_+)_{KN}$ . Вид осциллирующей части функций (45) для

$$\varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}$$

свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на внешний горизонт событий [43, 44].

При  $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$  представим функции  $F_{KN}(\rho)$ ,  $G_{KN}(\rho)$  в виде

$$\begin{aligned} F_{KN}|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} &= |(\rho_-)_{KN} - \rho|^{s_-} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(-)} |(\rho_-)_{KN} - \rho|^k, \\ G_{KN}|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} &= |(\rho_-)_{KN} - \rho|^{s_-} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(-)} |(\rho_-)_{KN} - \rho|^k. \end{aligned} \quad (47)$$

В этом случае решение определяющего уравнения для системы (43) имеет вид

$$\begin{aligned} s_- &= -\frac{1}{2} \pm i \frac{(\rho_-)_{KN}^2}{(\rho_+)_{KN} - (\rho_-)_{KN}} \times \\ &\times \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{(\rho_-)_{KN}^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_-)_{KN}^2} - \frac{\alpha_{em}}{(\rho_-)_{KN}} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Выражения (47), (48) показывают, что функции  $F_{KN}(\rho)$ ,  $G_{KN}(\rho)$  являются квадратично-неинтегрируемыми на внутреннем горизонте событий  $\rho = (\rho_-)_{KN}$ . Вид осциллирующих частей функций (47) для

$$\varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}$$

свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на внутренний горизонт событий [43, 44].

Известно [19], что при  $\rho \rightarrow 0$  существуют два квадратично-интегрируемых решения уравнения Дирака в поле Керра – Ньюмена. Если представить

$$\begin{aligned} F_{KN}|_{\rho \rightarrow 0} &= \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(0)} \rho^k, \\ G_{KN}|_{\rho \rightarrow 0} &= \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(0)} \rho^k, \end{aligned} \quad (49)$$

то решения определяющего уравнения для системы (43) равны  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 1$  [20]. Для обоих решений  $s_1$ ,  $s_2$  функции  $F_{KN}$ ,  $G_{KN}$  при  $\rho \rightarrow 0$  являются квадратично-интегрируемыми. Решение этой проблемы предложено в работе [21] с использованием двухлистной топологии метрики Керра – Ньюмена, позволяющей осуществлять начало интегрирования уравнений (43) с  $r \rightarrow -\infty$ .

Граничные условия для экспоненциально убывающих решений при  $r \rightarrow -\infty$  следуют из (44):

$$\begin{aligned} F_{KN} &= C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}, \\ G_{KN} &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}. \end{aligned} \quad (50)$$

#### 2.4.2. Экстремальное поле Керра – Ньюмена $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2)$

При  $\rho \rightarrow \infty$  верна асимптотика (44). Как и в предыдущем разделе, мы заменяем неоднозначную асимптотику при  $\rho \rightarrow 0$  на асимптотику при  $\rho \rightarrow -\infty$  (50). При  $\rho \rightarrow \alpha$  слева и справа от горизонта и при

$$\varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}$$

ведущая особенность эффективного потенциала имеет вид (см. (85) и Приложение)

$$\begin{aligned} U_{eff}^F \left( \varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2} \right) &= -\frac{\alpha^4}{2(\rho - \alpha)^4} \times \\ &\times \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha^2} - \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (51)$$

что свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на горизонт событий.

**2.4.3. Голая сингулярность Керра–Ньюмена**  
 $(\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2); \rho \in (0, \infty)$

При  $\rho \rightarrow \infty$  справедлива асимптотика (44). Как и в разд. 2.4.1, 2.4.2, мы будем использовать асимптотику при  $\rho \rightarrow -\infty$  (50) вместо неоднозначной асимптотики при  $\rho \rightarrow 0$ .

**2.5. Стационарные решения уравнения Дирака**

**2.5.1. Нерегулярные стационарные решения уравнения Дирака**

При наличии горизонтов событий  $(\rho_+)_{KN}$ ,  $(\rho_-)_{KN}$  из выражений (45)–(48) следует, что существуют решения, для которых отсутствует осциллирующая часть рассматриваемых асимптотик:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_\pm)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_{KN}^2} - \text{метрика KN}, \quad (52)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_{KN}^2} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha(\rho_\pm)_K} \quad (53)$$

– метрика Керра (K),  $\alpha_{em} = 0$ ,  $\alpha_Q = 0$ .

В отсутствие вращения ( $\alpha_a = 0$  выражения (52), (53) совпадают с решениями для метрики Райсснера–Нордстрёма (RN) и метрики Шварцшильда (S), подробно исследованными в работах [27, 28]:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{(\rho_\pm)_{KN}} - \text{метрика RN}, \quad (54)$$

$$\varepsilon = 0 - \text{метрика S}. \quad (55)$$

Для этих решений уравнения Дирака отсутствует режим «падения» частиц на горизонты событий, однако решения (52), (53) являются нерегулярными из-за расходимости нормировочных интегралов асимптотик волновых функций (45), (47) вблизи горизонтов событий.

**2.5.2. Регулярные стационарные решения уравнения Дирака для экстремального поля Керра–Ньюмена**  
 $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2)$

В этом случае решения (52), (53) имеют вид

$$\varepsilon_{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}\alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2} - \text{метрика KN}, \quad (56)$$

$$\varepsilon_{ext} = \frac{m_\varphi}{2\alpha} - \text{метрика Керра}, \quad (57)$$

$$\alpha_{em} = 0, \quad \alpha_Q = 0.$$

В отличие от (52), (53) решения (56), (57) могут быть регулярными при определенных соотношениях начальных параметров.

В уравнениях для вещественных радиальных функций (43) обозначим

$$\omega(\rho) = \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (58)$$

Для решений (56), (57)

$$\omega(\rho = \alpha, \varepsilon = \varepsilon_{ext}) = 0. \quad (59)$$

Первый неисчезающий член в разложении  $\omega(\rho, \varepsilon = \varepsilon_{ext})$  по степеням  $|\rho - \alpha|$  равен

$$\omega(\varepsilon = \varepsilon_{ext})|_{\rho \rightarrow \alpha} = \Omega|\rho - \alpha|, \quad (60)$$

где

$$\Omega = -\frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} \alpha}{\alpha^2 + \alpha_a^2} \frac{2\alpha_a^2}{\alpha^3} + \frac{2m_\varphi \alpha_a}{\alpha^3} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha^2}. \quad (61)$$

Учитывая, что для экстремального поля KN

$$f_{KN}^{ext} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}, \quad (62)$$

уравнения (43) при  $\rho \rightarrow \alpha$  можно записать в виде

$$\left( \frac{|\rho - \alpha|}{\alpha^2} \frac{d}{d\rho} + \frac{1 + \lambda}{\alpha^2} \right) F_{KN} - \left( \Omega + \frac{1}{\alpha} \right) G_{KN} = 0, \quad (63)$$

$$\left( \frac{|\rho - \alpha|}{\alpha^2} \frac{d}{d\rho} + \frac{1 - \lambda}{\alpha^2} \right) G_{KN} + \left( \Omega - \frac{1}{\alpha} \right) F_{KN} = 0.$$

Если представить

$$F_{KN}|_{\rho \rightarrow \alpha} = |\rho - \alpha|^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{ext} |\rho - \alpha|^k, \quad (64)$$

$$G_{KN}|_{\rho \rightarrow \alpha} = |\rho - \alpha|^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{ext} |\rho - \alpha|^k,$$

то решение определяющего уравнения для системы (63) равно

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}. \quad (65)$$

Для квадратичной интегрируемости функций  $F_{KN}$ ,  $G_{KN}$  в (63) необходимо оставить решение (65) с положительным знаком перед квадратным корнем и, кроме того, необходимо выполнение неравенства

$$-2 + 2\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2} > -1, \quad (66)$$

т. е.

$$\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 1/4. \quad (67)$$

Для метрики RN  $\alpha^4 \Omega^2 = \alpha_{em}^2$ ,  $\lambda^2 = \kappa^2$ . В этом случае условие (67) совпадает с аналогичным условием, определенным в работе [45].

**2.5.3. Регулярные стационарные решения уравнения Дирака для голой сингулярности Керра – Ньюмена ( $\alpha^2 < \alpha_Q^2 + \alpha_a^2$ )**

При учете двулистной структуры решения КН и интегрировании системы уравнений (43) от  $\rho = -\infty$  до  $\rho = +\infty$  неопределенность в выборе решения при  $\rho = 0$  исчезает и при определенных значениях физических параметров будет существовать дискретный энергетический спектр фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями.

Итак, мы подтвердили выводы [8–10, 15] об отсутствии стационарных связанных состояний дираковских частиц в поле КН при наличии горизонтов событий. Эти выводы относятся также к полям Райсснера – Нордстрёма и Шварцшильда. Для экстремальных полей Керра – Ньюмена и Керра стационарные связанные состояния дираковских частиц со спином 1/2 существуют для энергий (56), (57) при выполнении условия (67). Стационарные решения уравнения Дирака существуют также для случая голой сингулярности КН.

Обратимся теперь к релятивистскому уравнению второго порядка с эффективным потенциалом для метрики КН. С использованием этого уравнения мы получим качественно иные результаты по сравнению с представленными в разд. 2.

**3. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СПИНОРНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ФЕРМИОНОВ В ГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ КЕРРА – НЬЮМЕНА**

Для получения уравнения второго порядка необходимо осуществить [46]

- 1) квадрирование уравнения Дирака;
- 2) переход в уравнении второго порядка от биспинорных к спинорным волновым функциям;
- 3) проведение неунитарного преобразования подобия для обеспечения самосопряженности уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В результате, после разделения угловых и радиальных переменных можно получить для преобразованной радиальной функции  $\psi_{KN}(\rho)$  уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом.

Такие уравнения можно получить из системы (43).

Обозначим

$$A_{KN} = -\frac{1}{f_{KN}} \left( \frac{1 + \lambda\sqrt{f_{KN}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (68)$$

$$B_{KN} = \frac{1}{f_{KN}} \left( \omega + \sqrt{f_{KN}} \right), \quad (69)$$

$$C_{KN} = -\frac{1}{f_{KN}} \left( \omega - \sqrt{f_{KN}} \right), \quad (70)$$

$$D_{KN} = -\frac{1}{f_{KN}} \left( \frac{1 - \lambda\sqrt{f_{KN}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \quad (71)$$

В формулах (69), (70) через  $\omega$  обозначено выражение (42).

Далее, если провести преобразования

$$\psi_{KN}^F = g_F F_{KN}(\rho), \quad (72)$$

$$\psi_{KN}^G = g_G G_{KN}(\rho), \quad (73)$$

$$g_F(\rho) = \exp \left( \frac{1}{2} \int_{\rho}^{\rho} A_F(\rho') d\rho' \right), \quad (74)$$

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB_{KN}}{d\rho} - A_{KN} - D_{KN},$$

$$g_G(\rho) = \exp \left( \frac{1}{2} \int_{\rho}^{\rho} A_G(\rho') d\rho' \right), \quad (75)$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC_{KN}}{d\rho} - A_{KN} - D_{KN},$$

то для  $\psi_{KN}^F$  и  $\psi_{KN}^G$  получим самосопряженные уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами  $U_{eff}^F(\rho)$ ,  $U_{eff}^G(\rho)$ :

$$\frac{d^2 \psi_{KN}^F}{d\rho^2} + 2 (E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho)) \psi_{KN}^F = 0, \quad (76)$$

$$\frac{d^2 \psi_{KN}^G}{d\rho^2} + 2 (E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho)) \psi_{KN}^G = 0. \quad (77)$$

В формулах (76), (77)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1). \quad (78)$$

В (76)

$$U_{eff}^F(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \left( \frac{1}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B_{KN}} \frac{d^2 B_{KN}}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A_{KN} - D_{KN}) - \frac{1}{4} \frac{A_{KN} - D_{KN}}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho} + \frac{1}{8} (A_{KN} - D_{KN})^2 + \frac{1}{2} B_{KN} C_{KN}. \quad (79)$$

Явный вид потенциала (79) приведен в Приложении В (77)

$$U_{eff}^G(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \left( \frac{1}{C_{KN}} \frac{dC_{KN}}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{C_{KN}} \frac{d^2 C_{KN}}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A_{KN} - D_{KN}) + \frac{1}{4} \frac{A_{KN} - D_{KN}}{C_{KN}} \frac{dC_{KN}}{d\rho} + \frac{1}{8} (A_{KN} - D_{KN})^2 + \frac{1}{2} B_{KN} C_{KN}. \quad (80)$$

В уравнениях (76), (77) выделено и одновременно добавлено в (79), (80) слагаемое  $E_{Schr}$  (78). Это сделано, с одной стороны, для придания уравнениям (76), (77) вида уравнений типа Шредингера, а, с другой стороны, для обеспечения классической асимптотики эффективных потенциалов  $U_{eff}^F, U_{eff}^G$  при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Нормировочные интегралы для волновых функций  $\psi_{KN}^F$  и  $\psi_{KN}^G$  в (76), (77) имеют вид

$$N_F = \int_{\rho}^{\rho'} (\psi_{KN}^F(\rho'))^2 d\rho', \quad (81)$$

$$N_G = \int_{\rho}^{\rho'} (\psi_{KN}^G(\rho'))^2 d\rho'. \quad (82)$$

Уравнения (76), (77) и эффективные потенциалы (79), (80) переходят друг в друга при  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \lambda \rightarrow -\lambda, m_\varphi \rightarrow -m_\varphi, \alpha_{em} \rightarrow -\alpha_{em}$ . Отсюда следует, что уравнения (76), (77) описывают движение частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (76) для функции  $\psi_{KN}^F(\rho)$  с эффективным потенциалом  $U_{eff}^F$  (79).

Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ( $\mathbf{p} = 0$ ) нижним спинором, пропорциональным  $G(\rho)$ . Аналогично нижний спинор с функцией  $G(\rho)$  исчезает для частицы при преобразовании Фолди – Ваутхайзена с любым значением импульса  $\mathbf{p}$  [47–49]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе  $\mathbf{p} = 0$  и при преобразовании Фолди – Ваутхайзена исчезает верхний спинор биспинорной волновой функции, пропорциональный  $F(\rho)$ .

### 3.1. Особенности эффективных потенциалов для стационарных решений $\varepsilon = \varepsilon_{KN}$

Здесь и ниже для краткости обозначение  $\varepsilon_{KN}$  соответствует стационарным решениям (52), (56).

#### 3.1.1. При $\rho \rightarrow \pm\infty$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow \pm\infty} = \varepsilon_{KN} \frac{\alpha_{em}}{\rho} + (1 - 2\varepsilon_{KN}^2) \frac{\alpha}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (83)$$

#### 3.1.2. При наличии двух горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}, (\rho_-)_{KN}$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow (\rho_\pm)_{KN}} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - (\rho_\pm)_{KN})^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - (\rho_\pm)_{KN}|^{3/2}}\right). \quad (84)$$

Асимптотики (84) представляют собой потенциальные ямы  $-K/(\rho - (\rho_\pm)_{KN})^2$  с коэффициентом  $K < 1/8$ , что свидетельствует о возможности существования вблизи горизонтов событий стационарных связанных состояний квантовомеханических частиц (см., например, [43]).

**3.1.3.** Для экстремального поля KN  $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2)$  при  $\rho \rightarrow \alpha$  слева и справа от горизонта событий

$$U_{eff}^F(\varepsilon \neq \varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{(\alpha_a^2 + \alpha^2)(\varepsilon - \varepsilon_{KN})^2}{2(\rho - \alpha)^4} + O\left(\frac{1}{|\rho - \alpha|^3}\right), \quad (85)$$

$$U_{eff}^F(\varepsilon = \varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{1}{2(\rho - \alpha)^2} \times \left[ \frac{1}{4} - (\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2) \right] + O\left(\frac{1}{|\rho - \alpha|}\right). \quad (86)$$

Из асимптотики (86) условие существования потенциальной ямы и условие существования в ней стационарных связанных состояний для регулярных решений (56) ( $K < 1/8$ ) можно записать в виде

$$0 < \lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 < 1/4. \quad (87)$$

#### 3.1.4. При $\rho \rightarrow 0$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow 0} = \text{const} + O(\rho). \quad (88)$$

В отличие от поля Райсснера – Нордстрёма ( $U_{eff}^F(\varepsilon_{RN})|_{\rho \rightarrow 0} = 3/8\rho^2$ ), эффективный потенциал KN (79) является регулярным при  $\rho = 0$ .

### 3.2. Непроницаемые потенциальные барьеры

Эффективный потенциал (79) может при некоторых значениях  $\rho = \rho_{cl}^i$  иметь особенности вида

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} \sim \frac{1}{\left(\omega + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}}\right)^2}, \quad (89)$$

когда знаменатель в (89) обращается в нуль при одном или нескольких значениях  $\rho = \rho_{cl}^i$ .

Уравнение для определения  $\rho_{cl}^i$  имеет вид

$$\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}} = 0. \quad (90)$$

Особенности (89) могут содержаться во втором слабом эффeктивном потенциале (79), равном

$$\frac{3}{8} \left(\frac{1}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho}\right)^2$$

(см. Приложение).

При наличии решения уравнения (90) потенциал (89) можно представить в виде

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl}^i)^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - \rho_{cl}^i|}\right). \quad (91)$$

Известно, что такие потенциальные барьеры являются квантовомеханически непроницаемыми [50]<sup>1)</sup>.

Далее рассмотрим условия возникновения особенностей (91) при наличии двух горизонтов событий, для экстремальных полей КН и в случае голыи сингулярности КН.

### 3.2.1. Наличие двух горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}$ , $(\rho_-)_{KN}$ , $\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ ; области определения волновых функций: $\rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty)$ , $\rho \in (-\infty, (\rho_-)_{KN}]$

В этом разделе мы анализируем возможность существования непроницаемых барьеров типа (91) для стационарных решений  $\varepsilon_{KN}$  (52).

Уравнение (90) можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{(\rho - (\rho_+)_{KN})(\varepsilon - (\rho_-)_{KN})}}{\rho} = -\varepsilon_{KN} \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right) + \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (92)$$

Левая и правая части (92) положительны и обращаются в нуль при  $\rho = (\rho_\pm)_{KN}$ . Для двух областей определения волновых функций мы можем представить уравнение (92) в виде

$$\rho \sqrt{(\rho - (\rho_+)_{KN})(\rho - (\rho_-)_{KN})} = \left(-\varepsilon_{KN}^+ \rho - \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_+)_{KN}} + \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^+}{(\rho_+)_{KN}}\right) \times (\rho - (\rho_+)_{KN}), \quad \rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty), \quad (93)$$

$$\rho \sqrt{((\rho_+)_{KN} - \rho)((\rho_-)_{KN} - \rho)} = \left(\varepsilon_{KN}^- \rho + \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_-)_{KN}} - \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^-}{(\rho_-)_{KN}}\right) \times ((\rho_-)_{KN} - \rho), \quad \rho \in (-\infty, (\rho_-)_{KN}]. \quad (94)$$

Решения  $\rho = (\rho_+)_{KN}$  в (93) и  $\rho = (\rho_-)_{KN}$  в (94) соответствуют особенностям эффeктивного потенциала

$$\frac{3}{8} \left(\frac{1}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho}\right)^2 \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_\pm)_{KN}}$$

на горизонтах событий. Эти особенности уже учтены при анализе в разд. 3.1.2.

Разделив обе части (93) на  $\sqrt{\rho - (\rho_+)_{KN}}$  и обе части (94) на  $\sqrt{(\rho_-)_{KN} - \rho}$ , получим уравнения для определения других особенностей для  $\rho \neq (\rho_+)_{KN}$  и  $\rho \neq (\rho_-)_{KN}$  соответственно

$$\rho \sqrt{(\rho - (\rho_-)_{KN})} = \left(-\varepsilon_{KN}^+ \rho - \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_+)_{KN}} + \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^+}{(\rho_+)_{KN}}\right) \times \sqrt{\rho - (\rho_+)_{KN}}, \quad \rho \in ((\rho_+)_{KN}, \infty), \quad (95)$$

$$\varepsilon_{KN}^+ = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}; \quad (96)$$

$$\rho \sqrt{(\rho_+)_{KN} - \rho} = \left(\varepsilon_{KN}^- \rho + \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_-)_{KN}} - \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^-}{(\rho_-)_{KN}}\right) \times \sqrt{(\rho_-)_{KN} - \rho}, \quad \rho \in (0, (\rho_-)_{KN}), \quad (97)$$

$$\varepsilon_{KN}^- = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (98)$$

Далее для анализа рассмотрим три варианта.

1. Поле Керра:  $\alpha_Q = 0$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ,

$$(\rho_\pm)_K = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2},$$

$$\varepsilon_K = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha(\rho_\pm)_K}, \quad m_\varphi > 0, \quad 0 < \varepsilon_K < 1.$$

<sup>1)</sup> Следует иметь в виду, что авторы [50] использовали уравнение типа Шредингера (76) без множителя 2. В наших обозначениях барьер  $K/(\rho - \rho_{cl}^i)^2$  непроницаем, если  $K \geq 3/8$ .

2. Незаряженная частица со спином 1/2 в поле Керра – Ньюмена:  $\alpha_{em} = 0, \alpha_Q \neq 0,$

$$(\rho_{\pm})_{KN} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2 - \alpha_a^2},$$

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_{\varphi}}{\alpha_a^2 + (\rho_{\pm})_{KN}^2}, \quad m_{\varphi} > 0, \quad 0 < \varepsilon_{KN} < 1.$$

Неравенства в вариантах 1, 2 для  $m_{\varphi}, \varepsilon_K, \varepsilon_{KN}$  будут обсуждаться в разд. 5.

3. Заряженная частица со спином 1/2 в поле Керра – Ньюмена:  $\alpha_{em} \neq 0, \alpha_Q \neq 0,$

$$(\rho_{\pm})_{KN} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_{\varphi} + \alpha_{em} (\rho_{\pm})_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_{\pm})_{KN}^2}.$$

Для области определения  $\rho > (\rho_+)_{KN}$  и для первых двух вариантов решение уравнения (95) отсутствует. Наоборот, для первых двух вариантов и для области определения  $\rho < (\rho_-)_{KN}$  существует единственное решение (97)  $\rho = \rho_{cl}$ , при котором возникает непроницаемый потенциальный барьер вида (91).

Для третьего варианта и для обеих областей определения  $\rho > (\rho_+)_{KN}, \rho < (\rho_-)_{KN}$ , алгебраический анализ допустимых значений параметров, удовлетворяющих уравнениям (95), (97), затруднителен из-за возможности реализации разных знаков  $\varepsilon, m_{\varphi}, \alpha_{em}$ . В данном случае возможность существования непроницаемого потенциального барьера при заданных начальных параметрах должна определяться либо анализом эффективного потенциала, либо решением уравнений (95), (97).

**3.2.2. Экстремальное поле Керра – Ньюмена ( $\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2, (\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha$ ); области определения волновых функций:**  
 $\rho \in [\alpha, \infty), \rho \in (-\infty, \alpha]$

В случае экстремального поля КН для обеих областей определения волновых функций уравнение (90) можно записать в виде

$$\rho(\rho - \alpha) = \left( -\varepsilon_{KN}^{ext} \rho - \frac{\alpha_a m_{\varphi}}{\alpha} + \frac{\alpha_a^2}{\alpha} \varepsilon_{KN}^{ext} \right) (\rho - \alpha), \quad (99)$$

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_{\varphi} + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (100)$$

Решение  $\rho = \alpha$  в уравнении (99) соответствует особенности эффективного потенциала

$$\frac{3}{8} \left( \frac{1}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho} \right)^2 \Big|_{\rho \rightarrow \alpha}$$

на горизонте событий. Эта особенность учтена при анализе в разд. 3.1.3.

Далее будем исследовать уравнение (99) для  $\rho \neq \alpha$ . Как и в разд. 3.2.1, для анализа рассмотрим три варианта.

1. Поле Керра:  $\alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0, \alpha = \alpha_a, \varepsilon_K = m_{\varphi}/2\alpha, m_{\varphi} > 0; 0 < \varepsilon_K^{ext} < 1.$

2. Незаряженная частица со спином 1/2 в поле Керра – Ньюмена:  $\alpha_{em} = 0, \alpha_Q \neq 0, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2,$

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_{\varphi}}{\alpha_a^2 + \alpha^2}, \quad m_{\varphi} > 0; \quad 0 < \varepsilon_{KN}^{ext} < 1.$$

Неравенства в разд. 1.2 для  $m_{\varphi}, \varepsilon_K, \varepsilon_{KN}$  будут обсуждаться в разд. 5.

3. Заряженная частица со спином 1/2 в поле Керра – Ньюмена:  $\alpha_{em} \neq 0, \alpha_Q \neq 0, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2,$

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_{\varphi} + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}.$$

Для области определения  $\rho > \alpha$  и для первых двух вариантов решения уравнения (99) отсутствуют. Наоборот, для первых двух вариантов и для области определения  $\rho < \alpha$  существует единственное решение  $\rho = \rho_{cl}$ , при котором возникает непроницаемый потенциальный барьер вида (91).

Для третьего варианта и для обеих областей определения  $\rho > \alpha, \rho < \alpha$  алгебраический анализ затруднителен. Возможность существования непроницаемого потенциального барьера при заданных начальных параметрах должна определяться решением уравнения (99).

**3.2.3. Голая сингулярность Керра – Ньюмена ( $\alpha_a^2 + \alpha_Q^2 > \alpha^2$ ); области определения волновых функций:  $\rho \in (-\infty, \infty)$**

В случае голой сингулярности КН для определения наличия или отсутствия непроницаемых потенциальных барьеров необходимо решать уравнение четвертой степени (90). Из-за громоздкости аналитических решений целесообразно решать уравнение (90) при заданных значениях начальных параметров:  $\alpha, \alpha_Q, \alpha_a, \alpha_{em}, m_{\varphi}, \varepsilon$ . Второй способ — это компьютерное исследование особенностей эффективно-го потенциала (79) для некоторой выделенной области значений начальных параметров.

**3.3. Асимптотика функций  $\psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon)$**

**3.3.1.** При  $\rho \rightarrow \pm\infty$  функция  $g_F(\rho) \rightarrow \rho$  (см. (74)) и

$$\psi_{KN}^F|_{\rho \rightarrow \pm\infty} = \rho F_{KN}|_{\rho \rightarrow \pm\infty}. \quad (101)$$

Для финитного движения частиц со спином  $1/2$  с учетом (44) имеем

$$\psi_{KN}^F|_{\rho \rightarrow \infty} = C_1 \varphi_1(\rho) \rho e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}, \quad (102)$$

$$\psi_{KN}^F|_{\rho \rightarrow -\infty} = C_2 \varphi_2(\rho) \rho e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}. \quad (103)$$

**3.3.2.** При наличии двух горизонтов событий представим функцию  $\psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN})$  в виде

$$\begin{aligned} \psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} &= |\rho - (\rho_+)_{KN}|^s \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(+)} |\rho - (\rho_+)_{KN}|^k \end{aligned} \quad (104)$$

при  $\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}$ ,

$$\begin{aligned} \psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} &= |(\rho_-)_{KN} - \rho|^s \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(-)} |(\rho_-)_{KN} - \rho|^k \end{aligned} \quad (105)$$

при  $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$ .

Из уравнения (76) с учетом (104), (105), (84) следует определяющее уравнение

$$s(s-1) + 3/16 = 0 \quad (106)$$

с решениями  $s_1 = 3/4$ ,  $s_2 = 1/4$ .

Оба решения приводят к регулярным квадратично-интегрируемым решениям для волновой функции  $\psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN})$ . Для однозначного выбора решения обратимся к асимптотикам (45)–(48) для радиальных функций Дирака  $F_{KN}(\rho)$  при  $\varepsilon = \varepsilon_{KN}$  и к преобразованию (72), (74).

При  $\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}$  преобразование  $g_F(\rho) \rightarrow |\rho - (\rho_{\pm})_{KN}|^{3/4}$  и в результате

$$\begin{aligned} \psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}} &= [g_F(\rho) F_{KN}(\rho)]|_{\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}} = \\ &= C_3 |\rho - (\rho_{\pm})_{KN}|^{1/4}. \end{aligned} \quad (107)$$

Асимптотики (107) соответствуют решению определяющего уравнения (106)  $s_2 = 1/4$ . Для решения  $s_1 = 3/4$  отсутствует решение уравнения Дирака  $F(\rho)|_{\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}} = \text{const}$ , и в этом случае преобразования (72) не существует. Ниже решения уравнения второго порядка (76) с асимптотиками (107) будем использовать в качестве собственных функций стационарных связанных состояний фермионов с собственными значениями  $\varepsilon_{KN}$ . Эти решения являются квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий. Отметим, что волновые функции (107) на горизонтах событий  $(\rho_+)_{KN}$ ,  $(\rho_-)_{KN}$  равны нулю.

**3.3.3.** В случае экстремального поля KN представим асимптотику функции  $\psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN}^{ext})$  в виде

$$\psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN}^{ext})|_{\rho \rightarrow \alpha} = |\rho - \alpha|^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{ext} |\rho - \alpha|^k. \quad (108)$$

Из уравнения (76) с учетом (108), (86) можно записать определяющее уравнение

$$s(s-1) + \frac{1}{4} - \lambda^2 - \alpha^2 + \alpha^4 \Omega^2 = 0 \quad (109)$$

с решениями

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}. \quad (110)$$

Оба решения приводят к квадратично-интегрируемым функциям  $\psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}^{ext})$  при выполнении условий:

– для  $s_1 = 1/2 + \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}$  должно выполняться неравенство

$$\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 0, \quad (111)$$

– для  $s_2 = 1/2 - \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}$  должно выполняться неравенство

$$1 > \lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 0. \quad (112)$$

Условие существования потенциальной ямы (87) существенно ограничивает неравенства (111), (112), и оба решения  $s_{1,2}$  должны удовлетворять неравенству

$$1/4 > \lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 0. \quad (113)$$

При  $\rho \rightarrow \alpha$  преобразование (74)  $g_F(\rho) \rightarrow |\rho - \alpha|^{3/2}$ .

Оба решения (65) для асимптотики  $F_{KN}^{ext}|_{\rho \rightarrow \alpha}$  (64) преобразуются в соответствующие решения (110) для асимптотики  $\psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}^{ext})$  (108).

Таким образом, для уравнения второго порядка (76) из-за существования двух регулярных асимптотик в окрестности горизонта  $\rho = \alpha$  невозможно поставить краевую задачу о существовании собственных функций и собственных значений.

Кроме того, авторы аналитически и численно не обнаружили область значений физических параметров, в которой справедливо неравенство (113).

Для уравнения Дирака эта проблема однозначно разрешается. Единственное физически приемлемое решение для волновой функции соответствует одному из решений (65)

$$s_1 = -1 + \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}. \quad (114)$$

Условие квадратичной интегрируемости дираковских радиальных функций (66) записывается в виде

$$\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 1/4. \quad (115)$$

При этом энергия стационарного связанного состояния  $\varepsilon_{KN}^{ext}$  равна

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (116)$$

Для метрики Керра ( $\alpha_{em} = 0$ ,  $\alpha_Q = 0$ ) выражения (115), (116) имеют вид

$$\lambda^2 + \alpha^2 - m_\varphi^2 > \frac{1}{4}, \quad \varepsilon_K^{ext} = \frac{m_\varphi}{2\alpha}. \quad (117)$$

Решение  $\varepsilon_K^{ext}$  ранее получено в работе [51].

**3.3.4.** Рассмотрим асимптотику волновой функции  $\psi_{KN}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i}$  вблизи непроницаемых барьеров (91). Определяющее уравнение для (76) с учетом асимптотики (91) имеет вид

$$s(s-1) - 3/4 = 0. \quad (118)$$

Решения (118) равны  $s_1 = 3/2$ ,  $s_2 = -1/2$ . Второе решение соответствует ненормируемой волновой функции  $\psi_{KN}^F$  и поэтому физически неприемлемо. В результате

$$\psi_{KN}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = C_4(|\rho - \rho_{cl}^i|)^{3/2}. \quad (119)$$

Преобразование (72), (74) в окрестностях  $\rho_{cl}^i$  является сингулярным,  $g_F(\rho) \rightarrow |\rho - \rho_{cl}^i|^{-1/2}$ . Из (72) следует, что

$$F_{KN}(\rho)|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} \approx |\rho - \rho_{cl}^i|^2. \quad (120)$$

Из численных расчетов следует, что зависимость (120) действительно реализуется в первом уравнении (43) для случая, когда выражение в скобках перед функцией  $G_{KN}(\rho)$  обращается в нуль (это соответствует уравнению (90) для определения  $\rho_{cl}^i$ ).

#### 4. МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Численные решения уравнения второго порядка типа Шредингера (76) удобно осуществлять с помощью фазовых функций  $\Phi(\rho)$ ,  $\Phi(\theta)$ .

Применим преобразование Прюфера [30–33] к уравнению (76) с эффективным потенциалом (79):

$$\begin{aligned} \psi_{KN}^F(\rho) &= P(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\psi_{KN}^F(\rho)}{d\rho} &= P(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (121)$$

Тогда

$$\frac{\psi_{KN}^F(\rho)}{d\psi_{KN}^F(\rho)/d\rho} = \text{tg } \Phi(\rho) \quad (122)$$

и уравнение (76) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \quad (123)$$

$$\frac{d \ln P}{d\rho} = (1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F)) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (124)$$

Отметим, что уравнение (124) должно решаться после определения собственных значений  $\varepsilon_n$  и собственных функций  $\Phi_n(\rho)$  из уравнения (123).

В уравнениях (123), (124) эффективный потенциал  $U_{eff}^F$  зависит от константы разделения  $\lambda$ . В отличие от полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма, для полей Керра и Керра–Ньюмена  $\lambda$  зависит от  $\varepsilon$ ,  $\alpha_a$ ,  $j$ ,  $l$ ,  $m_\varphi$  (см. угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа (38) для сферических гармоник  $S_\pm(\theta)$ ). При решении уравнений (123), (124) необходимо первоначально определять значения  $\lambda$  в зависимости от начальных параметров.

Применим преобразование Прюфера к уравнениям (38). Пусть

$$\begin{aligned} S_-(\theta) &= S(\theta) \sin \Phi(\theta), \\ S_+(\theta) &= S(\theta) \cos \Phi(\theta), \end{aligned} \quad (125)$$

где

$$S_-(\theta)/S_+(\theta) = \text{tg } \Phi(\theta), \quad (126)$$

$$S(\theta) = (S_-^2(\theta) + S_+^2(\theta))^{1/2}. \quad (127)$$

Тогда угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа (38) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} &= \lambda + \alpha_a \cos \theta \cos(2\Phi(\theta)) + \\ &+ \left( \frac{m_\varphi}{\sin \theta} - \alpha_a \varepsilon \sin \theta \right) \sin(2\Phi(\theta)), \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln S}{d\theta} &= -\frac{1}{2} \text{ctg } \theta + \left( \alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) \cos(2\Phi(\theta)) + \\ &+ \alpha_a \cos \theta \sin(2\Phi(\theta)). \end{aligned} \quad (129)$$

Граничные условия имеют вид

$$\text{для } m_\varphi < 0 \quad \Phi(0) = k\pi, \quad \Phi(\pi) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (130)$$

$$\text{для } m_\varphi > 0 \quad \Phi(0) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \Phi(\pi) = k\pi. \quad (131)$$

В (130), (131)  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

$$\operatorname{tg} \Phi \left( \frac{\pi}{2} \right) = P_{par}(-1)^{j+m_\varphi} = \pm 1, \quad (132)$$

где  $P_{par} = 2(l-j)$  – четность.

Ранее Незнамовым, Сафроновым [52] было реализовано численное решение уравнений (128), (129). Результаты решения полностью согласуются с результатами [42], полученными другим численным способом.

В данной работе мы будем из уравнения (128) первоначально определять  $\lambda(\varepsilon, \alpha_a, l, j, m_\varphi)$  и  $\Phi(\theta)$ . Далее, из (123) определяем спектр  $\varepsilon_n$  и  $\Phi_n(\rho)$ . Из уравнения (124) определяем  $P_n(\rho)$  и при необходимости из уравнения (129) определяем  $S_n(\theta)$ . После этого, в соответствии с (121), определяем собственную радиальную функцию  ${}_n\psi_{KN}^F(\rho)$  и при необходимости, в соответствии с (35), (36), (40) и (125), – полную волновую функцию:

$${}_n\psi_{KN}^F(\rho, \theta, \varphi) = {}_n\psi_{KN}^F(\rho) i\sigma^3 \xi_{KN}(\theta). \quad (133)$$

#### 4.1. Асимптотика функций $\Phi(\rho)$ , $P(\rho)$

4.1.1. Для связанных состояний при  $\rho \rightarrow \infty$  с учетом (102), (122) получаем

$$\operatorname{tg} \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = -\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (134)$$

$$\Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi.$$

Для экспоненциально растущих решений в асимптотике (44)  $C_1 = 0$ ,  $C_2 \neq 0$  и с учетом (103), (122)

$$\operatorname{tg} \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (135)$$

$$\Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi.$$

Для связанных состояний при  $\rho \rightarrow -\infty$  с учетом (103), (122)

$$\operatorname{tg} \Phi|_{\rho \rightarrow -\infty} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (136)$$

$$\Phi|_{\rho \rightarrow -\infty} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi.$$

Для экспоненциально растущих решений

$$\operatorname{tg} \Phi|_{\rho \rightarrow -\infty} = -\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (137)$$

$$\Phi|_{\rho \rightarrow -\infty} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi.$$

В (134)–(137)  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.1.2. При наличии двух горизонтов событий, пусть при  $\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}$ ,

$$\Phi|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} = k\pi + A|\rho - (\rho_+)_{KN}|. \quad (138)$$

Тогда

$$\sin \Phi|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} \simeq \pm A|\rho - (\rho_+)_{KN}|,$$

$$\cos \Phi|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} \simeq \pm 1.$$

Из совместности (138) с уравнением (123) с учетом ведущей особенности (см. (84))

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{KN}) = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - (\rho_+)_{KN})^2}$$

получаем

$$1 + \frac{3}{16} A^2 = A \quad (139)$$

с решениями  $A_1 = 4$ ,  $A_2 = 4/3$ .

Далее интегрируем уравнение (124) при  $\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}$  с учетом ведущей особенности эффективного потенциала (84). В результате

$$\begin{aligned} P|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} &= \\ &= C_5 \begin{cases} |\rho - (\rho_+)_{KN}|^{3/4}, & A_1 = 4, \\ |\rho - (\rho_+)_{KN}|^{-1/4}, & A_2 = 4/3, \end{cases} \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}^+)|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} &= \\ &= C_5 \begin{cases} 4|\rho - (\rho_+)_{KN}|^{1/4}, & A_1 = 4, \\ 4/3|\rho - (\rho_+)_{KN}|^{3/4}, & A_2 = 4/3. \end{cases} \end{aligned} \quad (141)$$

Сравнение с выражением (107) показывает, что для нашего рассмотрения приемлемыми являются решения (138), (140), (141) со значениями  $A_1 = 4$  и  $C_3 = 4C_5$ .

Аналогично при  $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$

$$\Phi|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} = -4|(\rho_-)_{KN} - \rho| + k\pi, \quad (142)$$

$$P|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} = -\frac{C_3}{4}|(\rho_-)_{KN} - \rho|^{-3/4}, \quad (143)$$

$$\psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN})|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} = C_3|(\rho_-)_{KN} - \rho|^{1/4}. \quad (144)$$

4.1.3. По аналогии с разд. 4.1.2 асимптотики  $\Phi(\rho)$ ,  $P(\rho)$  в окрестности непроницаемых барьеров (91) с учетом (119) равны

$$\Phi|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = \frac{2}{3}|\rho - \rho_{cl}^i| + k\pi, \quad (145)$$

$$P|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = C_6(|\rho - \rho_{cl}^i|)^{1/2}, \quad (146)$$

$$\psi_{KN}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = C_4(|\rho - \rho_{cl}^i|)^{3/2}. \quad (147)$$

## 5. СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ КЕРРА – НЬЮМЕНА

### 5.1. Численные решения уравнений для фазовых функций. Общие свойства фазовых функций

Ниже мы сосредоточимся на численном методе решения уравнений (123), (124) для радиальных фазовых функций  $\Phi(\rho)$ ,  $P(\rho)$ . Аналогичный метод решения уравнений (128), (129) для угловых фазовых функций  $\Phi(\theta)$ ,  $P(\theta)$  подробно изложен в работе [52].

Для разрешенного набора значений  $-1 < \varepsilon < 1$  численно решается задача Коши с заданным начальным условием. Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге – Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо II A [53]).

Определив решением (123) спектр  $\varepsilon_n$ , собственные функции  $\Phi_n(\rho)$  и интегрируя уравнение (124), можно определить функции  $P_n(\rho)$  и с учетом (121) волновые функции  ${}_n\psi_{KN}^F(\rho)$ . Далее можно определить плотность вероятности обнаружения фермионов в состоянии с  $\varepsilon_n$  на расстоянии  $\rho$  в сферическом слое  $d\rho$ :

$$w(\rho) = P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho), \quad (148)$$

и вероятность обнаружения связанных фермионов в интервале  $[\rho_0, \rho]$ :

$$W(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} P_n^2(\rho') \sin^2 \Phi_n(\rho') d\rho'. \quad (149)$$

При наличии двух горизонтов событий энергия связанных состояний определяется равенствами (52), (53). В этом случае численно определяются только собственные функции  ${}_n\psi_{KN}^F(\rho)$  (121), плотности вероятности (148) и интегральные вероятности (149).

Волновые функции  ${}_n\psi_{KN}^F(\rho)$  в зависимости от области определения должны удовлетворять асимптотикам (102), (103), (107).

При решении уравнения (123) необходимо иметь в виду существование особых точек:  $\rho = \pm\infty$ ,  $\rho = \rho_{cl}^i$ ,  $\rho = (\rho_{\pm})_{KN}$ . Численные расчеты с хорошей сходимостью результатов начинались или заканчивались в окрестностях иррегулярных особых точек  $\rho = (\rho_{\pm})_{KN}$ ,  $\rho = \rho_{cl}^i$  с  $\Delta\rho_{irr} = 10^{-8}$ . Выбор максимального значения  $\rho_{max}$  в расчетах с имитацией  $\rho \rightarrow \pm\infty$  определялся выполнением условий (134)–(137) с заданной точностью  $10^{-7}$ .

Ниже для случая голой сингулярности KN при определении спектра  $\varepsilon_n$  будем использовать функцию  $\Phi(\varepsilon, \rho_{max}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho=\rho_{max}}$ . Здесь  $\rho_{max}$  — максимальное расстояние в численных расчетах. Как правило, хорошую сходимость результатов обеспечивает значение  $\rho_{max} = 10^7$ .

Численные расчеты выявили наличие следующих важных свойств функции  $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$  (подобные свойства функции  $\Phi$  для более простых потенциалов, не зависящих от  $\varepsilon$ , строго доказаны в работах [31–33]).

1. Функция  $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$  монотонна при изменении  $\varepsilon$ .
2. В случае существования связанных состояний с  $-1 < \varepsilon < 1$  поведение  $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$  носит скачкообразный характер. При достижении собственного значения  $\varepsilon_n$  функция  $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$  изменяется скачком на  $\pi$ :

$$[\Phi(\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon, \rho_{max}) - \Phi(\varepsilon_n + \Delta\varepsilon, \rho_{max})]|_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} = -n\pi. \quad (150)$$

3. В случае отсутствия связанных состояний изменение функции  $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$  во всем интервале  $-1 < \varepsilon < 1$  меньше величины  $\pi$ .

### 5.2. Наличие двух горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}$ , $(\rho_-)_{KN}$ ; $\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ . Область определения волновых функций $\rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty)$

В этом случае существует решение (52):

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}. \quad (151)$$

Для связанных состояний  $-1 < \varepsilon_{KN} < 1$ , поэтому

$$|\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_+)_{KN}| < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (152)$$

Решение (151) включает состояния с одноименными ( $\alpha_{em} > 0$ ) и разноименными ( $\alpha_{em} < 0$ ) зарядами источника поля RN и фермиона, а также состояния с незаряженными фермионами.

При определении волновых функций с известным собственным значением (151) интегрирование уравнения (123) осуществлялось «справа налево» от  $\rho = \rho_{max}$  с граничным условием (134) до  $\rho = (\rho_+)_{KN}$  с асимптотикой (138) и с решением уравнения (139)  $A_1 = 4$ . Поведение интегральных кривых уравнения (123) вблизи иррегулярной особой точки  $\rho = (\rho_+)_{KN}$  аналогично ранее рассмотренному для поля RN [28]. Это связано с одинаковым поведением эффективных потенциалов при  $\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}$  и при  $\rho \rightarrow (\rho_+)_{RN}$  (см. (84) и формулу (55) в [28]).

### 5.2.1. Анализ границ физической приемлемости решения $\varepsilon_{KN}$ при $\rho \geq (\rho_+)_{KN}$ . Результаты расчетов

Как и в разд. 3.2.1, будем рассматривать три варианта.

1. Поле Керра:  $\alpha_Q = 0$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ,  $(\rho_+)_{KN} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}$ ,

$$\varepsilon_K = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha(\rho_+)_{KN}}. \quad (153)$$

Для экстремального поля Керра  $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha$ ;  $\alpha^2 = \alpha_a^2$ ) решение (153) равно

$$\varepsilon_K^{ext} = \frac{m_\varphi}{2\alpha}. \quad (154)$$

Из (153), (154) следует, что при наличии вращения источника поля Керра ( $\alpha_a \neq 0$ ) энергия связанного фермиона никогда не достигает нуля при сколь угодно большом значении гравитационной константы связи  $\alpha$ :

$$\varepsilon_K \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (155)$$

В этом случае отрицательные и нулевые энергии  $-1 < \varepsilon_K \leq 0$  не реализуются. Это возможно лишь для (153), (154) при  $m_\varphi > 0$ . Таким образом, связанные состояния фермионов с  $0 < \varepsilon_K < 1$  в (153), (154) характеризуются параллельным направлением спина фермиона и углового момента источника поля Керра.

Для реализации слабой связи фермиона  $\varepsilon_K \sim 1$  необходимо существование некоторого минимального значения  $\alpha_{min}$ . При наличии горизонтов (горизонта) событий максимальное значение  $\alpha_a^{max}$  достигается для экстремального поля Керра ( $\alpha_a = \alpha$ ). Из (154) следует, что связь  $\varepsilon_K \sim 1$  достигается при

$$\alpha_{min} \sim \frac{(m_\varphi)_{min}}{2} = 0.25. \quad (156)$$

Отсутствие вращения ( $\alpha_a = 0$ ) соответствует решению для поля Шварцшильда  $\varepsilon_S = 0$ . В этом случае  $\alpha_{min}$  также равно 0.25 [27].

2. Незаряженная частица со спином 1/2 в поле Керра–Ньюмена:  $\alpha_Q \neq 0$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ,  $(\rho_+)_{KN} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$ ,

$$\tilde{\varepsilon}_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}. \quad (157)$$

Для экстремального поля KN  $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha$ ,  $\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ ) решение (157) равно

$$\tilde{\varepsilon}_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (158)$$

При наличии вращения ( $\alpha_a \neq 0$ ) из (157), (158) следует, что энергия связанного фермиона никогда не достигает нуля при сколь угодно большом значении  $\alpha$ :

$$\tilde{\varepsilon}_{KN} \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (159)$$

В данном случае отрицательные и нулевые энергии  $-1 < \tilde{\varepsilon}_{KN} \leq 0$  не реализуются и, следовательно,  $m_\varphi > 0$ . Как и в варианте 1, связанные состояния незаряженных фермионов с  $0 < \tilde{\varepsilon}_{KN} < 1$  характеризуются параллельным направлением спина фермиона и углового момента источника поля KN.

Из (157) следует, что неравенство  $\tilde{\varepsilon}_{KN} < 1$  реализуется, если

$$\alpha_a m_\varphi < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (160)$$

3. Заряженная частица со спином 1/2 в поле Керра–Ньюмена:  $\alpha_Q \neq 0$ ,  $\alpha_{em} \neq 0$ ,  $(\rho_+)_{KN} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$ ,

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}. \quad (161)$$

Для экстремального поля KN  $((\rho_+)_{KN} = \alpha$ ,  $\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ ) решение (161) равно

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}\alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (162)$$

Решение (161) зависит от пяти параметров:  $\alpha_a$ ,  $m_\varphi$ ,  $\alpha_{em}$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_Q$ , что затрудняет его алгебраический анализ. Параметры  $m_\varphi$ ,  $\alpha_{em}$  могут иметь разные знаки, и поэтому, в отличие от вариантов 1, 2, для  $\varepsilon_{KN}$  допустим весь разрешенный для связанных состояний диапазон:  $-1 < \varepsilon_{KN} < 1$ . Отсюда следует очевидное неравенство:

$$|\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_+)_{KN}| < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (163)$$

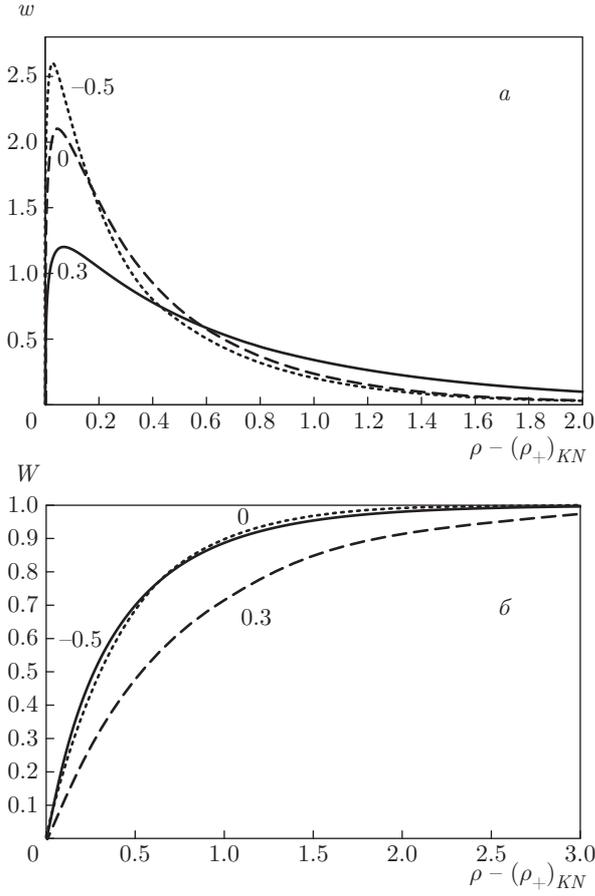
В результате мы получили следующие ограничения на физические параметры и энергии связанных фермионов.

1. Поле Керра:  $\alpha_{em} = 0$ ,  $\alpha_Q = 0$ ,

$$0 < \varepsilon_K < 1, \quad m_\varphi > 0, \quad \alpha_a m_\varphi < 2\alpha(\rho_+)_{KN}. \quad (164)$$

2. Незаряженная частица в поле Керра–Ньюмена:  $\alpha_{em} = 0$ ,  $\alpha_Q \neq 0$ ,

$$0 < \tilde{\varepsilon}_{KN} < 1, \quad m_\varphi > 0, \quad \alpha_a m_\varphi < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (165)$$



**Рис. 1.** Зависимости  $w(\rho - (\rho_+)_{KN})$  (а),  $W(\rho - (\rho_+)_{KN})$  (б) для связанных состояний с  $\varepsilon((\rho_+)_{KN})$  и  $\alpha = 0.251$ ,  $\alpha_Q = 0.0251$ ,  $\alpha_a = 0.125$ ,  $m_\varphi = 1/2$ ,  $\alpha_{em} = 0.3, 0, -0.5$

3. Заряженная частица в поле Керра–Ньюмена:  $\alpha_{em} \neq 0$ ,  $\alpha_Q \neq 0$ ,

$$-1 < \varepsilon_{KN} < 1, \quad |\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_+)_{KN}| < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (166)$$

В табл. 1 для некоторых значений параметров, удовлетворяющих неравенствам (164)–(166) с  $\alpha \approx \alpha_{min} = 0.251$ , приведены определенные из расчетов расстояния  $\rho_m$  от максимумов плотностей вероятности до горизонтов событий  $(\rho_+)_{KN}$ . На рис. 1 для параметров табл. 1  $\alpha = 0.251$ ,  $\alpha_Q = 0.0251$ ,  $\alpha_a = 0.125$ ,  $m_\varphi = 1/2$ ,  $\alpha_{em} = 0.3, 0, -0.5$  приведены нормированные плотности вероятности (148) и интегральные вероятности (149).

### 5.3. Наличие двух горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}$ , $(\rho_-)_{KN}$ ; $\alpha^2 > \alpha_Q^2 + \alpha_a^2$ . Область определения волновых функций $\rho \in (-\infty, \rho_-]$

В этом случае существует решение (52)

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (167)$$

Для связанных состояний фермиона  $-1 < \varepsilon_{KN} < 1$ , поэтому

$$|\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_-)_{KN}| < \alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2. \quad (168)$$

Решение (167) включает состояния с незаряженными фермионами ( $\alpha_{em} = 0$ ) и состояниями с одноименными ( $\alpha_{em} > 0$ ) и разноименными ( $\alpha_{em} < 0$ ) зарядами источника поля KN и фермиона.

При определении волновых функций с известным собственным значением (167) интегрирование уравнения (123) осуществлялось «слева направо» либо от  $\rho = -\infty$  с граничным условием (136), либо при наличии непроницаемого барьера от  $\rho = \rho_{cl}$  с граничным условием (145). Интегрирование заканчивалось при  $\rho = (\rho_-)_{KN}$  аналогично ранее рассмотренному для поля RN [28]. Это связано с одинаковым поведением эффективных потенциалов при  $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$  и при  $\rho \rightarrow (\rho_-)_{RN}$  (см. (84) и (56) в [28]).

#### 5.3.1. Анализ границ физической приемлемости решения $\varepsilon_{KN}$ при $\rho \leq (\rho_-)_{KN}$ . Результаты расчетов

Ниже мы ограничим себя рассмотрением менее экзотичных систем с внутренними горизонтами событий  $(\rho_-)_{KN} \geq 1$ , т. е. с радиусами, большими или сравнимыми с комптоновской длиной волны фермиона  $l_c$ . Из неравенства

$$(\rho_-)_{KN} = \alpha \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_Q^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha_a^2}{\alpha^2}} \right) \geq 1$$

возникает автоматическое ограничение на величину  $\alpha$  при заданных значениях  $\alpha_Q^2/\alpha^2$ ,  $\alpha_a^2/\alpha^2$ .

Как и выше в разд. 3.2.1, 5.2.1, будем рассматривать три варианта.

1. Поле Керра:  $\alpha_Q = 0$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ,  $(\rho_-)_K = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}$ ,

$$\varepsilon_K = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha(\rho_-)_K}. \quad (169)$$

Из (169) следует, что  $\varepsilon_K \neq 0$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , т. е. отрицательные энергии  $-1 < \varepsilon_K < 0$  не реализуются. Это возможно лишь при  $m_\varphi > 0$ .

Таблица 1. Характеристики связанных состояний фермионов с гравитационной константой связи  $\alpha = 0.251$ 

$\alpha_a$	$\alpha_Q$	$\alpha_{em}$	$l, j, m_\varphi$	$(\rho_+)_{KN}$	$\lambda$	$\varepsilon_{KN}$	$\rho_m$
0.125	0	0	0, 1/2, 1/2	0.469	-0.94	0.266	$4.66 \cdot 10^{-2}$
0.125	0	0	1, 3/2, 3/2	0.469	-1.9	0.797	$1.12 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.0251	0	0, 1/2, 1/2	0.467	-0.94	0.267	$4.65 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.0251	0	1, 3/2, 3/2	0.467	-1.99	0.802	$1.12 \cdot 10^{-2}$
0.0251	0.125	0	0, 1/2, 1/2	0.467	-0.99	0.057	$4.04 \cdot 10^{-2}$
0.0251	0.125	0	1, 3/2, 3/2	0.467	-1.99	0.172	$8.54 \cdot 10^{-3}$
0.125	0.0251	-0.5	0, 1/2, 1/2	0.467	-1.02	-0.732	$2.78 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.0251	-0.5	1, 3/2, 3/2	0.467	-1.995	-0.197	$8.55 \cdot 10^{-3}$
0.125	0.0251	0.3	0, 1/2, 1/2	0.467	-0.89	0.866	$6.91 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.0251	0.09	1, 3/2, 3/2	0.467	-1.88	0.982	$1.18 \cdot 10^{-2}$
0.0251	0.125	-0.4	0, 1/2, 1/2	0.467	-1.01	-0.796	$2.58 \cdot 10^{-2}$
0.0251	0.125	-0.4	1, 3/2, 3/2	0.467	-2.01	-0.682	$6.68 \cdot 10^{-3}$
0.0251	0.125	0.4	0, 1/2, 1/2	0.467	-0.98	0.911	$5.76 \cdot 10^{-2}$
0.0251	0.125	0.3	1, 3/2, 3/2	0.467	-1.98	0.812	$9.71 \cdot 10^{-3}$
0.125	0.0251	-0.3	0, 1/2, -1/2	0.467	-0.97	-0.866	$2.24 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.0251	-0.09	1, 3/2, -3/2	0.467	-1.93	-0.981	$4.26 \cdot 10^{-3}$
0.125	0.0251	0.5	0, 1/2, -1/2	0.467	-1.1	0.732	$4.02 \cdot 10^{-2}$
0.125	0.0251	0.5	1, 3/2, -3/2	0.467	-2.05	1.197	$6.73 \cdot 10^{-3}$
0.0251	0.125	-0.4	0, 1/2, -1/2	0.467	-0.99	-0.911	$2.23 \cdot 10^{-2}$
0.0251	0.125	-0.3	1, 3/2, -3/2	0.467	-1.99	-0.812	$5.85 \cdot 10^{-3}$
0.0251	0.125	0.4	0, 1/2, -1/2	0.467	-1.02	0.796	$4.85 \cdot 10^{-2}$
0.0251	0.125	0.4	1, 3/2, -3/2	0.467	-2.02	0.682	$8.79 \cdot 10^{-3}$

2. Незаряженная частица со спином 1/2 в поле Керра-Ньюмена:  $\alpha_Q \neq 0$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ,  $(\rho_-)_{KN} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$ ,

$$\tilde{\varepsilon}_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (170)$$

Из (170) следует, что  $\tilde{\varepsilon}_{KN} \neq 0$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , т.е. для связанных фермионов реализуется лишь положительный интервал разрешенных энергий  $0 < \varepsilon_{KN} < 1$ . Отсюда следует, что в (170)  $m_\varphi > 0$ .

3. Заряженная частица со спином 1/2 в поле Керра-Ньюмена:  $\alpha_Q \neq 0$ ,  $\alpha_{em} \neq 0$ ,  $(\rho_-)_{KN} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$ ,

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (171)$$

В (171) параметры  $m_\varphi$ ,  $\alpha_{em}$  могут иметь разные знаки, и поэтому, в отличие от (169), (170), для  $\varepsilon_{KN}$  допустим весь разрешенный диапазон для связанных состояний:  $-1 < \varepsilon_{KN} < 1$ . Отсюда следует очевидное неравенство

$$|\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}| < \alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2. \quad (172)$$

В табл. 2 для трех рассмотренных вариантов приведены результаты некоторых демонстрационных расчетов с характеристиками связанных состояний фермионов с энергиями (169)–(171).

**Таблица 2.** Характеристики связанных состояний фермионов под внутренним горизонтом событий поля КН с гравитационной константой связи  $\alpha = 10$

	$\alpha_a$	$\alpha_Q$	$\alpha_{em}$	$l, j, m_\varphi$	$(\rho_-)_{KN}$	$\lambda$	$\varepsilon_{KN}$	$\rho_m$	$\rho_{cl}$
Частица в поле Керра	5	0	0	0, 1/2, 1/2	1.34	-0.09	0.093	$8 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$
	5	0	0	1, 3/2, 3/2	1.34	-0.26	0.28	$7.6 \cdot 10^{-2}$	0.104
Незаряженная частица в поле Керра-Ньюмена	5	1	0	0, 1/2, 1/2	1.4	-0.091	0.093	$8.3 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$
	5	1	0	1, 3/2, 3/2	1.4	-0.27	0.278	$7.9 \cdot 10^{-2}$	0.111
	1	5	0	0, 1/2, 1/2	1.4	-0.61	0.169	$8.3 \cdot 10^{-2}$	0.067
	1	5	0	1, 3/2, 3/2	1.4	-1.4	0.508	$7.6 \cdot 10^{-2}$	0.207
Заряженная частица в поле Керра-Ньюмена	5	1	-1	0, 1/2, 1/2	1.4	-0.335	0.041	$7.1 \cdot 10^{-2}$	0.265
	5	1	-1	1, 3/2, 3/2	1.4	-0.515	0.226	$6.7 \cdot 10^{-2}$	0.336
	5	1	0.3	0, 1/2, 1/2	1.4	-0.018	0.108	$8.7 \cdot 10^{-2}$	-0.043
	5	1	1	1, 3/2, 3/2	1.4	-0.03	0.33	$9.3 \cdot 10^{-2}$	-0.172
	1	5	-1	0, 1/2, 1/2	1.4	-0.99	-0.304	$8 \cdot 10^{-2}$	0.139
	1	5	-1	1, 3/2, 3/2	1.4	-1.8	0.035	$7.2 \cdot 10^{-2}$	0.263
	1	5	1	0, 1/2, 1/2	1.4	-0.25	0.643	$8.7 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$
	1	5	1	1, 3/2, 3/2	1.4	-1.02	0.981	$8 \cdot 10^{-2}$	0.13
	5	1	-1	0, 1/2, -1/2	1.4	-3	-0.145	$6.5 \cdot 10^{-2}$	0.2
	5	1	-1	1, 3/2, -3/2	1.4	-2.9	-0.33	$6.8 \cdot 10^{-2}$	0.13
	5	1	1	0, 1/2, -1/2	1.4	-3.05	-0.04	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$-7 \cdot 10^{-2}$
	5	1	1	1, 3/2, -3/2	1.4	-3	-0.23	$7.6 \cdot 10^{-2}$	-0.376
	1	5	-1	0, 1/2, -1/2	1.4	-1.12	-0.643	$8.6 \cdot 10^{-2}$	0.024
	1	5	-1	1, 3/2, -3/2	1.4	-1.57	-0.98	$8.8 \cdot 10^{-2}$	$8.2 \cdot 10^{-2}$
	1	5	1	0, 1/2, -1/2	1.4	-1.56	0.304	$9.4 \cdot 10^{-2}$	-0.183
	1	5	1	1, 3/2, -3/2	1.4	-2.2	-0.035	$9.1 \cdot 10^{-2}$	-0.312

В табл. 2  $\rho_m$  — расстояние от внутреннего горизонта событий до максимального значения плотности вероятности (148).

На рис. 2 для параметров табл. 2  $\alpha = 10$ ,  $\alpha_a = 5$ ,  $\alpha_Q = 1$ ,  $j = 1/2$ ,  $l = 0$ ,  $m_\varphi = 1/2$ ,  $\alpha_{em} = -1, 0, 0.3$ , приведены нормированные плотности вероятности (148) и интегральные вероятности (149).

Результаты расчетов демонстрируют возможность существования стационарных связанных состояний фермионов под внутренним горизонтом событий  $\rho_-$ . Эти состояния с энергиями  $\varepsilon_{KN}$  (171) локализованы вблизи горизонта событий  $\rho_-$ . Для любых фермионов в поле Керра и для незаряженных фермионов в поле Керра-Ньюмена связанные состояния возможны лишь для значений  $m_\varphi > 0$  в энергетическом интервале  $0 < \varepsilon_{KN} < 1$ .

Для заряженных фермионов такие ограничения отсутствуют. Из расчетов видно, что во всех рас-

смотренных случаях существует непроницаемый потенциальный барьер типа (91) с положительным или отрицательным значением  $\rho_{cl}$ .

#### 5.4. Голая сингулярность Керра-Ньюмена ( $\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ ). Область определения волновых функций $\rho \in (0, \infty)$

В отличие от рассмотренных в разд. 5.2, 5.3, для фермионов в поле голой сингулярности КН при определенных значениях физических параметров существует невырожденный по  $n, j, l$  дискретный энергетический спектр.

В численных расчетах интегрирование уравнения (123) проводилось «слева направо» (от  $\rho_{min}$  до  $\rho_{max}$ ). При отсутствии непроницаемого барьера (91) интегрирование начинается от точки  $\rho_{min} = -10^8$  с граничным условием (136). При наличии непро-

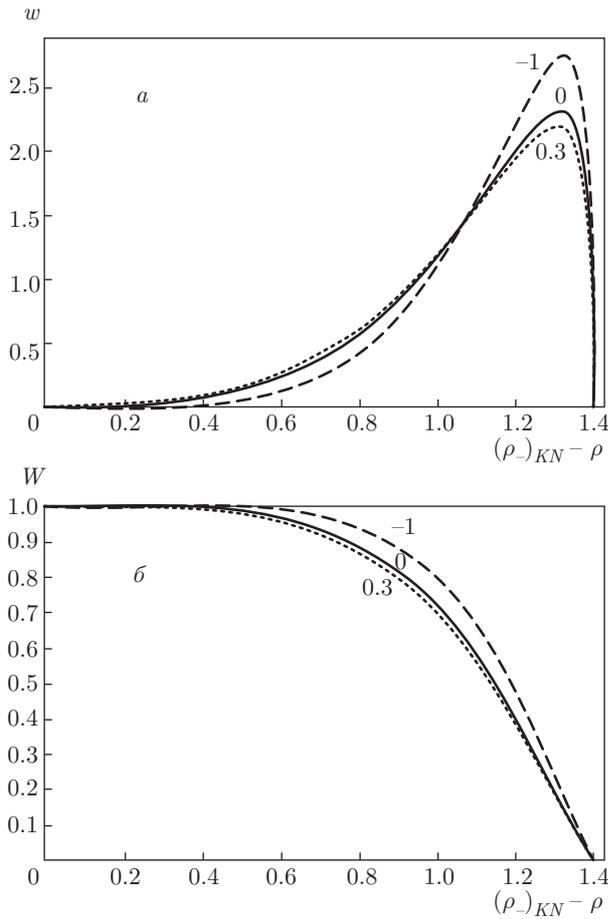


Рис. 2. Зависимости  $w((\rho-)_{KN}-\rho)$  (а),  $W((\rho-)_{KN}-\rho)$  (б) для связанных состояний с  $\varepsilon((\rho-)_{KN})$  и  $\alpha = 10, \alpha_Q = 1, \alpha_a = 5, j = 1/2, l = 0, m_\varphi = +1/2, \alpha_{em} = -1, 0, 0.3$

нищаемого барьера (91) интегрирование уравнения (123) проводится от точки  $\rho_{min} = \rho_{cl} + \Delta\rho_{cl}$  с граничным условием (145). Хорошая математическая сходимость результатов обеспечивается при выборе  $\Delta\rho_{cl} = 10^{-8}, \rho_{min} = -10^8, \rho_{max} = 10^8$ .

Уровни энергии в расчетах определялись в точках, где функция  $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$  изменяется скачками на  $\pi$  в соответствии с (150).

Поскольку эффективный потенциал (79) зависит от константы разделения  $\lambda$ , для каждого значения  $\varepsilon$  эта константа определяется решением уравнения (128).

Приведем результаты некоторых демонстрационных расчетов определения дискретного спектра  $1 - \varepsilon_n$ .

5.4.1. Поле Керра ( $\alpha_a^2 > \alpha^2, \alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0$ )

Рассмотрим состояния связанных фермионов  $S_{1/2}(l = 0, j = 1/2), P_{1/2}(l = 1, j = 1/2)$  с параметрами  $\alpha = 0.1, \alpha_a = 0.5, \alpha_a = 0.9, \alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0, m_\varphi = \pm 0.5$ . Полученные с помощью численных расчетов значения  $\lambda, \rho_{cl}, 1 - \varepsilon_n$  приведены в табл. 3.

5.4.2. Поле Керра–Ньюмена ( $\alpha_a^2 + \alpha_Q^2 > \alpha^2$ )

Рассмотрим связанные состояния заряженных ( $\alpha_{em} \neq 0$ ) и незаряженных ( $\alpha_{em} = 0$ ) фермионов с квантовыми числами  $(l = 0, j = 1/2)$  и  $(l = 1, j = 1/2)$  с параметрами  $\alpha = 0.25, \alpha_Q = 0.5, \alpha_a = 0.3, 0.7, m_\varphi = \pm 0.5, \alpha_{em} = -1, 0, 0.1$ . В табл. 4–6 приведены результаты расчетов дискретных энергетических спектров  $1 - \varepsilon_n$ .

Результаты расчетов демонстрируют существование в поле голой сингулярности KN стационарных связанных состояний фермионов с дискретным энергетическим спектром. В целом поведение плотностей вероятности носит такой же характер, как и при рассмотрении атомных систем в пространстве Минковского.

6. КОСМИЧЕСКАЯ ЦЕНЗУРА

Гипотеза космической цензуры, предложенная в работе [54], запрещает существование в природе сингулярностей, не прикрытых горизонтами событий. Однако полное доказательство этой гипотезы отсутствует до сих пор. Многие исследователи наряду с черными дырами рассматривают образование голых сингулярностей, их стабильность и отличительные особенности при экспериментальном наблюдении [55–60].

В работе [29] показано, что существуют статические метрики с времениподобными сингулярностями, проявляющие себя полностью несингулярными при рассмотрении квантовой механики бесспиновых частиц.

В работах [27, 28] мы получили подтверждение результатов [29] применительно к движению фермионов под горизонтом метрики Шварцшильда и в поле голой сингулярности RN. Действительно, ведущие особенности эффективных потенциалов для этих метрик в окрестности сингулярности представляют собой бесконечно большие потенциальные барьеры:

Таблица 3. Численные значения  $\lambda, \rho_{cl}, 1 - \varepsilon_n$

		$n = 1, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 1$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 1$
$\alpha_a = 0.5$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.502	-0.5	-0.5	0.915	0.914
	$\rho_{cl}$	0.0023	0.0006	0.0003	0.0006	0.0003
	$1 - \varepsilon_n$	$4.57 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$5.43 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$5.63 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_a = 0.5$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.5	-1.5	-1.5	1.23	1.23
	$\rho_{cl}$	-3.28	-3.66	-3.75	-3.66	-3.75
	$1 - \varepsilon_n$	$5.14 \cdot 10^{-3}$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$5.66 \cdot 10^{-4}$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$5.64 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_a = 0.9$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.1	-0.1	-0.1	0.97	0.97
	$\rho_{cl}$	-0.716	-0.732	-0.736	-0.73	-0.735
	$1 - \varepsilon_n$	$4.36 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$5.34 \cdot 10^{-4}$	$1.263 \cdot 10^{-3}$	$5.61 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_a = 0.9$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.9	-1.9	-1.9	1.49	1.49
	$\rho_{cl}$	-6.54	-7.88	-8.27	-7.86	-8.27
	$1 - \varepsilon_n$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$5.56 \cdot 10^{-4}$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$5.65 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4. Численные значения  $\lambda, \rho_{cl}, 1 - \varepsilon_n$  при  $\alpha_{em} = -1$

		$n = 1, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 1$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 1$
$\alpha_a = 0.3$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.785	-0.733	-0.717	0.948	0.939
	$\rho_{cl}$	0.0611	0.047	0.042	0.044	0.044
	$1 - \varepsilon_n$	0.417	0.168	0.084	0.114	0.063
$\alpha_a = 0.3$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.2	-1.26	-1.28	1.09	1.11
	$\rho_{cl}$	-0.122	-0.144	-0.152	-0.148	-0.154
	$1 - \varepsilon_n$	0.515	0.195	0.095	0.14	0.073
$\alpha_a = 0.7$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.45	-0.364	-0.334	0.955	0.944
	$\rho_{cl}$	0.0082	-0.04	-0.058	-0.051	-0.062
	$1 - \varepsilon_n$	0.317	0.135	0.071	0.095	0.055
$\alpha_a = 0.7$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.51	-1.63	-1.66	1.29	1.32
	$\rho_{cl}$	-0.353	-0.446	-0.482	-0.463	-0.49
	$1 - \varepsilon_n$	0.41	0.164	0.083	0.124	0.066

$$U_{eff}^S|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{5}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$U_{eff}^{RN}|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

В этих случаях сингулярности в начале координат в квантовой механике прикрыты отталкивающими барьерами, и наличие сингулярностей не несет угрозы космической цензуре.

Для голой сингулярности KN ситуация еще проще. Эффективный потенциал поля голой сингулярности KN регулярен в окрестности  $\rho = 0$ . Точка  $\rho = 0$  не является особой точкой в уравнении второго порядка для фермионов. Голоя сингулярность KN в квантовомеханическом взаимодействии с фермионами не несет угрозы космической цензуре.

Таблица 5. Численные значения  $\lambda, \rho_{cl}, 1 - \varepsilon_n$  при  $\alpha_{em} = 0$

		$n = 1, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 1$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 1$
$\alpha_a = 0.3$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.704	-0.701	-0.7	0.93	0.929
	$\rho_{cl}$	0.096	0.0943	0.094	0.094	0.094
	$1 - \varepsilon_n$	$2.18 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$3.16 \cdot 10^{-3}$	$7.75 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0.3$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.295	-1.3	-1.3	1.123	1.124
	$\rho_{cl}$	-0.569	-0.59	-0.595	-0.589	-0.595
	$1 - \varepsilon_n$	$2.38 \cdot 10^{-2}$	$7.07 \cdot 10^{-3}$	$3.28 \cdot 10^{-3}$	$7.94 \cdot 10^{-3}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0.7$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.309	-0.303	-0.301	0.93	0.929
	$\rho_{cl}$	-0.172	-0.183	-0.186	-0.182	-0.185
	$1 - \varepsilon_n$	$2.02 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$3.07 \cdot 10^{-3}$	$7.64 \cdot 10^{-3}$	$3.46 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0.7$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.69	-1.7	-1.7	1.35	1.353
	$\rho_{cl}$	-0.185	-0.206	-0.212	-0.204	-0.211
	$1 - \varepsilon_n$	$2.31 \cdot 10^{-2}$	$6.94 \cdot 10^{-3}$	$3.24 \cdot 10^{-3}$	$8.06 \cdot 10^{-3}$	$3.59 \cdot 10^{-3}$

Таблица 6. Численные значения  $\lambda, \rho_{cl}, 1 - \varepsilon_n$  при  $\alpha_{em} = 0.1$

		$n = 1, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 0$	$n = 2, j = 1/2,$ $l = 1$	$n = 3, j = 1/2,$ $l = 1$
$\alpha_a = 0.3$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.702	-0.7	-0.7	0.929	0.928
	$\rho_{cl}$	0.11	0.109	0.109	0.109	0.109
	$1 - \varepsilon_n$	$8.07 \cdot 10^{-3}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$	$2.73 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0.3$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.3	-1.3	-1.3	1.124	1.125
	$\rho_{cl}$	-0.869	-0.896	-0.903	-0.895	-0.903
	$1 - \varepsilon_n$	$8.53 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0.7$ $m_\varphi = 0.5$	$\lambda$	-0.304	-0.301	-0.3	0.929	0.929
	$\rho_{cl}$	-0.216	-0.221	-0.223	-0.221	-0.222
	$1 - \varepsilon_n$	$7.73 \cdot 10^{-3}$	$2.36 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$2.71 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0.7$ $m_\varphi = -0.5$	$\lambda$	-1.7	-1.7	-1.7	1.353	1.354
	$\rho_{cl}$	-3.012	-3.335	-3.427	-3.315	-3.42
	$1 - \varepsilon_n$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$2.47 \cdot 10^{-3}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для квантовомеханического описания движения фермионов в классическом поле Керра-Ньюмена представлено самосопряженное уравнение второго порядка с эффективным потенциалом. Вслед за предыдущей работой [39] мы отмечаем, что в эффективном потенциале (79) и в уравнении второго порядка (76) нет каких-либо особенностей,

связанных с наличием эргосферы, где  $g_{00} \leq 0$  (в (2) равенство

$$g_{00} = 1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2} = 0$$

определяет внешнюю и внутреннюю поверхности эргосферы поля KN). Таким образом, квантовая механика уравнения Дирака и уравнения второго по-

рядка не выделяет каким-либо образом присутствие эргосферы с  $g_{00} \leq 0$ .

В результате рассмотрения решений уравнения второго порядка с эффективными потенциалами в квантовой механике движения фермионов в классическом поле Керра – Ньюмена получены результаты, качественно отличающиеся от результатов, получаемых при использовании уравнения Дирака.

1. При наличии двух горизонтов событий  $(\rho_{\pm})_{KN}$  существуют регулярные решения с энергиями

$$\varepsilon = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em}(\rho_{\pm})_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_{\pm})_{KN}^2}. \quad (173)$$

Эти решения представляют собой вырожденные стационарные связанные состояния заряженных и незаряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями и с областями определения  $\rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty)$ ,  $\rho \in (-\infty, (\rho_-)_{KN}]$ . Волновые функции слабо зависят от  $j, l$  и обращаются в нуль на горизонтах событий. Фермионы в связанных состояниях с подавляющей вероятностью локализованы вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонтов событий на расстоянии долей комптоновской длины волны фермионов.

2. В случае экстремальных полей KN выполнение неравенства (87) фактически приводит к отсутствию стационарных связанных состояний фермионов для любых значений констант связи.

3. Для поля голой сингулярности KN ( $\alpha^2 < \alpha_Q^2 + \alpha_a^2$ ) при определенных значениях физических параметров анализ эффективных потенциалов и прямые численные решения уравнения типа Шредингера показали существование стационарных связанных состояний как заряженных, так и незаряженных фермионов.

4. Эффективный потенциал поля голой сингулярности KN регулярен в окрестности  $\rho = 0$ . Точка  $\rho = 0$  не является особой точкой в уравнении второго порядка для фермионов в поле голой сингулярности KN. В результате голая сингулярность KN в квантовомеханическом взаимодействии с фермионами не несет угрозы космической цензуре.

Регулярные решения для вырожденных стационарных связанных состояний фермионов с энергиями  $\varepsilon$  (173) получены с использованием уравнения второго порядка (76) с эффективным потенциалом (79). Волновая функция уравнения (76) связана с одной из радиальных волновых функций уравнения Дирака неунитарным преобразованием подобия (72). В результате волновые функции уравнения второго порядка для вырожденных стационар-

ных связанных состояний, в отличие от радиальных функций уравнения Дирака, становятся квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий  $(\rho_{\pm})_{KN}$ .

Самосопряженное уравнение второго порядка (76) может быть получено квадрированием ковариантного уравнения Дирака с переходом от биспинорной к спинорной волновой функции и с проведением соответствующего неунитарного преобразования подобия [46]. Для плоского пространства-времени Минковского ковариантное уравнение второго порядка для фермионов, движущихся во внешних электромагнитных полях, предложено П. Дираком еще в 1920-е гг. [25].

Наше рассмотрение показывает (см. также [27, 28]), что использование уравнения второго порядка расширяет возможности получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином 1/2 во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Эффективные потенциалы гравитационных и электромагнитных полей в самосопряженных уравнениях второго порядка

1. Поле Керра – Ньюмена.

В соответствии с (68)–(71) можно получить

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B_{KN}^2} \left( \frac{dB_{KN}}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left\{ \frac{f_{KN}}{\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}} \times \right. \\ \left. \times \left[ -\frac{1}{f_{KN}^2} f'_{KN} (\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}) + \frac{1}{f_{KN}} \left( \omega'_{KN} + \frac{f'_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} \right) \right] \right\}^2, \quad (A.1)$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{B_{KN}} \frac{d^2 B_{KN}}{d\rho^2} = -\frac{1}{4} \frac{f_{KN}}{\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}} \times \\ \times \left[ \frac{2}{f_{KN}^3} (f'_{KN})^2 (\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}) - \frac{1}{f_{KN}^2} f''_{KN} \times \right. \\ \left. \times (\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}) - \frac{2}{f_{KN}^2} f'_{KN} \left( \omega'_{KN} + \frac{f'_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{f_{KN}} \left( \omega''_{KN} + \frac{f''_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} - \frac{(f'_{KN})^2}{4f_{KN}^{3/2}} \right) \right], \quad (A.2)$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho}(A - D) = \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{f'_{KN}}{\rho f_{KN}^{3/2}} + \frac{1}{\rho^2 f_{KN}^{1/2}} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{A - D}{B} \frac{dB}{d\rho} = \frac{\lambda}{2\rho f_{KN}^{1/2}} \left( -\frac{f'_{KN}}{f_{KN}} + \frac{1}{\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}} \left( \omega'_{KN} + \frac{f'_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} \right) \right), \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{8}(A - D)^2 = \frac{\lambda^2}{2f_{KN}\rho^2}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{1}{2}BC = -\frac{1}{2f_{KN}^2}(\omega_{KN}^2 - f_{KN}). \quad (\text{A.6})$$

В формулах (A.1)–(A.6)

$$f_{KN} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2},$$

$$f'_{KN} \equiv \frac{df_{KN}}{d\rho} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^3},$$

$$f''_{KN} \equiv \frac{d^2f_{KN}}{d\rho^2} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^4},$$

$$\omega_{KN} = \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho},$$

$$\omega'_{KN} \equiv \frac{d\omega_{KN}}{d\rho} = -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\varphi}{\rho^3} + \frac{\alpha_{em}}{\rho^2},$$

$$\omega''_{KN} \equiv \frac{d^2\omega_{KN}}{d\rho^2} = \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\varphi}{\rho^4} - \frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

Сумма выражений  $E_{Schr} = (1/2)(\varepsilon^2 - 1)$  и (A.1)–(A.6) приводит к выражению для эффективного потенциала  $U_{eff}^F$  (79). Для остальных рассматриваемых в работе электромагнитных и гравитационных полей структура выражений для эффективных потенциалов не изменяется. Изменяются лишь выражения для  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ ,  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\omega''$ .

2. Поле Керра ( $\alpha_Q = 0$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ):

$$f_K = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}, \quad f'_K = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_a^2}{\rho^3},$$

$$f''_K = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_a^2}{\rho^4}, \quad \omega_K = \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2},$$

$$\omega'_K = -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\varphi}{\rho^3}, \quad \omega''_K = \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\varphi}{\rho^4}.$$

3. Поле Райсснера – Нордстрёма ( $\alpha_a = 0$ ):

$$f_{RN} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}, \quad f'_{RN} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_Q^2}{\rho^3},$$

$$f''_{RN} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_Q^2}{\rho^4}, \quad \omega_{RN} = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho},$$

$$\omega'_{RN} = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}, \quad \omega''_{RN} = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}, \quad \lambda = \kappa.$$

4. Поле Шварцшильда ( $\alpha_Q = 0$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ,  $\alpha_a = 0$ ):

$$f_S = 1 - \frac{2\alpha}{\rho}, \quad f'_S = \frac{2\alpha}{\rho^2}, \quad f''_S = -\frac{4\alpha}{\rho^3},$$

$$\omega_S = \varepsilon, \quad \omega'_S = \omega''_S = 0, \quad \lambda = \kappa.$$

5. Кулоновское поле (плоское пространство-время,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha_Q = 0$ ,  $\alpha_a = 0$ ):

$$f_C = 1, \quad f'_C = f''_C = 0, \quad \omega_C = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho},$$

$$\omega'_C = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}, \quad \omega''_C = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}, \quad \lambda = \kappa.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc. A **349**, 571 (1976).
2. S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc. A **350**, 565 (1976).
3. D. Page, Phys. Rev. D **14**, 1509 (1976).
4. N. Toop, Preprint DAMTP, Cambridge Univ., Cambridge (1976).
5. R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).
6. E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, J. Math. Phys. **6**, 918 (1965).
7. E. G. Kalnins and W. Miller, J. Math. Phys. **33**, 286 (1992).
8. F. Belgiorno and M. Martellini, Phys. Lett. B **453**, 17 (1999).
9. F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S.-T. Yau, Comm. Pure Appl. Math. **53**, 902 (2000).
10. F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S.-T. Yau, Comm. Pure Appl. Math. **53**, 1201 (2000).
11. F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S.-T. Yau, Comm. Math. Phys. **230**, 201 (2002).
12. F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S.-T. Yau, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 25 (2003).
13. D. Batic, H. Schmid, and M. Winklmeier, J. Math. Phys. **46**, 012504 (2005).
14. D. Batic and H. Schmid, Progr. Theor. Phys. **116**, 517 (2006).

15. M. Winklmeier and O. Yamada, *J. Math. Phys.* **47**, 102503 (2006).
16. D. Batic and H. Schmid, *Revista Colomb. Mat.* **42**, 183 (2008).
17. M. Winklmeier and O. Yamada, *J. Phys. A* **42**, 295204 (2009).
18. F. Belgiorno and S. L. Cacciatori, *J. Math. Phys.* **51**, 033517 (2010).
19. C. L. Pekeris, *Phys. Rev. A* **35**, 14 (1987).
20. C. L. Pekeris and K. Frankowski, *Phys. Rev. A* **39**, 518 (1989).
21. M. K.-H. Klissling and A. S. Tahvildar-Zadeh, *J. Math. Phys.* **56**, 042303 (2015).
22. A. S. Tahvildar-Zadeh, *J. Math. Phys.* **56**, 042501 (2015).
23. D. M. Zipoy, *J. Math. Phys.* **7**, 1137 (1966).
24. B. Carter, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).
25. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1958).
26. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, *УФН* **105**, 403 (1971) [Ya. B. Zeldovich and V. S. Popov, *Sov. Phys. Usp.* **14**, 673 (1972)].
27. В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, *ЖЭТФ* **154**, (2018).
28. В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин, *ЖЭТФ* **154**, (2018).
29. G. T. Horowitz and D. Marolf, *Phys. Rev. D* **52**, 5670 (1995).
30. H. Pruefer, *Math. Ann.* **95**, 499 (1926).
31. I. Ulehla and M. Havlíček, *Appl. Math.* **25**, 358 (1980).
32. I. Ulehla, M. Havlíček, and J. Hořejší, *Phys. Lett. A* **82**, 64 (1981).
33. I. Ulehla, Rutherford Laboratory preprint RL-82-095 (1982).
34. R. H. Boyer and R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8**, 265 (1967).
35. L. Parker, *Phys. Rev. D* **22**, 1922 (1980).
36. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, *Phys. Rev. D* **82**, 104056 (2010); arXiv:1007.4631 [gr-qc].
37. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, *Phys. Rev. D* **83**, 105002 (2011); arXiv:1102.4067 [gr-qc].
38. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, *J. Mod. Phys.* **6**, 303 (2015); arXiv:1107.0844 [gr-qc].
39. V. P. Neznamov and V. E. Shemarulin, *Grav. Cosmol.* **24**, 129 (2018), DOI:10.1134/S0202289318020111.
40. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, *Ann. Phys. (Berlin)* **526**, 491 (2014), DOI:10.1002/andp.201400035.
41. I. M. Ternov, A. B. Gaina, and G. A. Chizhov, *Sov. Phys. J.* **23**, 695 (1980).
42. S. Dolan and J. Gair, *Class. Quant. Grav.* **26**, 175020 (2009).
43. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (1963) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)].
44. M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov, and E. Yu. Popov, *Grav. Cosmol.* **23**, 245 (2017), DOI:10.1134/S0202289317030057; arXiv:1511.05058 [gr-qc].
45. В. И. Докучаев, Ю. Н. Ерошенко, *ЖЭТФ* **144**, 85 (2013).
46. В. П. Незнамов, ВАНТ, сер. Теор. и прикладн. физика, вып. 3, 43 (2017).
47. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
48. В. П. Незнамов, *ЭЧАЯ* **37**(1), 152 (2006) [Part. Nucl. **37**(1), 86 (2006)].
49. V. P. Neznamov and A. J. Silenko, *J. Math. Phys.* **50**, 122302 (2009).
50. J. Dittrich and P. Exner, *J. Math. Phys.* **26**, 2000 (1985).
51. H. Schmid, *Mathematische Nachrichten* **274–275**(1), 117 (2004); arXiv:math-ph/0207039v2.
52. V. P. Neznamov and I. I. Safronov, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1650091 (2016); DOI:10.1142/S0218271816500917.
53. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag (1991), (1996); Э. Хайрер, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1999).
54. R. Penrose, *Rivista del Nuovo Cimento, Serie I*, **1**, Numero Speciale: 252 (1969).

55. K. S. Virbhadra, D. Narasimha, and S. M. Chitre, *Astron. Astrophys.* **337**, 1 (1998).
56. K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **65**, 103004 (2002).
57. K. S. Virbhadra and C. R. Keeton, *Phys. Rev. D* **77**, 124014 (2008).
58. D. Dey, K. Bhattacharya, and N. Sarkar, *Phys. Rev. D* **88**, 083532 (2013).
59. P. S. Joshi, D. Malafaxina, and R. Narayan, *Class. Quant. Grav.* **31**, 015002 (2014).
60. A. Goel, R. Maity, P. Roy, and T. Sarkar, *Phys. Rev. D* **91**, 104029 (2015); arXiv:1504.01302 [gr-qc].