

# НЕВИНЕРОВСКАЯ ДИНАМИКА ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТИ ФОТОНОВ ОКРУЖЕНИЯ

*А. М. Башаров<sup>a,b\*</sup>, А. И. Трубилко<sup>c</sup>*

<sup>a</sup> *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Кафедра математики и математических методов физики,  
Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

<sup>c</sup> *Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России  
196105, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 27 августа 2018 г.,  
после переработки 27 августа 2018 г.  
Принята к публикации 11 сентября 2018 г.

Предложена модель коллективного распада локализованного ансамбля одинаковых атомов в вакуумном широкополосном электромагнитном поле с ненулевой плотностью фотонов с учетом слагаемых второго порядка по константе взаимодействия атомов и поля. Модель основана на стохастическом дифференциальном уравнении для оператора эволюции атомного ансамбля и окружения, управляемом основными квантовыми случайными процессами и независимыми классическими винеровскими процессами. Показано, что ненулевая плотность фотонов в ряде случаев не влияет на эффект подавления коллективного излучения атомов и при этом ее наличие проявляется лишь в виде дополнительного механизма перераспределения атомов по коллективным подуровням.

DOI: 10.1134/S0044451019030052

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Невинеровская динамика открытых квантовых систем обусловлена своеобразной интерференцией конкурирующих квантовых процессов, приводящей к эффектам стабилизации их возбужденных состояний. Одни из интерферирующих процессов выражаются в переходах в квантовой системе с изменением ее квантового состояния и излучением реального фотона, например в переходе с возбужденного квантового уровня на основной, при котором энергия высвечивается в виде фотона. Это — процессы разрушения возбужденного состояния. Другие процессы относят к разряду виртуальных — состояние квантовой системы, в том числе и возбужденное, не меняется, а излучение и поглощение виртуального фотона с близкими параметрами формирует сдвиги энергий этих квантовых состояний. Такие процессы ответственны за взаимодействие между квантовыми

частицами и иногда интерпретируются как локальные поправки к электромагнитному полю, действующему на квантовую частицу.

Какими бы ни были особенности интерпретации обсуждаемых процессов, каждому процессу соответствует определенное слагаемое в эффективном гамильтониане системы и, как правило, эти слагаемые различаются порядком по константе связи открытой системы с окружением. Последнее обстоятельство, казалось бы, не позволяет ожидать, что процессы более высокого порядка оказывают влияние на процессы более низкого порядка (в том числе и первого порядка). Качественно могут возникать новые каналы взаимодействия и перераспределения энергии, но существенные количественные поправки к процессам первого порядка представлялись маловероятными. Однако оказалось, что интерферирующие слагаемые в эффективном гамильтониане имеют различную алгебраическую природу. Это различие в алгебраической природе позволяет говорить о своеобразной интерференции квантовых процессов разного порядка по параметрам связи. В результате

\* E-mail: basharov@gmail.com

такой интерференции возбужденное состояние стабилизируется по отношению к коллективным процессам излучения реальных фотонов (процессы первого порядка), «застывая» в процессах виртуального переизлучения фотонов (процессы второго порядка по константе связи открытой системы с окружением). Оказалось, что упомянутая выше интерференция определяется числом одинаковых частиц, участвующих в обсуждаемом процессе, причем сначала эффект растет с увеличением числа частиц. Затем зависимость результатов от числа частиц становится немонотонной [1–3]. В указанных работах впервые употреблен термин «невинеровская динамика» для процессов интерференции.

Математическим основанием для решения задач квантовой оптики, которые приводят к эффектам стабилизации возбужденных состояний, явились алгебраическая теория возмущений [4, 5] и теория основных квантовых случайных процессов на основе квантовых стохастических дифференциальных уравнений [6–10]. Алгебраическая теория возмущений позволила записать эффективный гамильтониан ряда задач в марковском приближении в терминах базовых квантовых случайных процессов — рождающего, уничтожающего и считывающего [1–3]. Квантовая теория этих случайных процессов определяет алгебраический аппарат для расчета оператора эволюции открытых квантовых систем. Общая структура алгебраических соотношений и кинетического уравнения, управляемого всеми тремя базовыми квантовыми процессами, описана в работах [7, 8].

Следует отметить, что одновременно с математическими методами [6] физики ввели в исследование задач спонтанного излучения аппарат стохастических дифференциальных уравнений [11, 12], управляемых только двумя квантовыми случайными процессами — рождающим и уничтожающим. Чтобы отличить процессы (и соответствующий математический аппарат), управляемые только указанными этими двумя базовыми квантовыми случайными процессами, от процессов, в описании которых задействованы все три базовых случайных процесса, удобно использовать термины «винеровская» и «невинеровская» динамика. Различие здесь не только в названии — именно наличие и необходимость учета считывающего процесса обуславливает своеобразие процессов интерференции в винеровской динамике и возникновение эффекта стабилизации возбужденных состояний, а также связанного с ним эффекта подавления коллективного излучения ансамбля одинаковых атомов (подавление сверхиз-

лучения [1–3]).

Существенным ограничением квантовой теории случайных процессов [6–10] в ее приложении к невинеровской теории открытых квантовых систем является условие нулевой плотности фотонов поля окружения. От этого ограничения свободна винеровская теория, но она не дает описания эффектов стабилизации и становится неприменимой с ростом числа атомов локализованного ансамбля одинаковых атомов. Ограничение нулевой плотности фотонов для считывающего процесса достаточно естественно — считывающий процесс учитывает число фотонов в системе, и наличие ненулевой начальной плотности фотонов сразу делает рассматриваемую величину бесконечной, поскольку бесконечно число мод окружения, тем более в приближении открытой системы. Обходить такую бесконечность в формализме квантовых стохастических дифференциальных уравнений пока не ясно как. Нулевая плотность фотонов отвечает нулевой абсолютной температуре окружения, что не соответствует реальности. Даже в сравнении с огромной величиной кванта резонансного перехода в открытой системе реальная плотность фотонов окружения должна рассматриваться как ненулевая.

В настоящей работе предложен вариант описания задач квантовой оптики в случае ненулевой плотности фотонов окружения и необходимости рассмотрения считывающего квантового случайного процесса. Соответствующий математический аппарат развит для представления электромагнитного поля окружения открытой системы при ненулевых температурах в виде совокупности полей различной природы. Один тип электромагнитного поля дается широкополосным квантованным полем с нулевой плотностью фотонов; другой тип — классическим шумовым дельта-коррелированным электромагнитным полем, которое и описывает ненулевую плотность фотонов. Такое представление физически разумно и согласуется с различными частными случаями.

Предложенное представление оправдано той ролью, которую играют различные слагаемые в кинетическом уравнении открытой системы, полученном в рамках винеровского описания взаимодействия открытой системы с квантованным электромагнитным окружением ненулевой плотности фотонов. Известно, что матрица плотности  $\rho^S$  локализованной открытой системы в случае винеровской динамики описывается кинетическим уравнением общего линдбладовского вида с релаксационным оператором  $\hat{\Gamma}$  [13]:

$$\frac{d\rho^S}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho^S, H^{Eff-S}] - \hat{\Gamma}\rho^S, \quad (1)$$

$$\hat{\Gamma}\rho^S = -\frac{i}{\hbar} [\rho^S, H^{Shift-S}] + \hat{\Gamma}_0\rho^S + \hat{\Gamma}_n\rho^S, \quad (2)$$

$$\hat{\Gamma}_0\rho^S = \frac{1}{2}L^{S\dagger}L^S\rho^S + \frac{1}{2}\rho^SL^{S\dagger}L^S - L^S\rho^SL^{S\dagger}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_n\rho^S = & n \left( \frac{1}{2}L^{S\dagger}L^S\rho^S + \frac{1}{2}\rho^SL^{S\dagger}L^S - L^S\rho^SL^{S\dagger} \right) + \\ & + s_q \left( \frac{1}{2}L^{S\dagger}L^{S\dagger}\rho^S + \frac{1}{2}\rho^SL^{S\dagger}L^{S\dagger} - L^{S\dagger}\rho^SL^{S\dagger} \right) + \\ & + n \left( \frac{1}{2}L^SL^{S\dagger}\rho^S + \frac{1}{2}\rho^SL^SL^{S\dagger} - L^{S\dagger}\rho^SL^S \right) + \\ & + s_q^* \left( \frac{1}{2}L^SL^S\rho^S + \frac{1}{2}\rho^SL^SL^S - L^S\rho^SL^S \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь  $n$  — ненулевая плотность фотонов квантованного электромагнитного поля окружения,  $s_q$  — параметр, характеризующий сжатие поля, удовлетворяющий неравенству  $|s_q| \leq \sqrt{n(n+1)}$ ,  $H^{Eff-S}$  — эффективный гамильтониан открытой системы,  $H^{Shift-S}$  и  $L^S$  — операторы Линдблада, описывающие унитарную эволюцию (сдвиг частот) и необратимую динамику, связанные с релаксационными процессами. Для обсуждаемого случая винеровского описания  $H^{Shift-S} = 0$ . В случае одного двухуровневого атома  $L^S = |E_1\rangle\langle E_2|$ , где  $|E_1\rangle$  и  $|E_2\rangle$  — нижний и верхний квантовые энергетические уровни двухуровневого атома.

В работе [14] показано, что воздействие на открытую систему только классического шумового поля «интенсивности»  $n$  с параметром сжатия, удовлетворяющим неравенству  $|s_q| \leq n$ , также описывается при помощи кинетического уравнения (1). При этом операторы релаксации следующие:

$$H^{Shift-S} = 0, \quad \hat{\Gamma}_0 = 0,$$

а оператор  $\hat{\Gamma}_n$  получается в точности таким же, как в выражении (4), как и операторы Линдблада  $L^S$ . Таким образом, представление квантованного широкополосного электромагнитного поля при ненулевой плотности фотонов в виде суперпозиции квантованного широкополосного поля с нулевой плотностью фотонов и классического дельта-коррелированного электромагнитного поля в винеровской динамике оправдано, как минимум, для описания резонансных процессов вне области максимального сжатия электромагнитного поля.

При описании невинеровской динамики для предложенного в статье представления электромагнитного поля окружения появляются как операторы

$\hat{\Gamma}_0 \rightarrow \hat{\Gamma}_{non-W}$  и  $H^{Shift-S} \rightarrow H_{non-W}^{Shift-S} \neq 0$ , так и составляющая  $\hat{\Gamma}_D$  релаксационного оператора  $\hat{\Gamma}$ , описывающая дефазировку квантовых излучателей в шумовом классическом поле со своим оператором Линдблада  $L_D^S$ , отличным от  $L^S$  винеровской динамики:

$$\hat{\Gamma}\rho^S = -\frac{i}{\hbar} [\rho^S, H_{non-W}^{Shift-S}] + \hat{\Gamma}_{non-W}\rho^S + \hat{\Gamma}_n\rho^S + \hat{\Gamma}_D\rho^S, \quad (5)$$

$$\hat{\Gamma}_D\rho^S = \left[ \frac{1}{2}(L_D^S)^2\rho^S + \frac{1}{2}\rho^S(L_D^S)^2 - L_D^S\rho^SL_D^S \right].$$

Вклад в  $H_{non-W}^{Shift-S}$  дают как квантовая составляющая, так и классическая. При этом все операторы Линдблада, за исключением операторов, определяющих  $\hat{\Gamma}_n$ , отличаются от операторов винеровской динамики как в классическом поле, так и в квантовом. Оператор  $\hat{\Gamma}_n$  при этом неизменно присутствует в операторе релаксации как винеровской динамики, так и в предложенном случае невинеровской динамики.

В статье обосновывается вывод общего релаксационного оператора в случае невинеровской динамики в поле с ненулевой плотностью фотонов. Проанализированы роль и влияние слагаемых, получившихся при представлении электромагнитного поля с ненулевой плотностью фотонов через квантованное поле с нулевой плотностью фотонов и классическое шумовое поле, на эффект подавления коллективного спонтанного излучения ансамбля одинаковых возбужденных атомов.

## 2. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ С ШИРОКОПОЛОСНЫМ ВАКУУМНЫМ ПОЛЕМ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФОТОНОВ. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТониАН

Прямой способ получения эффективного гамильтониана открытой системы в широкополосных полях — использование алгебраической теории возмущений [4, 5]. Эта теория представляет собой алгебраическую версию метода усреднения Боголюбова – Крылова – Митропольского [15]. Однако в неалгебраическом варианте применение метода усреднения к рассматриваемой нами задаче весьма трудоемко — еще в книге [16] изложено применение метода Боголюбова – Крылова – Митропольского для описания однофотонных и двухфотонных резонансных процессов в классических когерентных полях, и читатель может оценить трудоемкость этого метода.

Поэтому применим здесь алгебраический вариант метода усреднения, состоящий в использовании унитарной симметрии квантовой теории и преобразовании исходного волнового вектора открытой системы и его резонансного окружения. Отметим, что алгебраизация метода усреднения, не связанная напрямую с задачами нелинейной и квантовой оптики, обсуждается в [17].

Будем рассматривать ансамбль одинаковых неподвижных частиц, которые могут в начальном состоянии заселять только пару энергетических невырожденных уровней, связанных между собой оптически разрешенным переходом. Обозначим эти уровни  $|E_1\rangle$  и  $|E_2\rangle$ . Окружающее ансамбль квантованное электромагнитное поле, характеризующееся ненулевыми температурой и плотностью числа фотонов  $n$ , может вызывать переходы с указанных уровней на лежащие выше. Будем полагать, что такое поле в случае резонанса с другими оптически разрешенными переходами характеризуется плотностью  $n \ll 1$ , чтобы в первом приближении можно было бы пренебречь резонансными переходами с рассматриваемых уровней  $|E_1\rangle$  и  $|E_2\rangle$  на другие квантовые уровни.

Однако внешнее поле может быть создано широкополосным источником, например параметрическим генератором, с плотностью фотонов  $n > 1$  в определенном частотном интервале. В этом случае будем предполагать, что его эффективная ширина не захватывает другие оптически разрешенные переходы с рассматриваемой пары уровней, и она много больше ширины обсуждаемой пары уровней. Это позволяет принять для рассмотрения модель, в которой однофотонные переходы во внешнем широкополосном поле с ненулевой плотностью фотонов происходят только между рассматриваемой парой энергетических уровней атомов ансамбля, которые будем называть резонансными. Такое предположение не означает, что мы исключаем из рассмотрения другие атомные уровни — они проявятся во втором порядке алгебраической теории возмущений и будут определять параметры виртуальных переходов с рассматриваемой пары резонансных уровней. Это отличает наш подход от других (см., например, недавнюю работу [18]), где все рассмотрение ограничивается учетом исключительно только двух резонансных уровней.

Заметим, что ранее [19] обсуждались возможные квантовые переходы и описывалась их динамика в случае дополнительного (наряду с вакуумным полем) воздействия на квантовую систему нерезонансного когерентного классического поля. Однако

это рассмотрение выполнено в рамках винеровского подхода, а его недостаточно для описания динамики локализованных атомных ансамблей с достаточно большим числом атомов (порядка сотни [1]). В работах [20, 21] в рамках невинеровской динамики рассматривалось резонансное воздействие на атомный ансамбль квантованных полей — широкополосного поля с нулевой плотностью фотонов и однофотонного пакета.

Подчеркнем, что в работах [20, 21] развита последовательная квантовая теория построения основного кинетического уравнения исследуемой открытой системы при ее взаимодействии с широкополосными электромагнитными полями. Она основана на алгебраических свойствах всех основных квантовых стохастических процессов, которые возникают естественным образом, не привлекая каких-либо дополнительных соображений извне, в отличие от различных феноменологических теорий [22–24]. Следует также отметить естественное использование унитарной симметрии квантовой механики. В работах [20, 21] для одного из полей не применялось приближение Найквиста (см. следующий раздел), которое ниже нами будет использовано для всех участвующих полей, взаимодействующих с атомным ансамблем. Тем не менее и работы [20, 21], а также [22–24] и представленный ниже анализ относятся к парадигме невинеровских квантовых стохастических дифференциальных уравнений, расширяющих обычные представления винеровской теории и, по видимому, необходимых для выхода за рамки приближения вращающейся волны в случае квантованных полей. До сих пор учет так называемых антивращающихся слагаемых [25–27], появляющихся за пределами приближения вращающейся волны, не проведен для широкополосных полей, за исключением работ [1–3].

Стандартным предположением невинеровской теории является приближение локализованного атомного ансамбля — именно в этом приближении удается исключить из рассмотрения пространственные эффекты и в таком простейшем случае представить одно из слагаемых эффективного гамильтониана (второго порядка по константе связи с вакуумным полем с нулевой плотностью фотонов) через квантовый считающий процесс.

С учетом указанных выше предположений исходный гамильтониан  $H^{Ini}$  открытой системы и окружающего резонансного квантованного поля можно записать в стандартном виде как

$$\begin{aligned}
H^{Ini} &= H^A + H^F + H^{Int}, \\
H^A &= \sum_{i,j} E_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \\
H^F &= \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}, \\
H^{Int} &= - \sum_{\mathbf{q}} \Gamma_{\mathbf{q}} (b_{\mathbf{q}}^{\dagger} + b_{\mathbf{q}}) \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \\
\sum_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} &= \hat{1}^{(i)}, \quad \langle E_j|^{(i)} E_k\rangle^{(i)} = \delta_{jk}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $|E_j\rangle$  — квантовое состояние атома с энергией  $E_j$ ,  $d_{kj} = \langle E_k | d | E_j \rangle$ ,  $d = \sum_{k,j} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|$  — оператор дипольного момента атома. Верхний индекс у вектора атомного состояния отмечает пространство состояний  $i$ -го атома, и суммирование по этому индексу означает суммирование по всем атомам ансамбля, т.е.  $i = 1, \dots, N_a$ , где  $N_a$  — число атомов ансамбля, которое предполагается неизменным. Операторы рождения  $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  и уничтожения  $b_{\mathbf{q}}$  фотонов с волновым вектором  $\mathbf{q}$  удовлетворяют стандартному коммутационному соотношению  $[b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ . Дисперсионное соотношение дается обычным равенством  $\omega_{\mathbf{q}} = qc$ . Параметр связи  $\Gamma_{\mathbf{q}}$  в случае трехмерного электромагнитного поля дается выражением

$$\Gamma_{\mathbf{q}} = \sqrt{\frac{2\pi \hbar qc}{\ell^3}},$$

где  $\ell^3$  — объем квантования.

В расширенном пространстве состояний атомной системы и квантованного электромагнитного поля исходный гамильтониан  $H^{Ini}$  определяет уравнение Шредингера для волнового вектора:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi^{A+F}\rangle = H^{Ini} |\Psi^{A+F}\rangle.$$

Мы предполагаем, что квантованное широкополосное электромагнитное поле с ненулевой плотностью фотонов в состоянии термодинамического равновесия (термостат) можно представить в виде суммы квантованного электромагнитного поля и классического шумового электромагнитного поля несущей частоты, равной частоте резонансного перехода, с амплитудой  $\mathcal{E}(t)$ . Можно ожидать, что удастся как охватить особенности невинеровской динамики в условиях ненулевой плотности фотонов, так и избежать проблем с бесконечностью квантового считающего процесса в случае ненулевой его плотности. К тому же известно, что к одному и тому же кинетическому уравнению для матрицы плотности открытой системы приводят разные модели случайности его окружения, и весь вопрос состоит в наи-

более адекватном и простом их описании, совпадающим в предельных случаях с известными результатами.

В связи с принятым предположением запишем  $H^{Int}$  в виде

$$\begin{aligned}
H^{Int} &= H^Q + H^{Cl}, \\
H^Q &= - \sum_{\mathbf{q}} \Gamma_{\mathbf{q}} (b_{\mathbf{q}}^{\dagger} + b_{\mathbf{q}}) \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{Cl} &= - [\mathcal{E}(t) \exp(-i\Omega_{21}t) + \mathcal{E}^*(t) \exp(i\Omega_{21}t)] \times \\
&\quad \times \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)},
\end{aligned}$$

$$\Omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}.$$

Обращаем внимание на то, что здесь операторы  $b_{\mathbf{q}}$  и  $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  отличаются от операторов, представленных в исходном гамильтониане (6), хотя и обозначены теми же буквами. Переход к представлению  $H^{Int} = H^Q + H^{Cl}$  можно обосновать (до некоторой степени) и на уровне операторов рождения и уничтожения, однако это уведет в сторону и здесь далее не обсуждается.

Амплитуду  $\mathcal{E}(t)$  разложим в интеграл Фурье:

$$\mathcal{E}(t) = \int e^{-i\omega t} c_{\omega} d\omega, \quad c_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} \mathcal{E}(t) dt.$$

Предположения о характере начального состояния  $|\Psi^{A+F}\rangle$  и электромагнитных полей при  $t = 0$  в алгебраической теории возмущений и в методах эффективного гамильтониана делаются после построения эффективного гамильтониана задачи. Классическое поле введено в рассмотрение для описания ненулевой плотности фотонов, тогда как квантованное поле будет характеризоваться нулевой плотностью.

Следуя общей схеме [4, 5, 18], преобразуем волновой вектор  $|\Psi^{A+F}\rangle$ :

$$|\tilde{\Psi}^{A+F}\rangle = \mathcal{T} |\Psi^{A+F}\rangle, \quad \mathcal{T} = e^{-iS}, \quad S^{\dagger} = S.$$

Преобразованный вектор будет удовлетворять кинетическому уравнению

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\Psi}^{A+F}\rangle}{dt} = \tilde{H} |\tilde{\Psi}^{A+F}\rangle$$

с преобразованным гамильтонианом

$$\tilde{H} = \mathcal{T} H^{Ini} \mathcal{T}^{\dagger} - i\hbar \mathcal{T} \frac{d}{dt} \mathcal{T}^{\dagger}.$$

Разложим  $\tilde{H}$  и  $S$  в ряд по взаимодействию с вакуумным и классическим полями:



$$S = S^{(10)} + S^{(01)} + S^{(11)} + S^{(20)} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \tilde{H}^{(00)} + \tilde{H}^{(10)} + \tilde{H}^{(01)} + \tilde{H}^{(11)} + \\ + \tilde{H}^{(20)} + \tilde{H}^{(02)} + \dots \end{aligned}$$

Здесь левый индекс каждой пары верхних индексов описывает порядок по константе связи с квантованным полем, а правый — с классическим полем. Реально порядок взаимодействия с полями определяется отношением энергии взаимодействия с полем к энергии кванта резонансного перехода.

С учетом формулы Бейкера – Хаусдорфа нетрудно получить

$$\tilde{H}^{(00)} = H^A + H^F, \quad (7)$$

$$\tilde{H}^{(10)} = H^Q - i \left[ S^{(10)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{dS^{(10)}}{dt}, \quad (8)$$

$$\tilde{H}^{(01)} = H^{Cl} - i \left[ S^{(01)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{dS^{(01)}}{dt}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(11)} = -\frac{i}{2} \left[ S^{(10)}, H^{Cl} \right] - \frac{i}{2} \left[ S^{(10)}, \tilde{H}^{(01)} \right] - \\ - \frac{i}{2} \left[ S^{(01)}, H^Q \right] - \frac{i}{2} \left[ S^{(01)}, \tilde{H}^{(10)} \right] - \\ - i \left[ S^{(11)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{dS^{(11)}}{dt}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(20)} = -\frac{i}{2} \left[ S^{(10)}, H^Q \right] - \frac{i}{2} \left[ S^{(10)}, \tilde{H}^{(10)} \right] - \\ - i \left[ S^{(20)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{dS^{(20)}}{dt}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(02)} = -\frac{i}{2} \left[ S^{(01)}, H^{Cl} \right] - \frac{i}{2} \left[ S^{(01)}, \tilde{H}^{(01)} \right] - \\ - i \left[ S^{(02)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{dS^{(02)}}{dt}. \quad (12) \end{aligned}$$

Эти простые формулы заменяют несколько страниц вычислений [16] по методу усреднения. Ведущей идеей для нахождения слагаемых  $S^{(ij)}$  и эффективного гамильтониана

$$H^{Eff} = \tilde{H}^{(00)} + \tilde{H}^{(01)} + \tilde{H}^{(10)} + \tilde{H}^{(11)} + \tilde{H}^{(20)} + \tilde{H}^{(02)}$$

служит отсутствие быстро меняющихся во времени слагаемых в  $\tilde{H}^{(ij)}$  в представлении взаимодействия. Заметим, что естественное требование алгебраической теории возмущений отличает подход работ [4, 5, 19] от других подходов к построению эффективного гамильтониана теории открытых квантовых систем [28–30]. В случае открытых систем отличия связаны с марковскими условиями, которые

можно налагать на исходные начальные вектора состояния или на преобразованные вектора состояний. Возникающие здесь различия ярко иллюстрирует модельная задача, рассмотренная в работе [14].

В результате несложных вычислений, детали которых в других условиях можно найти в работах [1, 5, 31–34], получаем (в представлении взаимодействия, что отмечаем явным написанием аргументов в эффективном гамильтониане)

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(10)}(t) = - \sum_{j\mathbf{q}} \Gamma_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} d_{21} \exp[-i(\omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{21})t] \times \\ \times |E_2\rangle^{(j)} \langle E_1|^{(j)} + \text{H.c.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(01)}(t) = -d_{21} \exp(i\Omega_{21}t) \sum_j |E_2\rangle^{(j)} \langle E_1|^{(j)} \times \\ \times \int c_{\omega} \exp(-i\omega t) d\omega + \text{H.c.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(11)}(t) = \\ = \sum_{j\mathbf{q}k} \Gamma_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} \int d\omega c_{\omega}^* \exp[-i(\omega_{\mathbf{q}} - \omega)t] \times \\ \times \frac{1}{2} (\Pi_k(\omega_{\mathbf{q}}) + \Pi_k(\omega)) |E_k\rangle^{(j)} \langle E_k|^{(j)} + \text{H.c.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(20)}(t) = \sum_{j\mathbf{q}\mathbf{q}'} \Gamma_{\mathbf{q}} \Gamma_{\mathbf{q}'} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}'} \exp[i(\omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}})t] \times \\ \times \sum_k \frac{1}{2} (\Pi_k(\omega_{\mathbf{q}}) + \Pi_k(\omega_{\mathbf{q}'})) |E_k\rangle^{(j)} \langle E_k|^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\tilde{H}^{(02)}(t) = I(t) \sum_{jk} \Pi_k(\Omega_{21}) |E_k\rangle^{(j)} \langle E_k|^{(j)},$$

$$\begin{aligned} V^{Ex} = - \sum_{\mathbf{q}} \Gamma_{\mathbf{q}}^2 \sum'_{i \neq i', kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} |E_j\rangle^{(i')} \langle E_k|^{(i')} \times \\ \times \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{\mathbf{q}} - \Omega_{kj})}, \end{aligned}$$

$$\Pi_k(\omega) = \sum_j \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\Omega_{kj} + \omega} + \frac{1}{\Omega_{kj} - \omega} \right),$$

$$\Omega_{kj} = \frac{E_k - E_j}{\hbar}, \quad I(t) = |\mathcal{E}(t)|^2.$$

Мы не стали выписывать в выражении для  $\tilde{H}^{(20)}(t)$  получающееся слагаемое  $H^{Lamb}(t)$ , описывающее лэмбовские сдвиги уровней. Его учет состоит в переопределении энергий квантовых уровней

[1, 2, 20, 21]. Другое слагаемое, которое также относится к  $\tilde{H}^{(20)}(t)$  согласно формуле (11), записано отдельно в виде  $V^{Ex}$ .

Эффективный гамильтониан определяет уравнение Шредингера для преобразованного волнового вектора  $|\tilde{\Psi}^{A+F}\rangle$  и преобразованного оператора эволюции  $\tilde{U}(t, t_0)$ ,

$$i\hbar \frac{d\tilde{U}(t, t_0)}{dt} = \left[ \tilde{H}^{(10)}(t) + \tilde{H}^{(01)}(t) + \tilde{H}^{(20)}(t) + \tilde{H}^{(11)}(t) + \tilde{H}^{(02)}(t) + V^{Ex} \right] \tilde{U}(t, t_0), \quad (13)$$

с начальным условием  $\tilde{U}(t_0, t_0) = 1$ .

В марковском приближении в силу особенностей теории случайных процессов [13] уравнение (13) становится неопределенным и приобретает корректный статус при формулировке на его основе стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Мы проследим этапы формулировки различных СДУ при выражении слагаемых  $\tilde{H}^{(10)}(t)$ ,  $\tilde{H}^{(01)}(t)$ ,  $\tilde{H}^{(20)}(t)$ ,  $\tilde{H}^{(11)}(t)$  и  $\tilde{H}^{(02)}(t)$  эффективного гамильтониана через случайные процессы. При этом величины  $\mathcal{E}(t)$  и  $I(t)$ , определяющие взаимодействие атомной системы с классическим шумовым полем, будем рассматривать как независимые.

Чтобы ввести стандартные случайные процессы и оперировать удобной алгеброй их дифференциалов, уравнение (13) необходимо привести к безразмерному виду. В случае невинеровской динамики в качестве безразмерного времени удобно брать величину  $\tau = \Omega_{21}t$ . Динамика атомов в поле широкополосного электромагнитного вакуума с нулевой плотностью фотонов определяется безразмерными величинами, приведенными в работах [1–3, 20, 21]. Учет классического поля мы проводим на феноменологическом уровне, и от него в конечных формулах остается только единственный параметр, пропорциональный плотности фотонов, который будет входить в выводимое кинетическое уравнение примерно так же, как и в уравнения (1)–(4). Поэтому все размерные соотношения могут быть восстановлены на основе соотношений работ [1–3, 20, 21]. Безразмерные время и параметр, описывающий плотность фотонов, будем обозначать теми же буквами, что и размерные. Остальные величины войдут как параметры теории. Там, где введены параметры теории и основные случайные процессы, все величины, входящие в формулы, считаем безразмерными, связанными с размерными формулами работ [1–3, 20, 21].

Заметим, что для компактной записи эффективного гамильтониана коллективные атомные операторы

$$\sum_i |E_1\rangle^{(i)} \langle E_2|^{(i)}, \quad \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}$$

удобно выражать через образующие  $R_{\pm}$  и  $R_3$  алгебры  $SU(2)$ :

$$R_- = \sum_i |E_1\rangle^{(i)} \langle E_2|^{(i)}, \quad R_+ = \sum_i |E_2\rangle^{(i)} \langle E_1|^{(i)},$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \sum_i \left( |E_2\rangle^{(i)} \langle E_2|^{(i)} - |E_1\rangle^{(i)} \langle E_1|^{(i)} \right).$$

При этом

$$[R_3, R_{\pm}] = \pm R_{\pm}, \quad [R_+, R_-] = 2R_3$$

и

$$\sum_i \left( |E_2\rangle^{(i)} \langle E_2|^{(i)} + |E_1\rangle^{(i)} \langle E_1|^{(i)} \right) = N_a,$$

где  $N_a$  — число атомов в ансамбле, которое считаем неизменным.

### 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ СЛАГАЕМЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТониАНА ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ С ШИРОКОПОЛОСНЫМ ВАКУУМНЫМ ПОЛЕМ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФОТОНОВ

Упростим слагаемые  $\tilde{H}^{(10)}(t)$  и  $\tilde{H}^{(01)}(t)$  эффективного гамильтониана и представим их в марковском приближении в терминах случайных процессов. Основным требованием, предъявляемым к случайным процессам, моделирующим вакуумное состояние электромагнитного поля, является их стационарность.

В случае слагаемого  $\tilde{H}^{(01)}(t)$  и классического электромагнитного поля  $\mathcal{E}(t)$ , введенного для описания ненулевой плотности фотонов исходного вакуумного электромагнитного поля, стационарность выражается в том, что коррелятор  $\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t') \rangle = g(t-t')$  зависит только от разности времен  $t-t'$ . Также естественным требованием является равенство нулю средней амплитуды электромагнитного поля,  $\langle \mathcal{E}(t) \rangle = 0$ .

Стационарность влечет за собой некоррелированность (независимость) спектральных компонент  $c_{\omega}$ :

$$\langle c_{\omega} c_{\omega'}^* \rangle = \delta(\omega - \omega') S(\omega).$$

Здесь  $S(\omega)$  — спектр мощности классического электромагнитного поля  $\mathcal{E}(t)$ .

Примем естественное приближение  $S(\omega) = \text{const}$  для спектрального диапазона с центральной частотой, равной частоте перехода  $\Omega_{21}$  между рассматриваемыми уровнями  $|E_1\rangle$  и  $|E_2\rangle$ , и распространим его на всю область спектра (приближение Найквиста). Тогда нетрудно заметить, что в соответствующей нормировке имеем

$$\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t') \rangle = n\delta(t - t'),$$

и можно потребовать, чтобы величина  $n \geq 0$ , должным образом приведенная к безразмерному виду, строго равнялась безразмерной плотности фотонов исходного широкополосного квантованного электромагнитного поля ( $n > 0$  при ненулевой температуре).

Величина

$$\int_0^t \mathcal{E}(t') dt' = W(t) = W_1(t) + \exp(i\varphi_0)W_2(t)$$

( $\varphi_0$  — постоянная фаза), представленная через действительную и мнимую части, непрерывна, но нигде не дифференцируема. Разными способами можно показать, что плотность функции распределения вероятности  $\rho(w_j, t)$  величин  $W_j(t)$  удовлетворяет кинетическому уравнению (уравнению Фоккера–Планка)

$$\frac{\partial \rho(w_j, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} D_j \frac{\partial^2 \rho(w_j, t)}{\partial w_j^2}$$

с решением

$$\rho(w_j, t | w_{0j}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - t_0)}} \exp \left[ -\frac{(w_j - w_{0j})^2}{2D_j(t - t_0)} \right]$$

для начального условия  $\rho(w, t_0 | w_0, t_0) = \delta(w - w_0)$ . Величину  $W(t)$  называют (нестандартным) комплексным винеровским процессом.

В приближении Найквиста уравнение (13), даже в случае только одного классического поля и

$$\tilde{H}^{(10)}(t) + \tilde{H}^{(20)}(t) + \tilde{H}^{(11)}(t) + \tilde{H}^{(02)}(t) + V^{Ex} \equiv 0,$$

оказывается математически неопределенным. Но можно строго определить его интегральный вариант

$$U(t) - U(t_0) = T \exp \left[ -i\kappa_{cl} R_+ \int_{t_0}^t dW(t) - i\kappa_{cl} R_- \int_{t_0}^t dW^*(t) \right]. \quad (14)$$

Здесь, для общности, введен хронологический оператор  $T$  и константа связи (параметр теории)  $\kappa_{cl}$ . Чтобы в дальнейшем развивать теорию с таким случайным процессом необходимо разумное определение интеграла.

Если обычным образом определить интеграл  $\int_{t_0}^t G(t') dW(t')$  как предел частичных сумм

$$S_n = \sum_{i=1}^n G(\tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})],$$

то результат будет зависеть от конкретного выбора промежуточных точек  $\tau_i$  на интервалах разбиения  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ . В этом нетрудно убедиться на примере интеграла  $\int_{t_0}^t W_j(t') dW_j(t')$ , если использовать одно из основных свойств винеровского процесса  $W(t)$  — статистическую независимость приращений  $W(t_i) - W(t_{i-1})$  друг от друга. Для так называемых неупреждающих функций  $G(t)$ , статистически независимых в момент времени  $t$  от будущего поведения винеровского процесса, удобен и самосогласован выбор Ито  $\tau_i = t_{i-1}$ . При этом предел интегральных сумм понимается как среднеквадратичный предел. Тогда можно ввести согласованные дифференциалы Ито:

$$\begin{aligned} dW(t) dW^*(t) &= (D_1 + D_2) dt \equiv n dt, \\ dW(t) dW(t) &= [D_1 + D_2 \exp(2i\varphi_0)] dt \equiv s_q dt, \quad (15) \\ dW(t) dt &= dt dt = 0, \quad \langle dW(t) \rangle = 0, \end{aligned}$$

где

$$|s_q| \leq n. \quad (16)$$

Здесь дифференциальные соотношения следует понимать как выполнение интегральных равенств типа (для любых неупреждающих функций  $G(t')$ )

$$\int_{t_0}^t G(t') dW(t') dW^*(t') = n \int_{t_0}^t G(t') dt'.$$

Заметим, что СДУ и его решение определяют через интегральное уравнение (14). Для современной математики характерно сначала определить интеграл по мере, а потом — производные.

Вывод СДУ для оператора эволюции состоит в определении дифференциала Ито:

$$\begin{aligned} dU(t) &= U(t + dt) - U(t) = \\ &= \{ \exp(-i\kappa_{cl} [R_+ dW(t) + R_- dW^*(t)] - 1) \} U(t) = \\ &= -i\kappa_{cl} [R_+ dW(t) + R_- dW^*(t)] U(t) - \frac{\kappa_{cl}^2 dt}{2} \times \\ &\times [(R_+ R_- + R_- R_+) n + R_- R_- s_q^* + R_+ R_+ s_q] \times \\ &\times U(t). \quad (17) \end{aligned}$$



Здесь использована алгебра (15). В уравнениях (14) и (17) в принципе отсутствует какая-либо отстройка, поскольку, в предположении широкополосности спектра внешнего электрического поля, его центральная частота будет всегда в резонансе.

Уравнение (17) представляет собой классическое СДУ винеровского типа.

Чтобы свести к СДУ уравнение Шредингера в случае квантованного поля с оператором взаимодействия атомного ансамбля с полем в виде  $\tilde{H}^{(10)}(t)$ , необходимо сначала в соответствующих слагаемых для эффективного гамильтониана перейти от суммирования по волновому вектору к интегрированию по частоте. Здесь, в случае локализованного атомного ансамбля возникают три основных модели квантованного электромагнитного поля — сферически-симметричная, одномерная и однонаправленная [1–3, 35]. Марковское приближение предполагает отсутствие частотных зависимостей в интегралах эффективного гамильтониана у всех входящих величин, кроме операторов рождения и уничтожения и временных экспонент. В результате  $\tilde{H}^{(10)}(t)$  для всех моделей можно записать единым образом в виде

$$\tilde{H}^{(10)}(t) = \frac{\kappa_q}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \left( b_{\omega}^{\dagger} R_{-} e^{i(\omega-1)t} + b_{\omega} R_{+} e^{-i(\omega-1)t} \right).$$

Здесь, в соответствии с принятым соглашением, все величины безразмерные, поэтому вместо частоты атомного перехода  $\Omega_{21}$  в показателях экспонент появилась единица. Операторы  $b_{\omega}$  и  $b_{\omega}^{\dagger}$  удовлетворяют коммутационному соотношению  $[b_{\omega}, b_{\omega'}^{\dagger}] = \delta(\omega - \omega')$ . Величина  $\kappa_q$  есть константа связи атома с квантованным электромагнитным полем и в размерных величинах представляется как

$$\kappa_q = \frac{\sqrt{2} \Omega_{21} d_{12}}{\mu c^{3/2} \sqrt{\hbar}}.$$

Параметр  $\mu \sim 1$  введен в работах [1–3, 35] для учета различных геометрий квантованного электромагнитного поля.

Марковское условие предполагает также выполнение соотношений

$$\langle b_{\omega} b_{\omega'}^{\dagger} \rangle = \delta(\omega - \omega'),$$

$$\langle b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega'} \rangle = \langle b_{\omega} b_{\omega'} \rangle = \langle b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega'}^{\dagger} \rangle = \langle b_{\omega} \rangle = \langle b_{\omega'}^{\dagger} \rangle = 0,$$

где среднее берется по начальному (преобразованному) состоянию.

Теперь введем квантовые рождающий  $B^{\dagger}(t)$  и уничтожающий  $B(t)$  процессы,

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\omega-1)t} b_{\omega}, \tag{18}$$

$$B(t) = \int_0^t dt' b(t'), \quad dB(t) = B(t+dt) - B(t),$$

аналогично случаю классического поля. Также аналогично определяется интеграл в смысле Ито:

$$\int_0^t \varphi(t') dB(t') = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \varphi(t_{i-1}) [B(t_i) - B(t_{i-1})].$$

Алгебра Ито операторов  $dB(t)$  и  $dB^{\dagger}(t)$  дается соотношениями

$$\begin{aligned} dB(t) dB^{\dagger}(t) &= dt, \quad dB^{\dagger}(t) dB(t) = 0, \\ dB(t) dB(t) &= dB^{\dagger}(t) dB^{\dagger}(t) = 0, \\ dB(t) dt &= dB^{\dagger}(t) dt = dt dt = 0, \\ \langle dB(t) \rangle &= \langle dB^{\dagger}(t) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Квантовое СДУ для дифференциала Ито  $dU(t) = U(t+dt) - U(t)$  следует из формального решения

$$U(t) = T \exp \left( -i \int_0^t H^{(10)}(t') dt \right).$$

Если теперь записать СДУ при наличии и квантованного поля, и классического, то дополнительно необходимы условия

$$dB(t) dW(t) = dB^{\dagger}(t) dW(t) = 0,$$

отражающие независимость квантовых и классического случайных процессов.

В результате обсуждаемого представления квантованного широкополосного вакуумного поля с ненулевой плотностью фотонов (как суммы квантованного поля с нулевой плотностью фотонов и классического шумового поля) эффективный гамильтониан первого порядка по константам связи,

$$\tilde{H}^{(10)}(t) + \tilde{H}^{(01)}(t),$$

и квантовое СДУ для оператора эволюции,

$$U(t) = T \exp \left( -i \int_0^t \left\{ \tilde{H}^{(10)}(t') + \tilde{H}^{(01)}(t') \right\} dt' \right),$$

получаем в виде

$$\begin{aligned}
 & \left[ \tilde{H}^{(10)}(t) + \tilde{H}^{(01)}(t) \right] dt = \kappa_q R_- dB^\dagger(t) + \\
 & + \kappa_q R_+ dB(t) + \kappa_{cl} R_+ dW(t) + \kappa_{cl} R_- dW^*(t), \\
 & dU(t) = -i\kappa_q [R_+ dB(t) + R_- dB^\dagger(t)] U(t) - \\
 & - \frac{\kappa_q^2 dt}{2} R_+ R_- U(t) - i\kappa_{cl} [R_+ dW(t) + \\
 & + R_- dW^*(t)] U(t) - \frac{\kappa_{cl}^2 dt}{2} [(R_+ R_- + R_- R_+) n + \\
 & + R_- R_- s_q^* + R_+ R_+ s_q] U(t). \tag{20}
 \end{aligned}$$

При этом нетрудно убедиться, что выполнено правило дифференцирования Ито:

$$\begin{aligned}
 d(U(t)U^\dagger(t)) &= (dU(t))U^\dagger(t) + U(t)dU^\dagger(t) + \\
 &+ (dU(t))(dU^\dagger(t)) = 0.
 \end{aligned}$$

Кинетическое уравнение для матрицы плотности всей рассматриваемой системы,  $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ , получается в результате цепочки преобразований:

$$\begin{aligned}
 d\rho(t) &\equiv \rho(t+dt) - \rho(t), \\
 \rho(t+dt) &= |\Psi(t+dt)\rangle\langle\Psi(t+dt)| = \\
 &= U(t+dt)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(t+dt), \\
 d\rho(t) &= dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(t) + \\
 &+ U(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^\dagger(t) + \\
 &+ dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^\dagger(t). \tag{21}
 \end{aligned}$$

В результате, если ограничиваться только слагаемыми первого порядка по взаимодействию атомной системы с полями, получается (после усреднения по состоянию полей) кинетическое уравнение для матрицы плотности атомной системы  $\rho^S$  в виде (1)–(4) с  $H^{Eff-S} = H^{Shift-S} = 0$  и  $L^S = \kappa_q R_-$  в операторе  $\hat{\Gamma}_0 \rho^S$  и  $L^S = \kappa_{cl} R_-$  в операторе  $\hat{\Gamma}_n \rho^S$ .

Заметим, что для резонансного взаимодействия классического электромагнитного поля с ансамблем двухуровневых частиц возможен отход от приближения Найквиста и учет каких-либо конкретных спектральных распределений, например, как в работе [36]. Тогда, как видно из предыдущего и последующего рассмотрений, такие результаты войдут аддитивно к вкладу от квантованного электромагнитного поля, но существенно усложнят анализ. Однако отказ от марковского приближения в случае квантованного поля лишит возможности введения трех базовых квантовых случайных процессов, алгебраические свойства которых позволяют полностью просуммировать ряд для оператора эволюции, в результате чего проявится своеобразие невинеровской динамики, отмеченное еще в работах [1–3].

#### 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ СЛАГАЕМЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ С ШИРОКОПОЛОСНЫМ ВАКУУМНЫМ ПОЛЕМ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФОТОНОВ

Слагаемое второго порядка по константе взаимодействия с классическим электромагнитным полем,  $\tilde{H}^{(02)}(t)$ , описывает высокочастотный штарк-эффект [16] — сдвиг энергий атомных уровней. Штарковский сдвиг энергий атомных уровней возникает у каждого атомного энергетического уровня в любом нерезонансном (и резонансном) поле.

Физический смысл величины  $\tilde{H}^{(02)}(t)$  и требование ее стационарности говорит о возможности представления  $\tilde{H}^{(02)}(t)$  через (составной) классический пуассоновский процесс. Будем считать, что величина  $I(t)$  не зависит от введенного в предыдущем разделе случайного винеровского процесса  $W(t)$  и определяется своим действительным винеровским процессом  $W^{St}(t)$ :

$$W^{St}(t) \sim I(t) - \langle I(t) \rangle. \tag{22}$$

При этом величину  $\langle I(t) \rangle \Pi_k(\Omega_{21})$  включаем в значения перенормированных атомных энергий. Оставшуюся часть  $\tilde{H}^{(02)}(t)$  обозначаем как  $\tilde{\tilde{H}}^{(02)}(t)$  и считаем, что

$$\tilde{\tilde{H}}^{(02)}(t) dt = dW^{St}(t) \sum_{j,k} \kappa_k^{St} |E_k\rangle\langle E_k|^{(j)}. \tag{23}$$

Здесь  $\kappa_k^{St}$  — новые параметры теории, и мы имеем стандартную алгебру Ито

$$\begin{aligned}
 dW^{St}(t) dW^{St}(t) &= dt, \quad dW^{St}(t) dt = 0, \\
 \langle dW^{St}(t) \rangle &= 0, \tag{24}
 \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
 dB(t) dW^{St}(t) &= dB^\dagger(t) dW^{St}(t) = \\
 &= dW^{St}(t) dW(t) = dB(t) dW(t) = \\
 &= dB^\dagger(t) dW(t) = 0. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Последние соотношения выражают взаимную статистическую независимость введенных случайных процессов.

Следует заметить, что перенормировка энергий атомных уровней из-за сдвига Лэмба и штарковского сдвига в шумовых широкополосных квантованных и классических полях никак не сказывается на

релаксационной динамике атомной системы и никаких отстроек от резонанса не возникает. Такие параметры появляются только при дополнительном воздействии монохроматических, одномодовых и когерентных полей, которые характеризуются определенной частотой.

Слагаемое второго порядка по константе взаимодействия с квантованным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов,  $\tilde{H}^{(20)}(t)$ , описывает штарковское взаимодействие [1–3]. Обычно им пренебрегают [37], поскольку  $\langle \tilde{H}^{(20)}(t) \rangle = 0$  и оно мало по сравнению со слагаемыми первого порядка. Однако в работах [1–3] показано, что его можно представить через квантовый считывающий процесс:

$$\Lambda(t) = \int_0^t dt' b^\dagger(t') b(t'),$$

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\omega-1)t} b_\omega,$$

$$d\Lambda(t) = \Lambda(t + dt) - \Lambda(t), \quad \langle d\Lambda(t) \rangle = 0. \quad (26)$$

В отличие от классических винеровского и пуассоновского процессов, квантовые процессы, им «аналогичные», оказываются взаимосвязанными [6–10]. Эта взаимосвязь выражается алгеброй Хадсона – Паргасарати [6]:

$$d\Lambda(t) d\Lambda(t) = d\Lambda(t), \quad d\Lambda(t) dB^\dagger(t) = dB^\dagger(t),$$

$$dB(t) d\Lambda(t) = dB(t), \quad dB(t) dB^\dagger(t) = dt,$$

$$dB^\dagger(t) dB(t) = dB(t) dB(t) = d\Lambda(t) dB(t) =$$

$$= d\Lambda(t) dt = dB^\dagger(t) d\Lambda(t) = dB(t) dt =$$

$$= dt dt = 0,$$

$$\langle dB(t) \rangle = \langle dB^\dagger(t) \rangle = \langle d\Lambda(t) \rangle = 0.$$

Кроме указанных соотношений имеем также соотношения, отражающие взаимную независимость случайных процессов,

$$d\Lambda(t) dW(t) = d\Lambda(t) dW^{St}(t) = 0. \quad (28)$$

В марковском приближении представление величины  $\tilde{H}^{(20)}(t)$  через считывающий процесс имеет вид

$$\tilde{H}^{(20)}(t) dt = \frac{G^{St}}{2\pi} \int_0^\infty d\omega b_\omega^\dagger e^{i(\omega-1)t} \times$$

$$\times \int_0^\infty d\omega' b_{\omega'} e^{-i(\omega'-1)t} dt \approx$$

$$\approx \frac{G^{St}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega b_\omega^\dagger e^{i(\omega-1)t} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty d\omega' b_{\omega'} e^{-i(\omega'-1)t} dt = G^{St} d\Lambda(t). \quad (29)$$

Здесь безразмерный параметр теории  $G^{St}$  связан с размерными параметрами соотношениями

$$G^{St} = \left( \eta_+ \frac{N_a}{2} + \eta_- R_3 \right), \quad \eta_\pm = 2\Omega_{21}^3 \mu^{-2} c^{-3} \Pi_\pm,$$

$$\Pi_\pm = \Pi_1(\Omega_{21}) \pm \Pi_2(\Omega_{21}),$$

где  $N_a$  – число атомов.

Поскольку процессы  $W(t)$  и  $B(t)$  статистически независимы и  $\langle dW(t) \rangle = \langle dB(t) \rangle = 0$ , величину  $\tilde{H}^{(11)}(t)$  в принятой модели естественно считать равной нулю. Даже если предположить, что  $\tilde{H}^{(11)}(t) \neq 0$ , то из-за наличия классической случайной величины с нулевым средним невозможно «встраивание» величины второго порядка в слагаемые первого порядка, что в случае чисто квантовых случайных процессов обеспечивало считывающее соотношение  $d\Lambda(t) d\Lambda(t) = d\Lambda(t)$  [1–3]. Но тогда вклад такой величины определялся бы лишь аддитивными поправками второго порядка к константам связи (параметрам теории) выписанных выше слагаемых  $\tilde{H}^{(01)}(t)$  и  $\tilde{H}^{(02)}(t)$ . Это обстоятельство продемонстрировано нами в задаче о воздействии на атомный ансамбль широкополосным гауссовым однофотонным пакетом [21]. В этой работе проведен корректный учет проявления обсуждаемого интерференционного взаимодействия воздействующих на атомную систему полей и определен порядок его вклада в выводимом кинетическом уравнении для атомной подсистемы.

Величина диполь-дипольного взаимодействия атомов,  $V^{Ex}$ , вообще никак явно не зависит от электромагнитных полей.

Таким образом, и в случае ненулевой плотности фотонов электромагнитного вакуумного широкополосного поля в марковском приближении эффективный гамильтониан взаимодействия атомного ансамбля с таким полем выражается через квантовые и классические случайные процессы, дифференциалы Ито которых подчиняются алгебрам (19),

(24), (25), (27), (28). Это позволяет стандартными методами получить кинетическое уравнение для атомной системы.

**5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ АТОМНОГО АНСАМБЛЯ, РЕЗОНАНСНО-ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ШИРОКОПОЛОСНЫМ ВАКУУМНЫМ ПОЛЕМ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФОТОНОВ**

Все слагаемые эффективного гамильтониана, представленные через случайные процессы, аддитивно входят в дифференциал Ито оператора эволюции, записанного в экспоненциальной форме:

$$dU(t) = \left\{ \exp \left[ -i \left( \tilde{H}^{(10)}(t) + \tilde{H}^{(01)}(t) + \tilde{H}^{(20)}(t) + \tilde{H}^{(02)}(t) + V^{Ex} \right) dt \right] - 1 \right\} U(t).$$

Нетривиальные результаты появляются здесь после разложения экспоненты с использованием алгебры (19), (24), (25), (27), (28). Эти результаты отличаются от известных учетом невинеровской динамики в поле с ненулевой плотностью фотонов. Приведем СДУ для оператора эволюции:

$$\begin{aligned} dU(t) = & -iV^{Ex} dt U(t) + G^e d\Lambda(t)U(t) + \\ & + \left[ \kappa_q^2 R_+ \frac{G^e + iG^{St}}{(G^{St})^2} R_- dt + \kappa_q R_+ \frac{G^e}{G^{St}} dB(t) + \right. \\ & \left. + \frac{G^e}{G^{St}} \kappa_q R_- dB^\dagger(t) \right] U(t) - \\ & - i\kappa_{cl} [R_+ dW(t) + R_- dW^*(t)] U(t) - \\ & - \frac{\kappa_{cl}^2 dt}{2} [(R_+ R_- + R_- R_+)n + \\ & + R_- R_- s_q^* + R_+ R_+ s_q] U(t) - \\ & - i dW^{St}(t) \sum_{j,k} \kappa_k^{St} |E_k\rangle^{(j)} \langle E_k|^{(j)} U(t) - \\ & - \frac{1}{2} dt \sum_{j,k} (\kappa_k^{St})^2 |E_k\rangle^{(j)} \langle E_k|^{(j)} U(t). \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь  $G^e = \exp(-iG^{St})$ . В частном случае  $G^{St} \equiv 0$  операторные множители равны

$$G^e = 0, \quad \frac{G^e}{G^{St}} = -i, \quad \frac{G^e + iG^{St}}{(G^{St})^2} = -\frac{1}{2}.$$

Эти формулы позволяют проследить, как добавление слагаемых второго порядка по константе связи с полями меняет СДУ для оператора эволюции (20), в котором учтены только слагаемые первого

порядка по константе связи. Слагаемые второго порядка, определяемые квантовым считавающим процессом, дифференциал Ито  $d\Lambda(t)$  которого (совместно с дифференциалами  $dB(t)$  и  $dB^\dagger(t)$ ) подчиняется нетривиальной алгебре Хадсона – Паргасарати, встраиваются в слагаемые первого порядка (помимо отдельного вклада). В то же время новый случайный процесс  $W^{St}(t)$ , введенный для описания динамического эффекта Штарка, вследствие своей независимости от других процессов обуславливает только аддитивный вклад в СДУ.

СДУ для оператора эволюции определяет СДУ для матрицы плотности всей рассматриваемой системы. После усреднения по случайным процессам, описывающим электромагнитные поля, из СДУ для матрицы плотности атомного ансамбля и его электромагнитного окружения получается кинетическое уравнение для матрицы плотности только атомного ансамбля. Согласно общему утверждению, оно имеет форму Линдблада и записывается в виде (1) со следующим эффективным гамильтонианом и релаксационным оператором  $\hat{\Gamma}\rho^S$  (в представлении взаимодействия, аргумент  $t$  опущен):

$$\begin{aligned} H^{Eff-S} &= V^{Ex}, \\ \frac{d\rho^S}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\rho^S, H^{Eff-S}] - \hat{\Gamma}\rho^S, \\ \hat{\Gamma}\rho^S &= -\frac{i}{\hbar} [\rho^S, H_{non-W}^{Shift-S}] + \hat{\Gamma}_{non-W}\rho^S + \\ & \quad + \hat{\Gamma}_n\rho^S + \hat{\Gamma}_D\rho^S, \\ H^{Shift-S} &= \kappa_q^2 R_+ \frac{\sin G^{St} - G^{St}}{(G^{St})^2} R_-, \\ \hat{\Gamma}_{non-W}\rho^S &= \frac{1}{2} L_{non-W}^{S+} L_{non-W}^S \rho^S + \\ & + \frac{1}{2} \rho^S L_{non-W}^{S+} L_{non-W}^S - L_{non-W}^S \rho^S L_{non-W}^{S+}, \\ L_{non-W}^S &= \kappa_q \frac{G^e}{G^{St}} R_-, \\ L_{non-W}^{S+} L_{non-W}^S &= 2\kappa_q^2 R_+ \frac{1 - \cos G^{St}}{(G^{St})^2} R_-, \\ \hat{\Gamma}_n\rho^S &= n \left( \frac{1}{2} L^{S+} L^S \rho^S + \frac{1}{2} \rho^S L^{S+} L^S - \right. \\ & \quad \left. - L^S \rho^S L^{S+} \right) + s_q \left( \frac{1}{2} L^{S+} L^{S+} \rho^S + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \rho^S L^{S+} L^{S+} - L^{S+} \rho^S L^{S+} \right) + \\ & + n \left( \frac{1}{2} L^S L^{S+} \rho^S + \frac{1}{2} \rho^S L^S L^{S+} - L^{S+} \rho^S L^S \right) + \\ & + s_q^* \left( \frac{1}{2} L^S L^S \rho^S + \frac{1}{2} \rho^S L^S L^S - L^S \rho^S L^S \right), \end{aligned}$$

$$L^S = \kappa_{cl} R_-,$$

$$\hat{\Gamma}_D \rho^S = \sum_k \left[ \frac{1}{2} (L_{Dk}^S)^2 \rho^S + \frac{1}{2} \rho^S (L_{Dk}^S)^2 - \right. \quad (31)$$

$$\left. - L_{Dk}^S \rho^S L_{Dk}^S \right], \quad L_{Dk}^S = \kappa_k^{St} \sum_j |E_k\rangle^{(j)} \langle E_k|^{(j)}.$$

Оператор  $\hat{\Gamma}_{non-W} \rho^S$  отвечает за эффект стабилизации возбужденного состояния атомного ансамбля и подавление коллективного спонтанного излучения. Он обязан квантовому характеру широкополосного вакуумного электромагнитного поля. Учет второго порядка по константе связи с квантованным вакуумным полем обусловил появление в задаче квантового считывающего процесса (с дифференциалом Ито  $d\Lambda(t)$ ), определившего отличие оператора Линдблада  $L_{non-W}^S$  от  $L^S$ . Несмотря на малость по сравнению со слагаемыми первого порядка (пропорциональными  $dB(t)$  и  $dB^\dagger(t)$ ), слагаемые второго порядка начинают играть роль с увеличением числа атомов  $N_a$  в ансамбле вследствие «считывающего» соотношения

$$d\Lambda(t) d\Lambda(t) = d\Lambda(t).$$

Мы уже говорили об «интерференционной» интерпретации эффекта подавления коллективной релаксации. Сам эффект обуславливает также коллективный сдвиг энергии атомных уровней  $H_{non-W}^{Shift-S}$ .

Оператор  $\hat{\Gamma}_n \rho^S$  есть и в классической, и в квантовой интерпретации вакуумного широкополосного поля как винеровского процесса. Он обуславливает вынужденные резонансные переходы между рассматриваемыми уровнями  $|E_1\rangle$  и  $|E_2\rangle$ , и единственным различием в случае классической интерпретации является условие  $|s_q| \leq n$  (16) вместо  $|s_q| \leq \sqrt{n(n+1)}$ .

Оператор  $\hat{\Gamma}_D \rho^S$  описывает чистую дефазировку атомных состояний за счет шума в сдвиге атомных энергий из-за высокочастотного эффекта Штарка. Важно подчеркнуть, что в суммировании по  $k$  в выражении для  $\hat{\Gamma}_D \rho^S$  эффективно важны только два рассматриваемых уровня и атомные операторы можно выразить через  $R_3$ .

В отличие от предыдущих исследований полученный результат (1) и (31) отвечает учету как взаимодействия с вакуумным широкополосным полем до второго порядка включительно, так и ненулевой плотности фотонов вакуумного поля. Последнее проявилось в наличии операторов релаксации  $\hat{\Gamma}_n \rho^S$  и  $\hat{\Gamma}_D \rho^S$ , причем учет второго порядка отразился и на «ведущем» операторе релаксации  $\hat{\Gamma}_{non-W} \rho^S$ , воз-

никающем в обычной теории коллективного спонтанного излучения в виде оператора  $\hat{\Gamma}_0 \rho^S$  [38].

## 6. ОБ ЭФФЕКТЕ ПОДАВЛЕНИЯ КОЛЛЕКТИВНОЙ РЕЛАКСАЦИИ В ВАКУУМНОМ ПОЛЕ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФОТОНОВ

Предпринятое исследование помимо учета ненулевой плотности фотонов вакуумного поля мотивировалось желанием выяснить, повлияет ли на эффект подавления коллективного излучения ненулевая температура вакуумного поля. Чтобы отчетливо увидеть ответ на этот вопрос, запишем уравнения (1) и (31) для диагональных матричных элементов матриц плотности в базисе коллективных переменных  $|m\rangle$ :

$$R_3 |m\rangle = m |m\rangle, \quad -r \leq m \leq r.$$

Здесь  $r$  — параметр, характеризующий неприводимое представление алгебры угловых моментов  $SU(2)$  для описания симметричных состояний ансамбля из  $2r = N_a$  одинаковых атомов [38]. Состояние ансамбля из полностью возбужденных квантовых частиц дается вектором  $|r\rangle$ , а состояние ансамбля, все частицы которого находятся в основном состоянии, — вектором  $|-r\rangle$ .

В отсутствие иных, кроме рассмотренных, воздействующих полей система уравнений для диагональных элементов образует замкнутую систему уравнений. Поэтому вывод, который представляется очевидным и оправдывает название, состоит в том, что релаксационный оператор  $\hat{\Gamma}_D \rho^S$  не входит в систему уравнений для диагональных матричных элементов как для коллективных состояний, так и для независимых атомных состояний.

Кинетические уравнения, отвечающие соотношениям (1) и (31) для диагональных матричных элементов, можно записать в виде

$$\frac{d\rho_{mm}}{d\tau} = -2\kappa_q^2 g_{m-1} \frac{1 - \cos(\eta_+ N_a/2)}{(\eta_+ N_a/2)^2} \rho_{mm} +$$

$$+ 2\kappa_q^2 g_{m+1} \frac{1 - \cos(\eta_+ N_a/2)}{(\eta_+ N_a/2)^2} \rho_{m+1\ m+1} -$$

$$- 2\kappa_{cl}^2 n(r^2 - m^2 + r) \rho_{mm} + \kappa_{cl}^2 n(r+m)(r-m+1) \times$$

$$\times \rho_{m-1\ m-1} + \kappa_{cl}^2 n(r-m)(r+m+1) \rho_{m+1\ m+1}, \quad (32)$$

где

$$g_{m-1} = \langle m | R_+ | m-1 \rangle \langle m-1 | R_- | m \rangle =$$

$$= (r+m)(r-m+1).$$



Здесь безразмерное время обозначено как  $\tau = \Omega_{21}t$ , а другие безразмерные параметры связаны с размерными при помощи соотношений, которые были определены выше. Для простоты положено  $\eta_- = 0$ , что отвечает предположению о равенстве штарковских параметров рассматриваемых уровней:  $\Pi_1(\Omega_{21}) = \Pi_2(\Omega_{21})$ .

Из уравнения (32) следует, что в условиях полного подавления коллективной релаксации, например при числе атомов ансамбля и его параметрах, удовлетворяющих соотношению  $\eta_+ N_a / 2 = 2\pi$ , динамике атомного ансамбля отвечает простое уравнение, описывающее коллективный распад в чисто классическом шумовом поле:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{mm}}{d\tau} = & -2\kappa_{cl}^2 n(r^2 - m^2 + r)\rho_{mm} + \\ & + \kappa_{cl}^2 n(r+m)(r-m+1)\rho_{m-1\ m-1} + \\ & + \kappa_{cl}^2 n(r-m)(r+m+1)\rho_{m+1\ m+1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Если далее следовать стандартной полуклассической теории сверхизлучения [38], то средняя энергия атомного ансамбля,

$$\langle E^A \rangle = \sum_{m=-J}^J E_m \rho_{mm},$$

со временем не меняется. Согласно уравнениям (1), (32), с параметрами

$$H^{Eff-S} = H_{non-W}^{Shift-S} = \hat{\Gamma}_{non-W} = \hat{\Gamma}_D = 0$$

интенсивность излучения ансамбля равна

$$I(t) = -\frac{d\langle E^A \rangle}{dt} = 0.$$

При этом меняется распределение энергии по подуровням, но в контексте влияния на эффект подавления коллективного излучения это представляется не столь важным.

Таким образом, из полученных уравнений следует, что ненулевая плотность фотонов электромагнитного вакуума меняет распределение по подуровням при невинеровской коллективной динамике, но сохраняет, хотя бы для рассмотренных значений параметров, эффект подавления коллективного излучения атомного ансамбля.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты исследования позволяют анализировать невинеровскую резонансную

динамику ансамблей одинаковых квантовых частиц в вакуумных широкополосных полях с ненулевой плотностью квантов в рамках как кинетического уравнения, так и подхода на основе стохастических дифференциальных уравнений. Существенным ограничением такого подхода остается учет пространственной распределенности ансамбля квантовых частиц. В случае нулевой плотности фотонов возможный подход к указанной проблеме представлен в работе [39]. Случай ненулевой плотности квантов и пространственной распределенности ансамбля квантовых частиц нуждается в отдельном анализе.

Другим неясным моментом представленной теории является описание случаев сжатого квантованного электромагнитного поля с ненулевой плотностью фотонов, когда параметр сжатия  $s_q$  находится в диапазоне

$$n < s_q \leq \sqrt{n(n+1)}. \quad (34)$$

Можно, конечно, просто снять ограничение  $0 \leq s_q \leq n$ , распространив его, как в случае винеровской динамики, на область (34). Однако указанное различие в описании квантового сжатия и его моделирования сжатием классического поля указывает на необходимость строгого математического обоснования предложенного представления квантованного широкополосного поля с ненулевой плотностью фотонов как суперпозиции квантованного широкополосного поля с нулевой плотностью фотонов и классического дельта-коррелированного шумового поля.

Вместе с тем предложенная модель равновесного квантованного широкополосного электромагнитного поля как окружения открытой системы в виде суммы квантованного электромагнитного поля и классического шумового электромагнитного поля, позволяет описать ее эволюцию в условиях невинеровской динамики. В частности, мы показали, что основные механизмы невинеровской динамики действуют независимо от широкополосной классической составляющей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Basharov, Phys. Rev. A **84**, 013801 (2011).
2. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **94**, 28 (2011).
3. А. М. Башаров, ЖЭТФ **140**, 431 (2011).
4. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Э. А. Манькин, ЖЭТФ **84**, 487 (1983).
5. А. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).

6. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Comm. Math. Phys.* **93**, 301 (1984).
7. А. С. Холево, *Итоги науки и техн., сер. Соврем. пробл. мат. Фунд. направления* **83**, 5 (1991).
8. В. П. Белавкин, *УМН* **47**, 47 (1992).
9. В. П. Белавкин, *ТМФ* **110**, 46 (1997).
10. А. М. Чеботарев, *Lectures on Quantum Probability*, Sociedad Matematica Mexicana (2000).
11. C. W. Gardiner and M. J. Collet, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
12. C. W. Gardiner, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1917 (1986).
13. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2004).
14. А. М. Башаров, *J. Phys.: Conf. Ser.* **859**, 012003 (2017).
15. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматлит, Москва (1958).
16. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронополо, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).
17. V. N. Vogaevski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer, Berlin (1991).
18. A. Chakrabarti and R. Bhattacharyya, *Phys. Rev. A* **97**, 063837 (2018).
19. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **142**, 419 (2012).
20. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **153**, 726 (2018).
21. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 555 (2018).
22. B. Q. Baragiola, R. L. Cook, A. M. Branczyk, and J. Combes, *Phys. Rev. A* **86**, 013811 (2012).
23. A. Dabrowska, G. Sarbicki, and D. Chruscinski, *Phys. Rev. A* **96**, 053819 (2017).
24. B. Q. Baragiola and J. Combes, *Phys. Rev. A* **96**, 023819 (2017).
25. H. S. Zenga, N. Tang, Y. P. Zheng, and T. T. Xu, *Eur. Phys. J. D* **66**, 255 (2012).
26. J. Larson, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 033601 (2012).
27. Q.-H. Chen, T. Liu, Y.-Y. Zhang, and K.-Lin. Wang, *Europhys. Lett.* **96**, 14003 (2011).
28. M. Bonitz, *Quantum Kinetic Theory*, Springer, Berlin (2016).
29. H.-P. Breuer and F. Petruccione, *Theory of Open Quantum Systems*, OUP, Oxford (2002).
30. L. Accardi, Y. G. Lu, and I. Volovich, *Quantum Theory and its Stochastic Limit*, Springer-Verlag, Berlin (2002).
31. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **102**, 1126 (1992).
32. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **137**, 1090 (2010).
33. А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **150**, 649 (2016).
34. А. И. Трубилко, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 581 (2017).
35. А. М. Башаров, *Опт. и спектр.* **116**, 2 (2014).
36. D. Boyanovsky and D. Jasnow, *Phys. Rev. A* **96**, 062108 (2017).
37. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).
38. M. G. Benedict, *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP, Bristol and Philadelphia (1996).
39. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **153**, 375 (2018).