ЖЭТФ, 2019, том 155, вып. 3, стр. 562–566

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВЕРОЯТНОСТЬ ЗАХВАТА ДИФФУНДИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ ПОГЛОЩАЮЩИМИ ЛОВУШКАМИ

В. Е. Архинчеев *

Laboratory of Applied Physics, Advanced Institute of Materials Science, Ton Duc Thang University 700000, Ho Chi Minh City, Vietnam

Faculty of Applied Sciences, Ton Duc Thang University 700000, Ho Chi Minh City, Vietnam

Поступила в редакцию 17 сентября 2018 г.,
после переработки 17 сентября 2018 г.
Принята к публикации 8 октября 2018 г.

Рассмотрено влияние магнитного поля на захват диффундирующих частиц на ловушки. Показано, что вероятность выживания частиц в среде с поглощающими ловушками в магнитном поле зависит от величины магнитного поля, и получены выражения для временных асимптотик вероятности выживания в средах с ловушками в магнитном поле. Влияние магнитного поля на вероятность выживания обусловлено изменением кривизны диффузионных траекторий из-за вращения частиц в магнитном поле под действием силы Лоренца.

DOI: 10.1134/S0044451019030180

1. ВВЕДЕНИЕ

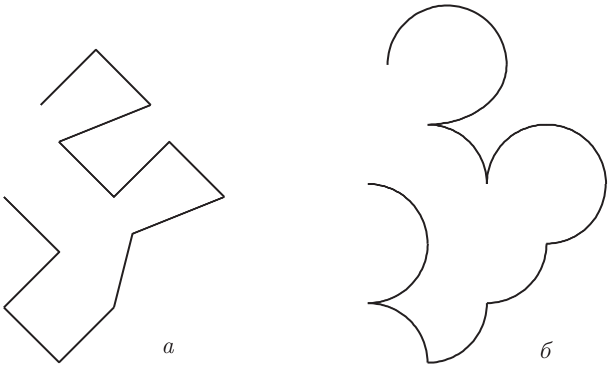
Как известно, проблема случайных блужданий частиц в средах с ловушками исследовалась в различных работах [1–4]. Математическое описание этой задачи было сформулировано в работах [3, 4] и [5, 6]. Эта задача имеет множество приложений, таких как диффузия вакансий в кристаллах с примесными центрами и случайные блуждания с памятью. Задача о диффузии в среде со случайно распределенными ловушками также является классической моделью для диффузионно-контролируемых химических реакций [7–12]. Были установлены следующие основные результаты. В изучаемой задаче в среде с ловушками возникает новый параметр $t_c = 1/Dc^2$ — время диффузии на длину порядка среднего расстояния между ловушками $l_c = 1/c$ (для одномерного случая), где D — коэффициент диффузии, c — концентрация поглощающих ловушек, поэтому асимптотика вероятности выживания частиц оказывается различной на малых временах $t \ll t_c$ [3] и на больших временах $t \gg t_c$ [4].

* E-mail: valeriy.arkhincheev@tdtu.edu.vn

Впервые влияние электрического поля на захват частиц на ловушки исследовалось в работах [13–15]. Напомним кратко, как вводится электрическое поле в диффузионную задачу — это делается стандартным образом как анизотропия направления диффузии, соответственно скорость дрейфа в электрическом поле $\mathbf{E}$ равна $\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}$, μ — подвижность частицы, т. е. сила со стороны электрического поля имеет стандартный вид: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Включение электрического поля в задачу диффузии приводит к дрейфу со скоростью v и появлению другого нового параметра — «полевого времени» $t_E \propto D/v^2$. На временах порядка «полевого времени» дрейфовое смещение сравнивается с диффузионным смещением: $v^2t_E^2 \propto Dt_E$ [16, 17]. Недавно было показано, что на больших временах $t \gg t_E$ вероятность выживания частиц, имеющая экспоненциальный характер, также зависит от «полевого времени» [18]:

$$W(t, E) \propto W_0 \exp\left(-C\left[\frac{t}{t_E}\right]^{1/3}\right). \qquad (1)$$

В настоящей работе будет изучено влияние магнитного поля на вероятность выживания диффундирующих частиц. Именно, будет рассмотрен дрейф частиц в магнитном поле в плоскости с абсолютно поглощающими ловушками, когда магнитное по-



а) Траектории случайных блужданий. *б*) Те же траектории диффузии в магнитном поле

ле направлено перпендикулярно плоскости в среде с ловушками. Будет установлена новая временная асимптотика вероятности выживания частиц, зависящая от магнитного поля.

С физической точки зрения появление магнитного поля H в задаче диффузии приводит к новому параметру, такому как циклотронная частота $\omega_c = qH/m$, где q — электрический заряд, m — масса частицы (здесь для простоты скорость света считается равной 1), т. е. появляется новый временный параметр $t_H = 2\pi/\omega_H$. Следовательно, на больших временах $t \gg t_H$ должна появиться новая временная асимптотика. Влияние магнитного поля на вероятность выживания обусловлено, очевидно, изменением диффузионных траекторий частиц, когда под действием силы Лоренца $F = qvH$ из-за вращения частиц в магнитном поле меняется кривизна диффузионных траекторий (см. рисунок).

Статья строится следующим образом. В разд. 2 на основании ранее полученных решений задачи диффузии в электрическом поле рассмотрен переход к диффузии в магнитном поле. Установлена временная асимптотика вероятности выживания, зависящая от величины магнитного поля. Далее развит скейлинговый подход для описания захвата в магнитном поле. В разд. 3 сделаны выводы и обсуждаются результаты работы.

2. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА АСИМПТОТИКУ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫЖИВАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ СРЕДАХ С ПОГЛОЩАЮЩИМИ ЛОВУШКАМИ

В настоящем разделе рассматривается диффузионное движение частиц в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, с абсолютно поглощающими ловушками (ловушками, которые уничтожают частицы после поглощения). Появление магнитного поля в диффузионной задаче приводит к еще одному новому физическому параметру — циклотронной частоте $\omega_c = qH/m$.

Основной особенностью движения, как указывалось выше, является вращение частиц в магнитном поле, т. е. изменение диффузионных траекторий из-за вращения под действием магнитного поля на масштабах порядка расстояния между ловушками. Поэтому для оценки влияния магнитного поля на движение частицы необходимо оценить скорость дрейфа. В изучаемой задаче действие магнитного поля станет сильным, когда на длине, равной расстоянию между ловушками, частица выполняет по крайней мере одно вращение. Таким образом, мы можем оценить эту скорость как

$$v \propto \frac{l}{t_H} = \frac{\omega_c l}{2\pi}. \qquad (2)$$

Как описано в Приложении, вероятность выживания во внешних полях описывается в приближении эффективного поля:

$$W(t) \propto W_0 \exp\left(-\frac{\pi^2 c^2 D t}{2} - \frac{v^2 t}{4D}\right).$$

Соответственно, используя оценку для скорости (2), получим выражение для вероятности выживания частицы в слабых магнитных полях:

$$W(t) \propto W_0 \exp\left(-\frac{\pi^2 c^2 D t}{2} - \frac{(\omega_c l)^2 t}{16\pi^2 D}\right), \quad t \ll t_H. \qquad (3)$$

В случае сильных магнитных полей (что также соответствует асимптотике больших времен $t \gg t_H$) решение описывается выражением (A.6) из Приложения:

$$W(t; v) \approx$$
$$\approx \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-D\frac{\pi^2(2n+1)^2}{l^2}\, t - \frac{vl}{4D} - cl\right) dl. \qquad (4)$$

Соответственно решение также ищется методом перевала, при этом сама перевальная точка определяется минимумом выражения

$$f(l) = D\frac{\pi^2}{l^2}\, t + \frac{\omega_c l^2}{8\pi D}. \qquad (5)$$

Таким образом, получаем для вероятности выживания частиц, диффундирующих в двумерной среде с ловушками в перпендикулярном магнитном поле, следующее выражение:

$$W(t;H) \propto W_0 \exp\left(-C_2(\omega_c t)^{1/2}\right). \qquad (6)$$

Здесь C_2 — постоянная величина. Как следует из выражения (6), в сильном магнитном поле вероятность выживания частиц в среде с поглощающими ловушками на больших временах определяется новым механизмом — вращательным движением частиц в магнитном поле. Полученное решение можно получить и иным способом, используя скейлинговый подход.

2.1. Скейлинговое описание задачи захвата диффундирующих частиц на ловушки в магнитном поле

Для скейлингового описания задачи диффузии в среде с ловушками, помещенной в перпендикулярное магнитное поле, введем двухпараметрическую функцию $W(x,z)$:

$$\ln\left(\frac{W_0}{W(x,z)}\right) = S(x,z). \qquad (7)$$

Здесь скейлинговая функция $S(x,y)$ зависит от двух переменных: $x = t/t_c$ и $z = t/t_H$. Следовательно, необходимо исследовать свойства двухпараметрической скейлинговой функции. В предельном случае малых магнитных полей, когда $t_c \ll t \ll t_H$, получим скейлинговую функцию $S(x,0)$, соответствующую известной формуле для двумерного случая [4, 6]:

$$W(t;t_c) \propto W_0 \exp\left(-\left[\frac{t}{t_c}\right]^{1/2}\right).$$

Но в другом предельном случае $t_c \ll t_H \ll t$ или в случае сильных магнитных полей скейлинговая функция должна зависеть от переменной $z = t/t_H$. Согласно общим свойствам скейлингового подхода [19–22] двухпараметрическая скейлинговая функция должна иметь автомодельный вид и зависеть от автомодельной комбинации параметров:

$$S(x,z) = x^{1/2} s\left(\frac{z}{x}\right), \qquad (8)$$

где $s(z/x)$ — скейлинговая функция. В случае больших времен и сильных магнитных полей, $t_c \ll t_H \ll t$, получим следующий результат:

$$S(x,z) \propto x^{1/2} s\left(\frac{z}{x}\right) = z^{1/2}. \qquad (9)$$

Следовательно, с помощью скейлингового подхода мы вновь приходим к ранее полученному результату (6)

$$W(t;H) \propto W_0 \exp\left(-C_2[\omega_c t]^{1/2}\right).$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получена новая зависимость вероятности выживания частиц в среде с поглощающими ловушками от магнитного поля — формулы (6) и (9). Отметим, что временная асимптотика вероятности выживания частиц в средах с поглощающими ловушками в магнитном поле была получена двумя методами: путем аналитического решения и методом скейлинга.

В магнитных полях физическим фактором появления зависимости вероятности выживания частиц от магнитного поля является кривизна диффузионных траекторий в магнитном поле. В слабых магнитных полях диффузия имеет обычный случайный характер, но в сильных магнитных полях траектории частиц за счет вращательного движения частиц искривляются на расстоянии порядка среднего расстояния между ловушками:

$$l = vt_H = \frac{2\pi v}{\omega_c} \propto \frac{1}{c^{1/d}}. \qquad (10)$$

Как следует из выражения (6), в сильных магнитных полях, когда на длинах, равных примерно среднему расстоянию между ловушками, частица успевает совершить несколько вращений, мы получаем новое асимптотическое поведение, обусловленное действием магнитного поля. Полученные результаты описывают вероятность выживания частиц, диффундирующих по двумерной плоскости, перпендикулярной магнитному полю, которая явным образом зависит от величины внешнего магнитного поля, см. формулы (6) и (9). Таким образом, меняя величину внешнего поля, можно контролировать вероятность выживания и захвата частиц на ловушки.

Второе направление применения полученных результатов — диффузионно-контролируемые реакции [8, 23, 24]. Согласно приведенным выше результатам скорость протекания этих реакций может контролироваться внешними магнитными полями. Кроме того, локализация диффундирующих частиц может дополнительно контролироваться внешними магнитными полями за счет вращения в конечной области и, как результат, это должно привести к увеличению частоты взаимодействий реагентов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Влияние внешних полей на временную асимптотику вероятности выживания в средах с поглощающими ловушками

Электрическое поле в проблему диффузии в средах с поглощающими ловушками вводится стандартным образом как анизотропия в направлении по и против электрического поля. Соответственно, уравнение диффузии в электрическом поле примет вид

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - v\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}. \qquad (\text{A}.1)$$

Здесь $v = \mu E$ — дрейфовая скорость частиц в электрическом поле E, μ — подвижность частицы. Начальные и граничные условия ставим аналогично сформулированным выше условиям (7). Соответственно, по-прежнему ищем решение в виде

$$W(x,t;E) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \exp(-E_n t). \qquad (\text{A}.2)$$

При этом выражения для собственных функций меняются:

$$\varphi_n = \exp\left(\frac{v(x-x_i)}{2D}\right)\sin\left(k_n(x-x_i)\right), \qquad (\text{A}.3)$$

а собственные значения определяются как

$$E_n = Dk_n^2 + \frac{v^2}{4D}. \qquad (\text{A}.4)$$

Соответственно, в приближении среднего поля получим

$$\overline{W}(t;E) \propto \exp\left(-\frac{v^2 t}{4D}\right). \qquad (\text{A}.5)$$

На больших временах асимптотика вероятности выживания частиц, диффундирующих в среде с ловушками, определяется флуктуациями концентрации ловушек, т. е. областями, свободными от ловушек из-за флуктуаций. Именно наличие таких флуктуационных областей и определяет временные асимптотики вероятности выживания частиц в средах с ловушками. Соответственно, согласно [4] необходимо усреднить полученное выше выражение (A.2) по случайному расположению ловушек. (В нашей работе оно принято в пуассоновском виде.) Таким образом, асимптотический вид решения во флуктуационной области определяется следующим выражением (подробнее см. [18]):

$$W(t;E) \approx$$
$$\approx \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-D\frac{\pi^2(2n+1)^2}{l^2}t - \frac{vl}{4D} - cl\right) dl. \qquad (\text{A}.6)$$

Таким образом, появление внешнего поля в изучаемой задаче приводит к новому экспоненциальному множителю $\exp(-vl/4D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. Montroll and G. H. Weiss, J. Math Phys. **6**, 167 (1965).
2. A. A. Ovchinnikov and A. A. Belyi, Theor. Exp. Chem. **2**, 405 (1966).
3. G. V. Ryazanov, Teor. i Matem. Fizika **10**, 271 (1972).
4. B. Ya. Balagurov and V. G. Vaks, Sov. Phys. JETP **38**, 799 (1974).
5. M. Donsker and S. Varadhan, Comm. Pure Appl. Math. **28**, 525 (1975).
6. M. Donsker and S. Varadhan, Comm. Pure Appl. Math. **32**, 721 (1979).
7. F. Benitez, C. Duclut, H. Chaté, B. Delamotte, I. Dornic, and M. A. Muñoz, Phys. Rev. Lett. **117**, 100601 (2016).
8. Sang Bub Lee, In Chan Kim, C. A. Miller, and S. Torquato, Phys. Rev. B **39**, 11833 (1989).
9. I. Fouxon and M. Holzner, Phys. Rev. E **94**, 022132 (2016).
10. N. Felekidis, A. Melianas, and M. Kemerink, Phys. Rev. B **94**, 035205 (2016).
11. V. Sapozhnikov, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, L151 (1994).
12. A. Ordemann, G. Berkolaiko, S. Havlin, and A. Bunde, Phys. Rev. E **61**, 1005 (2000).
13. P. Grassberger and I. Procaccia, Phys. Rev. A **26**, 3686 (1982).
14. B. Movaghar, B. Pohlmann, and D. Würtz, Phys. Rev. A **29**, 1568 (1984).
15. V. Mehra and P. Grassberger, Physica D **168**, 244 (2002).
16. В. Е. Архинчеев, Письма в ЖЭТФ **67**, 518 (1998).
17. V. E. Arkhincheev, AIP Conf. Proc. **553**, 231 (2001).
18. В. Е. Архинчеев, ЖЭТФ **151**, 322 (2017).
19. Y. Gefen, A. Aharony, and S. Alexander, Phys. Rev. Lett. **50**, 77 (1983).
20. A. Stanley, K. Kang, S. Redner, and R. L. Blumberg, Phys. Rev. Lett. **51**, 1223 (1983).

21. P.-G. De Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell Univ. Press, Ithaca, U.S. (1979).

22. P. Kadanoff, *Statistical Physics*: *Statics, Dynamics and Renormalization*, World Sci. (2000).

23. U. M. B. Marconi, A. Puglisi, L. Rondoni, and A. Vulpiani, Phys. Rep. **461**, 111 (2008).

24. P. L. Krapivsky, S. Redner, Eli Ben-Naim, *A Kinetic View of Statistical Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2010).