ЖЭТФ, 2019, том 155, вып. 6, стр. 1029–1036

КОМПАКТНЫЕ ЗВЕЗДЫ С МОДИФИЦИРОВАННЫМ УРАВНЕНИЕМ ТОЛМАНА–ОППЕНГЕЙМЕРА–ВОЛКОВА В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ГАУССА–БОННЕ

М. Ф. Шамир[*], *Т. Наз*[**]

Факультет естественных и гуманитарных наук,
Национальный университет компьютерных и инновационных наук
54000, Лахор, Пакистан

Поступила в редакцию 4 января 2019 г.,
после переработки 17 января 2019 г.
Принята к публикации 22 января 2019 г.

(Перевод с английского)

COMPACT STARS WITH MODIFIED GAUSS–BONNET TOLMAN–OPPENHEIMER–VOLKOFF'S EQUATION

M. F. Shamir, T. Naz

В рамках модели $f(\mathcal{G})$-гравитации с использованием модифицированного уравнения Толмана–Оппенгеймера–Волкова исследуются компактные звезды. Уравнения гидростатического равновесия рассмотрены в контексте $f(\mathcal{G})$-гравитации. Профили плотности энергии, давления и массы звезд исследованы с помощью двух разных моделей уравнений состояния, $p = \omega\rho^{5/3}$ и $p = a(\rho - 4b)$, где ρ — плотность энергии, ω, a и b — конкретные постоянные. В модели, для которой $f(\mathcal{G}) = \alpha\mathcal{G}^2$, где α — произвольная постоянная, обсуждаются физические характеристики компактных объектов при различных значениях параметра модели α. Оказалось, что в рамках $f(\mathcal{G})$-модели гравитации нейтронные и странные звезды следуют принятым физическим сценариям, причем полученные нами результаты согласуются с результатами, доступными в литературе.

DOI: 10.1134/S0044451019060075

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно последним исследованиям, явление ускоренного расширения Вселенной рассматривается как важнейший и интереснейший предмет современной космологии и астрофизики [1, 2]. Для лучшего понимания этой концепции в работах [3, 4] было введено понятие космологической постоянной. Расширение Вселенной подчиняется законам теории относительности Эйнштейна и классической динамики солнечных объектов. Однако теория относительности имеет некоторые ограничения, поскольку она не описывает напрямую некоторые важные явления, такие как темная энергия, темная материя, начальная сингулярность, космологическое ускорение в позднюю эпоху и тот факт, что Вселенная является плоской. Теория относительности описывает космологическое поведение в области слабых полей, однако для того, чтобы описать сильные поля с учетом расширения Вселенной, ее нужно немного модифицировать. В последние десятилетия появились модифицированные теории гравитации, альтернативные общей теории относительности. Считается, что из некоторых из предложенных альтернативных моделей гравитации действительно следует ускоренное расширение Вселенной. В работе [5] предполагается, что с помощью модифицированных теорий гравитации можно эффективно

[*] E-mail: farasat.shamir@nu.edu.pk
[**] E-mail: tayyaba.naz@nu.edu.pk

описывать загадочное поведение темной энергии и космологические явления в позднюю эпоху. Одной из простейших и хорошо известных модификаций общей теории относительности является $f(R)$-теория гравитации, предложенная в работе [6], в этой теории скаляр Риччи R заменяется произвольной функцией $f(R)$. Модифицированные теории гравитации играют важную роль в исследовании различных аспектов эволюции Вселенной [7]. Эти теории рассматриваются как альтернативные при попытке ответить на вопрос о том, что является причиной ускоренного расширения Вселенной [8, 9].

Еще одна теория, которая в последнее время привлекает внимание ученых, — это модифицированная теория гравитации Гаусса – Бонне, также известная как $f(\mathcal{G})$-теория гравитации [10–12]. Аппарат, используемый в $f(\mathcal{G})$-теории гравитации, был разработан авторами работы [13], где также было показано, как с помощью этой теории можно описать такую последовательность космологических событий, как доминирование материи, переход от замедления к ускорению и, наконец, эпоху ускорения. В работе [14] исследовались ограничения эффективных с точки зрения космологии $f(\mathcal{G})$-моделей гравитации, обусловленные солнечной системой, и было получено, что с помощью этих моделей можно описать ускоренное расширение Вселенной в позднюю эпоху. Анализ фазового пространства для эффективных $f(\mathcal{G})$-моделей гравитации и условий их эффективности с космологической точки зрения был проведен в работе [15]. Роль слагаемого Гаусса – Бонне в объяснении фазы ускоренного расширения Вселенной в позднюю эпоху обсуждалась в работе [16].

В астрофизике компактные звезды, как правило, возникают вследствие гравитационного коллапса массивных звезд. Результат такого коллапса зависит от массы звезды. Компактными звездами являются белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры. Физические характеристики звезд определяются соотношением между внутренним давлением и силой гравитации, в результате чего возникает состояние равновесия, известное как гидростатическое равновесие. Это явление имеет большое значение при исследовании внутренней структуры звезд. Решения для изотропных звезд в общей теории относительности описываются уравнениями Толмана – Оппенгеймера – Волкова (ТОВ) [17–19]. В работе [20] с использованием уравнений ТОВ исследовалась модель нейтронной звезды, основанная на мотивированной теорией струн гравитации Гаусса – Бонне. В ряде работ [21–29] подход ТОВ использовался для исследования внутренней структуры компактных объектов. Уравнения ТОВ представляют собой соотношения между давлением, массой и плотностью энергии отдельных звезд. Эти уравнения показывают, как масса компактной звезды влияет на давление и плотность энергии. Для компактных звезд, в особенности для нейтронных звезд, внутреннее давление, эквивалентное гравитационному давлению, обусловлено вырождением фермионов. В соответствии с релятивистским подходом общей теории относительности, будем рассматривать систему уравнений ТОВ для случая сферически-симметричного гидростатического равновесия без вращения:

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{(\rho c^2 + p)(mc^2 + 4\pi r^3)}{r^2c^4 - 2Gmc^2 r}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (1)$$

где p — радиальное давление, ρ — плотность энергии, а m — масса звезды, все они зависят от радиальной координаты r. Для компактной звезды на границе $r = R$ полная масса звезды равна

$$M(R) = \int\limits_0^R 4\pi r^2 \rho\, dr. \quad (2)$$

Для решения этой системы важен выбор уравнений состояния (УС), определяющих связь между давлением и плотностью энергии. В работе [30] исследовались равновесные конфигурации нейтронных и кварковых звезд с различными формами УС и было получено, что максимальная масса может превышать наблюдаемые пределы. На возможность существования нейтронных звезд с высокими плотностями в центре и массами, большими, чем те, которые получаются с помощью общей теории относительности, в контексте модифицированных теорий гравитации обращалось внимание в работах [31–33].

Использование уравнений ТОВ для различных модифицированных моделей гравитации имеет большое значение для лучшего понимания и исследования природы компактных звездных структур и материи при больших плотностях [34–37]. В частности, исследование уравнений ТОВ в рамках модифицированной $f(R)$-модели гравитации имеет очень интересные следствия [38–41]. В работе [35] исследовались модели кварковых звезд с реалистичным УС в непертурбативной $f(R)$-модели гравитации и было получено соотношение масса–радиус. Структура нейтронной звезды исследовалась в работе [42] в рамках модели гравитации, в которой $f(R) = R + \beta R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, с использованием пертурбативного подхода, при этом были получены соотношения масса–радиус для шести различных параметров УС. На самом деле наибольшее внимание уделяется исследованию компактных звезд именно в рамках модифицированных теорий гравитации, причем предметом обсуждения является целый ряд работ, имеющих отношение к нейтронным звездам [43–45]. В работе [34] в контексте расширенных теорий гравитации исследовались модифицированные уравнения ТОВ и возможное существование нейтронных звезд при сильных магнитных полях. Для этого авторы работы рассмотрели теорию Эйнштейна в обобщенном виде, а именно, с учетом инвариантного члена Гаусса – Бонне, а затем сравнили результаты с результатами, полученными в рамках $f(R)$-теории гравитации. Недавно в работе [46] обсуждались заряженные компактные структуры в модифицированной теории гравитации Гаусса – Бонне.

В настоящей работе исследуются уравнения ТОВ в рамках $f(\mathcal{G})$-теории гравитации. Для этого выводится полная система уравнений движения для сферически-симметричного статического пространства–времени в присутствии идеальной жидкости. В частности, рассматриваются уравнения гидростатического равновесия и исследуются профили плотности энергии, давления и массы звезд с помощью моделей с двумя различными уравнениями состояния. Кроме того, подробно обсуждаются физические характеристики компактных объектов при различных значениях параметров модели. Работа построена следующим образом. В разд. 2 приведены краткое обсуждение модифицированной $f(\mathcal{G})$-теории гравитации, а также соответствующие полевые уравнения и фундаментальные формулировки. В разд. 3 исследуются физические характеристики нейтронных и кварковых странных звезд с использованием двух различных УС. В последнем разделе приведены заключительные замечания и результаты.

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ В $f(\mathcal{G})$-МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИИ

Наиболее общий вид действия для модифицированной теории гравитации Гаусса – Бонне следующий [47]:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa^2} + f(\mathcal{G})\right] + S_m, \tag{3}$$

где R — скаляр Риччи, $\kappa^2 = 8\pi G$ — постоянная взаимодействия, а S_m — лагранжиан материи. Варьируя действие (3) по метрическому тензору, получаем модифицированные полевые уравнения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + 8\Big[R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + \frac{R}{2}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\Big]\nabla^\rho\nabla^\sigma f_{\mathcal{G}} + (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где нижний индекс $\mathcal{G}$ в $f_{\mathcal{G}}$ означает производную от $f(\mathcal{G})$ по $\mathcal{G}$, а $R_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ — тензоры Риччи и Римана, соответственно. Слагаемое Гаусса – Бонне $\mathcal{G}$ определяется как

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}. \tag{5}$$

Выберем сигнатуру для римановой метрики в виде $(+,-,-,-)$. Введем ковариантную производную и тензор Римана как

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}V_\lambda$$

и

$$R^\sigma_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\omega_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\omega\nu} - \Gamma^\omega_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\omega\rho}.$$

Рассмотрим сферически-симметричную метрику

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \tag{6}$$

где ν и λ — некоторые произвольные функции от r. Для пространства–времени (6) компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$G_{11} = \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^2}(\lambda' r + e^\lambda - 1), \quad G_{22} = \frac{1}{r^2}(\nu' r - e^\lambda + 1), \tag{7}$$

$$G_{33} = \frac{re^{-\lambda}}{4}(-\nu'\lambda' r + \nu'^2 r + 2\nu'' r - 2\lambda' + 2\nu'), \tag{8}$$

где «$'$» обозначает радиальную производную. Используя уравнения (4), (7) и (8), запишем tt- и rr-компоненты полевых уравнений в виде

$$\frac{1}{r^2}(\lambda' r + e^\lambda - 1) - 8e^{-\lambda}(f_{\mathcal{GGG}}\mathcal{G}'^2 + f_{\mathcal{GG}}\mathcal{G}'') \times \left(\frac{1-e^\lambda}{r^2}\right) + (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)e^\lambda - 4e^{-\lambda}(\lambda'\mathcal{G}'f_{\mathcal{GG}})\left(\frac{e^\lambda - 3}{r^2}\right) = \kappa^2\rho e^\lambda, \tag{9}$$

$$\frac{1}{r^2}(\nu' r - e^\lambda + 1) - 4e^{-\lambda}\nu'\mathcal{G}'f_{\mathcal{GG}}\left(\frac{e^\lambda - 3}{r^2}\right) - (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)e^\lambda = \kappa^2 p e^\lambda. \tag{10}$$

Инвариант Гаусса – Бонне и уравнение сохранения для сферически-симметричного пространства–времени (6) принимают вид

$$\mathcal{G} = \frac{2e^{-\lambda}}{r^2}(\nu'\lambda' + {\nu'}^2 e^{-\lambda} - 3\nu'\lambda' e^{-\lambda} - 2\nu'' - {\nu'}^2 + 2\nu'' e^{-\lambda}), \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\nu'}{2}(p+\rho) = 0. \quad (12)$$

Гравитационную массу m сферической звезды можно связать с внутренним радиусом r уравнением

$$e^{-\lambda} = (1 - 2m/r).$$

Таким образом, записывая уравнения (9) и (10) в терминах dp/dr, dm/dr и ρ, после некоторых преобразований получаем соответствующие уравнения ТОВ:

$$\frac{2}{r^2}\frac{dm}{dr} + 8\left[1 - \frac{2m}{r}\right]^2 \left[\frac{2m/r^3}{1-2m/r}\right] \times \left[f_{\mathcal{GGG}}\mathcal{G}'^2 + f_{\mathcal{GG}}\mathcal{G}''\right] + 4\left[\frac{2m}{r^5}\left(1 - \frac{r}{m}\frac{dm}{dr}\right) \times (-2r + 6m)\right]\mathcal{G}' f_{\mathcal{GG}} + (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f) = 8\pi\rho, \quad (13)$$

$$-\frac{2}{r^2}\left(\frac{r-2m}{p+\rho}\right)\frac{dp}{dr}\left[1 + \frac{4}{r^2}(2r - 6m)\mathcal{G}' f_{\mathcal{GG}}\right] - \frac{2m}{r^3} - (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f) = 8\pi p. \quad (14)$$

Мы будем использовать эти уравнения для анализа нейтронных и кварковых звезд. Рассмотрим случай, когда

$$f(\mathcal{G}) = \alpha\mathcal{G}^n,$$

т. е. когда $f(\mathcal{G})$ — некоторая аналитическая функция инвариантного слагаемого Гаусса – Бонне $\mathcal{G}$ [12]. Выберем для простоты $n = 2$ и применим двумерный графический анализ. Тогда, собирая уравнения (13) и (14) вместе, получим

$$\frac{dp}{dr} = \frac{r^2(p+\rho)}{2(r-2m)(1 + 8\alpha(2r - 6m)\mathcal{G}'/r^2)} \times \left[\frac{-2m}{r^3} - 8\pi(p+\rho) + \frac{2}{r^2}\frac{dm}{dr} + \frac{(16\alpha m)(-2r+6m)\mathcal{G}'(1 - \left(r\frac{dm}{dr}/m\right)}{r^5} + \frac{32\alpha m(1-2m/r)\mathcal{G}'' r}{r^3}\right]. \quad (15)$$

2.1. Граничные условия

Чтобы найти физические характеристики компактных звезд, находящихся в гидростатическом равновесии, надо проинтегрировать дифференциальное уравнение (15). Определим некоторые конкретные граничные условия в центре звезды:

$$m(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c, \quad p(0) = p_c. \quad (16)$$

Решения на поверхности компактных звезд ($r = R$) вычисляются при конкретном условии

$$p(R) = 0,$$

так что внутреннее пространство–время звезды гладко сшивается с решением Шварцшильда. Метрические потенциалы внутреннего и внешнего пространства–времени связаны следующим образом:

$$e^{\nu(R)} = \frac{1}{e^{\lambda}(R)} = 1 - \frac{2M}{R},$$

где M — масса компактной звезды.

2.2. Модели уравнения состояния

Структура и формирование нейтронных звезд полностью зависят от параметра УС, который определяет связь между давлением и плотностью энергии внутри звезды [48]. Определив УС, дифференциальное уравнение (15) можно решить относительно неизвестных функций m, p и ρ. Более того, УС можно использовать, чтобы избавиться от одной неизвестной, что облегчает процесс интегрирования. Чтобы получить равновесные структуры компактных звезд в $f(\mathcal{G})$-теории гравитации, мы рассмотрели два хорошо известных УС (политропная модель и модель MIT мешка). Работа [49] может служить важным примером того, как можно использовать политропное УС для исследования нейтронных звезд. Таким образом, если использовать политропное УС

$$p = \omega\rho^{5/3},$$

то уравнение (15) примет вид

$$\frac{5}{3}\rho^{2/3}\omega\frac{d\rho}{dr} = \frac{r^2(\rho^{5/3}\omega + \rho)}{2(r-2m)(1 + 8\alpha(2r - 6m)\mathcal{G}'/r^2)} \times \left[\frac{-2m}{r^3} - 8\pi(\rho^{5/3}\omega + \rho) + \frac{2}{r^2}\frac{dm}{dr} + \frac{(16\alpha m)(-2r+6m)\mathcal{G}'\left(1 - r\frac{dm}{dr}/m\right)}{r^5} + \frac{32\alpha m(1-2m/r)\mathcal{G}'' r}{r^3}\right]. \quad (17)$$

Здесь мы полагаем $\omega = 1.4745 \cdot 10^{-3}$ [фм^3/МэВ]$^{2/3}$ [50,51]. При исследовании странной кварковой материи [52] более подходящим считается выбор модели MIT мешка, где

$$p = a(\rho - 4b).$$

Для массивных кварковых звезд можно выбрать параметр $a = 0.28$ при $m_s = 250$ МэВ [53]. Параметр b называется постоянной мешка, в настоящей работе мы полагаем $b = 60$ МэВ/фм^3. Тогда

$$a\frac{d\rho}{dr} = \frac{r^2(a(\rho-4b)+\rho)}{2(r-2m)(1+8\alpha(2r-6m)\mathcal{G}'/r^2)} \times \\ \times \left[\frac{-2m}{r^3} - 8\pi(a(\rho-4b)+\rho) + \frac{2}{r^2}\frac{dm}{dr} + \right. \\ + \frac{(16\alpha m)(-2r+6m)\mathcal{G}'\left(1-\left(r\frac{dm}{dr}\right)/m\right)}{r^5} + \\ \left. + \frac{32\alpha m(1-2m/r)\mathcal{G}''r}{r^3}\right]. \quad (18)$$

3. НЕЙТРОННЫЕ И СТРАННЫЕ ЗВЕЗДЫ В $f(\mathcal{G})$-ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Уравнения (17) и (18) являются в сильной степени нелинейными дифференциальными уравнениями и решить их аналитически сложно. Поэтому для исследования трех важных физических характеристик компактных звезд, таких как плотность энергии ρ, давление p и нормированная масса $m/M_\odot$, мы решили воспользоваться методом Рунге–Кутта 4-го порядка с граничными условиями при различных значениях α. На рис. 1 и 2 показано поведение плотности энергии и давления для нейтронных и странных кварковых звезд. Видно, что при $r \to 0$ плотность энергии достигает максимального значения. На рис. 2 видно, что с ростом r радиальное давление для нейтронных и странных кварковых звезд убывает. Более того, на границе давление стремится к нулю. Полученные зависимости плотности энергии и давления свидетельствуют о высокой степени компактности этих звезд, если $f(\mathcal{G})$-модель гравитации описывается степенным законом. На рис. 3 представлены зависимости между массой и радиальной координатой, являющиеся прямо пропорциональными, причем полученные соотношения точно совпадают с обычными соотношениями масса–радиус для компактных звезд. Видно, что при возрастании α массы нейтронных и кварковых звезд ведут себя противоположным образом.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основная цель настоящей работы — исследование физических аспектов компактных структур в $f(\mathcal{G})$-модели гравитации. Для этого в $f(\mathcal{G})$-модели гравитации было рассмотрено обобщенное уравнение ТОВ. Для исследования обобщенного уравнения ТОВ использовались политропное УС ($p = \omega\rho^{5/3}$) для нейтронных звезд и УС модели MIT мешка ($p = a(\rho - 4b)$) для странных кварковых звезд. Из-за высокой степени нелинейности и сложной природы соответствующих дифференциальных уравнений, мы выбрали численные методы их решения и использовали подходящие граничные условия при различных значениях параметра α.

Исследовались физические и геометрические аспекты этих УС при различных значениях параметра α. Параметр модели α играет важную роль в эволюции компактных структур в $f(\mathcal{G})$-модели гравитации. Для модели, в которой $f(\mathcal{G}) = \alpha\mathcal{G}^2$, поведение плотности энергии ρ, давления p и нормированной массы звезды $m/M_\odot$ показано на рис. 1–3. Видно, что когда радиальная координата $r \longrightarrow 0$, плотность энергии достигает максимального значения, что указывает на компактность звезд. Кроме того, радиальное давление для нейтронных и странных кварковых звезд убывает при увеличении r и стремится к нулю на границе. Также получено, что при возрастании α массы нейтронных и кварковых звезд ведут себя противоположным образом. Рост массы компактных объектов обусловлен параметром модели α, этот факт играет важную роль. В принципе, можно сказать, что влияние параметра модели аналогично влиянию давления или дополнительного электрического заряда в конфигурациях нейтронных и странных звезд в общей теории относительности [50–55]. Однако важно отметить, что зависимость масса–радиус оказывается прямо пропорциональной, что соответствует реальным физическим характеристикам компактных структур и результатам, доступным в литературе [30, 56]. Более того, соотношение масса–радиус показывает, что с учетом кубических поправок в $f(R)$-модели гравитации, может быть достигнута максимальная масса нейтронных звезд [34]. В принципе, в модифицированных моделях гравитации возможно существование массивных нейтронных звезд с массами $M > 4M_\odot$ и радиусами 12–15 км. Таким образом, в нашем случае существование устойчивых звезд с высокими плотностями в центре представляется реалистичным, если в $f(\mathcal{G})$-модели гравитации учитывать квадратичные поправки.

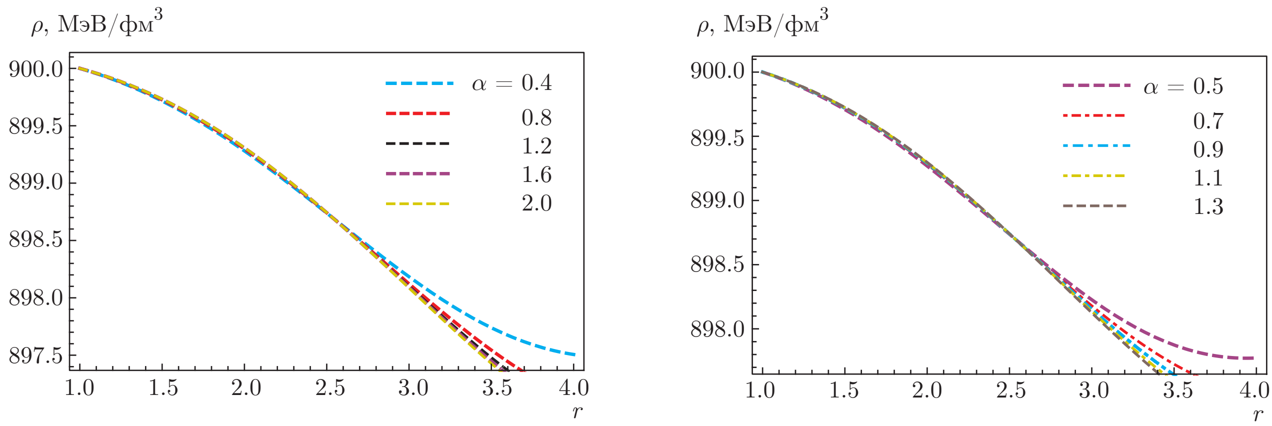

Рис. 1. (В цвете онлайн) Зависимости от радиальной координаты плотности энергии нейтронных (левая панель) и странных кварковых (правая панель) звезд при различных значениях параметра α. Плотность энергии в центре предполагалась равной 900 МэВ/фм^3

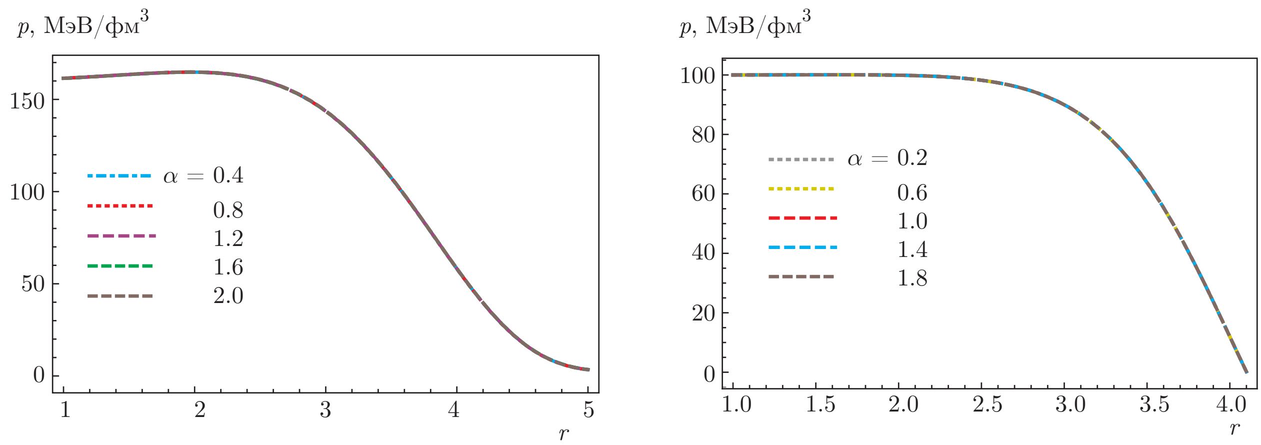

Рис. 2. (В цвете онлайн) Зависимости от радиальной координаты давления для нейтронных (левая панель) и странных кварковых (правая панель) звезд при различных значениях параметра α

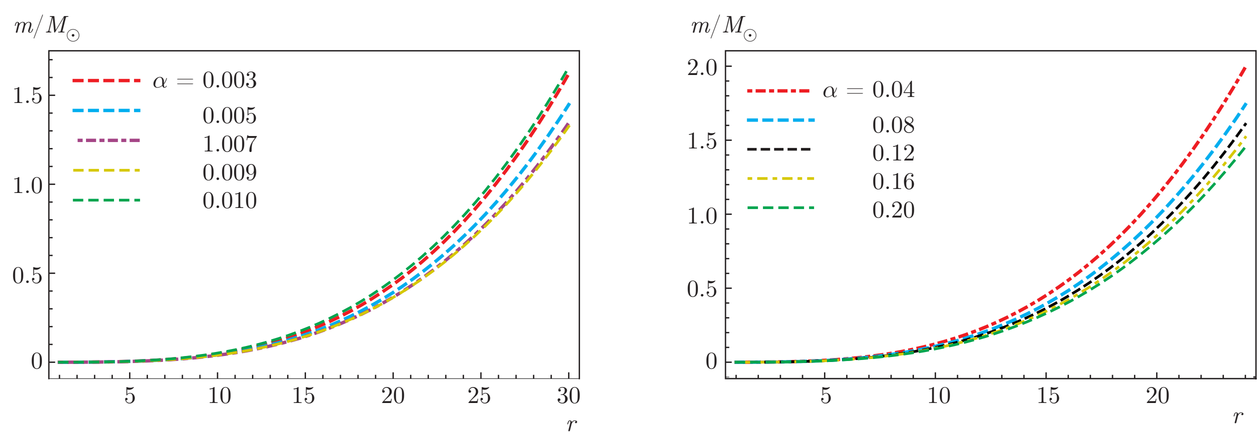

Рис. 3. (В цвете онлайн) Зависимости от радиальной координаты массы нейтронных (левая панель) и странных кварковых (правая панель) звезд, нормированной на солнечную массу, при различных значениях параметра α

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за полезные замечания, которые помогли существенно улучшить работу. Работа поддержана Национальным университетом компьютерных и инновационных наук, Пакистан.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. M. Garnavich et al., Astrophys. J. **509**, 74 (1998).

2. A. G. Riess et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998).

3. E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006).

4. K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Astrophys. Space Sci. **342**, 155 (2012).

5. S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 483 (2002).

6. H. A. Buchdahl, Mon. Not. R. Astron. Soc. **150**, 1 (1970).

7. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 115 (2007).

8. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rep. **505**, 59 (2011).

9. S. Nojiri, S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, Phys. Rep. **692**, 1 (2017).

10. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **1**, 631 (2005).

11. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, Phys. Rev. D **73**, 084007 (2006).

12. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, Phys. Rev. D **75**, 086002 (2007).

13. S. Nojiri and S. D. Odintsov, J. Phys. Conf. Ser. **66**, 012005 (2007).

14. A. D. Felice and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **80**, 063516 (2009).

15. S. Y. Zhou, E. J. Copeland, and P. M. Saffin, J. Cosmol. Astropart. Phys. **07**, 009 (2009).

16. M. Sharif and H. I. Fatima, Int. J. Mod. Phys. D **25**, 1650011 (2016).

17. R. C. Tolman, Proc. Nat. Acad. Sci. **20**, 169 (1934).

18. R. C. Tolman, Phys. Rev. **55**, 364 (1939).

19. J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).

20. D. Momeni and R. Myrzakulov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **12**, 1550014 (2015).

21. G. H. Bordbar and M. Modarres, Phys. Rev. C **57**, 714 (1998).

22. M. Visser and N. Yunes, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 3433 (2003).

23. R. R. Silbar and S. Reddy, Amer. J. Phys. **72**, 892 (2004).

24. G. Narain, J. Schaffner-Bielich and I. N. Mishustin, Phys. Rev. D **74**, 063003 (2006).

25. G. H. Bordbar, M. Bigdeli, and T. Yazdizadeh, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 5991 (2006).

26. P. Boonserm, M. Visser, and S. Weinfurtner, Phys. Rev. D **76**, 044024 (2007).

27. X. Li, F. Wang and K. S. Cheng, J. Cosmol. Astropart. Phys. **10**, 031 (2012).

28. A. M. Oliveira, H. E. S. Velten, J. C. Fabris, and I. G. Salako, Eur. Phys. J. C **74**, 3170 (2014).

29. X. T. He, F. J. Fattoyev, B. A. Li, and W. G. Newton, Phys. Rev. C **91**, 015810 (2015).

30. P. H. R. S. Moraes, J. D. V. Arbañil, and M. Malheiro, J. Cosmol. Astropart. Phys. **06**, 005 (2016).

31. A. V. Astashenok, S. D. Odintsov, and A. de la Cruz-Dombriz, Class. Quant. Grav. **34**, 205008 (2017).

32. G. A. Carvalho et al., Eur. Phys. J. C **77**, 871 (2017).

33. M. Sharif and A. Siddiqa, Eur. Phys. J. Plus. **132**, 529 (2017).

34. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, J. Cosmol. Astropart. Phys. **01**, 001 (2015).

35. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **742**, 160 (2015).

36. D. Momeni, P. H. R. S. Moraes, H. Gholizade, and R. Myrzakulov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **15**, 1850091 (2018).

37. D. Momeni, H. Gholizade, M. Raza, and R. Myrzakulov, Int. J. Mod. Phys. A **30**, 1550093 (2015).

38. S. Capozziello, M. De Laurentis, R. Farinelli, and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **93**, 023501 (2016).

39. P. Brax, A. C. Davis, and R. Jha, Phys. Rev. D **95**, 083514 (2017).

40. H. Mansour, B. S. Lakhal, and A. Yanallah, J. Cosmol. Astropart. Phys. **06**, 006 (2018).

41. S. Capozziello, M. De Laurentis, I. De Martino, M. Formisano, and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **85**, 044022 (2012).

42. C. Deliduman, K. Y. Eki, and V. Kele, J. Cosmol. Astropart. Phys. **05**, 036 (2012).

43. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, Astrophys. Space Sci. **355**, 333 (2015).

44. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **89**, 103509 (2014).

45. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, J. Cosmol. Astropart. Phys. **12**, 040 (2013).

46. M. Ilyas, Eur. Phys. J. C **78**, 757 (2018).

47. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **631**, 1 (2005).

48. J. M. Lattimer and M. Prakash, Science **304**, 536 (2004).

49. R. F. Tooper, Astrophys. J. **140**, 434 (1964).

50. S. Ray, A. L. Espndola, M. Malheiro, J. P. S. Lemos, and V. T. Zanchin, Phys. Rev. D **68**, 084004 (2003) .

51. J. D. V. Arbañil, J. P. S. Lemos, and V. T. Zanchin, Phys. Rev. D **88**, 084023 (2013).

52. E. Witten, Phys. Rev. D **30**, 272 (1984).

53. N. Stergioulas, Living Rev. Relativ. **6**, 3 (2003).

54. J. D. V. Arbañil and M. Malheiro, Phys. Rev. D **92**, 084009 (2015).

55. R. P. Negreiros, F. Weber, M. Malheiro, and V. Usov, Phys. Rev. D **80**, 083006 (2009).

56. M. F. Shamir and M. Ahmad, to be published in Mod. Phys. Lett. A, arXiv:1807.09103.