ЖЭТФ, 2019, том 155, вып. 6, стр. 1098–1106

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНОГО ПЛОТНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

М. Т. Кейкиманова [a]***, Г. И. Муратова*** [a]***, Р. Ж. Наметкулова*** [a]***,***

М. Н. Сарыбеков [a]***, И. М. Ткаченко*** [b*]

[a] *Таразский государственный университет им. М. Х. Дулати*
010000, Тараз, Казахстан

[b] *Департамент прикладной математики, Валенсийский политехнический университет*
46022, Валенсия, Испания

Поступила в редакцию 26 ноября 2018 г.,
после переработки 1 февраля 2019 г.
Принята к публикации 1 февраля 2019 г.

Алгоритм, предложенный в работе [30], позволяющий определять динамические характеристики неидеальной однокомпонентной плазмы без использования данных численного моделирования или прямых экспериментов, обобщается на частично вырожденный двумерный электронный газ. Подход основан на классической теории моментов и других точных отношениях, которым должна удовлетворять диэлектрическая функция системы.

DOI: 10.1134/S0044451019060142

1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемый в последнее время растущий интерес к исследованию квазидвумерных электронных систем частично связан с развитием наноэлектроники, см., например, [1]. Хорошо известными примерами двумерных электронных систем являются электроны, захваченные на поверхности жидкого гелия, или электроны, удерживаемые вблизи перехода между полупроводником и изоляторами (в структуре полевого транзистора на основе оксида металла и полупроводника (MOSFET)) или между слоями различных полупроводников (в гетеропереходах) [2, 3], см. также [4]. Квазидвумерность в этих системах означает, что электроны удерживаются вблизи границы раздела электростатическим полем и имеют квантованные уровни энергии E_i $(i = 0, 1, \ldots)$ для движения вдоль направления z, перпендикулярно к границе раздела.

Расстояние между уровнями энергии в инверсионных слоях составляет около 100 K, тогда как, например, на поверхности жидкого гелия — около 10 K. Если температура T и энергия Ферми $E_F = \pi n\hbar^2/m^*$ (n и m^* — поверхностная плотность электронов и их эффективная масса) намного меньше, чем расстояние между уровнями энергии E_0 и E_1, то электроны образуют квазидвумерный электронный газ с фиксированной энергией E_0 и волновой функцией $\psi(z)$, отвечающей движению вдоль направления z. Хотя движение электрона в перпендикулярном направлении ограничено, потенциал электростатического взаимодействия определяется решением трехмерного уравнения Пуассона, усредненного с волновой функцией $\psi(z)$. Более подробное обсуждение этой проблемы дано в работе [5]. Другими словами, мы можем аппроксимировать взаимодействие внутри двумерной электронной системы потенциалом Кулона $\phi(r) = \bar{e}/r$, где $\bar{e}$ — перенормированный заряд электрона. Таким образом, параметры связи и вырождения однокомпонентной двумерной плазмы можно определить как

$$\Gamma = \frac{\beta\bar{e}^2}{a}, \quad D = \beta E_F = \frac{\Gamma}{r_s}. \tag{1}$$

Здесь $\beta = (k_BT)^{-1}$ — обратная температура системы в энергетических единицах, $a = (\pi n)^{-1/2}$ — двумерный радиус Вигнера–Зейтца, $r_s = a/a_B^* = am^*\bar{e}^2/\hbar^2$ — параметр Бракнера. Кроме того, можно ввести двумерное дебаевское волновое число $k_D = 2\pi\beta\bar{e}^2 n = 2\Gamma/a$. Ниже будет также использоваться безразмерное волновое число $q = ka$, так что, например, $q_D = k_Da = 2\Gamma$.

[*] E-mail: imtkgo@gmail.com

Исследование коллективных возбуждений двумерной жидкой плазмы началось более 40 лет назад, когда Платцман и Цоар в рамках приближения хаотических фаз (ПХФ) установили качественные особенности двумерных плазмонов [6]. Было обнаружено, что коллективная мода квазидвумерной кулоновской системы мягкая с характерным корневым законом дисперсии:

$$\omega_p(q) = \sqrt{\frac{2\pi n\bar{e}^2 k}{m^*}} = \sqrt{\frac{2\bar{e}^2 q}{m^* a^3}}. \qquad (2)$$

В ПХФ, однако, не учитываются корреляционные эффекты, играющие определяющую роль в неидеальной плазме. Теоретические попытки описать двумерные коллективные возбуждения для $\Gamma > 1$ начались с обобщением ПХФ в режиме неидеальности [6] и в дальнейшем с применением приближения квазилокализованного заряда (ПКЛЗ) [7–10]. Расчеты, основанные на последнем формализме, привели к следующему выражению для двумерной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(q,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2(q)}{\omega^2 - \omega_p^2(q)D(q)}, \qquad (3)$$

где

$$D(q) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{p}\neq 0,\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})^2}{q^3 p}\left[S\left(|\mathbf{q}-\mathbf{p}|\right) - S(p)\right], \qquad (4)$$

N — полное число электронов в системе, а $S(q)$ — статический структурный фактор. Выражение (3) удовлетворяет четвертому правилу сумм при больших значениях Γ, таких что $3q/2\Gamma < D(q)$. Оно также удовлетворяет f-правилу сумм, но не удовлетворяет нулевому правилу сумм, см. ниже.

С целью аналитического описания динамических свойств неидеальных двумерных кулоновских систем предлагается альтернативный математический подход, способный автоматически учитывать все сходящиеся правила сумм. Специфика физических систем включена в правила сумм, рассчитанные независимо и точно с использованием стандартных методов квантовой статистики в рамках теории линейной реакции Кубо [11–13]. Основополагающие работы этого подхода были опубликованы около 35 лет назад [13–15]. Дальнейшее развитие было предложено в работах [16–22] и книге [23]. Все они были основаны на классических монографиях [24–26].

Моментный подход изначально основан на неканонических решениях Неванлинны [27] (усеченной) проблемы моментов Гамбургера, заключающейся в восстановлении неотрицательной неубывающей плотности распределения по конечному числу ее степенных моментов. Если применять этот подход для изучения диэлектрической функции плазмы или динамического структурного фактора, то моменты фактически являются правилами сумм [23], которые должны выполняться независимо от разложений по малым параметрам. В этом смысле моментный подход является непертурбативным, и если его дополнить физически мотивированными соображениями, упрощениями или асимптотическими соображениями, то он даст возможность адекватно разрешить указанную выше задачу. По своей природе моментный подход, безусловно, является чисто математическим, в этом смысле он не является модельным. Стоит отметить также, что моментный подход эквивалентен методу непрерывных дробей Ли и других [28, 29].

Новое развитие метод моментов получил недавно в работе [30], где он был применен для определения различных динамических свойств однокомпонентных классических неидеальных систем с потенциалами взаимодействия Кулона и Юкавы по их статическим характеристикам без какой-либо адаптации к динамическим данным моделирования. Обоснованность подхода была подтверждена сравнением с имеющимися результатами численного анализа.

Обобщение новой версии моментного подхода на более сложные, например, частично вырожденные и многокомпонентные кулоновские системы было предложено на международной конференции «Неидеальные кулоновские системы» [31], см. также [32, 33], и на международной конференции по физике неидеальной плазмы [34].

Цель настоящей статьи имеет три составляющие: 1) описать обобщение модифицированного моментного подхода [30] на двумерные системы, 2) установить связь между правилами сумм и свести определение динамических свойств к знанию статических характеристик, 3) исправить некоторые ошибки в [5] и изучить взаимоотношение настоящего подхода с альтернативными теоретическими моделями.

Предполагается, что рассматриваемые нами системы находятся в тепловом равновесии и не замагничены. Обобщения на более сложные двумерные системы могут быть осуществлены непосредственно или в рамках матричного метода моментов [23, 35].

2. ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ И ДИНАМИЧЕСКИЙ СТРУКТУРНЫЙ ФАКТОР

Краеугольным камнем моментного подхода является (обратная) диэлектрическая функция плазмы (ОДФ), $\varepsilon^{-1}(q, z = \omega + i\delta)$, $\delta \geq 0$, являющаяся истинной функцией отклика для любого q [36, 37][1)], или (неотрицательная и четная) функция потерь

$$L(q, x = \omega^2) = -\operatorname{Im} \varepsilon^{-1}(q,\omega)/\omega.$$

Динамический структурный фактор (ДСФ) является центральной величиной коллективных и динамических явлений, он определяется функцией потерь через флуктуационно-диссипативную теорему [3]:

$$S(q,\omega) = \frac{qn}{\Gamma} B(\beta\hbar\omega) L(q,\omega), \tag{5}$$

где

$$B(x) = x\,(1-\exp(-x))^{-1} \underset{x\to 0}{\cong} 1 \tag{6}$$

— бозе-фактор. Ниже будет показано, как на строгой математической основе, дополненной простыми физическими соображениями, знание этих динамических характеристик может быть сведено к знанию статических, а именно статического структурного фактора.

Конструктивными блоками подхода являются правила сумм или частотные моменты функции потерь,

$$C_\nu(q) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^\nu L(q,\omega)\, d\omega, \quad \nu = 0, 2, 4. \tag{7}$$

Существенно, что моменты нечетного порядка обращаются в нуль из-за симметрии функции потерь. В противоположность ситуации с многокомпонентной плазмой [38], в однокомпонентной плазме моменты высшего порядка сходятся, но они связаны со слабо изученными непарными корреляциями, которыми здесь пренебрегаем. В классических системах, в соответствии с (6), моменты функции потерь (7) пропорциональны моментам ДСФ, см. [30].

Моменты $C_0(q)$, $C_2(q)$, $C_4(q)$ и характеристические частоты

$$\omega_1(q) = \sqrt{\frac{C_2(q)}{C_0(q)}}, \quad \omega_2(q) = \sqrt{\frac{C_4(q)}{C_2(q)}} \tag{8}$$

известны независимо, они определяются составом, вырождением и термодинамикой системы. Действительно, нулевое правило сумм вытекает из соотношений Крамерса – Кронига:

$$\varepsilon^{-1}(q,z) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega L(q,\omega)\, d\omega}{\pi(z-\omega)} \Leftrightarrow C_0(q) = 1 - \varepsilon^{-1}(q,0). \tag{9}$$

Этот результат не зависит от природы системы. Второй момент — это f-правило сумм [5, 39]:

$$C_2(q) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega \operatorname{Im} \varepsilon^{-1}(q,\omega)\, d\omega = \omega_p^2(q) = \frac{2\bar{e}^2 q}{m^* a^3}, \tag{10}$$

где $\omega_p(q)$ — плазменная частота системы (2).

Четвертый степенной момент функции потерь

$$C_4(q) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^4 L(q,\omega)\, d\omega \tag{11}$$

был найден в работе [5], но, к сожалению, при этом роль магнитного взаимодействия была преувеличена. Здесь приводится правильная форма момента (11). Таким образом, в двумерном электронном газе с фурье-образом потенциала парного взаимодействия $\phi(q) = 2\pi\bar{e}a/q$ вторая характеристическая частота содержит три вклада:

$$\omega_2^2(q) = \omega_p^2(q)\,[1 + K(q) + D(q)]\,. \tag{12}$$

Кинетический вклад

$$K(q) = \frac{3q}{2\Gamma}\, \beta\langle E_{kin}\rangle + \frac{q^3}{8r_s}, \tag{13}$$

где

$$\langle E_{kin}\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\hbar^2 p^2}{2m}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \tag{14}$$

— средняя кинетическая энергия на электрон, $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ и $a_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения, причем с опущенными спиновыми индексами, а корреляционный вклад совпадает с так называемой «D-матрицей» (4) приближения квазилокализованного заряда. Средняя кинетическая энергия в (14) может быть записана как

$$\langle E_{kin}\rangle = \frac{2\bar{e}^2}{a_B^*\Gamma^2}\, F_1(\eta) \tag{15}$$

с безразмерным химическим потенциалом, определяемым условием нормировки для функции распределения:

$$F_0(\eta) = \frac{D}{2} = \frac{\Gamma}{2r_s}.$$

Здесь

$$F_\mu(\eta) = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^\mu}{\exp(x-\eta)+1}\, dx$$

[1)] См. также ссылки в статье [37].

обозначает интеграл Ферми порядка μ. В классическом приближении, когда $D \ll 1$,

$$F_0(\eta) = F_1(\eta) = \exp\eta = \frac{D}{2} = \frac{\Gamma}{2r_s} \ll 1,$$

и тогда

$$K_{classical}(q) = \frac{3q}{2\Gamma}\,.$$

Аналогично

$$D(q) = \int_0^\infty pF(p,q)\,(S(p)-1)\;dp, \qquad (16)$$

$$F(p,q) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{(p\cos\theta + q)^2}{\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos\theta}} - p\cos^2\theta \right) \times \\ \times \frac{d\theta}{q}. \qquad (17)$$

Важно, что угловой множитель $F(p,q)$ стремится к конечному значению, когда $q \to 0$:

$$F(p, q\to 0) \cong \frac{5\pi}{8}\,\frac{q}{p}.$$

При этом в гидродинамическом предельном случае

$$\omega_2^2(q\to 0) \cong \omega_p^2(q), \qquad (18)$$

а на коротких расстояниях, поскольку $F(p,q\to\infty) \cong 1$, восстанавливается одночастичное поведение:

$$\omega_2^2(q\to 0) \cong \omega_p^2(q)\frac{q^3}{8r_s} = \frac{\hbar^2 q^4}{(2m^*)^2 a^4}. \qquad (19)$$

Наконец, следует отметить, что предельное значение (18) вытекает из особенности при $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ в исходном выражении для вклада взаимодействия в четвертый момент.

Частоты $\omega_1(q)$ и $\omega_2(q)$ являются строительными блоками моментного подхода. Кроме того, в разд. 4 будет показано, что в силу простых физических соображений характерная частота $\omega_1(q)$ определяется четвертым моментом. Таким образом, статическая диэлектрическая функция будет определена как важный побочный продукт.

Включение нулевого момента позволяет не только изучать дисперсию коллективных мод системы, но и оценивать их скорость затухания. Он не был учтен в модели ПКЛЗ [7–10], и характерная частота $\omega_1(q)$ не использовалась в том подходе. Диссипация энергии также не изучалась в ПКЛЗ.

3. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Чтобы найти динамические характеристики кулоновских систем и связать их со статическими, мы используем решения усеченной проблемы моментов Гамбургера, соответствующей пяти сходящимся частотным моментам $\{C_0(q), 0, C_2(q), 0, C_4(q)\}$, более подробно см. [23, 24, 40–42]. В силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца эта последовательность моментов является положительно определенной, см. [13, 21, 22]. Следовательно, проблема моментов разрешима, т. е. мы можем восстановить функцию потерь и описать свойства коллективных мод, существующих в системе: несмещенной (диффузионной) и сдвинутых (плазмонных),

$$\omega_{us}(q) = -ia(q), \quad \omega_{\pm sh}(q) = \pm W(q) - ib(q), \qquad (20)$$

и другие динамические характеристики.

3.1. Неканонические решения и дисперсионное уравнение

Характеристики мод могут быть найдены из дисперсионного уравнения или как полюсы ОДФ. Последняя может быть извлечена из функции потерь, определенной в нашей схеме с помощью линейно-дробного преобразования Неванлинны [24] (см. также уравнение (59) в [21, 22][2]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(q,\omega)\,d\omega}{\pi C_0(q)(\omega - z)} = \\ = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - z(z+Q)}{z(z^2-\omega_2^2) + Q(z^2-\omega_1^2)}, \quad \operatorname{Im} z = \delta > 0, \qquad (21)$$

устанавливающего взаимно однозначное соответствие (биекцию) между функциями параметра Неванлинны (ФПН) $Q(z;q)$ и неканоническими решениями проблемы моментов для функции потерь. Любая ФПН, как и любая функция отклика (функция класса Неванлинны), должна быть аналитической и иметь неотрицательную мнимую часть в верхней полуплоскости $\delta > 0$, будучи по крайней мере непрерывной на ее замыкании $\delta = 0$. Кроме того, ФПН должна (равномерно в пределах

[2] Правая часть формулы Неванлинны может быть представлена в виде усеченной непрерывной дроби, эквивалентной (21) (см. [43], уравнение (35)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(q,\omega)\,d\omega}{\pi(\omega - z)} = C_0\left(z - \omega_1^2\left(z - \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{z+Q}\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

любого угла $\vartheta \le \arg(z) \le \pi - \vartheta$, $0 < \vartheta < \pi$) удовлетворять следующему предельному условию:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{Q(z;q)}{z} = 0. \tag{22}$$

Дополнительное свойство (22) гарантирует выполнение моментных условий. Действительно, рассмотрим асимптотическое разложение левой части (21) для $z \to \infty$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(q,\omega)\, d\omega}{\pi C_0(q)(\omega - z)} = -\frac{1}{\pi C_0(q) z} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(q,\omega)\, d\omega}{1-\omega/z} \underset{z\to\infty}{\cong} -\frac{1}{z} - \frac{\omega_1^2}{z^3} - \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{z^5} + \ldots, \quad \operatorname{Im} z = \delta > 0, \tag{23}$$

и заметим, что, даже когда моменты высшего порядка расходятся, приведенное выше асимптотическое разложение все еще представляет асимптотическое поведение функции потерь.

С другой стороны, асимптотическое разложение правой части (21) имеет вид

$$\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - z(z+Q)}{z(z^2-\omega_2^2) + Q(z^2-\omega_1^2)} \underset{z\to-\infty}{\cong} -\frac{1}{z} - \frac{\omega_1^2}{z^3} - \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{z^5}\left[1 - \frac{Q}{z}\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)\right] - \ldots, \tag{24}$$

что совпадает с (23) в силу дополнительного асимптотического свойства (22). Таким образом,

$$\frac{L(q,\omega)}{\pi C_0(q)} = \operatorname{Im} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - \omega(\omega+Q)}{\omega(\omega^2-\omega_2^2) + Q(\omega^2-\omega_1^2)} = \frac{\omega_1^2(\omega_2^2-\omega_1^2)\operatorname{Im} Q}{\left|\omega(\omega^2-\omega_2^2) + Q(\omega^2-\omega_1^2)\right|^2}, \quad \omega = \operatorname{Re}(z + i0^+). \tag{25}$$

ОДФ $\varepsilon^{-1}(k,z)$ может быть легко извлечена из функции потерь, найденной по пяти моментам и определяемой формулой Неванлинны (21), посредством формулы Сохоцкого – Племеля – Дирака

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i0^+} = \frac{P}{\omega' - \omega} + \pi i \delta(\omega' - \omega) \tag{26}$$

(P — главное значение по Коши):

$$\varepsilon^{-1}(q,z) = 1 + \frac{\omega_p^2(q)\,(z + Q(z;q))}{z\,(z^2 - \omega_2^2(q)) + Q(z;q)\,(z^2-\omega_1^2(q))}, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{27}$$

Чтобы воспользоваться этой диэлектрической функцией и решить дисперсионное уравнение

$$z\left(z^2 - \omega_2^2(q)\right) + Q(z,q)\left(z^2 - \omega_1^2(q)\right) = 0, \tag{28}$$

необходимо иметь модель ФПН $Q(z;q)$. Проще всего смоделировать ФПН в виде ее статического значения, как это было сделано в работе [43] и ряде других публикаций [40–42]:

$$Q(z;q) = Q(0;q) = ih(q), \quad h(q) > 0. \tag{29}$$

Это приближение преобразует (25) в выражение

$$\left.\frac{L(q,\omega)}{\pi C_0(q)}\right|_{Q=ih} = \frac{\omega_1^2(\omega_2^2-\omega_1^2)h}{\omega^2(\omega^2-\omega_2^2)^2 + h^2(\omega^2-\omega_1^2)^2}. \tag{30}$$

Таким образом, теорема Неванлинны сводит поиск функции потерь и ДСФ к изучению ФПН или только статической параметрической функции $h(q)$. Дальнейшее приведение динамических характеристик к статическим представлено в следующем разделе.

Форма ПКЛЗ (3), очевидно, следует из соответствующей диэлектрической функции

$$\varepsilon(q,z) = 1 - \frac{\omega_p^2(q)\,(z+Q(z,q))}{z\left(z^2 - \omega_2^2(q) + \omega_p^2(q)\right) + Q(z;q)\left(z^2 - \omega_1^2(q) + \omega_p^2(q)\right)}, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

если положить $Q(z;q) = K(q) = 0$. Понятно, что в ПКЛЗ учитывается, причем в ограниченной форме — при пренебрежении вкладом кинетической энергии, только второе и четвертое правила сумм, но не нулевой степенной момент. Детали результатов ПКЛЗ, включая дисперсионный зазор в двойном слое электронов, могут быть воспроизведены и улучшены в рамках моментного подхода. Но нет возможности свести дисперсию ПКЛЗ к классической власовской асимптотике, содержащейся в кинетическом вкладе $K(q)$ четвертого момента. Частичный учет четвертого правила сумм вместе с f-правилом сумм позволил добиться в рамках ПКЛЗ новых интересных универсальных результатов по дисперсии коллективных мод, которые встроены в формализм моментов. Кроме того, наш подход с помощью ФПН учитывает процессы диссипации энергии и позволяет определить декремент коллективной моды.

Альтернативным подходом при изучении динамических характеристик систем является расширенное приближение случайных фаз. Существует ряд различных моделей поправок на локальное поле (ПЛП) [4], см. также [21, 22]. В однокомпонентной плазме динамическая ПЛП эквивалентна ФПН метода моментов, а приближение (29) соответствует замене динамической ПЛП на статическую. Но в многокомпонентных системах ФПН заменяет все парциальные ПЛП, которые довольно трудно смоделировать [44, 45].

3.2. Сведение параметра Неванлинны

Низкочастотное поведение функции потерь аналогично (из-за (6)) поведению ДСФ. Тогда преобразование Фурье функции потерь, $\Lambda(q,t)$, в силу теоремы Таубера или Абеля является ограниченной функцией, (экспоненциально) убывающей при больших временах. Принимая во внимание физические временные масштабы задачи, можно сделать вывод, что для t, больших, чем наибольшее время релаксации коллективных мод системы, $\Lambda(q,t)$ имеет конечный (нулевой) предел при $t \to \infty$. Тогда, в соответствии с принципом ослабления корреляций Боголюбова, $L(q,\omega)$ подобно ДСФ также имеет конечное предельное значение нулевой частоты, поэтому для очень низких частот значения функции потерь должны быть слабо зависимы. Кроме того, поскольку функция потерь является нечетной функцией частоты, все ее частотные производные нечетного порядка становятся равными нулю при $\omega = 0$. Поэтому вторая производная по ω (или первая по ω^2) должна быть пренебрежимо мала в пределе очень низких частот:

$$\left.\frac{d^2L(q,\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} = \left.\frac{dL(q,x)}{dx}\right|_{x=\omega^2=0} = 0. \qquad (31)$$

Важно, что соотношение (31) позволяет в конечном итоге выразить все динамические характеристики в рамках настоящего подхода в терминах только одной характеристической частоты

$$\omega_2(q) = \sqrt{C_4(q)/C_2(q)}, \qquad (32)$$

определяемой статическим структурным фактором. Действительно, в силу своей симметрии функция потерь зависит только от квадрата частоты и, согласно (31), имеет экстремум при $x = \omega^2 = 0$. Тогда простые вычисления приводят к конкретному значению параметра Неванлинны

$$h(q) = h_0(q) = \frac{\omega_2^2(q)}{\sqrt{2}\,\omega_1(q)}. \qquad (33)$$

Кроме того, нетрудно увидеть, что в невырожденных или слегка вырожденных системах положение «сдвинутого» максимума ДСФ равно

$$W_{classical}(q) = \pm\frac{\omega_2(q)}{\sqrt{3}\,\omega_1(q)}\sqrt{4\omega_1^2(q) - \omega_2^2(q)}, \qquad (34)$$

и, когда $\theta(q) = 2\omega_1(q) - \omega_2(q)$ отрицателен, эта мода сильно затухает и в спектре остается только широкий «несмещенный» максимум. Роль параметра $\theta(q)$ обсуждалась в работе [30].

Комплексные нули дисперсионного уравнения (28) с (29) и (33) теперь могут быть вычислены непосредственно как точные решения (28) (см. [30, 43]):

$$\begin{aligned} w_{us}(q) &= -ia(q) = -w^2X - wY - \frac{ih_0}{3},\\ w_{-sh}(q) &= -W(q) - ib(q) = -X - Y - \frac{ih_0}{3}, \qquad (35)\\ w_{sh}(q) &= W(q) - ib(q) = -wX - w^2Y - \frac{ih_0}{3}. \end{aligned}$$

Они предоставляют прямую информацию о (несмещенной) диффузионной и смещенных (плазмонных) модах системы. Здесь $w = \exp(2\pi i/3)$, а

$$\begin{aligned} X &= \sqrt[3]{\frac{h_0V^2}{2i} - Z^3}, \quad Y = \sqrt[3]{\frac{h_0V^2}{2i} - Z^3},\\ Z^3 &= \sqrt{-\left(\frac{\omega_2^2}{3} - \frac{h_0^2}{9}\right)^3 - \left(\frac{h_0V^2}{2}\right)^2}, \qquad (36)\\ V^2 &= -\frac{\omega_2^2}{3} + \omega_1^2 + \frac{2h_0^2}{27}. \end{aligned}$$

Важный результат (33) с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы приводит к следующей простой форме для ДСФ:

$$S(q,\omega) = \frac{\sqrt{2}\,q}{a^2\Gamma}\times \times\frac{\omega_1\omega_2^2\omega_p^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)B(\beta\hbar\omega)}{2\omega_1^2\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_2^4(\omega^2 - \omega_1^2)^2}. \qquad (37)$$

Таким образом, описана структура ДСФ с тремя максимумами (37), рассмотренная ранее в рамках формализма функции памяти [46]. Это достигнуто без использования какого-либо подгоночного параметра, см. также [47, 48]. Кроме того, эти результаты были основаны на квантовой версии классического приближения СТЛС [49], применимость которой в двумерных системах сомнительна [50]. Как уже упоминалось, в дальнейшем характеристическая частота $\omega_1(q)$ будет выражена через четвертый момент с помощью частоты $\omega_2(q)$, полностью определяемой статическим структурным фактором системы и термодинамическими параметрами. Было бы интересно сравнить (37) с реальными экспериментальными данными или с результатами численного моделирования *ab initio* данных, подобными недавним трехмерным квантовым результатам Монте-Карло, найденным Бонитцем и его коллегами [51–53].

4. КАНОНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Положительные по определению параметры распада $a(q)$ и $b(q)$ в (35) являются декрементами соответствующих коллективных мод. Если эти моды распространяются, т. е. если декременты относительно малы, то помимо упомянутого выше неканонического решения можно построить специфическое каноническое решение проблемы Гамбургера. В нашем случае это пятиточечное решение, локализованное в точках $\omega_0 = 0, \pm\omega_1(q), \pm\omega_2(q)$. Тогда моментные условия (7) приводят к следующему частному каноническому решению проблемы моментов с нулевым весом вклада ω_1:

$$\frac{L^{can}(q,\omega)}{\pi C_0(q)} = \left(1 - \frac{\omega_1^2(q)}{\omega_2^2(q)}\right)\delta(\omega) + \\ + \frac{\omega_1^2(q)}{\omega_2^2(q)}\,\delta\left(\omega^2 - \omega_2^2(q)\right). \quad (38)$$

Похожее на фейнмановское решение (38) описывает незатухающие коллективные моды в системе: диффузионную при $\omega = 0$ и мягкую при

$$W(q) = \pm\omega_2(q). \quad (39)$$

Действительно, характеристическая частота $\omega_2(q)$ оказывается разумным приближением для $W(q)$, когда эта мода слабо затухает. Этот результат широко использовался в рамках подхода ПКЛЗ. Вернемся теперь к преобразованию Фурье функции потерь,

$$\Lambda(q,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L(q;\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega. \quad (40)$$

Каноническое решение (38) немедленно приводит к выражению

$$\Lambda^{can}(q,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L^{can}(q,\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega = \\ = C_0(q)\left[\left(1 - \frac{\omega_1^2(q)}{\omega_2^2(q)}\right) + \frac{\omega_1^2(q)}{\omega_2^2(q)}\,\cos\left(\omega_2(q)t\right)\right].$$

Естественно, разложение этой функции,

$$\frac{\Lambda^{can}(q,t\to 0)}{C_0(q)} \cong 1 - \frac{\omega_1^2(q)}{2}\,t^2 + \\ + \frac{\omega_1^2(q)\omega_2^2(q)}{24}\,t^4 + O(t^6),$$

совпадает с разложением, следующим из определения моментов $\{C_0(q), 0, C_2(q), 0, C_4(q)\}$ в (40):

$$\frac{\Lambda(q,t\to 0)}{C_0(q)} \cong 1 - \frac{\omega_1^2(q)}{2}\,t^2 + \\ + \frac{\omega_1^2(q)\omega_2^2(q)}{24}\,t^4 + O(t^6). \quad (41)$$

Оба разложения определяются исключительно частотами $\{\omega_1^2(q), \omega_2^2(q)\}$ и не зависят от ФПН. Кроме того, в силу флуктуационно-диссипативной теоремы (5), в пятимоментном каноническом приближении

$$\frac{S(q,\omega)}{C_0(q)B(\beta\hbar\omega)} = \\ = \frac{\pi n q}{\Gamma}\left[\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)\delta(\omega) + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\delta(\omega^2 - \omega_2^2)\right].$$

Отсюда, интегрируя, получаем, что

$$\frac{S(q)}{C_0(q)} = \frac{1}{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(k,\omega)\,d\omega = \frac{\pi q}{\Gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\beta\hbar\omega)\times \\ \times\left[\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)\delta(\omega) + \frac{\omega_1^2}{2\omega_2^2}\left(\delta(\omega-\omega_2)+\delta\right)(\omega+\omega_2)\right]d\omega,$$

и, в силу определения нулевого момента,

$$\omega_1^2(q) = \\ = \frac{\omega_2^2(q)}{1 + \dfrac{\Gamma}{\pi q}\,\dfrac{\omega_2^2(q)}{\omega_p^2(q)}\,S(q) - \dfrac{\beta\hbar\omega_2(q)}{2}\,\mathrm{cth}\,\dfrac{\beta\hbar\omega_2(q)}{2}}. \quad (42)$$

В классическом приближении

$$\omega_1^2(q)|_{classical} = \frac{\pi q}{\Gamma}\,\frac{\omega_p^2(q)}{S(q)}.$$

Последний результат также прямо следует из классического варианта флуктуационно-диссипативной теоремы,

$$S(q,\omega) = \frac{q\pi n}{\pi g}\,L(q,\omega).$$

Кроме того, вследствие (9) и (8), из (42) можно получить выражение для статической диэлектрической функции:

$$\varepsilon(q) = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_2^2} - \dfrac{\Gamma}{\pi q}\,S(q) + \dfrac{\beta\hbar\omega_p^2}{2\omega_2}\,\mathrm{cth}\,\dfrac{\beta\hbar\omega_2}{2}.}. \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что классическая предельная форма последнего выражения согласуется с дебаевской формой статического структурного фактора,

$$S_D(q) \underset{\hbar\to 0}{\cong} \frac{2\pi q}{q_D + q} = \frac{2\pi q}{2\Gamma + q}.$$

Детальное сравнительное исследование функции (43), особенно при очень низкой температуре, требует отдельного рассмотрения. Кроме того, влияние процессов рассеяния энергии на связь между двумя характеристическими частотами, т. е. между нулевым и четвертым правилами сумм, также должно быть изучено. В трехмерном случае она оказалась незначительной [34].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках непертурбативного безмодельного моментного подхода и без привлечения данных моделирования или подгоночных параметров получены динамические характеристики двухкомпонентного электронного газа, так что обратная диэлектрическая функция автоматически удовлетворяет первым трем неисчезающим правилам сумм. Динамический структурный коэффициент, дисперсия и затухание коллективной моды и даже динамическая поправка для локального поля определяются с использованием исключительно статического структурного фактора. Последний может быть рассчитан в рамках различных теоретических подходов, методов молекулярной динамики и квантового моделирования Монте-Карло.

Благодарности. И. М. Т. признателен Таразскому государственному университету за гостеприимство и благодарен профессорам Ю. В. Архипову, Л. Конде и А. Е. Давлетову за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Dauelsberg, E. J. Thrush, B. Schineller et al., in *Optoelectronic Devices*: III *Nitrides*, ch. 4, Elsevier Sci. (2005).

2. T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 467 (1982).

3. Yu. Monarkha and K. Kano, *Two-Dimensional Coulomb Liquids and Solids*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (2004).

4. S. Ichimaru, *Statistical Plasma Physics*: *Condensed Plasmas*, Addison-Wesley, New York (1994), Vol. 2.

5. J. Ortner and I. M. Tkachenko, Phys. Rev. A **46**, 7882 (1992).

6. P. M. Platzmann and N. Tzoar, Phys. Rev. B **13**, 3197 (1976).

7. G. Kalman and K. I. Golden, Phys. Rev. A **41**, 5516 (1990).

8. K. I. Golden, G. Kalman, and Ph. Wyns, Phys. Rev. A **41**, 6940 (1990).

9. K. I. Golden and D. Lu, Phys. Rev. A **28**, 980 (1983).

10. G. Kalman and R. Genga, Phys. Rev. A **33**, 604 (1986).

11. A. A. Kugler, J. Stat. Phys. **8**, 107 (1973).

12. K. N. Pathak and P. Vashishta, Phys. Rev. B **7**, 3649 (1973).

13. В. М. Адамян, И. М. Ткаченко, ТВТ **21**, 417 (1983).

14. В. М. Адамян, Т. Майер, И. М. Ткаченко, Физика плазмы **11**, 826 (1985).

15. T. Meyer and I. M. Tkachenko, Contrib. Plasma Phys. **25**, 437 (1985).

16. J. Ortner, V. M. Rylyuk, and Tkachenko, Phys. Rev. E **50**, 4937 (1994).

17. I. M. Tkachenko, J. Ortner, and V. M. Rylyuk, Phys. Rev. E **57**, 4846 (1998).

18. D. Varentsov, I. M. Tkachenko, and D. H. H. Hoffmann, Phys. Rev. E **71**, 066501 (2005).

19. D. Ballester and I. M. Tkachenko, Phys. Rev. Lett. **101**, 075002 (2008).

20. D. Ballester and I. M. Tkachenko, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 214035 (2009).

21. Yu. V. Arkhipov, A. B. Ashikbayeva, A. Askaruly et al., Phys. Rev. E **90**, 053102 (2014).

22. Yu. V. Arkhipov, A. B. Ashikbayeva, A. Askaruly et al., Phys. Rev. E **91**, 019903 (2015).

23. I. M. Tkachenko, Y. V. Arkhipov, and A. Askaruly, *The Method of Moments and its Applications in Plasma Physics*, Lambert (2012).

24. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, Москва (1973).

25. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматлит, Москва (1961).

26. J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, New York (1943).

27. R. Nevanlinna, *Asymptotische Entwicklungen Beschrankter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem, Suomalaisen Tiedeakatemian Kustantama*, Helsinki (1922).

28. J. Hong and M. H. Lee, Phys. Rev. Lett. **55**, 2375 (1985).

29. J. Hong and C. Kim, Phys. Rev. A **43**, 1965 (1991).

30. Yu. V. Arkhipov, A. Askaruly, L. Conde et al., Phys. Rev. Lett. **119**, 045001 (2017).

31. Yu. V. Arkhipov, A. B. Ashikbayeva, A. Askaruly et al., in *Book of Abstracts, SCCS 17*, Kiel, Germany (2017), p. 81.

32. Yu. V. Arkhipov, A. Askaruly, A. E. Davletov et al., in *Book of Abstracts, SCCS 17*, Kiel, Germany (2017), p. 143.

33. Yu. V. Arkhipov, A. B. Ashikbayeva, A. Askaruly et al., Contr. Plasma Phys. **58**, 967 (2018).

34. Yu. V. Arkhipov, A. Askaruly, A. E. Davletov et al., in *Book of Abstracts, PNP16*, Saint-Malo, France (2018), p. 64.

35. V. M. Adamyan and I. M. Tkachenko, Operator Theory: Advances and Applications **118**, 33 (2000) (*Proc. of the Mark Krein Int. Conf. on Operator Theory and Applications*, Vol. II (2000)).

36. O. V. Dolgov, D. A. Kirzhnits, and E. G. Maksimov, Rev. Mod. Phys. **53**, 81 (1981).

37. Е. Г. Максимов, О. В. Долгов, УФН **177**, 983 (2007).

38. В. И. Перель, Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **41**, 886 (1961).

39. Ph. Nozieres and D. Pines, *Theory of Quantum Liquids*, Avalon Publ. (1999).

40. V. M. Adamyan and I. M. Tkachenko, Contrib. Plasma Phys. **43**, 252 (2003).

41. Yu. V. Arkhipov, A. Askaruly, D. Ballester et al., Phys. Rev. E **76**, 026403 (2007).

42. Yu. V. Arkhipov, A. Askaruly, D. Ballester et al., Phys. Rev. E **81**, 026402 (2010).

43. Yu. V. Arkhipov, A. Askaruly, D. Ballester et al., Phys. Rev. E **81**, 026402 (2010).

44. S. V. Adamyan, I. M. Tkachenko, J. L. Munoz-Cobo Gonzalez et al., Phys. Rev. E **48**, 2067 (1993).

45. Yu. V. Arkhipov and A. E. Davletov, Phys. Lett. A **247**, 339 (1998).

46. R. K. Moudgil, P. K. Ahluwalia, and K. Tankeshwar, Phys. Rev. B **54**, 8809 (1996).

47. G. Singh, K. Kumar, V. Garg et al., AIP Conf. Proc. **1665**, 080025 (2015).

48. N. Bhukal, V. Garg, and R. K. Moudgil, Physica E **106**, 133 (2019).

49. K. S. Singwi, M. P. Tosi, R. H. Land et al., Phys. Rev. **176**, 589 (1968).

50. G. Kalman and K. I. Golden, Phys. Rev. B **57**, 8834 (1998).

51. T. Dornheim, S. Groth, F. D. Malone et al., Phys. Plasmas **24**, 056303 (2017).

52. T. Dornheim, S. Groth, and M. Bonitz, Contrib. Plasma Phys. **57**, 468 (2017).

53. T. Dornheim, S. Groth, J. Vorberger et al., arXiv: 1810.12776v1.