

КЛАССЫ СЛОЖНОСТИ УГЛОВЫХ ДИАГРАММ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

*А. Я. Мальцев**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 20 января 2019 г.,
после переработки 20 января 2019 г.
Принята к публикации 24 января 2019 г.

Рассмотрены угловые диаграммы, описывающие зависимость магнитопроводимости металлов от направления магнитного поля в сильных магнитных полях. Как можно показать, все угловые диаграммы проводимости можно разбить на конечное число классов, обладающих различной сложностью. Наибольший интерес среди таких диаграмм представляют диаграммы, обладающие максимальной сложностью, которые могут возникать для металлов с достаточно сложными поверхностями Ферми. При описании структуры сложных диаграмм помимо описания собственно проводимости важнейшую роль играет описание холловской проводимости для различных направлений магнитного поля. Для оценки сложности угловых диаграмм проводимости металлов оказывается удобным также сравнение таких диаграмм с полными математическими диаграммами, определенными (формально) для всего дисперсионного соотношения.

DOI: 10.1134/S0044451019070150

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются угловые диаграммы электропроводности металлов, обладающих произвольными поверхностями Ферми, в сильных магнитных полях. Хорошо известно, что особенности проводимости металлов в этом пределе обусловлены, в первую очередь, особенностями квазиклассических электронных траекторий, возникающих на поверхности Ферми в присутствии внешнего магнитного поля. При этом все нетривиальные особенности в поведении проводимости в этом случае связаны, главным образом, с появлением незамкнутых электронных траекторий, возникающих на поверхностях Ферми достаточно сложной формы. Как следствие этого, сложность угловых диаграмм проводимости определяется непосредственно наличием и типом возникающих на поверхности Ферми открытых траекторий при различных направлениях магнитного поля **В**. Угловая диаграмма может быть при этом отнесена к «достаточно сложному» типу,

если на ней присутствуют области, соответствующие появлению открытых траекторий на поверхности Ферми, т.е. появлению устойчивых открытых электронных траекторий. Основное внимание здесь будет уделено именно таким угловым диаграммам проводимости. Как оказывается, диаграммы такого класса естественно разделить на два типа — более простые (тип А) и диаграммы, которые можно назвать ультрасложными (тип В) в соответствии с их действительно сложной структурой. Мы проведем описание и сопоставление сложности обоих типов диаграмм с наиболее сложными диаграммами, а именно, диаграммами, определенными для всего дисперсионного закона. Диаграммы последнего типа являются до некоторой степени абстрактными с точки зрения теории нормальных металлов, тем не менее, рассмотрение таких диаграмм дает удобный инструмент для построения общего подхода к описанию диаграмм, определяющих проводимость нормальных металлов, и, в частности, позволяет описать «области возникновения» диаграмм типа А или В и оценить «вероятность» появления диаграмм обоих типов для металлов с дисперсионным законом заданного типа. Рассмотрение диаграмм, определенных для всего дисперсионного закона, позво-

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

ляет также включить в классификацию естественным образом и более простые диаграммы, отвечающие появлению лишь замкнутых или неустойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми.

Ниже мы приведем краткое описание связи поведения магнитопроводимости с поведением квазиклассических электронных траекторий на поверхности Ферми металла, что позволит нам, собственно, трактовать угловые диаграммы, описывающие поведение траекторий на поверхности Ферми, как диаграммы проводимости в сильных магнитных полях. В последующих разделах мы более подробно рассмотрим структуру поверхности Ферми при возникновении на ней устойчивых открытых траекторий, особенности угловых диаграмм проводимости для всего дисперсионного закона и для фиксированной поверхности Ферми и проведем сопоставление структуры диаграмм обоих типов. Как следствие, мы приведем в итоге общую схему естественного разделения угловых диаграмм проводимости в металлах на различные классы.

Как хорошо известно, электронные состояния в кристалле параметризуются значениями квазиимпульса $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, при этом любые два значения \mathbf{p} , отличающиеся на вектор обратной решетки

$$\mathbf{a} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

задают одно и то же электронное состояние. Как также хорошо известно, базисные векторы $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ обратной решетки могут быть выбраны в виде

$$\mathbf{a}_1 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)}, \quad \mathbf{a}_2 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)},$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)},$$

где $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ представляют базис прямой решетки кристалла.

Изменение значений квазиимпульса в присутствии внешнего постоянного магнитного поля описывается системой (см., например, [1–3])

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \equiv \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}], \quad (1.2)$$

где $\epsilon(\mathbf{p})$ определяет зависимость энергии электронного состояния от квазиимпульса (дисперсионное соотношение) для фиксированной зоны проводимости. В силу того, что любые два значения квазиимпульса, различающиеся на вектор обратной решетки, задают одно и то же электронное состояние, функция $\epsilon(\mathbf{p})$ является 3-периодической функцией в \mathbf{p} -пространстве с периодами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

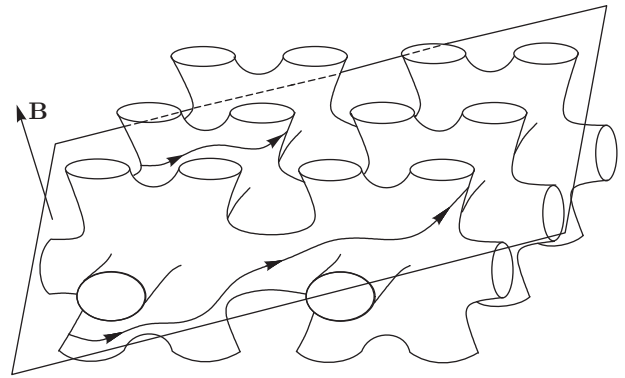


Рис. 1. Траектории системы (1.2) на поверхности постоянной энергии достаточно сложной формы

Система (1.2) является интегрируемой с аналитической точки зрения, в частности, ее траектории в \mathbf{p} -пространстве задаются пересечениями поверхностей постоянной энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ с плоскостями, ортогональными \mathbf{B} . Надо сказать, что описание геометрии таких траекторий для достаточно сложной 3-периодической поверхности в \mathbf{p} -пространстве представляет собой крайне нетривиальную задачу (см. рис. 1). Легко видеть также, что наиболее сложным при этом является описание геометрии открытых (незамкнутых) траекторий (1.2) в \mathbf{p} -пространстве.

Хорошо известно также, что траекториям системы (1.2) в \mathbf{p} -пространстве соответствуют квазиклассические электронные траектории в координатном пространстве, которые имеют несколько более сложную форму (в частности, они не являются плоскими). Однако форма электронных траекторий в \mathbf{x} -пространстве в действительности тесно связана с их формой в \mathbf{p} -пространстве, так, проекции траекторий в \mathbf{x} -пространстве на плоскость, ортогональную \mathbf{B} , подобны траекториям в \mathbf{p} -пространстве, повернутыми на 90° . Последнее свойство делает геометрию траекторий системы (1.2) чрезвычайно важной при описании транспортных явлений в нормальных металлах в присутствии сильных магнитных полей.

Важнейшая роль геометрии траекторий системы (1.2) в описании гальваномагнитных явлений в нормальных металлах была указана в работах школы И. М. Лифшица в 1950-х гг. [4–6]. В этот период было изучено в действительности множество вопросов, связанных с особенностями электронных явлений, обусловленных нетривиальной геометрией поверхности Ферми, в частности, вопросов, связанных с геометрией траекторий системы (1.2), и рассмотрено множество важных примеров траекторий раз-

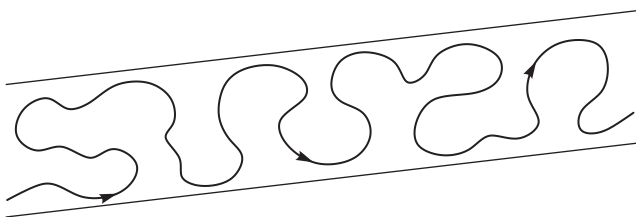


Рис. 2. Вид устойчивой открытой траектории системы (1.2) в плоскости, ортогональной \mathbf{V}

ных типов на различных поверхностях Ферми (см., например, [1–12]). Мы, конечно, не сможем здесь дать даже краткого обзора этих вопросов или привести сколько-нибудь полной библиографии по данной тематике. Нам будет, в действительности, интересно картина полного математического описания структуры системы (1.2), базирующегося на результатах исследования этой системы в более поздний период. Отметим, что форма траекторий (1.2) начинает играть действительно существенную роль в рассматриваемых нами явлениях при выполнении условия $\omega_{BT} \gg 1$, где $\omega_B = eB/m^*c$ имеет смысл некоторой эффективной циклотронной частоты в кристалле и τ представляет собой среднее время свободного пробега электронов [4].

Задача полной классификации различных типов открытых траекторий системы (1.2) с произвольными (периодическими) дисперсионными законами $\epsilon(\mathbf{p})$ была поставлена Новиковым [13] и активно исследовалась в его топологической школе в последующие десятилетия. Можно сказать, что в настоящее время получено достаточно полное описание всех типов траекторий (1.2), базирующееся на довольно глубоких математических теоремах. Надо отметить, что наиболее серьезные прорывы в решении данной проблемы были сделаны в работах [14–16], где было получено описание открытых траекторий (1.2), которые можно в определенном смысле назвать устойчивыми открытыми траекториями.

Уточним здесь, что мы будем называть открытые траектории системы (1.2) устойчивыми, если они не исчезают и сохраняют свою глобальную геометрию при малых вращениях направления \mathbf{V} , а также вариациях энергетического уровня ϵ . Как следует из результатов работ [14–16], устойчивые открытые траектории системы (1.2) обладают следующими замечательными свойствами:

1. каждая устойчивая открытая траектория системы (1.2) лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , проходя ее насквозь (рис. 2);

2. среднее направление всех устойчивых открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве одинаково при заданном направлении \mathbf{V} и задается пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и некоторой целочисленной плоскости Γ , неизменной при малых вращениях \mathbf{V} и вариациях уровня ϵ .

Свойства (1) и (2) устойчивых открытых траекторий имеют непосредственное проявление в поведении гальваномагнитных явлений в металлах в присутствии сильных магнитных полей. Именно, сильная анизотропия электронных траекторий (в \mathbf{x} - и \mathbf{p} -пространствах) приводит к резкой анизотропии проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в пределе $\omega_{BT} \gg 1$. Предельные значения тензора проводимости в \mathbf{x} -пространстве могут быть при этом представлены в виде

$$\sigma_{\infty}^{kl} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

при условии, что ось x совпадает со средним направлением устойчивых открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве.

Легко видеть, что вклад (1.3) существенно отличается от вклада замкнутых траекторий в том же пределе (см. [4])

$$\sigma_{\infty}^{kl} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(в обеих формулах обозначение «*» представляет некоторую безразмерную константу порядка 1).

Свойства тензора (1.3) послужили основанием для введения в работе [17] (см. также [18]) новых топологических характеристик (топологических квантовых чисел), наблюдаемых в проводимости нормальных металлов со сложными поверхностями Ферми.

Действительно, как нетрудно видеть, среднее направление устойчивых открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве совпадает с направлением наибольшего подавления проводимости в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и, таким образом, наблюдаемо экспериментально. В силу устойчивости таких траекторий экспериментально наблюдаема и целочисленная плоскость Γ , заметаемая направлениями наибольшего подавления проводимости при малых вращениях направления \mathbf{V} . Целочисленные параметры плоскости Γ представляют собой топологические квантовые числа, наблюдаемые в проводимости в сильных магнитных полях.

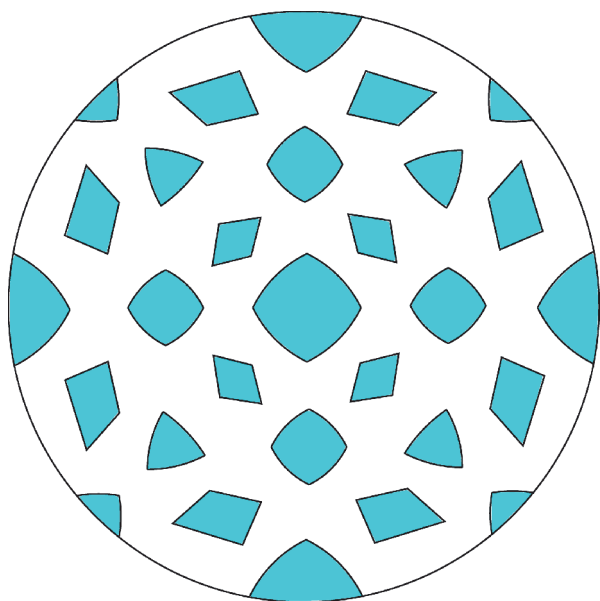


Рис. 3. Зоны устойчивости Ω_α в пространстве направлений \mathbf{V} , соответствующие появлению семейств устойчивых открытых траекторий системы (1.2) с различными числами $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$ на поверхности Ферми

Отметим здесь, что целочисленность плоскости Γ означает, что она порождена двумя векторами обратной решетки (1.1). В частности, она не обязана совпадать в общем случае с какой-либо из кристаллографических плоскостей, вместо этого, она ортогональна некоторому кристаллографическому направлению в \mathbf{x} -пространстве. Таким образом, наблюдаемая при измерениях магнитопроводимости целочисленная плоскость Γ может быть представлена некоторой тройкой целых чисел (M^1, M^2, M^3) , задающих некоторое целочисленное направление в кристаллической решетке.

Каждая из топологических троек $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$ относится к выделенному семейству устойчивых открытых траекторий системы (1.2), соответствующему некоторой зоне устойчивости Ω_α в пространстве направлений \mathbf{V} (рис. 3). Как мы уже сказали, в теории нормальных металлов естественным является рассмотрение траекторий системы (1.2) лишь на одном энергетическом уровне $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$, соответствующем энергии Ферми металла. Естественно определить границы зон устойчивости Ω_α для нормального металла условием существования открытых траекторий соответствующего семейства на поверхности Ферми S_F

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F.$$

Отметим также, что соотношение (1.3) верно, в частности, и для периодических открытых траек-

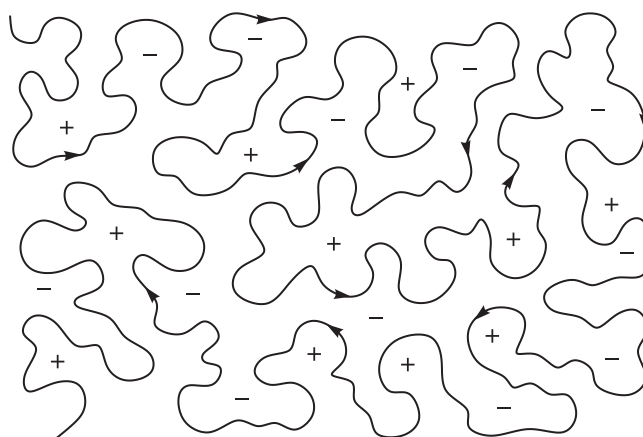


Рис. 4. Вид хаотических траекторий типа Дынникова в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , в \mathbf{p} -пространстве

торий (см. [4]), имеющих рациональные направления в \mathbf{p} -пространстве. Последние, однако, могут как принадлежать устойчивому семейству (если $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$), так и быть неустойчивыми (если $\mathbf{V}/B \notin \Omega_\alpha$).

Необходимо теперь сказать, что кроме устойчивых открытых траекторий и периодических траекторий системы (1.2), имеющих сравнительно простую форму, на достаточно сложных поверхностях Ферми могут возникать также траектории, поведение которых имеет более сложный «хаотический» характер.

Первый пример траектории такого типа был построен Царевым [19] для направления \mathbf{V} иррациональности 2 (плоскость, ортогональная \mathbf{V} , содержит вектор обратной решетки). Траектории Царева могут возникать на поверхностях Ферми рода $g \geq 3$ и обладают явным хаотическим поведением на этих поверхностях. Вместе с тем, в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , траектории типа Царева обладают асимптотическим направлением и их вклад в проводимость в действительности также сильно анизотропен. В частности, мы также должны иметь здесь соотношение (1.3) в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$. При более тщательном рассмотрении, однако, вклад траекторий Царева в электропроводность имеет в действительности некоторые отличия от вкладов устойчивых открытых или периодических траекторий, что может быть выявлено в достаточно точных экспериментах. Траектории типа Царева являются при этом неустойчивыми как по отношению к малым вращениям направления \mathbf{V} , так и по отношению к вариациям уровня Ферми.

Более сложные примеры хаотических траекторий на сложных поверхностях Ферми даются траекториями типа Дынникова [20]. Траектории Дын-

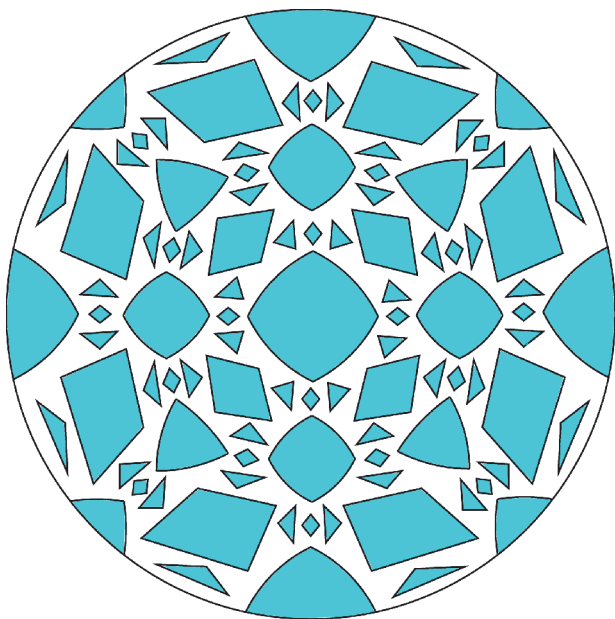


Рис. 5. Зоны устойчивости Ω_α^* , соответствующие появлению семейств устойчивых открытых траекторий системы (1.2) с различными числами $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$ хотя бы на одном из уровней энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ (весьма схематично, показано лишь конечное число зон)

никова могут возникать лишь при направлениях \mathbf{V} максимальной иррациональности и обладают явным хаотическим поведением как на поверхности Ферми, так и в накрывающем \mathbf{p} -пространстве (рис. 4). Главной особенностью вклада таких траекторий в электропроводность является при этом резкое подавление проводимости вдоль направления \mathbf{V} в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ [21]. В целом, вкладу траекторий типа Дынникова в тензор электропроводности свойственно убывание проводимости во всех направлениях в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ и появление дробных степеней параметра ω_{BT} в асимптотиках компонент тензора [21, 22]. Как и траектории типа Царева, траектории типа Дынникова являются неустойчивыми как по отношению к малым вращениям направления \mathbf{V} , так и по отношению к вариациям уровня Ферми. Как мы увидим ниже, появление хаотических траекторий (обоих типов) будет связано, главным образом, с наиболее сложными угловыми диаграммами (типа В), где соответствующие направления \mathbf{V} будут играть (наряду с зонами Ω_α) весьма важную роль в структуре таких диаграмм.

Как мы уже сказали выше, кроме зон устойчивости, определяемых некоторой фиксированной поверхностью Ферми, можно в действительности ввести также зоны устойчивости Ω_α^* , соответствующие

всему дисперсионному соотношению $\epsilon(\mathbf{p})$ [23]. Зоны Ω_α^* образуют, как правило, более сложное множество в пространстве направлений \mathbf{V} (рис. 5), в частности, каждая из зон Ω_α является подмножеством более обширной зоны Ω_α^* . В данной работе мы остановимся на обсуждении сложности угловых диаграмм на \mathbb{S}^2 , представляющих зоны устойчивости для фиксированной поверхности Ферми, и, в частности, проведем некоторое сравнение их с диаграммами, определенными для всего дисперсионного закона.

Отметим здесь также, что довольно широкий круг вопросов, касающихся описания устойчивых траекторий системы (1.2), как с точки зрения их топологического описания, так и с точки зрения теории транспортных явлений в металлах, был представлен в работах [24–32].

2. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ И ЗОНЫ УСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ОТКРЫТЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Главное внимание будет уделяться поверхностям Ферми, имеющим достаточно сложную форму. Определим сразу, что мы имеем под этим в виду. Прежде всего отметим хорошо известное обстоятельство, что полное пространство физических состояний для фиксированной зоны проводимости представляет собой трехмерный тор \mathbb{T}^3 с топологической точки зрения. Действительно, в силу указанной выше эквивалентности состояний с квазиимпульсами, различающимися на векторы обратной решетки, полный набор состояний для заданной зоны проводимости (зона Бриллюэна) представляет собой фактор-пространство

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L$$

(отметим также, что мы не рассматриваем здесь спиновые переменные, которые не будут играть существенной роли в наших рассуждениях). Как следствие этого, любая (несингулярная) энергетическая поверхность $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ может также рассматриваться (после факторизации) как гладкая компактная поверхность, вложенная в \mathbb{T}^3 . Как компактная гладкая двумерная поверхность каждая такая поверхность (в частности, поверхность Ферми) представляет собой поверхность определенного рода $g \geq 0$ (рис. 6).

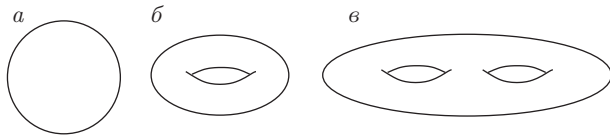


Рис. 6. Топология замкнутых поверхностей рода 0 (а), 1 (б), 2 (в) и т. д.

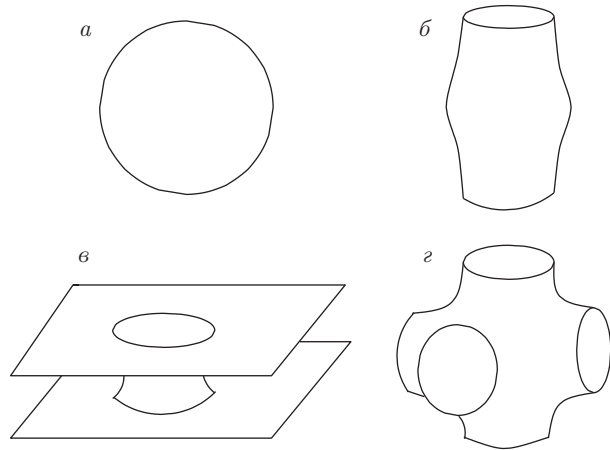


Рис. 7. Примеры поверхностей Ферми ранга 0 (а), 1 (б), 2 (в), 3 (г)

Кроме топологического рода поверхность Ферми S_F характеризуется также рангом, определяемым как размерность образа отображения

$$H_1(S_F) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^3)$$

при вложении $S_F \rightarrow \mathbb{T}^3$. Нетрудно видеть, что ранг поверхности Ферми может принимать значения 0, 1, 2 и 3 (рис. 7). Скажем сразу, что мы будем считать здесь поверхность Ферми достаточно сложной, если ее ранг равен 3. Нетрудно показать, что для рода поверхности Ферми мы должны в этом случае также иметь соотношение $g \geq 3$.

Приведем теперь кратко описание структуры сложной поверхности Ферми при наличии на ней устойчивых открытых траекторий системы (1.2). Отметим, что наличие такой структуры является при этом общим свойством системы (1.2) и вытекает из строгих топологических результатов, представленных в работах [14, 16, 23]. Нам будет наиболее удобно использовать описание, представленное в работе [23], где рассматривались все открытые траектории системы (1.2), возникающие для заданного дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$. Для простоты мы будем предполагать, что поверхность Ферми представлена одной компонентой связности, имеющей ранг 3. Нас здесь будет интересовать, в первую

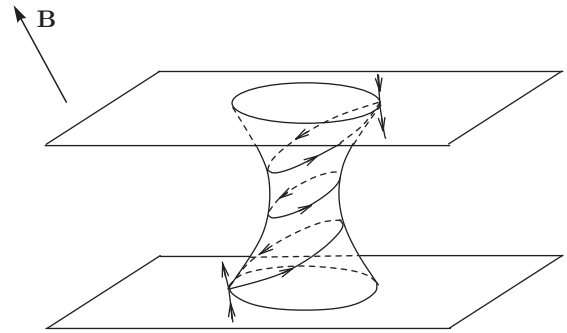


Рис. 8. Цилиндр замкнутых траекторий (1.2), ограниченный сингулярными замкнутыми траекториями

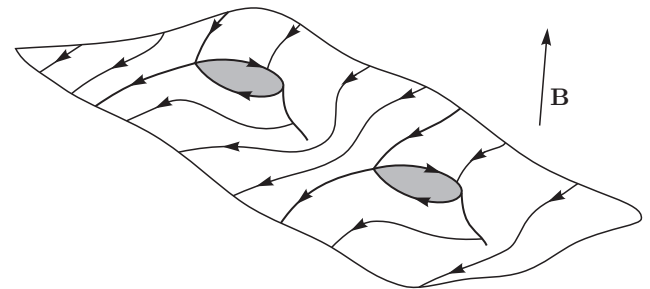


Рис. 9. Носитель открытых траекторий системы (1.2) в расширенном p -пространстве

очередь, структура поверхности Ферми при направлении \mathbf{V} , лежащем в одной из зон устойчивости Ω_α , при этом мы можем для простоты полагать, что \mathbf{V} имеет направление общего положения (в частности, плоскость, ортогональная \mathbf{V} , не содержит векторов обратной решетки).

Рассмотрим, следуя [23], множество несингулярных замкнутых траекторий системы (1.2) при $\mathbf{V}/V \in \Omega_\alpha$. Нетрудно видеть, что это множество представляет собой конечный набор (неэквивалентных) цилиндров, ограниченных сингулярными замкнутыми траекториями системы (1.2) (рис. 8). Удалим теперь все такие цилиндры замкнутых траекторий из поверхности Ферми. Оставшаяся часть поверхности Ферми представляет собой часть, заполненную открытыми траекториями системы (1.2). Нетрудно видеть, что полученная таким образом новая поверхность должна состоять из конечного числа (неэквивалентных) связных компонент, которые могут быть названы «носителями» открытых траекторий. Отметим также, что образовавшиеся после удаления цилиндров замкнутых траекторий отверстия могут быть «заклеены» плоскими дисками, ортогональными \mathbf{V} , так что новая (редуцированная) поверхность может рассматриваться также и как замкнутая периодическая поверхность в

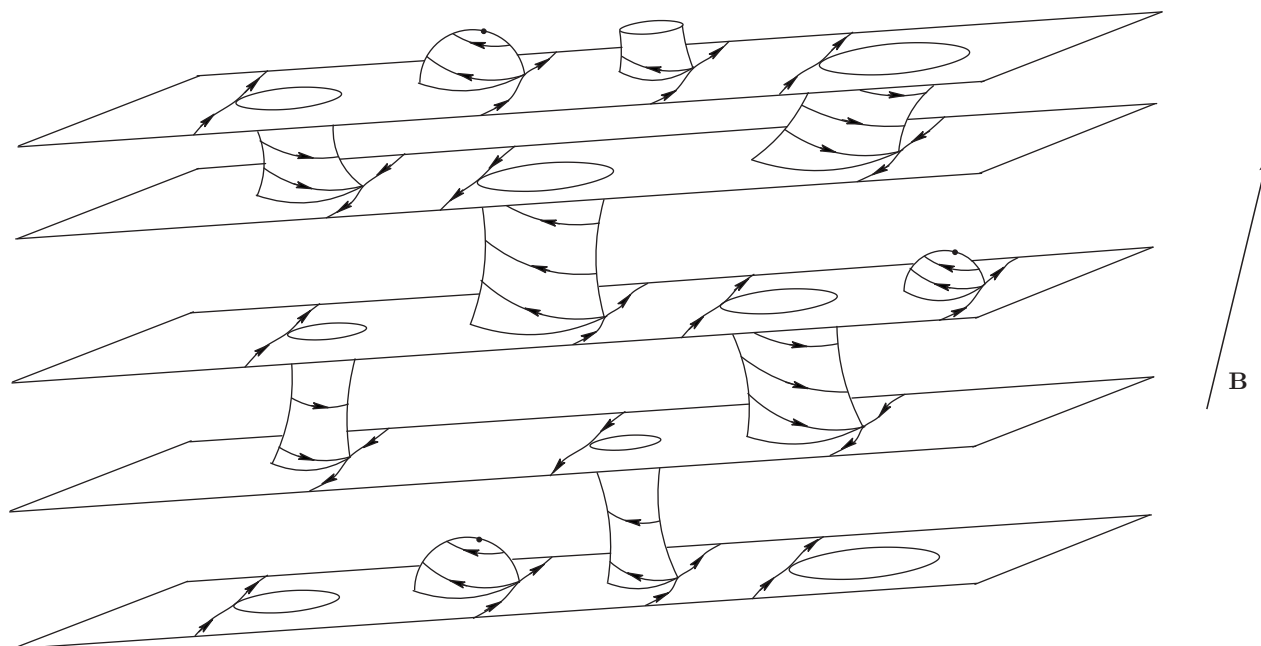


Рис. 10. Представление поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории системы (1.2)

\mathbf{p} -пространстве. Полученная поверхность также может быть профакторизована по векторам обратной решетки и рассматриваться как замкнутая двумерная поверхность, вложенная в \mathbb{T}^3 .

Важнейшее свойство редуцированной таким образом поверхности Ферми при наличии на ней устойчивых открытых траекторий системы (1.2) может быть сформулировано следующим образом [14,16]:

каждый из носителей открытых траекторий представляет собой двумерный тор \mathbb{T}^2 , вложенный в \mathbb{T}^3 с фиксированным отображением в гомологиях, однозначно определенным для всей зоны устойчивости Ω_α .

Возвращаясь к расширенному \mathbf{p} -пространству, можно также сформулировать приведенное выше утверждение в следующем виде:

каждый из носителей открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве представляет собой целочисленную периодически деформированную плоскость заданного направления, неизменного для всей зоны устойчивости Ω_α (рис. 9).

Полная редуцированная поверхность Ферми представляет собой, таким образом, бесконечный набор целочисленных периодически деформированных параллельных плоскостей фиксированного направления в \mathbf{p} -пространстве. Количество неэквивалентных целочисленных плоскостей (т.е. представляющих различные электронные состояния) в

редуцированной поверхности Ферми задается при этом конечным четным числом, равным количеству двумерных торов \mathbb{T}^2 в зоне Бриллюэна (\mathbb{T}^3).

Можно видеть таким образом, что для направлений \mathbf{B} общего положения, лежащих в какой-либо из зон устойчивости Ω_α , полная поверхность Ферми всегда представима в виде набора параллельных целочисленных плоскостей (с отверстиями), несущих открытые траектории системы (1.2), соединенных компонентами, состоящими только из замкнутых траекторий (1.2). В нашем случае мы будем всегда полагать, что такие компоненты представляют собой отдельные цилиндры замкнутых траекторий, ограниченные сингулярными замкнутыми траекториями (рис. 10). В действительности, более сложная структура этих компонент (наличие нескольких цилиндров замкнутых траекторий с дополнительными особыми точками) может привести некоторые дополнительные особенности в общую картину (например, неодносвязность зон устойчивости). Однако такая структура является крайне маловероятной в реальной ситуации, так что мы не рассматриваем ее здесь.

Представление поверхности Ферми в виде, показанном на рис. 10, в общем случае не является единственным и, в частности, мы имеем различные такие представления одной и той же поверхности для различных зон устойчивости $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$. Нужно отметить также, что представление на рис. 10 отража-

ет главные особенности топологической структуры системы (1.2) на поверхности Ферми и может быть существенно сложнее с визуальной точки зрения.

Нетрудно видеть, что представленная структура поверхности Ферми является устойчивой по отношению к малым вращениям направления магнитного поля и объясняет наличие замечательных свойств устойчивых открытых траекторий системы (1.2), приведенных выше. Можно видеть также, что все носители открытых траекторий могут быть в действительности разделены на два класса в соответствии с направлением движения вдоль траекторий (вперед или назад) в расширенном \mathbf{p} -пространстве. Кроме того, можно разделить на два класса также цилиндры замкнутых траекторий, представленные на рис. 10, в соответствии с тем, траектории какого типа (электронного или дырочного) они содержат.

В соответствии с картиной на рис. 10, границе зоны устойчивости Ω_α должно обязательно соответствовать обращение в нуль высоты одного из цилиндров замкнутых траекторий (и последующее его исчезновение) для соответствующих направлений \mathbf{V} (рис. 11). Как легко видеть, после пересечения границы зоны устойчивости открытые траектории получают возможность «перескакивать» с одного носителя открытых траекторий на другой, что изменяет общую структуру траекторий на поверхности Ферми.

Можно видеть также, что общая граница зоны устойчивости может быть при этом как «простой», т. е. соответствовать исчезновению одного и того же цилиндра замкнутых траекторий во всех своих точках (рис. 12), так и «составной», т. е. соответствовать исчезновению разных цилиндров замкнутых траекторий на различных ее участках (рис. 13, 14). Кроме того, можно видеть, что в случае составной границы зоны устойчивости возможна как ситуация, когда на разных ее участках происходит исчезновение цилиндров замкнутых траекторий различных типов (рис. 13), так и ситуация, когда на разных ее участках происходит исчезновение разных цилиндров замкнутых траекторий одного и того же типа (рис. 14).

Отметим здесь, что тип исчезающего цилиндра замкнутых траекторий также играет важную роль в данной ситуации в описании гальваномагнитных явлений для соответствующих направлений \mathbf{V} . Так, в частности, он определяет величину холловской проводимости в металле вне зоны Ω_α вблизи соответствующего участка границы в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$. Как было указано в [32], наличие хотя бы одной зоны устойчивости с составной границей, определяе-

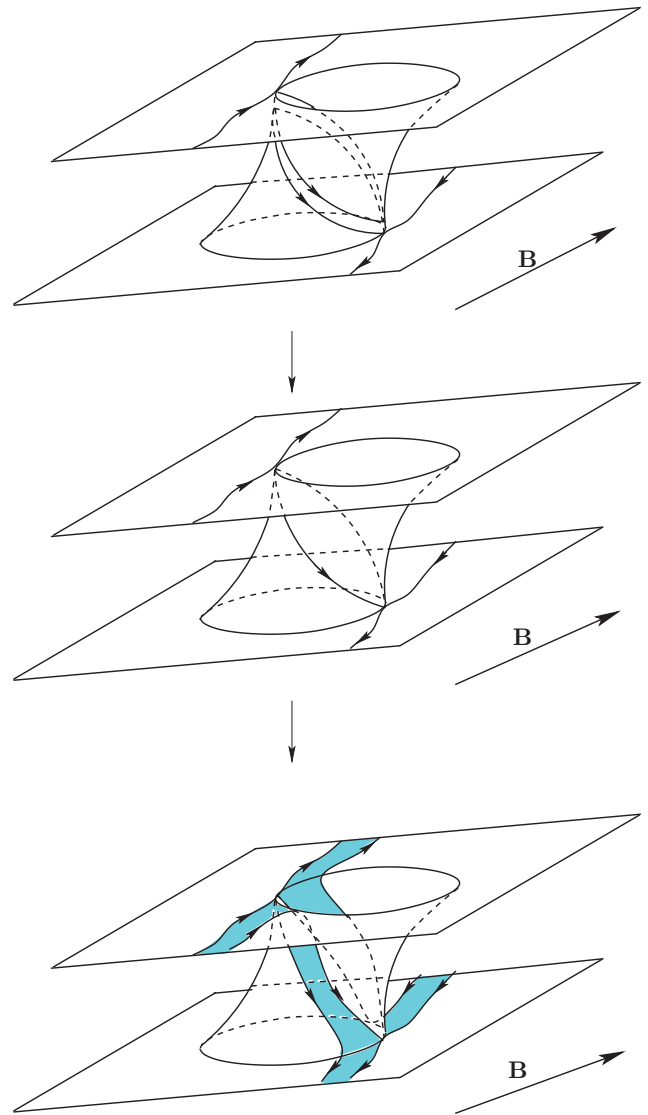


Рис. 11. Обращение в нуль высоты цилиндра замкнутых траекторий и последующий перескок открытых траекторий с одного носителя на другой на границе зоны устойчивости

мой исчезновением цилиндров различных типов на разных ее участках, должно приводить при этом к наличию разных значений холловской проводимости в разных областях вне зон устойчивости и, как следствие этого, к достаточно сложной структуре угловой диаграммы в целом.

3. ОСОБЕННОСТИ УГЛОВЫХ ДИАГРАММ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ДЛЯ ДИСПЕРСИОННОГО ЗАКОНА

Приведем теперь общее описание диаграмм, определенных для всего дисперсионного закона $\epsilon(\mathbf{p})$ [23]. Согласно работе [23], возможность по-

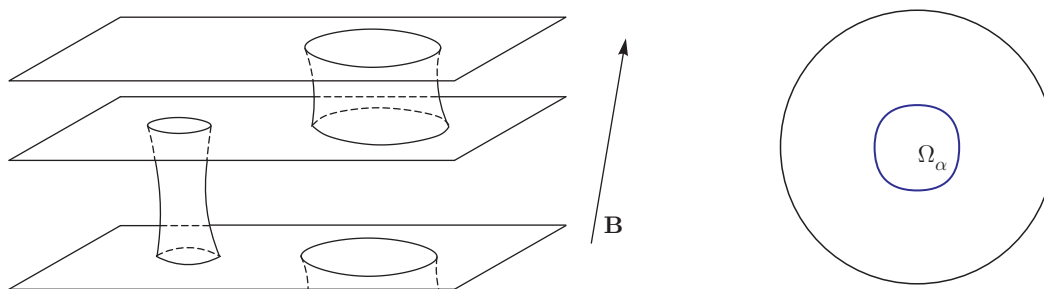


Рис. 12. Поверхность Ферми, обладающая зоной устойчивости Ω_α с границей, определяемой исчезновением одного и того же цилиндра замкнутых траекторий во всех ее точках

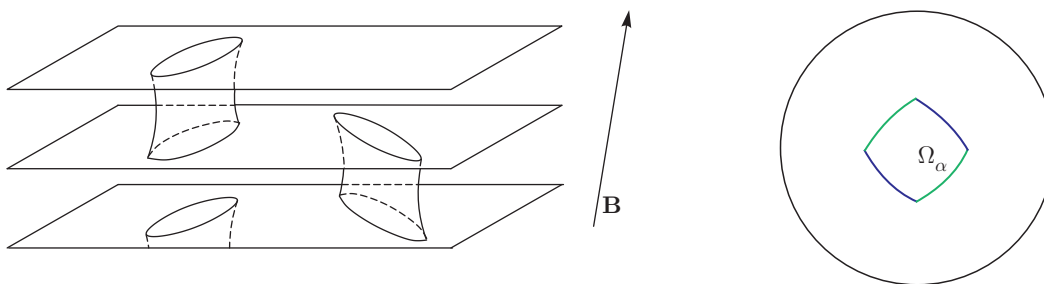


Рис. 13. Поверхность Ферми, обладающая зоной устойчивости Ω_α с границей, определяемой исчезновением разных цилиндров различных типов на разных ее участках

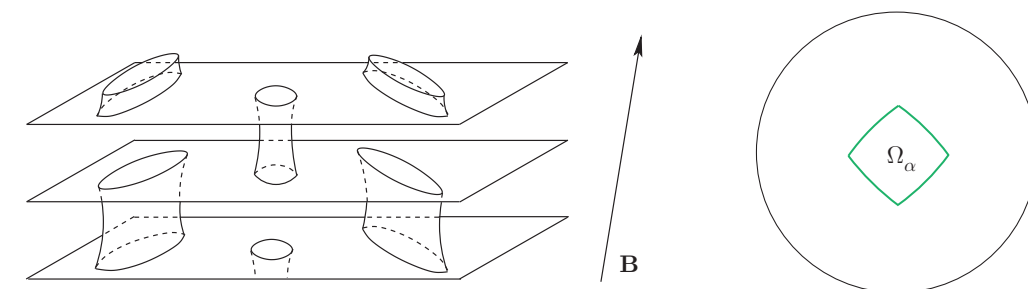


Рис. 14. Поверхность Ферми, обладающая зоной устойчивости Ω_α с границей, определяемой исчезновением разных цилиндров одного и того же типа на разных ее участках

строения таких угловых диаграмм базируется на следующих важных утверждениях относительно траекторий системы (1.2).

1) Рассмотрим произвольное периодическое дисперсионное соотношение

$$\epsilon_{min} \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_{max}$$

и зафиксируем направление магнитного поля \mathbf{V} . Тогда все уровни энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$, на которых присутствуют незамкнутые траектории системы (1.2), представляют либо замкнутый интервал $[\epsilon_1(\mathbf{V}/B), \epsilon_2(\mathbf{V}/B)]$, либо единственную точку $\epsilon_0 = \epsilon_1(\mathbf{V}/B) = \epsilon_2(\mathbf{V}/B)$.

2) Для направлений \mathbf{V} общего положения (в частности, направлений максимальной

иррациональности) значения $\epsilon_1(\mathbf{V}/B)$ и $\epsilon_2(\mathbf{V}/B)$ совпадают со значениями некоторых непрерывных функций $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$ и $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$, определенных всюду на единичной сфере. Для специальных направлений \mathbf{V} , отвечающих появлению строго периодических открытых траекторий системы (1.2), значения $\epsilon_1(\mathbf{V}/B)$ и $\epsilon_2(\mathbf{V}/B)$ могут отличаться от значений $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$ и $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$, при этом мы всегда имеем соотношения

$$\epsilon_1(\mathbf{V}/B) \leq \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B), \quad \epsilon_2(\mathbf{V}/B) \geq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B).$$

3) В случае $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B) > \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$ для направлений \mathbf{V} общего положения все несингулярные открытые траектории системы (1.2) (на всех уровнях энергии)

имеют вид, представленный на рис. 2, с одним и тем же средним направлением, задаваемым пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и некоторой целочисленной плоскости Γ .

4) Свойство $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B) > \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$, а также целочисленная плоскость Γ являются локально устойчивыми по отношению к малым вращениям \mathbf{V} и определяют, таким образом, некоторую зону устойчивости Ω^* на угловой диаграмме. Зона Ω^* представляет собой открытую область с кусочно-гладкой границей на S^2 , при этом на границе $\partial\Omega^*$ выполняется соотношение $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B) = \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$.

5) Объединение всех зон устойчивости Ω_α^* является всюду плотным на единичной сфере S^2 , при этом S^2 может содержать либо одну зону устойчивости Ω^* , либо бесконечно много зон Ω_α^* .

Как легко видеть, угловые диаграммы для дисперсионного закона можно естественно разделить на очень простые (единственная зона устойчивости) и очень сложные (бесконечно много зон устойчивости). Здесь нам будут интересны, главным образом, диаграммы второго типа. Сложность угловых диаграмм второго типа обусловлена, в частности, следующими особенностями их общей структуры (см. [23]).

А именно, рассмотрим некоторую зону устойчивости Ω_α^* , отвечающую некоторой целочисленной плоскости Γ_α (или топологическим числам $\mathbf{M}_\alpha = (M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$) и имеющую кусочно-гладкую границу на S^2 . Как уже неоднократно указывалось, все несингулярные открытые траектории системы (1.2) имеют при $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha^*$ общее среднее направление, задаваемое пересечением плоскости Γ_α и плоскости, ортогональной \mathbf{V} . Нетрудно видеть, что всякий раз, когда такое пересечение имеет целочисленное направление, соответствующие траектории являются периодическими в \mathbf{p} -пространстве. Можно видеть также, что соответствующие направления \mathbf{V} образуют в Ω_α^* всюду плотное множество, состоящее из сегментов больших кругов (рис. 15). Кроме того, можно видеть, что соответствующее множество является также всюду плотным и на границе области Ω_α^* , образуя на ней подобие множества рациональных чисел. Будем называть точки описанного множества на границе Ω_α^* «рациональными» точками границы.

Важной особенностью угловых диаграмм для дисперсионного закона является то обстоятельство, что в каждой «рациональной» точке границы любой из зон устойчивости Ω_α^* к этой зоне примыкает другая зона устойчивости Ω_β^* , отвечающая другой целочисленной плоскости Γ_β (рис. 16). Соответству-

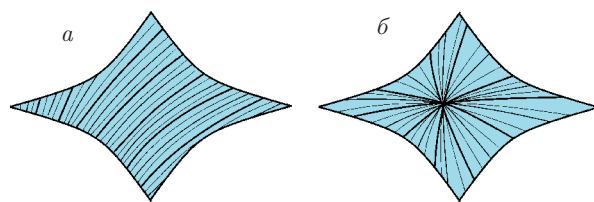


Рис. 15. Всюду плотное множество направлений \mathbf{V} в зоне Ω_α^* , соответствующих появлению периодических траекторий, в случаях, когда $\mathbf{M}_\alpha/|\mathbf{M}_\alpha| \notin \Omega_\alpha^*$ и $\mathbf{M}_\beta/|\mathbf{M}_\beta| \in \Omega_\alpha^*$

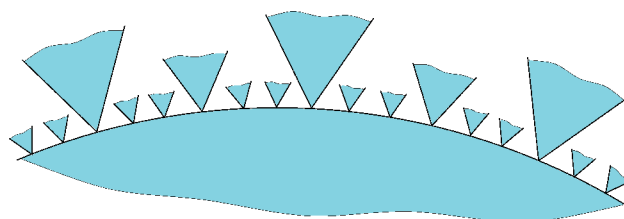


Рис. 16. Множество зон Ω_β^* , примыкающих к границе зоны Ω_α^* в каждой из ее «рациональных» точек

ющая точка примыкания является при этом точкой излома границы Ω_β^* , а топологические числа $\mathbf{M}_\alpha = (M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$ и $\mathbf{M}_\beta = (M_\beta^1, M_\beta^2, M_\beta^3)$, а также соответствующее направление \mathbf{V} связаны соотношением

$$\mathbf{V} = \eta\mathbf{M}_\alpha + \theta\mathbf{M}_\beta,$$

причем $|\eta/\theta| < 1$.

Можно видеть, таким образом, что структура угловых диаграмм для дисперсионного соотношения, содержащих более одной зоны устойчивости, является крайне сложной.

Во избежание неоднозначности мы будем всегда обозначать здесь через Ω_α^* полную (открытую) зону устойчивости и через $\overline{\Omega_\alpha^*}$ — зону Ω_α^* вместе с границей. Множество

$$\mathcal{D}^* = S^2 \setminus \cup \overline{\Omega_\alpha^*}$$

представляет собой множество направлений \mathbf{V} , для которых открытые траектории системы (1.2) существуют на единственном уровне энергии и ведут себя хаотически в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} . Согласно гипотезе Новикова [28], фрактальная размерность этого множества для дисперсионных соотношений общего положения строго меньше 2. Отметим, что исследование различных особенностей как множества \mathcal{D}^* , так и соответствующих хаотических траекторий (1.2) представляет в настоящее время довольно быстро развивающуюся область теории динамических систем (см., например, [19–23, 33–49]).

Построенное в [23] и приведенное выше описание угловых диаграмм для системы (1.2) основано на результатах, полученных в работах [14, 16] и приводящих к описанному выше представлению энергетических поверхностей (рис. 10), содержащих устойчивые открытые траектории системы (1.2). Отметим при этом, что граница зоны устойчивости Ω_α^* , определенной для всего дисперсионного закона, соответствует исчезновению одновременно двух цилиндров замкнутых траекторий (электронного и дырочного типа), соединяющих носители открытых траекторий. Здесь можно видеть разницу с ситуацией на угловых диаграммах, определенных для фиксированного значения энергии, где каждый участок границы зоны устойчивости соответствует исчезновению цилиндра замкнутых траекторий определенного типа. Кроме того, как было отмечено в [23], границы различных зон устойчивости, определенных для фиксированного значения энергии, не имеют общих точек в случае общего положения, что говорит в целом о несколько менее сложной структуре таких диаграмм.

В следующем разд. 4 мы проведем более подробное рассмотрение угловых диаграмм проводимости, соответствующих некоторому фиксированному уровню энергии (уровню Ферми) ϵ_F , что отвечает ситуации нормального металла. Как можно будет видеть, наибольшую часть рассмотрения надо будет при этом посвятить анализу траекторий системы (1.2) на сложных поверхностях Ферми, обсуждавшихся в разд. 2. Следствием такого анализа будет, в частности, описание наиболее сложных диаграмм, возникающих в этой ситуации, и исследование того, насколько такие диаграммы могут приближаться к описанным выше по уровню сложности.

4. СЛОЖНОСТЬ УГЛОВЫХ ДИАГРАММ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ДЛЯ ФИКСИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ, И ИХ СВЯЗЬ С ДИАГРАММАМИ ДЛЯ ДИСПЕРСИОННОГО ЗАКОНА

Как мы уже указывали выше, каждая из зон устойчивости Ω_α , определенная для фиксированной поверхности Ферми, лежит внутри некоторой (большой) зоны устойчивости Ω_α^* , соответствующей полному дисперсионному соотношению $\epsilon(\mathbf{p})$. Для направлений $\mathbf{V}/V \in \Omega_\alpha$ мы, таким образом, имеем устойчивые открытые траектории, лежащие на поверхности Ферми и соответствующие топологическим числам $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$.

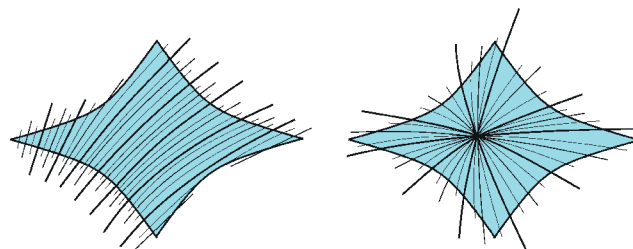


Рис. 17. Множество направлений \mathbf{V} вблизи зон устойчивости, соответствующих появлению (неустойчивых) периодических траекторий на поверхности Ферми

Отметим здесь сразу одну особенность зон устойчивости для фиксированной поверхности Ферми, несколько отличающую их от зон устойчивости для всего дисперсионного закона. Именно, как мы уже сказали, зона устойчивости Ω_α определяет множество направлений \mathbf{V} , для которых существуют устойчивые открытые траектории на поверхности Ферми, соответствующие фиксированным топологическим числам $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$. Можно, однако, указать дополнительные направления \mathbf{V} , для которых на поверхности Ферми существуют открытые траектории системы (1.2), не являющиеся устойчивыми, однако также связанные с зоной Ω_α . Такие траектории являются периодическими и появляются на продолжениях сегментов больших кругов, описанных выше, за пределы Ω_α (рис. 17). Можно показать, что такие траектории всегда появляются вблизи границы зоны Ω_α , что следует из приведенного выше представления поверхности Ферми (рис. 10) для направлений $\mathbf{V}/V \in \Omega_\alpha$. Сеть соответствующих направлений \mathbf{V} является всюду плотной на границе Ω_α , однако, длины добавочных участков к сегментам больших кругов довольно быстро убывают с ростом целых чисел (m_1, m_2, m_3) , определяющих направление соответствующих периодических траекторий в \mathbf{p} -пространстве. Как следствие этого, описанные сети добавочных направлений \mathbf{V} имеют конечную плотность на любом конечном расстоянии от границы Ω_α . Как было показано в [30], наличие (неустойчивых) периодических траекторий, а также очень длинных замкнутых траекторий системы (1.2) вблизи границ Ω_α приводит в действительности к довольно сложному поведению проводимости для соответствующих направлений \mathbf{V} и, в частности, делает невозможным наблюдение точной границы зоны устойчивости в экспериментах по прямому измерению проводимости даже в довольно сильных магнитных полях. Так, в действительности, «экспериментально наблюдаемая» зона устойчивости в таких

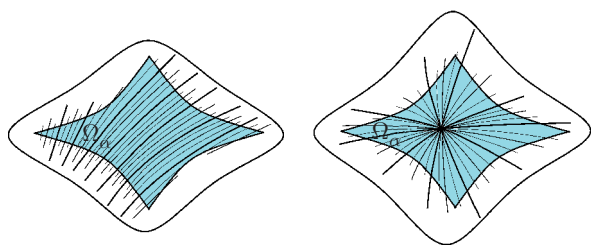


Рис. 18. «Экспериментально наблюдаемые» зоны устойчивости в экспериментах по прямому измерению проводимости в сильных магнитных полях

экспериментах не совпадает с точной математической зоной Ω_α (рис. 18) и зависит от максимальных величин внешних магнитных полей, достижимых в эксперименте.

Вместе с тем, точные границы математических зон устойчивости Ω_α являются в действительности также наблюдаемыми экспериментально при специальной постановке эксперимента. В частности, как было показано в работе [31], они могут быть определены при наблюдении картины осцилляционных явлений (классических или квантовых) в сильных магнитных полях. Мы будем интересоваться распределением именно точных математических зон устойчивости на угловой диаграмме проводимости.

Как можно заметить из приведенной выше картины, возникающей на поверхности Ферми в случае наличия устойчивых открытых траекторий системы (1.2), для каждой из зон устойчивости Ω_α естественно также ввести «вторую границу» на угловой диаграмме. Вторая граница зоны Ω_α определяется при этом исчезновением еще одного цилиндра замкнутых траекторий на рис. 10 и появлением перескоков траекторий (1.2) между парами «слившихся» носителей открытых траекторий, определенных для зоны Ω_α . Можно видеть при этом, что в области Ω'_α , заключенной между первой и второй границами зоны устойчивости, не могут возникать открытые траектории системы (1.2), отличные от описанных выше неустойчивых периодических траекторий. Область Ω'_α может быть при этом названа «производной» зоны устойчивости Ω_α , поскольку поведение траекторий системы (1.2) в этой области определяется в действительности структурой этой системы в зоне Ω_α . Заметим здесь, что картина поведения проводимости, а также осцилляционных явлений в области Ω'_α является в общем случае достаточно сложной (см. [32]). Как и для первой границы зоны устойчивости Ω_α , положение второй ее границы также удобнее всего определять при этом с помощью

исследования осцилляционных явлений в сильных магнитных полях [32].

Как можно видеть, в общем случае вторая граница зоны устойчивости может быть расположена на произвольном расстоянии от ее первой границы. В общем случае область Ω'_α может состоять из нескольких связных компонент, ограниченных участками первой границы зоны Ω_α с «внутренней стороны» и участками второй границы с «внешней стороны» (рис. 19). Можно также отметить, что для каждой из связных компонент области Ω'_α ее «внутренняя» и «внешняя» границы соответствуют исчезновению цилиндров замкнутых траекторий противоположных типов на рис. 10. При этом внутри каждой области Ω'_α лежит также граница зоны устойчивости Ω_α^* , имеющая одновременно «электронный» и «дырочный» тип (рис. 20). Общим обстоятельством является также то, что для зон устойчивости с составной границей, имеющей участки, соответствующие исчезновению цилиндров замкнутых траекторий разных типов, «угловые» точки ее границы (разделяющие участки, соответствующие исчезновению цилиндров замкнутых траекторий разных типов) являются также «угловыми» точками для второй границы зоны устойчивости, а также принадлежат границе соответствующей зоны Ω_α^* (рис. 20б). В то же время, для зоны устойчивости, границы которой целиком соответствуют исчезновению цилиндров замкнутых траекторий одного и того же типа, ее первая граница не пересекается со второй в случае общего положения, а граница соответствующей зоны Ω_α^* лежит внутри области, ограниченной первой и второй границами (рис. 20а,в).

Здесь удобно ввести некоторые специальные обозначения для разных типов зон Ω_α . А именно, скажем, что зона Ω_α относится к типу (+), если все точки ее границы соответствуют исчезновению цилиндров замкнутых траекторий электронного типа. Аналогично, скажем, что Ω_α относится к типу (−), если все точки ее границы соответствуют исчезновению цилиндров замкнутых траекторий дырочного типа. Наконец, зона Ω_α относится к типу (±), если на разных участках ее границы происходит исчезновение цилиндров замкнутых траекторий как электронного, так и дырочного типа.

Нетрудно показать, что на участках границ Ω_α , соответствующих исчезновению цилиндров замкнутых траекторий электронного типа в случае общего положения имеет место соотношение

$$\epsilon_F = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B) > \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B).$$

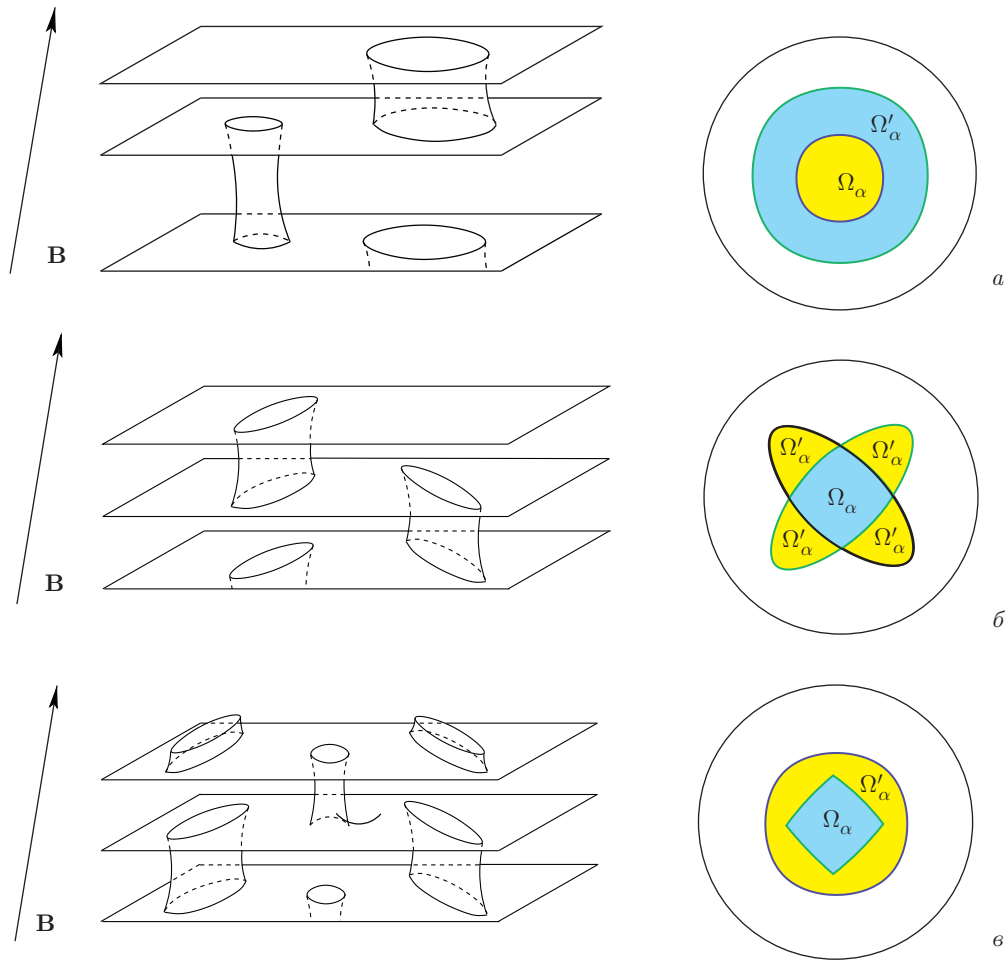


Рис. 19. Внутренние и внешние границы, ограничивающие области Ω'_α

Аналогично, на участках границ Ω_α , соответствующих исчезновению цилиндров замкнутых траекторий дырочного типа, мы имеем в случае общего положения соотношение

$$\epsilon_F = \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B) < \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B).$$

Особая ситуация имеет место в «угловых» (разделяющих участки границы разных типов) точках зон типа (\pm) , где мы имеем соотношение

$$\epsilon_F = \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B).$$

Можно видеть, что для поверхности Ферми общего положения все зоны устойчивости Ω_α типа $(+)$ можно покрыть открытыми областями U_α^+ , а зоны устойчивости Ω_β типа $(-)$ — открытыми областями U_β^- , такими что:

1) Все области U_α^+ и U_β^- не пересекаются друг с другом, а также с зонами устойчивости Ω_α типа (\pm) ;

2) Везде на множествах $U_\alpha^+ \setminus \overline{\Omega_\alpha}$ имеет место соотношение

$$\epsilon_F > \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B), \tag{4.1}$$

а на множествах $U_\beta^- \setminus \overline{\Omega_\beta}$ — соотношение

$$\epsilon_F < \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B). \tag{4.2}$$

Возвращаясь к полному дисперсионному соотношению, можно отметить, что каждая зона Ω_α проходит в случае общего положения все типы $(-)$, (\pm) и $(+)$ при изменении уровня Ферми от некоторого минимального до некоторого максимального значения, определяемых существованием данной зоны. На рис. 21 представлена возможная схема эволюции зоны Ω_α при изменении ϵ_F в интервале $[\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$.

Как мы уже сказали, нас будут интересовать вопросы сложности угловых диаграмм для проводимости в металлах с произвольными (физически) дисперсионными соотношениями. Отметим также, что в работе [32] было предложено разделить

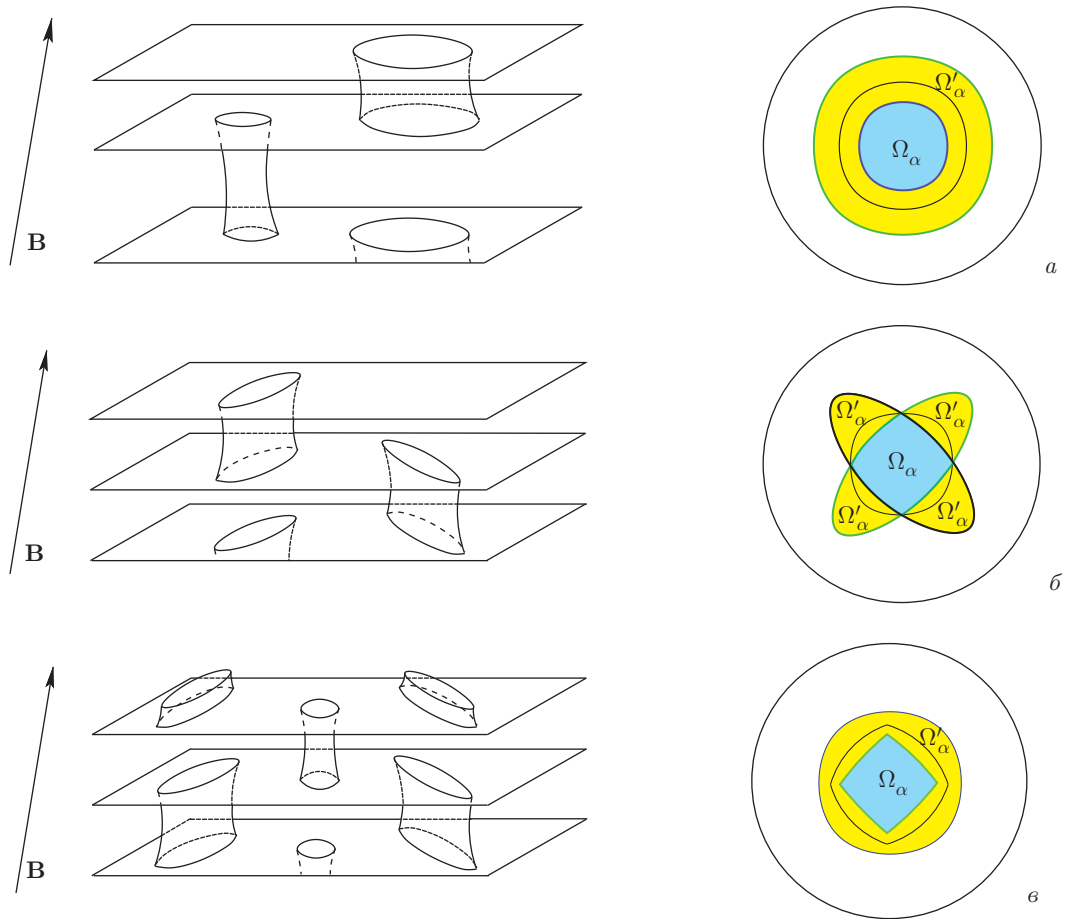


Рис. 20. Границы зон Ω_α^* , лежащие внутри областей Ω'_α

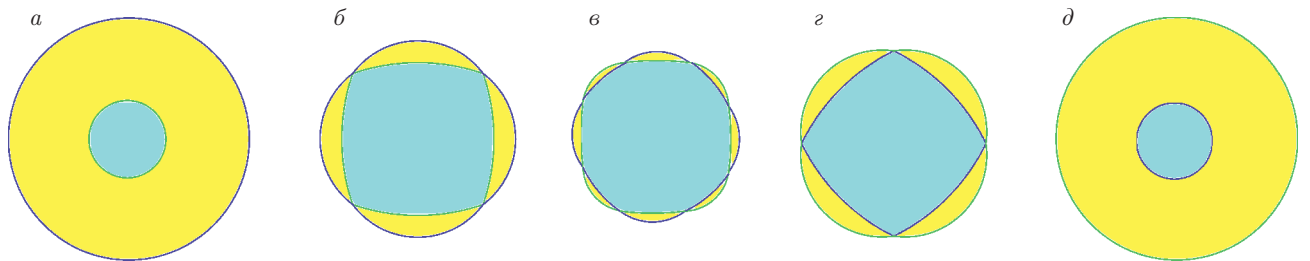


Рис. 21. Изменение формы зон Ω_α и Ω'_α при возрастании значения ϵ_F для фиксированного дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$: *a* — появление и рост зоны устойчивости Ω_α , имеющей тип (-); *b* — смыкание первой и второй границ зоны Ω_α и образование зоны типа (\pm); *в* — эволюция зоны типа (\pm); *г* — изменение типа зоны на (+); *д* — уменьшение и исчезновение зоны типа (+)

все нетривиальные (содержащие зоны устойчивости) угловые диаграммы металлов на более простые (тип А) и более сложные (тип В). Как было отмечено в работе [32], данные особенности угловых диаграмм связаны с поведением холловской проводимости вне зон устойчивости в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$.

Более точно, для направлений \mathbf{V} общего положения, лежащих вне какой-либо зоны устойчивости, на поверхности Ферми имеются лишь замкнутые траектории системы (1.2). Тензор электропроводности в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , может быть представлен в этом случае в виде регулярного ряда по обрат-

ным степеням параметра $\omega_B\tau$ в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ и имеет в главном порядке следующий вид:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a^{11}(\omega_B\tau)^{-2} & a^{12}(\omega_B\tau)^{-1} \\ -a^{12}(\omega_B\tau)^{-1} & a^{22}(\omega_B\tau)^{-2} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty.$

Величина $\sigma^{12} = a^{12}(\omega_B\tau)^{-1}$ может быть при этом представлена в виде

$$\sigma^{12} = \frac{ec}{B} (n_e - n_h), \quad (4.4)$$

где величины n_e и n_h представляют «электронную и дырочную концентрации» для заданного направления \mathbf{V} . Величины n_e и n_h могут быть определены формулами

$$n_e = 2V_e/(2\pi\hbar)^3, \quad n_h = 2V_h/(2\pi\hbar)^3,$$

где V_e и V_h обозначают объемы, ограниченные всеми неэквивалентными цилиндрами замкнутых траекторий (на поверхности Ферми) электронного и дырочного типа в \mathbf{p} -пространстве.

Важной особенностью возникающей картины для направлений \mathbf{V} общего положения, лежащих вне какой-либо зоны устойчивости, является то, что во всех плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , возникает один и тот же тип поведения траекторий системы (1.2), определяемый одной из следующих возможностей.

I. Область больших значений энергии $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ представляет собой «море» в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в то время как области меньшей энергии $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ представляют собой конечные «острова» («острова» могут содержать «озера» больших значений энергии и т. д., рис. 22а).

II. Область меньших значений энергии $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ представляет собой «море» в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в то время как области большей энергии $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ представляют собой конечные «острова» («острова» могут содержать «озера» меньших значений энергии и т. д., рис. 22б).

Как следствие, величина σ^{12} в этом случае определяется в действительности одним из следующих соотношений:

$$\sigma^{12} = \frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 B} V_- \quad (\text{ситуация I}), \quad (4.5)$$

$$\sigma^{12} = -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 B} V_+ \quad (\text{ситуация II}), \quad (4.6)$$

где V_- и V_+ обозначают объемы, определенные условиями $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ и $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ в зоне Бриллюэна.

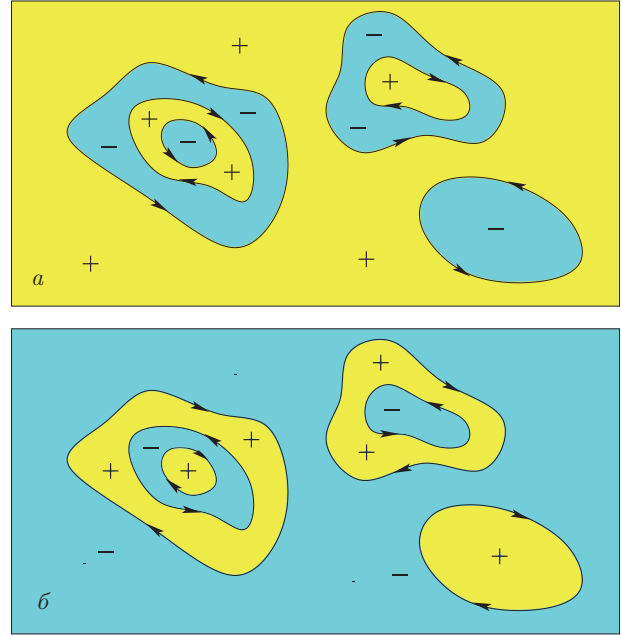


Рис. 22. Две возможные картины в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , в случае, когда поверхность Ферми содержит только замкнутые траектории в \mathbf{p} -пространстве

В результате, величина холловской проводимости является локально постоянной (при постоянной величине B) везде за пределами зон устойчивости при выполнении условия $\omega_B\tau \gg 1$. (В действительности, условия $\tau \gg T$, где T — типичное время обращения электрона по замкнутой траектории при заданном направлении \mathbf{V} . Как указывалось в [32], это условие может являться более сильным.) Данное обстоятельство, как легко видеть, дает простое средство экспериментального определения каждой из двух описанных ситуаций для направлений \mathbf{V} , лежащих вне зон устойчивости. При этом области, отвечающие различным описанным ситуациям, должны быть разделены зонами устойчивости, которые образуют в случае общего положения «цепочки», состоящие из бесконечного числа зон.

Определим тип (А или В) угловой диаграммы проводимости металла следующим образом.

Скажем, что угловая диаграмма проводимости металла имеет тип А, если для всех направлений \mathbf{V} общего положения вне зон $\overline{\Omega}_\alpha$ наблюдается лишь один тип холловской проводимости в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$. Скажем, что угловая диаграмма проводимости металла имеет тип В, если для различных направлений \mathbf{V} общего положения вне зон $\overline{\Omega}_\alpha$ могут наблюдаться оба типа холловской проводимости в пределе $\omega_B\tau \rightarrow \infty$.

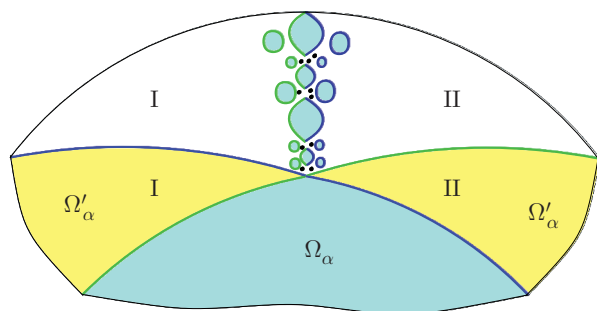


Рис. 23. Области с различными значениями холловской проводимости и цепочка уменьшающихся зон устойчивости и «хаотических» направлений \mathbf{V} вблизи «угловой точки» границы зоны устойчивости типа (\pm)

Сделаем здесь еще одно замечание, касающееся поверхностей Ферми реальных металлов. Как мы уже сказали выше, мы предполагаем здесь для простоты, что поверхность Ферми состоит из одной связной компоненты, на которой мы и рассматриваем траектории системы (1.2). В действительности, поверхность Ферми реального металла состоит обычно из нескольких компонент и очень часто содержит компоненты рода 0 или 1 вместе со сложными компонентами. При вычислении холловской проводимости мы должны в действительности сложить вклады от всех компонент поверхности Ферми, которые также обладают описанными выше свойствами. При этом может оказаться, что тип полной холловской проводимости может отличаться от типа вклада в эту проводимость от рассматриваемой нами компоненты. Поэтому более строго было бы говорить, что угловая диаграмма проводимости металла имеет тип А, если для всех направлений \mathbf{V} общего положения вне зон $\overline{\Omega_\alpha}$ наблюдается лишь одно значение холловской проводимости (при заданном значении B) при условии $\omega_{BT} \gg 1$, и угловая диаграмма проводимости металла имеет тип В, если для различных направлений \mathbf{V} общего положения вне зон $\overline{\Omega_\alpha}$ могут наблюдаться как минимум два значения холловской проводимости при том же условии. Мы для большей наглядности изложения сохраним здесь, однако, введенную выше терминологию.

Как было также отмечено в работе [32], угловая диаграмма имеет тип В, в частности, если она содержит хотя бы одну зону устойчивости типа (\pm) . Действительно, как можно показать (см. [32]), в разных связных компонентах соответствующей области Ω'_α при этом присутствуют различные типы холловской проводимости для направлений \mathbf{V} общего положения (рис. 23). Можно видеть, что к

«угловой точке» границы должна при этом примыкать цепочка зон устойчивости, отделяющая области с разной холловской проводимостью, возникающие вблизи соответствующих участков границы зоны Ω_α . При этом зона Ω_β может примыкать непосредственно к «угловой точке» Ω_α только в том случае, если соответствующее направление \mathbf{V} отвечает появлению периодических траекторий (с направлением, задаваемым пересечением плоскостей Γ_α и Γ_β) на поверхности Ферми, что соответствует случаю необщего положения. В случае же общего положения, к «угловой точке» зоны Ω_α должна примыкать цепочка из бесконечного числа уменьшающихся зон устойчивости Ω_β (рис. 23).

Заметим здесь, что любая точка накопления уменьшающихся зон устойчивости, не являющаяся точкой границы некоторой зоны устойчивости, соответствует направлению \mathbf{V} , отвечающему появлению хаотических траекторий (типа Царева или Дынникова) на поверхности Ферми. Совокупность соответствующих направлений \mathbf{V} представляет собой в общем случае довольно сложное множество на угловой диаграмме S^2 . Как можно показать (см. [23]), общая мера таких направлений на угловой диаграмме равна нулю для поверхности Ферми общего положения. Согласно гипотезе Новикова [26, 27], фрактальная размерность множества \mathcal{D} таких направлений для поверхности Ферми общего положения строго меньше единицы (но может быть больше для специальных поверхностей Ферми). Отметим здесь также, что, в отличие от угловых диаграмм для всего дисперсионного соотношения, на угловых диаграммах для поверхности Ферми общего положения накопление уменьшающихся зон устойчивости не может происходить у «регулярных» точек границ Ω_α , поскольку каждая из зон Ω_α окружена здесь дополнительной областью Ω'_α . Исключение составляют лишь «угловые» точки зон типа (\pm) , где вторая граница зоны Ω_α примыкает к первой.

Множество

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} \cup (\cup \overline{\Omega_\alpha})$$

представляет собой при этом замкнутое множество на S^2 .

В точках множества $S^2 \setminus \mathcal{M}$ мы всегда имеем одно из соотношений $\epsilon_F < \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$ или $\epsilon_F > \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$, при этом соответствующие подмножества на S^2 разделены точками множества \mathcal{M} . Можно видеть (см. [23]), что первое из соотношений соответствует описанной выше картине (I) для направлений \mathbf{V} общего положения, в то время как второе соотношение со-

ответствует картине (II) для направлений \mathbf{B} общего положения.

Надо сказать, что точки множества \mathcal{D} , также как и зоны устойчивости Ω_α играют важную роль при разделении множества $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{M}$ на компоненты с различным поведением холловской проводимости в пределе $\omega_{BT} \rightarrow \infty$. Отметим также, что из всего набора зон устойчивости Ω_α для разделения таких компонент важны лишь зоны типа (\pm) , поскольку зоны типа $(+)$ и $(-)$ не играют роли в разделении упомянутых компонент в силу приведенных выше свойств (1) и (2) и соотношений (4.1), (4.2).

В рассматриваемой ситуации естественно ввести следующие величины:

$$\epsilon_1^B = \min \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B), \quad \epsilon_2^B = \max \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B)$$

для каждого дисперсионного соотношения. Отметим сразу, что для рассматриваемых нами сложных угловых диаграмм (бесконечное число зон устойчивости для всего дисперсионного соотношения) мы всегда имеем соотношение

$$\epsilon_2^B \geq \epsilon_1^B,$$

поскольку на границах зон устойчивости Ω_α^* , (а также для «хаотических» направлений \mathbf{B}) мы имеем соотношение $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B)$. Для дисперсионных соотношений общего положения мы в действительности будем иметь

$$\epsilon_2^B > \epsilon_1^B,$$

поскольку для таких направлений \mathbf{B} соответствующие величины

$$\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B) = \epsilon_0(\mathbf{B}/B)$$

не принадлежат единственному уровню энергии в общем случае. Как следует из наших рассуждений, угловая диаграмма проводимости металла принадлежит к типу В, если уровень Ферми ϵ_F принадлежит интервалу $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$.

В граничных точках интервала $\epsilon_F = \epsilon_1^B$ и $\epsilon_F = \epsilon_2^B$ на всем множестве $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{M}$ имеет место только один тип холловской проводимости (соответственно, электронный и дырочный) для направлений \mathbf{B} общего положения, при этом угловая диаграмма проводимости металла содержит в случае общего положения бесконечное число зон устойчивости Ω_α . Можно видеть также, что по мере возрастания величины ϵ_F в интервале $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ общая мера компонент $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{M}$, соответствующих электронной холловской проводимости, убывает, в то время как общая

мера компонент, отвечающих дырочной холловской проводимости, растёт.

Естественно ввести также величины

$$\epsilon_1^A = \min \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B), \quad \epsilon_2^A = \max \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B).$$

Как следует из наших рассуждений, угловая диаграмма проводимости металла принадлежит к типу А, если уровень Ферми ϵ_F принадлежит одному из интервалов $(\epsilon_1^A, \epsilon_1^B]$ или $[\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$. Нетрудно видеть также, что первый случай соответствует при этом холловской проводимости электронного типа при $\mathbf{B}/B \in \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{M}$, в то время как второй случай отвечает холловской проводимости дырочного типа на том же множестве направлений \mathbf{B} (общего положения).

На рис. 24 представлено (очень схематично) типичное изменение угловой диаграммы проводимости при изменении величины ϵ_F в интервале $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$. Так, после прохождения уровня $\epsilon_F = \epsilon_1^A$ можно наблюдать появление первых зон устойчивости и затем дальнейшее увеличение их числа и размеров, при этом всюду за пределами зон устойчивости имеет место электронный тип холловской проводимости для направлений \mathbf{B} общего положения. Количество зон устойчивости стремится к бесконечности при $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_1^B$, и в точке ϵ_1^B наблюдается появление первых точек сгущения зон устойчивости на угловой диаграмме. После прохождения значения ϵ_1^B можно наблюдать присутствие областей вне зон устойчивости, соответствующих как электронной, так и дырочной холловской проводимости, и разделенных бесконечным множеством зон устойчивости и «хаотических» направлений \mathbf{B} (в случае общего положения). По мере увеличения значения ϵ_F мера областей, соответствующих электронной холловской проводимости, убывает, в то время как мера областей, соответствующих дырочной холловской проводимости, растёт. В интервале $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$ можно также наблюдать рождение новых зон типа $(-)$, образование из них зон типа (\pm) , а затем зон типа $(+)$ и исчезновение зон типа $(+)$. В точке $\epsilon_F = \epsilon_2^B$ области, соответствующие электронной холловской проводимости, полностью исчезают, и после прохождения значения ϵ_2^B мы снова имеем угловую диаграмму типа А, соответствующую дырочной холловской проводимости для направлений \mathbf{B} (общего положения) вне зон Ω_α . Таким образом, число зон устойчивости и их размеры уменьшаются с ростом значения ϵ_F и в пределе $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_2^A$ зоны полностью исчезают. Как можно видеть, наиболее сложная структура угловых диаграмм должна наблюдаться в общем случае вдоль «квазиодномерных»

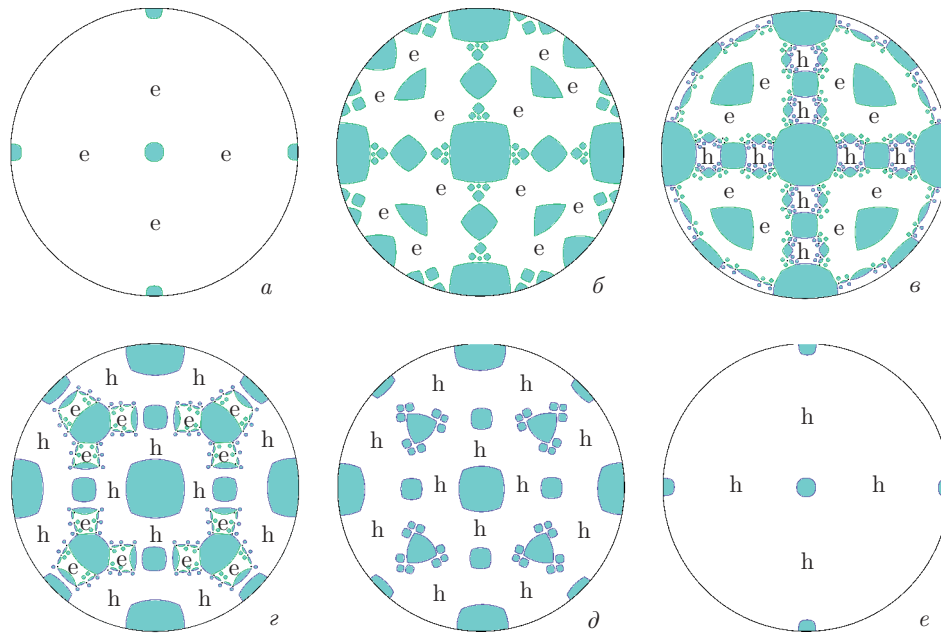


Рис. 24. *a)* Зарождение первых зон устойчивости типа $(-)$ после прохождения значения ϵ_1^A уровнем Ферми ϵ_F ; *б)* увеличение числа зон типа $(-)$ и появление точек сгущения мелких зон при $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_1^B$; *в)* образование областей дырочной холловской проводимости и зон типа (\pm) и $(+)$ и появление «хаотических» направлений \mathbf{B} после прохождения значения ϵ_1^B уровнем Ферми ϵ_F ; *г)* исчезновение областей электронной холловской проводимости и зон типа $(-)$ и (\pm) при $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_2^B$; *д)* исчезновение точек сгущения мелких зон и уменьшение числа и размеров зон типа $(+)$ после прохождения значения ϵ_2^B уровнем Ферми ϵ_F ; *е)* исчезновение зон типа $(+)$ в пределе $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_2^A$

множеств, разделяющих области различных значений холловской проводимости.

Как мы уже отмечали выше, угловая диаграмма типа В общего положения содержит бесконечное число зон устойчивости со сколь угодно большими значениями топологических чисел $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$. Как нетрудно показать, угловая диаграмма типа А общего положения, напротив, содержит лишь конечное число зон Ω_α . Более точно, можно видеть, что если $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$ или $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$, то соответствующая угловая диаграмма проводимости металла содержит лишь конечное число зон устойчивости. Действительно, наличие бесконечного числа зон устойчивости означает наличие точки скопления таких зон на \mathbb{S}^2 , в которой мы должны иметь соотношение $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B)$, что невозможно в указанных интервалах энергии.

Можно видеть, таким образом, что угловая диаграмма типа А может содержать бесконечное число зон устойчивости только в случае $\epsilon_F = \epsilon_1^B$ или $\epsilon_F = \epsilon_2^B$. Нетрудно видеть также, что по той же причине угловая диаграмма проводимости не может содержать «хаотических» направлений \mathbf{B} при $\epsilon_F < \epsilon_1^B$ или

$\epsilon_F > \epsilon_2^B$. Напомним здесь также, что мы рассматриваем здесь угловые диаграммы сложного типа, т. е. диаграммы, содержащие более одной зоны устойчивости при изменении ϵ_F в интервале $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$.

Как можно видеть также, оба типа сложных диаграмм (А и В) представляют диаграммы общего положения и должны наблюдаться экспериментально. При этом надо отметить, что диаграммы типа В должны быть, видимо, довольно редки в силу небольшого размера отрезка $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$ для реальных дисперсионных соотношений. Можно отметить также, что хотя для дисперсионных законов с близкими значениями ϵ_1^B и ϵ_2^B вероятность наблюдения диаграммы типа В весьма мала, соответствующие диаграммы при этом наиболее приближаются по сложности к диаграммам, соответствующим полному дисперсионному соотношению.

Для наиболее полного описания всех типов угловых диаграмм, возникающих в теории нормальных металлов, естественно ввести еще величины

$$\epsilon_1^{A'} = \inf \epsilon_1(\mathbf{B}/B), \quad \epsilon_2^{A'} = \sup \epsilon_2(\mathbf{B}/B).$$

Отметим, что здесь мы уже не фокусируем внимание лишь на «сложных» поверхностях Ферми и включаем в рассмотрение все их типы.

Для значений ϵ_F , лежащих в интервалах $(\epsilon_1^{A'}, \epsilon_1^A]$ и $[\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'})$, угловая диаграмма проводимости не содержит конечных зон устойчивости и может содержать лишь зоны, вырождающиеся в точки при $\epsilon_F = \epsilon_1^A$ или $\epsilon_F = \epsilon_2^A$. При этом для значений ϵ_F , лежащих в интервалах $(\epsilon_1^{A'}, \epsilon_1^A)$ и $(\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'})$, на поверхности Ферми появляются лишь (неустойчивые) периодические траектории системы (1.2) при специальных направлениях \mathbf{V} . Соответствующие направления \mathbf{V} представлены при этом сегментами больших кругов, каждый из которых отвечает определенному рациональному направлению открытых траекторий системы (1.2). Нетрудно видеть также, что в интервалах $(\epsilon_1^{A'}, \epsilon_1^A)$ и $(\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'})$ количество указанных сегментов и соответствующих им рациональных направлений траекторий всегда является конечным. Действительно, бесконечный набор сегментов указанного типа должен обязательно содержать точки накопления на \mathbb{S}^2 , в каждой окрестности которых присутствуют периодические траектории со сколь угодно большими знаменателями соответствующих рациональных направлений. Для соответствующих направлений \mathbf{V} мы имеем соотношения $\epsilon_1(\mathbf{V}/B) < \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$ (или $\epsilon_2(\mathbf{V}/B) > \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$), однако величины $|\epsilon_1(\mathbf{V}/B) - \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)|$ (или $|\epsilon_2(\mathbf{V}/B) - \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)|$) довольно быстро убывают с ростом знаменателей рациональных направлений периодических траекторий. Как следствие этого, в соответствующих точках накопления мы должны иметь соотношения $\epsilon_1(\mathbf{V}/B) = \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$ или $\epsilon_2(\mathbf{V}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$, что невозможно в указанных энергетических интервалах. Можно видеть также, что при $\epsilon_F = \epsilon_1^A$ или $\epsilon_F = \epsilon_2^A$ множество направлений \mathbf{V} , соответствующих появлению периодических траекторий на поверхности Ферми, может содержать бесконечное число сегментов больших кругов, отвечающих бесконечному числу рациональных направлений неустойчивых открытых траекторий.

Наконец, в интервалах $[\epsilon_{min}, \epsilon_1^{A'})$ и $[\epsilon_2^{A'}, \epsilon_{max}]$ система (1.2) не может содержать несингулярных открытых траекторий.

В результате, можно привести разделение всех угловых диаграмм на «классы сложности» в соответствии с положением уровня Ферми по отношению к набору «реперных» точек, определенных для заданного дисперсионного соотношения (общего положения). А именно:

(Т1) Наиболее простые диаграммы:

$$\epsilon_F \in [\epsilon_{min}, \epsilon_1^{A'}].$$

Поверхность Ферми может содержать лишь замкнутые или сингулярные траектории системы (1.2) при любом направлении \mathbf{V} . Вклад в холловскую проводимость от соответствующего дисперсионного соотношения имеет электронный тип и постоянное значение (при заданном значении $B, \omega_B \tau \gg 1$) при всех направлениях \mathbf{V} .

(Т2) Достаточно простые диаграммы:

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^{A'}, \epsilon_1^A].$$

Поверхность Ферми может содержать лишь замкнутые, сингулярные или неустойчивые периодические открытые траектории системы (1.2). Множество направлений \mathbf{V} , отвечающих появлению периодических открытых траекторий, представлено набором сегментов больших кругов, каждый из которых отвечает определенному рациональному направлению периодических траекторий. При $\epsilon_F \in (\epsilon_1^{A'}, \epsilon_1^A)$ множество таких сегментов является конечным. При $\epsilon_F = \epsilon_1^A$ количество сегментов и соответствующих им рациональных направлений периодических открытых траекторий может быть бесконечным. Для направлений \mathbf{V} общего положения вклад в холловскую проводимость от соответствующего дисперсионного соотношения имеет электронный тип и постоянное значение при заданном значении B ($\omega_B \tau \gg 1$).

(Т3) Сложные диаграммы типа А:

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B].$$

Кроме замкнутых и сингулярных траекторий, поверхность Ферми общего положения содержит устойчивые открытые траектории и неустойчивые периодические траектории для определенных направлений \mathbf{V} . Устойчивые открытые траектории обладают описанными выше свойствами регулярности и возникают в специальных зонах устойчивости Ω_α на угловой диаграмме, отвечающих определенным значениям топологических квантовых чисел $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$. При $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$ количество зон устойчивости на угловой диаграмме является конечным. Множество направлений \mathbf{V} , отвечающих появлению периодических открытых траекторий, представлено бесконечным набором сегментов больших кругов, каждый из которых отвечает определенному рациональному направлению периодических траекторий. При $\epsilon_F = \epsilon_1^B$ множество зон устойчивости Ω_α становится в случае общего

положения (т.е. для дисперсионного закона общего положения) бесконечным, кроме того, на угловой диаграмме возникают специальные направления \mathbf{B} , отвечающие появлению хаотических открытых траекторий на поверхности Ферми. Для направлений \mathbf{B} общего положения вне зон Ω_α вклад в холловскую проводимость от соответствующего дисперсионного соотношения имеет электронный тип и постоянное значение при заданном значении B ($\omega_{BT} \gg 1$).

(Т4) Сложные диаграммы типа В:

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^B, \epsilon_2^B).$$

Кроме замкнутых и сингулярных траекторий, поверхность Ферми содержит устойчивые открытые траектории, неустойчивые периодические траектории и хаотические траектории для определенных направлений \mathbf{B} . Множество зон устойчивости Ω_α , множество дополнительных сегментов больших кругов, отвечающих появлению периодических открытых траекторий, а также множество специальных направлений \mathbf{B} , отвечающих появлению хаотических открытых траекторий на поверхности Ферми, являются в случае общего положения бесконечными. Для направлений \mathbf{B} общего положения вне зон Ω_α вклад в холловскую проводимость от соответствующего дисперсионного соотношения имеет различные типы (электронный и дырочный) в различных областях угловой диаграммы, разделенных в случае общего положения бесконечными «цепями» зон устойчивости и «хаотических» направлений \mathbf{B} ($\omega_{BT} \gg 1$).

(Т5) Сложные диаграммы типа А:

$$\epsilon_F \in [\epsilon_2^B, \epsilon_2^A).$$

Кроме замкнутых и сингулярных траекторий, поверхность Ферми общего положения содержит устойчивые открытые траектории и неустойчивые периодические траектории для определенных направлений \mathbf{B} . При $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$ количество зон устойчивости на угловой диаграмме является конечным. Множество направлений \mathbf{B} , отвечающих появлению периодических открытых траекторий, представлено бесконечным набором сегментов больших кругов, каждый из которых отвечает определенному рациональному направлению периодических траекторий. При $\epsilon_F = \epsilon_2^B$ количество зон устойчивости Ω_α является в случае общего положения бесконечным, кроме того, на угловой диаграмме имеются специальные направления \mathbf{B} , отвечающие появлению хаотических открытых траекторий на поверхности Ферми. Для направлений \mathbf{B}

общего положения вне зон Ω_α вклад в холловскую проводимость от соответствующего дисперсионного соотношения имеет дырочный тип и постоянное значение при заданном значении B ($\omega_{BT} \gg 1$).

(Т6) Достаточно простые диаграммы:

$$\epsilon_F \in [\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'}).$$

Поверхность Ферми может содержать лишь замкнутые, сингулярные или неустойчивые периодические открытые траектории системы (1.2). Множество направлений \mathbf{B} , отвечающих появлению периодических открытых траекторий, представлено набором сегментов больших кругов, каждый из которых отвечает определенному рациональному направлению периодических траекторий. При $\epsilon_F \in (\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'})$ множество таких сегментов является конечным. При $\epsilon_F = \epsilon_2^A$ количество сегментов и соответствующих им рациональных направлений периодических открытых траекторий может быть бесконечным. Для направлений \mathbf{B} общего положения вклад в холловскую проводимость от соответствующего дисперсионного соотношения имеет дырочный тип и постоянное значение при заданном значении B ($\omega_{BT} \gg 1$).

(Т7) Наиболее простые диаграммы:

$$\epsilon_F \in [\epsilon_2^{A'}, \epsilon_{max}].$$

Поверхность Ферми может содержать лишь замкнутые или сингулярные траектории системы (1.2) при любом направлении \mathbf{B} . Вклад в холловскую проводимость от соответствующего дисперсионного соотношения имеет дырочный тип и постоянное значение (при заданном значении B , $\omega_{BT} \gg 1$) при всех направлениях \mathbf{B} .

Таким образом, все угловые диаграммы проводимости в металлах в сильных магнитных полях могут быть отнесены к одному из представленных выше классов (Т1)–(Т7), определяемых положением уровня Ферми и дисперсионным законом $\epsilon(\mathbf{p})$. Отметим снова, что полная картина угловых диаграмм для всех значений ϵ_F имеет до некоторой степени абстрактный характер, поскольку экспериментально наблюдаемой является лишь диаграмма для настоящего значения ϵ_F . В частности, при экспериментальном изменении положения ϵ_F (например, с помощью внешнего давления) изменение соответствующей диаграммы проводимости не обязано определяться исходным соотношением $\epsilon(\mathbf{p})$, поскольку соответствующее внешнее воздействие меняет параметры дисперсионного соотношения. Приведенное замечание, однако, не отменяет того обстоятельства, что тип конкретной угловой диаграммы

определен при этом однозначно, исходя из теоретического рассмотрения, приведенного выше. Заметим снова, что наше рассмотрение здесь может считаться совершенно общим для любого «физически реалистичного» дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$. В то же время, мы опускаем здесь некоторые теоретически возможные дополнительные особенности (например, неодносвязность зон устойчивости), которые являются крайне маловероятными в реальной ситуации.

Еще одно замечание, которое можно здесь сделать, относится к тому факту, что в общем случае полная поверхность Ферми представляет собой объединение нескольких компонент, относящихся к различным дисперсионным соотношениям. Нетрудно видеть, что угловая диаграмма проводимости дается в этом случае «наложением» диаграмм, определяемых всеми компонентами. Важным обстоятельством является то, что если различные компоненты не пересекаются друг с другом, то пересечение соответствующих им зон устойчивости возможно только в том случае, когда эти зоны отвечают одним и тем же топологическим числам $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$. Как следствие, такие пересекающиеся зоны можно рассматривать как сложные «составные» зоны с более сложной структурой границ.

Нам следует также сказать несколько слов об угловых диаграммах (для фиксированных значений ϵ_F), возникающих для дисперсионных соотношений, обладающих всего одной зоной устойчивости Ω (занимающей всю сферу S^2). Отметим, что дисперсионные соотношения такого типа также представляют собой соотношения общего положения и могут вполне встречаться в реальных кристаллах. (В частности, к ним относятся соотношения, для которых в некотором интервале энергии поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ представляют собой набор периодически деформированных («гофрированных») целочисленных плоскостей, не соединенных друг с другом.) Мы опустим здесь подробный анализ возникающей ситуации и приведем лишь общее описание классов сложности угловых диаграмм, возникающих в этом случае для различных значений ϵ_F .

Именно, как и в случае дисперсионных соотношений со «сложными» угловыми диаграммами, в рассматриваемой нами ситуации можно в случае общего положения ввести также некоторые «реперные» значения

$$\epsilon_{min} < \hat{\epsilon}_1^{A'} < \hat{\epsilon}_1^A < \hat{\epsilon}_1^B < \hat{\epsilon}_2^B < \hat{\epsilon}_2^A < \hat{\epsilon}_2^{A'} < \epsilon_{max}$$

и классы диаграмм (Т1)–(Т7), аналогичные рассмотренным выше. При этом диаграммы классов

(Т1), (Т2), (Т6), (Т7) в точности совпадают с описанными выше классами, а для диаграмм классов (Т3) и (Т5) надо заменить лишь слова «количество зон устойчивости на угловой диаграмме является конечным» на «мы имеем одну зону устойчивости Ω , занимающую часть сферы S^2 ». (Мы не требуем здесь связности зоны Ω , и, в частности, считаем одной зоной ее возможно разделенные противоположные части на S^2 .) Что же касается класса (Т4), то диаграммы этого класса содержат здесь одну зону устойчивости Ω , занимающую всю сферу S^2 . Заметим здесь, что для класса (Т4) теоретически мы могли бы также иметь зону устойчивости Ω , занимающую часть сферы S^2 , с различными знаками холловской проводимости в различных областях вне Ω . Эта ситуация, однако, соответствует неодносвязной зоне Ω и физически крайне маловероятна, так что мы не приводим ее здесь.

Отметим также, что упомянутые выше «реперные» значения энергии связаны довольно просто с «реперными» значениями, определяемыми для дисперсионных соотношений, обладающих «сложными» угловыми диаграммами. Так, можно в действительности написать соотношения

$$\hat{\epsilon}_1^{A'} = \epsilon_1^{A'}, \quad \hat{\epsilon}_1^A = \epsilon_1^A, \quad \hat{\epsilon}_2^A = \epsilon_2^A, \quad \hat{\epsilon}_2^{A'} = \epsilon_2^{A'}$$

в соответствии с определением величин $\epsilon_1^{A'}$, ϵ_1^A , ϵ_2^A , $\epsilon_2^{A'}$, приведенными выше.

Что же касается величин $\hat{\epsilon}_1^B$ и $\hat{\epsilon}_2^B$, то для них мы имеем соотношения

$$\hat{\epsilon}_1^B = \epsilon_2^B = \max \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}/B),$$

$$\hat{\epsilon}_2^B = \epsilon_1^B = \min \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}/B),$$

поскольку для дисперсионных законов рассматриваемого типа имеем в нашем случае соотношение $\epsilon_1^B > \epsilon_2^B$. (Заметим снова, что теоретически здесь возможна также ситуация $\epsilon_1^B < \epsilon_2^B$ и $\hat{\epsilon}_1^B = \epsilon_1^B$, $\hat{\epsilon}_2^B = \epsilon_2^B$, однако она крайне маловероятна согласно нашим замечаниям выше.)

Нетрудно видеть также, что никакие угловые диаграммы не могут в рассматриваемом случае содержать направлений \mathbf{B} , соответствующих появлению «хаотических» траекторий на поверхности Ферми.

В заключение проведем некоторое сравнение сложности расположения зон устойчивости на угловых диаграммах для фиксированных поверхностей Ферми с расположением зон Ω_α^* на диаграммах для всего дисперсионного закона. Более конкретно, мы рассмотрим аналог структуры зон, представленной

на рис. 16, для диаграмм, определенных для фиксированного значения ϵ_F .

Как мы уже видели, угловые диаграммы проводимости для фиксированных значений ϵ_F могут, в частности, быть довольно простыми и не обладать уровнем сложности, сопоставимым с уровнем сложности для угловых диаграмм для всего соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$. Нам поэтому будут интересны диаграммы (типа А или В), содержащие зоны устойчивости Ω_α , близкие по форме к соответствующим зонам устойчивости Ω_α^* , определенным для всего дисперсионного соотношения. Как нетрудно видеть, такими зонами являются зоны устойчивости, первая и вторая границы которых расположены достаточно близко друг к другу (рис. 21б,в,г). Как мы уже указывали ранее, в области Ω'_α , ограниченной первой и второй границами зоны Ω_α , не может возникать устойчивых открытых траекторий системы (1.2) и, соответственно, не может быть других зон устойчивости для данного значения ϵ_F . Можно видеть, таким образом, что структуры, аналогичные приведенной на рис. 16, если они возникают, должны быть связаны в этом случае со второй границей зоны Ω_α .

Для описания возникающей в нашем случае картины необходимо обратиться снова к структуре поверхности Ферми при $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$ (рис. 10), а также механизму разрушения этой структуры на первой и второй границах Ω_α посредством «перескоков» траекторий с одного носителя открытых траекторий на другой, представленных на рис. 11.

Для упрощения описания удобно рассмотреть проекцию «носителей открытых траекторий» на плоскость $\Pi(\mathbf{V}/B)$, порожденную направлением \mathbf{V} , а также направлением пересечения плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и плоскости Γ_α . Все траектории системы (1.2) будут представлены в этой плоскости параллельными прямыми линиями, ортогональными \mathbf{V} . После пересечения первой границы Ω_α и возникновения перескоков траекторий с одного носителя на другой (рис. 11) для каждого носителя на проекции можно отметить «места», где происходят перескоки траекторий между парами «слившихся» носителей. Оба бывших носителя из каждой образовавшейся пары можно представлять одной и той же проекцией на плоскость $\Pi(\mathbf{V}/B)$, а «места», где происходят перескоки, обозначать кружками малого радиуса (хотя это и не очень точно). Можно сказать, что такие кружки представляют собой «ловушки», попадая в которые траектория перескакивает с одного бывшего носителя открытых траекторий (для фиксированной пары) на другой, и обратно.

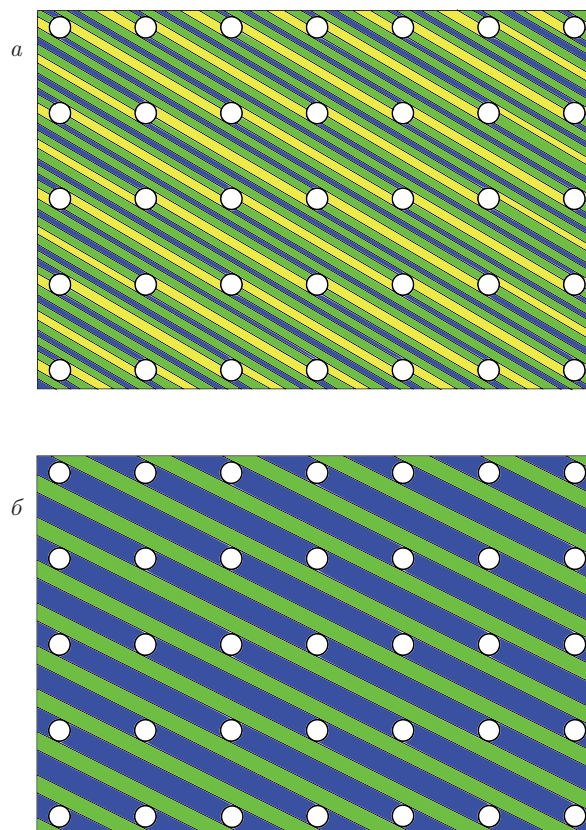


Рис. 25. а) Проекция длинных замкнутых траекторий системы (1.2), возникающих после пересечения границы зоны устойчивости при иррациональном среднем направлении открытых траекторий; б) проекция длинных замкнутых и открытых периодических траекторий системы (1.2) после пересечения границы зоны устойчивости при рациональном среднем направлении открытых траекторий

Каждый из носителей открытых траекторий представляет собой периодически деформированную целочисленную плоскость в \mathbf{p} -пространстве и, таким образом, картина, возникающая в плоскости $\Pi(\mathbf{V}/B)$, всегда является двоякопериодической. (Заметим также, что отверстия (плоские диски) в носителях открытых траекторий исчезают на проекции, будучи ортогональными \mathbf{V} .) В частности, двоякопериодическим является расположение описанных нами «ловушек» для каждой пары «слившихся» носителей открытых траекторий.

Прямые линии, представляющие собой траектории системы (1.2), после пересечения границы Ω_α оказываются, вообще говоря, «разрезанными» на отрезки конечной длины. Нетрудно видеть, что каждый из таких отрезков, ограниченный «ловушками» на обоих своих концах, представляет собой (длинную) замкнутую траекторию системы (1.2), возникающую на паре бывших носителей открытых траекторий.

екторий после пересечения границы зоны устойчивости. Можно видеть также, что если пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{B} , и Γ_α имеет при этом иррациональное направление, то все бывшие открытые траектории превращаются в замкнутые после пересечения границы Ω_α (рис. 25а). В то же время, если среднее направление открытых траекторий является рациональным, то непосредственно после пересечения первой границы Ω_α на паре бывших носителей открытых траекторий должны будут присутствовать как длинные замкнутые траектории, так и «неповрежденные» периодические открытые траектории (рис. 25б).

Диаметры «ловушек» стремятся к нулю при приближении к границе зоны Ω_α с внешней стороны и увеличиваются при отдалении от нее (вблизи Ω_α). Можно видеть, что для каждого рационального направления открытых траекторий существует в действительности критический радиус «ловушек», при котором слои открытых траекторий исчезают из-за полного их перекрытия «ловушками». Кроме того, можно видеть также, что критический радиус «ловушек» довольно быстро убывает с увеличением «знаменателей» соответствующих рациональных направлений траекторий. Как следствие этого, отрезки, примыкающие к границе зоны устойчивости и соответствующие появлению неустойчивых периодических траекторий на поверхности Ферми (рис. 17), образуют всюду плотное множество на границе Ω_α , однако на любом конечном расстоянии от границы количество таких отрезков является конечным. Для нашего рассмотрения здесь важны будут отрезки, достигающие второй границы зоны устойчивости.

Как уже отмечалось выше, в каждой связанной компоненте области Ω'_α , примыкающей к определенному участку первой границы зоны Ω_α , для всех направлений \mathbf{B} общего положения имеет место один и тот же тип холловской проводимости, противоположный типу исчезающего цилиндра замкнутых траекторий на соответствующем участке первой границы Ω_α . На соответствующем участке второй границы Ω_α происходит исчезновение цилиндра замкнутых траекторий противоположного типа (по отношению к типу цилиндра, исчезающего на первой границе) и становятся возможными перескоки траекторий между парами «слившихся» бывших носителей открытых траекторий (рис. 10). На описанной выше проекции бывших носителей открытых траекторий на плоскость $\Pi(\mathbf{B}/B)$ при этом появляются «ловушки второго типа», попадая в которые траектория осуществляет перескок между парами

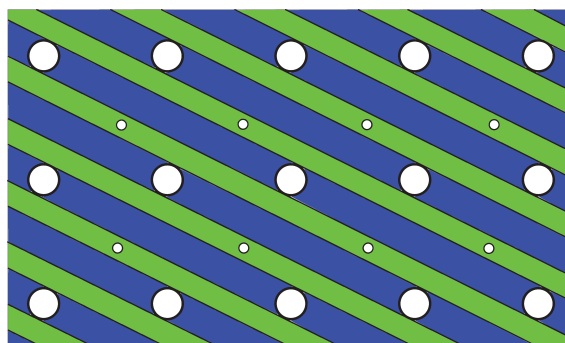


Рис. 26. Ловушки второго типа, появляющиеся после пересечения второй границы зоны Ω_α

«слившихся» носителей. Как и «ловушки первого типа», «ловушки второго типа» образуют периодическую структуру в плоскости $\Pi(\mathbf{B}/B)$ (рис. 26).

На рис. 26 мы в действительности изобразили проекции лишь половины «ловушек второго типа», возникающих на паре «слившихся» носителей открытых траекторий, а именно, «ловушек», лежащих на «верхнем» носителе и отвечающих перескокам на одну из соседних пар таких же носителей. Проекция соседней пары «слившихся» носителей на плоскость $\Pi(\mathbf{B}/B)$ при этом совпадает с проекцией рассматриваемой нами пары, сдвинутой на некоторый вектор в этой плоскости. Можно сказать поэтому, что каждая из «ловушек второго типа» имеет в действительности верхнее и нижнее основания, лежащие в различных частях картины, представленной рис. 25а или рис. 25б.

Диаметры «ловушек второго типа» стремятся к нулю при приближении ко второй границе зоны Ω_α с внешней стороны и увеличиваются при отдалении от нее (вблизи Ω_α). При пересечении второй границы Ω_α «ловушки второго типа» возникают в виде точек на рис. 25а или рис. 25б, имеющих «верхнее и нижнее основание» на цилиндрах замкнутых траекторий или на слоях периодических траекторий (если они имеются) системы (1.2).

Здесь мы будем рассматривать лишь «физические» дисперсионные законы, удовлетворяющие требованию $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon(-\mathbf{p})$, что влечет также инвариантность поверхности Ферми относительно преобразования $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$. Нетрудно проверить при этом, что инвариантность структуры системы (1.2) относительно того же преобразования влечет в рассматриваемой ситуации также симметрию верхнего и нижнего оснований «ловушек второго типа». В частности, каждая вновь появившаяся после пересечения второй границы зоны Ω_α (маленькая) «ловуш-

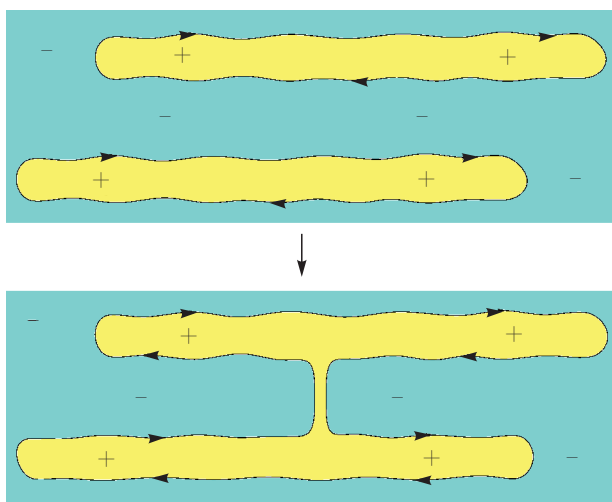


Рис. 27. Перестройка траекторий системы (1.2) при пересечении второй границы Ω_α в случае, когда «ловушки второго типа» возникают на цилиндрах замкнутых траекторий

ка второго типа» соединяет между собой (в случае общего положения) либо длинные замкнутые траектории системы (1.2), либо периодические открытые траектории. Как можно видеть, два этих случая соответствуют существенно различным структурам траекторий системы (1.2) на поверхности Ферми после пересечения второй границы зоны Ω_α .

Действительно, как нетрудно видеть, перестройка второго типа соответствует картине, представленной на рис. 27. Можно видеть, что как до перестройки, так и после перестройки траекторий, поверхность Ферми содержит лишь замкнутые траектории системы (1.2) и картины во всех плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , имеют один и тот же тип (I или II) в обоих случаях. Таким образом, после описанной перестройки траекторий соответствующие направления \mathbf{V} лежат вне любой из зон устойчивости Ω_β и суммарный вклад поверхности Ферми в холловскую проводимость не изменяется. Эта ситуация имеет место, в частности, при пересечении второй границы зоны Ω_α в точках общего положения, а также в точках, соответствующих рациональным направлениям пересечения Γ_α и плоскости, ортогональной \mathbf{V} , в случае если диаметр «ловушек первого типа» в них превышает критический (соответствующие «дополнительные отрезки» не доходят до второй границы).

В другом случае, когда «ловушки второго типа» возникают на слоях периодических открытых траекторий системы (1.2), соответствующая перестройка траекторий может быть представлена картиной,

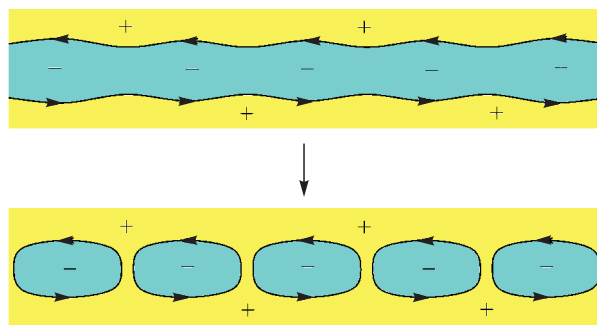


Рис. 28. Перестройка траекторий системы (1.2) при пересечении второй границы Ω_α в случае, когда «ловушки второго типа» возникают на слоях периодических открытых траекторий

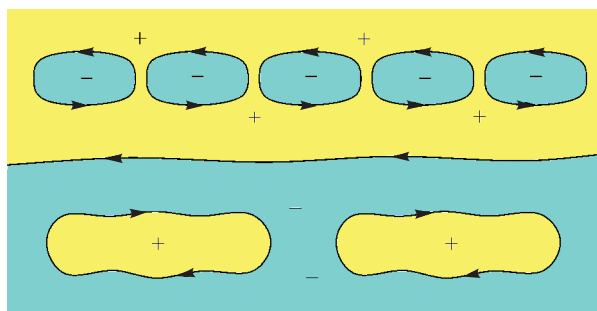


Рис. 29. Картины I и II в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , разделенные открытыми траекториями (1.2)

приведенной на рис. 28. При этом в плоскостях, ортогональных \mathbf{V} , возникают обе картины (I и II), разделенные открытыми траекториями системы (1.2) (рис. 29). Такая ситуация может возникать лишь в случае, когда пересечение второй границы зоны устойчивости происходит в точке, соответствующей наличию периодических открытых траекторий (1.2) на поверхности Ферми, т. е. в точке пересечения второй границы с дополнительным отрезком, примыкающим к границе зоны устойчивости и соответствующим появлению неустойчивых периодических траекторий на поверхности Ферми. Заметим при этом, что даже в этом случае ситуация может также описываться картиной, представленной на рис. 27, если «ловушки второго типа» возникают на цилиндрах замкнутых траекторий.

Замкнутые траектории, изображенные на рис. 29, разрезают поверхности Ферми на новые носители открытых траекторий, соответствующие появлению новой зоны устойчивости Ω_β . Зона Ω_β , определенная для фиксированной поверхности Ферми, принадлежит при этом одной из зон Ω_β^* , изображенных на рис. 16.

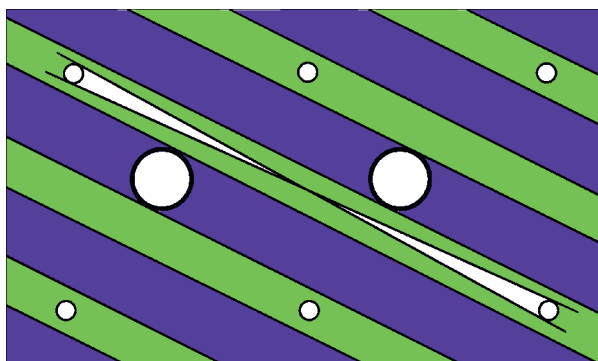


Рис. 30. Допустимый угол отклонения направления пересечения Γ_α с плоскостью, ортогональной \mathbf{B} , при фиксированном диаметре «ловушек второго типа»

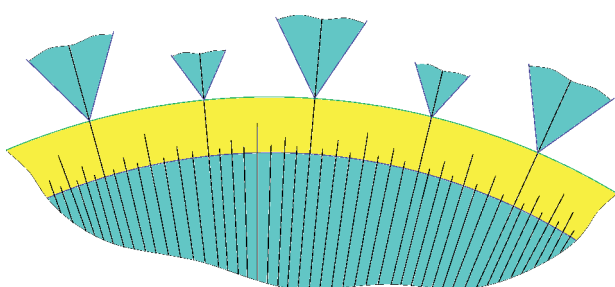


Рис. 31. Зоны устойчивости Ω_β , примыкающие ко второй границе зоны Ω_α в части из ее «рациональных» точек

Картина, представленная на рис. 29, является локально устойчивой (по отношению к малым вращениям направления \mathbf{B}) и сохраняется до тех пор, пока не происходит перестройки изображенных на ней замкнутых траекторий. Можно видеть, что вблизи второй границы зоны Ω_α область устойчивости картины, изображенной на рис. 29, определяется диаметром «ловушек второго типа», который в этой ситуации мал по сравнению с диаметром «ловушек первого типа». Так, допустимый угол отклонения направления пересечения плоскости Γ_α с плоскостью, ортогональной \mathbf{B} , при фиксированном малом диаметре «ловушек второго типа» прямо пропорционален этому диаметру, что определяет допустимый угол отклонения направления \mathbf{B} параллельно второй границе Ω_α (рис. 30). Поскольку величина диаметра «ловушек второго типа» прямо пропорциональна расстоянию до второй границы зоны Ω_α , нетрудно видеть также, что границы зон Ω_β должны при этом иметь «излом» на второй границе Ω_α (рис. 31).

Как мы уже сказали выше, появления новой зоны устойчивости на второй границе зоны Ω_α может

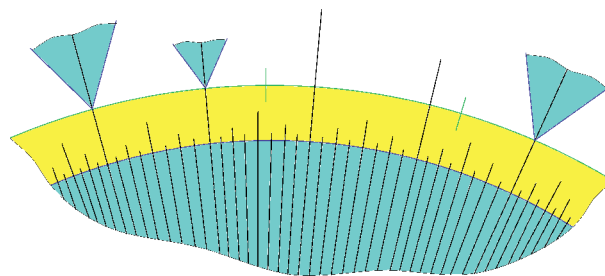


Рис. 32. Сегменты границы зоны Ω_α , соответствующие появлению и отсутствию новых зон устойчивости в точках пересечения второй границы с отрезками специальных направлений \mathbf{B}

и не происходить даже в точках пересечения второй границы с «дополнительными отрезками», примыкающими к Ω_α и представляющими направления \mathbf{B} , отвечающие появлению неустойчивых периодических траекторий на поверхности Ферми. Эта ситуация имеет место, если, несмотря на наличие слов периодических траекторий на поверхности Ферми, появление «ловушек второго типа» происходит на цилиндрах замкнутых траекторий системы (1.2). Таким образом, в общем случае граница Ω_α может разделяться на сегменты, в которых происходит рождение новых зон в описанных точках пересечения, и на сегменты, в которых рождения новых зон не происходит (рис. 32). Можно отметить, что, поскольку высота цилиндров замкнутых траекторий определяется в этом случае диаметром «ловушек первого типа», общая мера сегментов второго типа будет тем меньше, чем ближе вторая граница зоны Ω_α расположена к ее первой границе. Кроме того, можно заметить также, что для сегментов второго типа появление новых зон Ω_β на отрезках специальных направлений \mathbf{B} теоретически может происходить и на некотором расстоянии от второй границы Ω_α в результате взаимного смещения «ловушек» первого и второго типов.

В целом, можно отметить, что структура угловых диаграмм для фиксированной поверхности Ферми может быть довольно близка к структуре диаграмм для всего дисперсионного закона вблизи специальных зон устойчивости, рассмотренных выше.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели угловые диаграммы для проводимости в металлах, имеющих произвольные (физические) поверхности Ферми. Как оказывается, является естественным разделение всех угловых

диаграмм на конечное число «классов сложности», имеющих достаточно эффективное геометрическое описание. Наибольший интерес, с нашей точки зрения, представляют при этом наиболее сложные диаграммы (типа В), содержащие бесконечное число зон устойчивости, а также направления В, соответствующие появлению «хаотических» траекторий на поверхности Ферми. В работе приведено также некоторое сравнение сложности таких диаграмм с диаграммами, определенными для всего дисперсионного закона.

Финансирование. Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект № 18-11-00316).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
2. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974).
3. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
4. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *ЖЭТФ* **31**, 63 (1956).
5. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958).
6. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960).
7. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН* **69**, 419 (1959).
8. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН* **78**, 411 (1962).
9. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН* **87**, 389 (1965).
10. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
11. *Электроны проводимости*, под ред. М. И. Каганова, В. С. Эдельмана, Наука, Москва (1985).
12. M. I. Kaganov and V. G. Peschansky, *Phys. Rep.* **372**, 445 (2002).
13. С. П. Новиков, *УМН* **37**, 3 (1982).
14. А. В. Зорич, *УМН* **39**, 235 (1984).
15. И. А. Дынников, *УМН* **47**, 161 (1992).
16. И. А. Дынников, *Математические заметки* **53**, 57 (1993).
17. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 809 (1996).
18. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, *УФН* **168**, 249 (1998).
19. С. П. Царев, *Частное сообщение* (1992-93).
20. I. A. Dynnikov, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 179, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 45 (1997).
21. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 1710 (1997).
22. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *Труды МИАН* **302**, 296 (2018).
23. И. А. Дынников, *УМН* **54**, 21 (1999).
24. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of Plane Sections*, *Proc. ECM2, BuDA* (1996).
25. И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 371 (1997).
26. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *Bulletin of Braz. Math. Society, New Series* **34**, 171 (2003).
27. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *J. Stat. Phys.* **115**, 31 (2004).
28. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *arXiv:cond-mat/0304471*.
29. R. De Leo, *Physica B: Condensed Matter* **362**, 62 (2005).
30. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **151**, 944 (2017).
31. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **152**, 1053 (2017).
32. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **154**, 1183 (2018).
33. A. V. Zorich, *Proc. Geometric Study of Foliations*, (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., *World Scientific*, Singapore (1994), p. 479.
34. A. V. Zorich, *Annales de l'Institut Fourier* **46**, 325 (1996).
35. Anton Zorich, *Translations of the AMS, Ser. 2, Vol. 179*, *AMS*, Providence, RI (1997), p. 173.
36. Anton Zorich, *Translations of the AMS, Ser. 2, Vol. 197*, *AMS*, Providence, RI (1999), p. 135.
37. Р. Де Лео, *УМН* **55**, 181 (2000).
38. Р. Де Лео, *УМН* **58**, 197 (2003).
39. R. De Leo, *Exper. Math.* **15**, 109 (2006).

40. Anton Zorich, in collect.: *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Vol. 1: On Random Matrices, Zeta Functions and Dynamical Systems*; Ecole de Physique des Houches, France, March 9–21 (2003); ed. by P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, and P. Vanhove, Springer-Verlag, Berlin (2006), p. 439.
41. Р. Де Лео, И. А. Дынныйков, УМН **62**, 151 (2007).
42. R. De Leo and I. A. Dynnikov, *Geom. Dedicata* **138**, 51 (2009).
43. A. Skripchenko, *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **32**, 643 (2012).
44. A. Skripchenko, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **43**, 253 (2013).
45. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Novikov's Seminar 2012–2014*, *Adv. Mathem. Sci.*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 234, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, and I. M. Krichever, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2014), p. 173.
46. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Trans. Moscow Math. Soc.* **76**, 287 (2015).
47. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Invent. Mathem.* **206**, 109 (2016).
48. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Bulletin de la Societe Mathematique de France* **144**, 539 (2016).
49. R. De Leo, arXiv:1711.01716.