ЖЭТФ, 2019, том 156, вып. 3 (9), стр. 407–418

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В ТЕРМОДИНАМИКЕ ДВУХ РЕЗОНАНСНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КВАНТОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А. И. Трубилко [a*], ***А. М. Башаров*** [b,c**]

[a] *Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России*
196105, Санкт-Петербург, Россия

[b] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»*
123182, Москва, Россия

[c] *Московский физико-технический институт (технический университет)*
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 15 марта 2019 г.,
после переработки 15 марта 2019 г.
Принята к публикации 2 апреля 2019 г.

Классическая задача о двух резонансно взаимодействующих осцилляторах, каждый из которых резонансно связан со «своим» термостатом, исследована на основе метода эффективного гамильтониана и квантового стохастического дифференциального уравнения (в противоположность известным «глобальному» и «локальному» подходам). Показано, что во втором порядке алгебраической теории возмущений каждый из осцилляторов оказывается также связанным с «чужим» термостатом. Вычислены тепловые потоки в стационарном состоянии и доказано, что никакого теплового потока от холодного термостата к горячему, о чем свидетельствуют некоторые результаты локального подхода, не возникает.

DOI: 10.1134/S0044451019090037

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается интерес к области, получившей название квантовая термодинамика. С одной стороны, он обусловлен фундаментальным аспектом, связанным с возможностью непосредственного получения термодинамических законов из квантовых динамических уравнений движения. С другой стороны, он определен и чисто практическими интересами — описание переноса энергии в квантовых устройствах является принципиальным вопросом для целей новых технологий и создания термодинамических устройств, определенных проявлением квантовой природы взаимодействий. В качестве примеров приведем исследование квантового транспорта в физических системах, например, в ультрахолодных атомах [1–4], квантовых точках [5], молекулярных, ионных и твердотельных системах [6–8]. Именно такие системы разной физической природы, как предполагается, могут служить основными базовыми элементами квантовых сетей, связь между элементами в которой осуществляется посредством организации различного рода взаимодействий между ними. Они же могут служить основой квантовых рефрижераторов [9] и квантовых тепловых машин [10–13]. При этом каждый элемент системы необратимым образом взаимодействует и со своим окружением. В этой связи центральной при описании является задача получения кинетического уравнения для открытой квантовой системы, которая отвечает реализованным физическим условиям.

В вопросе получения/применения кинетического уравнения следует различать подходы математиков и физиков. Математики начинают с абстрактных общих представлений о кинетическом уравнении и привлекают те или иные модельные операторы взаимодействия [14–17]. Физики в каждой конкретной физической задаче строят адекватный эффективный гамильтониан и операторы взаимодействия, вы-

* E-mail: trubilko.andrey@gmail.com
** E-mail: basharov@gmail.com

водя далее кинетические уравнения для рассматриваемой задачи [18, 19]. В итоге, и те и другие говорят о кинетическом уравнении в форме Линдблада, однако реальные условия применимости уравнения могут быть разными в различных подходах, что приводит к рассмотрению следствий из решения задач за пределами их применимости. Этим, на взгляд авторов данной статьи, обусловлена часть термодинамических парадоксов. Пример будет рассмотрен ниже.

Одной из простых исследуемых моделей является модель, в которой два связанных между собой квантовомеханических осциллятора взаимодействуют с окружающими их термостатами. В качестве последних могут быть использованы системы, состоящие из большого числа осцилляторов, находящихся в равновесном состоянии и взаимодействующих с выделенной системой квазирезонансным образом. В условиях слабого и марковского характера взаимодействия, когда состояние термостата не изменяется, состояние анализируемой системы описывается кинетическим уравнением в форме Линдблада [20, 21], вид которого универсален и не зависит от физической природы диссипирующей системы. Исследования динамики подобных открытых осцилляторных систем в последнее время сопровождается активным обсуждением вопроса о выполнении законов термодинамики в квантовом мире.

Другие системы — открытые осцилляторные системы здесь выделяются по следующим причинам. С одной стороны, речь идет о широко распространенных и реализуемых на практике моделях типа одномодовых резонаторов, электромагнитные поля которых связаны на зеркалах с полями других одномодовых резонаторов и/или с широкополосными стационарными электромагнитными полями. Состояние стационарных электромагнитных полей характеризуется температурой (и мы будем их именовать термостатными полями с заданной температурой), причем сами широкополосные электромагнитные поля эффективно продуцируются лазерами и параметрическими генераторами. С другой стороны, гамильтониан таких систем — открытой системы, к которой относим несколько мод резонаторов, и ее окружения (термостатные поля), — квадратичен по бозонным операторам и имеются методы, начиная от преобразования Боголюбова, обеспечивающие относительно простую диагонализацию таких гамильтонианов [22].

Для описания системы из двух связанных между собой квантовомеханических осцилляторов, взаимодействующих с окружающими их термостатами, используют два подхода — локальный и глобальный [23]. В локальном подходе взаимодействие между одинаковыми системами носит резонансный характер и описывается известным гамильтонианом, отвечающим использованию приближения вращающихся волн. Стационарные решения динамических уравнений подсистем определяют термодинамические потоки. В работе [23] утверждается, что при определенном неравенстве между отношениями собственной энергии к его энергетической температуре для двух осцилляторов возможно возникновение ненулевого потока энергии от холодного резервуара к горячему, что естественно нарушает второе начало термодинамики. При этом авторы [23] не применяют к полученному результату никаких ограничений частот фотонов (бозонов) термостатных полей, и поэтому в результате решения как бы точных уравнений появляется поток энергии от холодного термостата к более горячему через открытую систему. Выход из противоречия авторы [23] нашли, применяя глобальный подход, сводящийся к диагонализации полного гамильтониана осцилляторов. Изменяющаяся при этом диссипативная часть кинетического уравнения учитывает малые влияния отдельного осциллятора на термостат соседнего осциллятора, что приводит, по мнению авторов, к восстановлению справедливости второго начала.

В работе [24] рассмотрена близкая задача, где в качестве системы для переноса энергии между термостатами выбраны два двухуровневых атома, связанные между собой модельным взаимодействием, которое ничем не обосновано. Для получения уравнения в рамках глобального подхода предлагается построение базиса на основе последовательных приближений по константе взаимодействия атомов. Это является, по сути, разложением по указанной константе диагонализованного гамильтониана всей системы.

Следует особо выделить и подчеркнуть, что при рассмотрении эволюции любой физической системы в той или иной степени всегда существует ее связь с внешним окружением, которая описывается посредством кинетического уравнения (master equation) рассматриваемой подсистемы. Построение модели такого взаимодействия с окружением часто сопровождается добавлением феноменологических слагаемых, якобы описывающих те или иные виды релаксации и декогерентизации, без строгого вывода уравнения из первых принципов. Однако такой подход, как впервые было отмечено еще в работе [25], может приводить к неверным физическим результатам и парадоксам. В частности, в цитированной работе указывалось на нефизическое стационарное состояние сильно связанных квантовых систем. Этот факт также отмечен в работе [26], где исследована диссипация средних характеристик и запутывания двух сильно связанных осцилляторов. Именно поэтому при выводе основного уравнения динамики подсистемы, взаимодействующей с окружением необратимым образом, всегда следует исходить из первых принципов для его построения, чтобы исключить последующие возможные артефакты и парадоксы.

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос переноса энергии в описанной выше задаче двух сильно связанных осцилляторов на основе получения кинетического управляющего уравнения для системы методом эффективного гамильтониана и стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Заметим, что опора на диагональный гамильтониан в случае многих степеней свободы часто затушевывает физические процессы, развивающиеся в сложной системе, а в условиях марковского приближения является и превышением точности. Кроме того, обычная теория возмущений в системах, взаимодействующих резонансным образом, приводит к нулевым знаменателям и расходящимся рядам, поэтому в теории открытых квантовых систем используются различные варианты метода эффективного гамильтониана. Наш вариант метода эффективного гамильтониана является алгебраическим аналогом метода усреднения Боголюбова – Крылова – Митропольского, основного метода упрощения уравнений нелинейной и квантовой оптики, содержащих быстро и медленно меняющиеся во времени величины. Алгебраический вариант метода Боголюбова – Крылова – Митропольского называют также алгебраической теорией возмущений [27].

Применение алгебраической теории возмущений накладывает определенные ограничения на частоты термостатных полей, в результате которых противоречивые результаты работы [23] оказываются за рамками применимости модели. Кроме того, наглядным становится появление прямого канала распада осцилляторов в «чужие» термостаты. Поскольку алгебраическая теория возмущений не распространена среди специалистов по нелинейной и квантовой оптике, несмотря на известную всем востребованность метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского [28], в Приложении дан вывод слагаемых эффективного гамильтониана методом алгебраической теории возмущений.

Наглядное представление двух взаимодействующих между собой фотонных мод, каждая из которых взаимодействует на зеркале со своим термостатом

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Пусть имеется два связанных между собой одномодовых резонатора, каждый из которых на зеркале взаимодействует (накачивается или распадается) со своим термостатным полем (см. рисунок). Обозначим частоты мод осцилляторов через ω_c и ω_r, операторы уничтожения квантов соответственно c и r, операторы уничтожения квантов частоты ω термостатных полей a_ω и b_ω. Все они являются операторами, удовлетворяющими бозонным коммутационным соотношениям, и при этом коммутируют друг с другом.

Будем рассматривать указанные взаимодействующие осцилляторы на основе следующего исходного стандартного гамильтониана H^{Ini}:

$$H^{Ini} = H_0 + V_{c-r} + V_c + V_r,$$

включающего гамильтониан осцилляторов и термостатных полей в отсутствие взаимодействия,

$$H_0 = \hbar\omega_c c^\dagger c + \hbar\omega_r r^\dagger r + \sum_\omega \hbar\omega a_\omega^\dagger a_\omega + \sum_\omega \hbar\omega b_\omega^\dagger b_\omega,$$

и операторы их взаимодействия

$$V_{c-r} = g(c+c^\dagger)(r+r^\dagger), \quad V_c = \gamma_c \sum_\omega (c+c^\dagger)(a_\omega + a_\omega^\dagger),$$

$$V_r = \gamma_r \sum_\omega (r + r^\dagger)(b_\omega + b_\omega^\dagger)$$

с константами взаимодействия g, γ_c и γ_r. Указанный гамильтониан берется в качестве исходного во многих работах, начиная, по-видимому, с работы [29], однако дальнейший его анализ с точки зрения получения эффективного гамильтониана и формулировки условий применимости эффективного гамильтониана авторы не встречали.

Обычно в работах, например [23], используют так называемое приближение вращающейся волны, когда в операторах взаимодействия учитываются лишь слагаемые

$$g(cr^\dagger + c^\dagger r), \gamma_c \sum_\omega (ca^\dagger_\omega + c^\dagger a_\omega), \gamma_r \sum_\omega (rb^\dagger_\omega + r^\dagger b_\omega).$$

Подчеркнем, что другие слагаемые просто отбрасывают без обсуждения условий такого действия.

Чтобы корректно обосновать необходимость приближения вращающейся волны и определить области применимости такого приближения, применим к исходному гамильтониану алгебраическую теорию возмущений. Для удобства перейдем в представление взаимодействия. Тогда уравнение Шредингера для волнового вектора всей рассматриваемой системы и ее окружения,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = V(t)|\Psi(t)\rangle, \qquad (1)$$

определяется оператором взаимодействия

$$V(t) = V_{c-r}(t) + V_c(t) + V_r(t),$$

$$V_{c-r}(t) = g(ce^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t})(re^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t}),$$

$$V_c(t) = \gamma_c \sum_\omega (ce^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t})(a_\omega e^{-i\omega t} + a^\dagger_\omega e^{i\omega t}),$$

$$V_r(t) = \gamma_r \sum_\omega (re^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t})(b_\omega e^{-i\omega t} + b^\dagger_\omega e^{i\omega t}).$$

Явное написание аргумента времени t использовано для указания на представление взаимодействия, к которому величина с таким аргументом относится.

В силу унитарной симметрии квантовой теории перейдем от исходных векторов и операторов к преобразованным по формулам

$$|\tilde\Psi(t)\rangle = \mathcal{T}(t)|\Psi(t)\rangle, \quad \mathcal{T}(t) = e^{-iS(t)}, \quad S^\dagger(t) = S(t).$$

Преобразованный вектор будет удовлетворять уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{d|\tilde\Psi(t)\rangle}{dt} = \tilde H(t)|\tilde\Psi(t)\rangle$$

с преобразованным гамильтонианом

$$\tilde H(t) = \mathcal{T}(t)V(t)\mathcal{T}^\dagger(t) - i\hbar\mathcal{T}(t)\frac{d}{dt}\mathcal{T}^\dagger(t).$$

В дальнейшем мы будем использовать формальное решение уравнения Шредингера для оператора эволюции $U(t,t_0)$ с преобразованным гамильтонианом, которое выражается с помощью T-оператора как

$$U(t,t_0) = I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t} \tilde H(t')\,dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'} \tilde H(t')\tilde H(t'')\,dt'dt'' + \ldots =$$
$$= \overleftarrow{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \tilde H(t')\,dt'\right),$$

$$|\tilde\Psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\tilde\Psi(t_0)\rangle.$$

Разложим $\tilde H(t)$ и $S(t)$ в ряд по константам взаимодействия:

$$S(t) = S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + S^{(0,0,1)}(t) + $$
$$+ S^{(2,0,0)}(t) + \ldots,$$

$$\tilde H(t) = \tilde H^{(1,0,0)}(t) + \tilde H^{(0,1,0)}(t) + \tilde H^{(0,0,1)}(t) +$$
$$+\tilde H^{(1,1,0)}(t)+\tilde H^{(1,0,1)}(t)+\tilde H^{(0,1,1)}(t)+\tilde H^{(2,0,0)}(t)+\ldots$$

Здесь левый индекс каждой тройки верхних индексов описывает порядок по константе связи g между осцилляторами, средний индекс — порядок по константе γ_c, а правый — порядок по константе γ_r. Реально порядок взаимодействия с полями определяется отношением энергии взаимодействия между полями к энергии кванта осциллятора.

С учетом формулы Бейкера – Хаусдорфа нетрудно получить

$$\tilde H^{(1,0,0)}(t) = \hbar\frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} + V_{c-r}(t),$$
$$\tilde H^{(0,1,0)}(t) = \hbar\frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} + V_c(t),$$
$$\tilde H^{(0,0,1)}(t) = \hbar\frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} + V_r(t),$$
$$\tilde H^{(1,1,0)}(t) = \hbar\frac{dS^{(1,1,0)}(t)}{dt} -$$
$$- \frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), V_c(t)\right] -$$
$$- \frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), \tilde H^{(0,1,0)}(t)\right] -$$
$$- \frac{i}{2}\left[S^{(0,1,0)}(t), V_{c-r}(t)\right] -$$
$$- \frac{i}{2}\left[S^{(0,1,0)}(t), \tilde H^{(1,0,0)}(t)\right],$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(1,0,1)}(t) &= \hbar\frac{dS^{(1,0,1)}(t)}{dt} - \\
&- \frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), V_r(t)\right] - \\
&- \frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{H}^{(0,0,1)}(t)\right] - \\
&- \frac{i}{2}\left[S^{(0,0,1)}(t), V_{c-r}(t)\right] - \\
&- \frac{i}{2}\left[S^{(0,0,1)}(t), \tilde{H}^{(1,0,0)}(t)\right], \\
\tilde{H}^{(2,0,0)}(t) &= \hbar\frac{dS^{(2,0,0)}(t)}{dt} - \\
&- \frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), V_{c-r}(t)\right] - \\
&- \frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{H}^{(1,0,0)}(t)\right], \ldots
\end{aligned} \tag{2}$$

Принцип построения формул (2) представляется достаточно прозрачным. Формулы (2) могут лежать в основе разных алгоритмов построения эффективного гамильтониана. Алгебраической теории возмущений отвечает следование идеям метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского — в представлении взаимодействия в слагаемых $\tilde{H}^{(1,0,0)}(t)$, $\tilde{H}^{(0,1,0)}(t)$ и др. эффективного гамильтониана $H^{Eff}(t) = \tilde{H}^{(1,0,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) + \ldots$ должны остаться только величины, медленно меняющиеся во времени [19]. Это условие однозначно определяет (в предположении адиабатического включения полей) величины $S^{(i,j,k)}$ и накладывает ограничение на спектр мод широкополосных полей, учитываемых в эффективном гамильтониане $H^{Eff}(t)$ [19,30]. Тогда величины $S^{(i,j,k)}$ вбирают в себя все быстро меняющиеся во времени величины и можно упростить выражения (2), представив их в виде

$$\begin{aligned}
&\tilde{H}^{(1,0,0)}(t) = V'_{c-r}(t), \quad \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) = V'_c(t), \\
&\tilde{H}^{(0,0,1)}(t) = V'_r(t), \\
&\tilde{H}^{(1,1,0)}(t) = -\frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), V''_c(t)\right]' - \\
&\qquad - \frac{i}{2}\left[S^{(0,1,0)}(t), V''_{c-r}(t)\right]', \\
&\tilde{H}^{(1,0,1)}(t) = -\frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), V''_r(t)\right]' - \\
&\qquad - \frac{i}{2}\left[S^{(0,0,1)}(t), V''_{c-r}(t)\right]', \\
&\tilde{H}^{(2,0,0)}(t) = -\frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), V''_{c-r}(t)\right]', \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Одним штрихом обозначено выражение, представленное в виде суммы слагаемых, из которой исключены все слагаемые, содержащие быстро меняющиеся функции времени. Двумя штрихами отмечено выражение после отбрасывания из его составляющих всех медленно меняющихся слагаемых.

Будем рассматривать осцилляторы с одинаковыми частотами $\omega_c = \omega_r$. В этом случае эффективный гамильтониан алгебраической теории возмущений в представлении взаимодействия определяется слагаемыми

$$\tilde{H}^{(1,0,0)}(t) = g\left(cr^\dagger + c^\dagger r\right),$$

$$\tilde{H}^{(0,1,0)}(t) = \gamma_c \sum_{\omega\in(\omega_c)} \left(ca_\omega^\dagger e^{-i(\omega_c-\omega)t} + c^\dagger a_\omega e^{i(\omega_c-\omega)t}\right),$$

$$\tilde{H}^{(0,0,1)}(t) = \gamma_r \sum_{\omega\in(\omega_r)} \left(rb_\omega^\dagger e^{-i(\omega_r-\omega)t} + r^\dagger b_\omega e^{i(\omega_r-\omega)t}\right).$$

Здесь область суммирования, обозначаемая как (ω_c), представляет собой область спектра частот осцилляторов окружения вблизи значения $\omega = \omega_c$. Аналогично определяется (ω_r).

При помощи генераторов первого порядка (см. Приложение) определяем слагаемые второго порядка по константам связи:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(1,1,0)}(t) = &-\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c}\sum_{\omega\in(\omega_r)} r^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t} - \\
&- \frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c}\sum_{\omega\in(\omega_r)} ra_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(1,0,1)}(t) = &-\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_r}\sum_{\omega\in(\omega_c)} c^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t} - \\
&- \frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_r}\sum_{\omega\in(\omega_c)} cb_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_c)t}.
\end{aligned}$$

Выписанные слагаемые эффективного гамильтониана определяют связь каждого из осцилляторов с «чужим» термостатом. Эти каналы взаимодействия не видны явно в исходном гамильтониане H^{Ini}, а параметры связи определяются как связью g между осцилляторами, так и параметрами γ_c или γ_r другого осциллятора.

Другие слагаемые второго порядка определяют сдвиги частот осцилляторов и еще один канал взаимодействия осцилляторов с окружением:

$$\tilde{H}^{(2,0,0)}(t) = -\frac{g^2}{2\hbar\omega_c}\left(c^\dagger c + r^\dagger r + 1\right),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(0,2,0)}(t) = &-\left(c^\dagger c + 1\right)\gamma_c^2 \sum_{\forall\omega\notin(-\omega_c)} \frac{1}{\hbar(\omega+\omega_c)} - \\
&- \gamma_c^2 \sum_{\omega\notin(-\omega_c)} \frac{a_\omega^\dagger a_{\omega'} e^{i\omega t} e^{-i\omega' t}}{2\hbar(\omega+\omega_c)} - \\
&- \gamma_c^2 \sum_{\substack{\omega\notin(-\omega_c)\\ \forall\omega'\notin(-\omega_c)}} \frac{a_{\omega'}^\dagger a_\omega e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\hbar(\omega+\omega_c)},
\end{aligned}$$

$$\tilde{H}^{(0,0,2)}(t) = -\gamma_r^2 \left(r^\dagger r + 1\right) \sum_{\forall\omega\notin(-\omega_r)} \frac{1}{\hbar(\omega+\omega_r)} - \\ - \gamma_r^2 \sum_{\omega\notin(-\omega_r)} \frac{b_\omega^\dagger b_{\omega'} e^{-i(\omega'-\omega)t}}{2\hbar(\omega+\omega_r)} - \\ - \gamma_r^2 \sum_{\substack{\omega\notin(-\omega_c)\\ \forall\omega'\notin(-\omega_c)}} \frac{b_{\omega'}^\dagger b_\omega e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\hbar(\omega+\omega_r)}.$$

Данные слагаемые интерпретируются как лэмбовские сдвиги частот и операторы «штарковского» взаимодействия системы с окружением. Лэмбовские сдвиги учитываем перенормировкой частот, в результате эффективный гамильтониан системы с точностью до второго порядка по константам связи определяется такими операторами:

$$H^{Eff}(t) = H_{c-r}(t) + H_c^{(1)}(t) + H_c^{(2)}(t) + \\ + H_r^{(1)}(t) + H_r^{(2)}(t), \quad (4)$$

$$H_{c-r}(t) = g\left(cr^\dagger + c^\dagger r\right), \quad (5a)$$

$$H_c^{(1)}(t) = \\ = \gamma_c \sum_{\omega\in(\omega_c)} \left(c a_\omega^\dagger e^{-i(\omega_c-\omega)t} + c^\dagger a_\omega e^{i(\omega_c-\omega)t}\right), \quad (5b)$$

$$H_c^{(2)}(t) = -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_c)} c^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t} - \\ - \frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_c)} c b_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_c)t}, \quad (5c)$$

$$H_r^{(1)}(t) = \\ = \gamma_r \sum_{\omega\in(\omega_r)} \left(r b_\omega^\dagger e^{-i(\omega_r-\omega)t} + r^\dagger b_\omega e^{i(\omega_r-\omega)t}\right), \quad (5d)$$

$$H_r^{(2)}(t) = -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_r)} r^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t} - \\ - \frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_r)} r a_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t}. \quad (5e)$$

Операторами «штарковского» взаимодействия с окружением $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ можно пренебречь даже в сравнении с $H_c^{(2)}(t)$ и $H_r^{(2)}(t)$. Такое пренебрежение основано на представлении $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ квантовыми считывающими процессами и результатами анализа их роли в атомных открытых системах [30]. Из работы [30] заимствовано использование термина «штарковское» взаимодействие, поскольку учет данных слагаемых весьма сходен с учетом аналогичных слагаемых в теории открытых атомных систем. И именно исходя из такой аналогии, сделан вывод, что в рассматриваемой модели двух резонансно взаимодействующих осцилляторов роль $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ не существенна.

Частоты осцилляторов, первоначально равные между собой, отличаются во втором порядке на величину порядка $|\gamma_c^2 - \gamma_r^2|\omega_c^{-1}$, чем пренебрегаем при расчете тепловых потоков, поскольку такие отличия не превышают термодинамических флуктуаций. Подчеркнем, что характерные размеры областей частот термостатных полей, участвующих в резонансном взаимодействии с выделенными осцилляторами, (ω_c) и (ω_r) порядка γ_c^2 и γ_r^2, что не меньше указанных отличий.

3. КВАНТОВОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Приведем стандартный вывод кинетического уравнения при помощи формулировки квантового СДУ на основе полученного гамильтониана. Этот вывод неоднократно применялся в случае открытых систем, состоящих из резонансно взаимодействующих атомов [30], а также в случае осцилляторов и атомов [30–32]. Наш случай отличается только учитываемыми термостатами.

В условиях марковского приближения операторы эффективного гамильтониана, описывающие взаимодействие с широкополосными полями, представляем квантовыми рождающими и уничтожающими случайными процессами, заменив суммы по частотам интегралами с бесконечными пределами:

$$H_c^{(1)}(t)\,dt = \gamma_c\left(c\,dA^\dagger(t) + c^\dagger dA(t)\right),$$

$$H_r^{(2)}(t)\,dt = -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c}\left(r\,dA^\dagger(t) + r^\dagger dA(t)\right),$$

$$H_r^{(1)}(t)\,dt = \gamma_r\left(r\,dB^\dagger(t) + r^\dagger dB(t)\right),$$

$$H_c^{(2)}(t)\,dt = -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c}\left(c\,dB^\dagger(t) + c^\dagger dB(t)\right),$$

$$dA(t) = A(t+dt) - A(t), \quad A(t) = \int_0^t dt'\,a(t'),$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i(\omega-\omega_c)t} a_\omega,$$

$$dB(t) = B(t+dt) - B(t), \quad B(t) = \int_0^t dt'\,b(t'),$$

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i(\omega-\omega_c)t} b_\omega.$$

Дифференциалы Ито стандартных квантовых случайных процессов удовлетворяют алгебре Ито [32]:

$$\begin{gathered}dA(t)\,dA^\dagger(t)=(n_c{+}1)\,dt,\;\; dA^\dagger(t)\,dA(t)=n_c dt,\\ dB(t)\,dB^\dagger(t)=(n_r{+}1)\,dt,\;\; dB^\dagger(t)\,dB(t)=n_r dt,\\ dB(t)\,dB(t)=dA(t)\,dA(t)=dA(t)\,dB(t)=\\ =dA^\dagger(t)\,dB(t)=dB(t)\,dt=\\ =dA(t)\,dt=dt\,dt=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Особо подчеркнем, что, несмотря на области формального интегрирования введенных величин, термостатные осцилляторы задействованы лишь на резонансных частотах согласно примененной алгебраической теории возмущений. Это отражают плотности фотонов термостатов n_c и n_r, отвечающих частотам соответственно ω_c и ω_r.

В результате для дифференциала Ито оператора эволюции нетрудно получить квантовое СДУ, которое запишем в безразмерном виде:

$$\begin{gathered}dU(t)=-iH^{Eff-S}(t)\,dt\,U(t)-\\ -\sum_{k=1,2}\left(\frac{n_k+1}{2}\,\overline{\gamma}_k Y_k^\dagger Y_k dt+\frac{n_k}{2}\,\overline{\gamma}_k Y_k Y_k^\dagger dt+\right.\\ \left.+\,i\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,Y_k^\dagger dB_k(t)+i\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,Y_k dB_k^\dagger(t)\right)U(t),\\ H^{Eff-S}(t)=H_{c-r}(t),\quad dB_1(t)=dA(t),\\ dB_2(t)=dB(t),\end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered}Y_1^\dagger=c^\dagger-\lambda r^\dagger,\quad Y_1=c-\lambda r,\\ Y_2^\dagger=r^\dagger-\lambda c^\dagger,\quad Y_2=r-\lambda c.\end{gathered}\tag{8}$$

Введены безразмерные величины

$$\overline{\gamma}_1=\frac{2\pi\gamma_c^2}{\hbar\omega_c^2},\quad \overline{\gamma}_2=\frac{2\pi\gamma_r^2}{\hbar\omega_c^2},\quad \lambda=\frac{g}{2\hbar\omega_c}.$$

В качестве безразмерного времени взята величина $\overline{t}=\omega_c t$, однако у переменной времени мы будем опускать черту над символом, указывающую на ее безразмерный характер. Индекс n нумерует широкополосные поля окружения системы — термостаты A и B. Через n_k обозначены плотности фотонов термостатных полей на резонансной частоте $\omega_c=\omega_r$: n_1 отвечает термостату A, n_2 отвечает термостату B. Эти плотности определяются температурами термостатов T_1 и T_2 соответственно.

Уравнение для матрицы плотности следует из стандартной цепочки преобразований:

$$d\rho(t)\equiv\rho(t+dt)-\rho(t),$$

$$\begin{gathered}\rho(t+dt)=|\Psi(t+dt)\rangle\langle\Psi(t+dt)|=\\ =U(t+dt)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(t+dt),\end{gathered}$$

$$U(t+dt)=U(t)+dU(t),$$

$$\begin{gathered}d\rho(t)=dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(t)+U(t)\times\\ \times|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^\dagger(t)+dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^\dagger(t).\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}d\rho(t)=-i\left[H^{Eff-S}(t),\rho(t)\right]\,dt-\\ -\sum_{k=1,2}\left(\frac{n_k+1}{2}\overline{\gamma}_k Y_k^\dagger Y_k dt+\frac{n_k}{2}\,\overline{\gamma}_k Y_k Y_k^\dagger dt+\right.\\ \left.+\,i\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,Y_k^\dagger dB_k(t)+i\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,Y_k dB_k^\dagger(t)\right)\rho(t)-\\ -\rho(t)\sum_{k=1,2}\left(\frac{n_k+1}{2}\overline{\gamma}_k Y_k^\dagger Y_k dt+\frac{n_k}{2}\,\overline{\gamma}_k Y_k Y_k^\dagger dt-\right.\\ \left.-\,i\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,dB_k^\dagger(t)Y_k-i\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,dB_k(t)Y_k^\dagger\right)+\\ +\sum_{k=1,2}\left(\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,Y_k^\dagger dB_k(t)+\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,Y_k dB_k^\dagger(t)\right)\rho(t)\times\\ \times\sum_{k=1,2}\left(\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,dB_k^\dagger(t)Y_k+\sqrt{\overline{\gamma}_k}\,dB_k(t)Y_k^\dagger\right).\end{gathered}$$

После усреднения по состояниям вакуумных термостатных полей,

$$\mathrm{Tr}_F\,\rho(t)=\rho^S(t),$$

$$\mathrm{Tr}_F\,\rho(t)\,dB_k^\dagger(t)\,dB_{k'}(t)=\delta_{kk'}n_k\rho^S(t)\,dt,$$

$$\mathrm{Tr}_F\,\rho(t)\,dB_{k'}(t)\,dB_k^\dagger(t)=\delta_{kk'}(n_k+1)\rho^S(t)\,dt,$$

получаем кинетическое уравнение для матрицы плотности $\rho^S(t)$ рассматриваемых двух фотонных мод ω_c и ω_r в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\rho^S(t)}{dt}=-i\left[H^{Eff-S}(t),\rho^S(t)\right]-\\ -\left\{\sum_{k=1,2}\overline{\gamma}_k\left(\frac{n_k+1}{2}\,Y_k^\dagger Y_k+\frac{n_k}{2}\,Y_k Y_k^\dagger\right)\rho^S(t)+\right.\\ \left.+\,\rho^S(t)\sum_{k=1,2}\overline{\gamma}_k\left(\frac{n_k+1}{2}\,Y_k^\dagger Y_k+\frac{n_k}{2}\,Y_k Y_k^\dagger\right)\right\}+\\ +\sum_{k=1,2}\overline{\gamma}_k n_k Y_k^\dagger\rho(t)Y_k+\sum_{k=1,2}\overline{\gamma}_k Y_k\rho(t)(n_k{+}1)Y_k^\dagger.\end{gathered}\tag{9}$$

Уравнение (9) с параметрами (8) определяет всю динамику и термодинамику рассматриваемой системы из двух осцилляторов, резонансно взаимодействующих как между собой, так и с окружающими термостатными полями. При этом средние плотности фотонов термостатных полей в силу условий алгебраической теории возмущений берутся на частотах осцилляторов, а именно $\omega_c = \omega_r$. Поэтому при численном моделировании этого уравнения, связав параметры n_k с температурами термостатов и частотами фотонов термостатов [31], нельзя произвольно оперировать со значениями частот фотонов термостатов, как делают в работе [23]. Ниже представим результаты аналитического исследования уравнения (9) в стационарном случае.

Для удобства последующего анализа введем релаксационные операторы Γ_A и Γ_B, определяющие каналы распада в термостаты A и B:

$$\frac{d\rho^S(t)}{dt} = -i\left[H^{Eff-S}(t), \rho^S(t)\right] + \\ + \hat{\Gamma}_A\rho^S(t) + \hat{\Gamma}_B\rho^S(t), \quad (9')$$

$$\hat{\Gamma}_A\rho^S(t) = -\overline{\gamma}_1 n_1 Y_1^\dagger\rho(t)Y_1 + \overline{\gamma}_1 Y_1\rho(t)(n_1+1)Y_1^\dagger + \\ + \left\{\overline{\gamma}_1\left(\frac{n_1+1}{2}\,Y_1^\dagger Y_1 + \frac{n_1}{2}\,Y_1Y_1^\dagger\right)\rho^S(t) + \right. \\ \left. + \rho^S(t)\overline{\gamma}_1\left(\frac{n_1+1}{2}\,Y_1^\dagger Y_1 + \frac{n_1}{2}\,Y_1Y_1^\dagger\right)\right\},$$

$$\hat{\Gamma}_B\rho^S(t) = -\overline{\gamma}_2 n_2 Y_2^\dagger\rho(t)Y_2 + \overline{\gamma}_2 Y_2\rho(t)(n_2+1)Y_1^\dagger + \\ + \left\{\overline{\gamma}_2\left(\frac{n_2+1}{2}\,Y_2^\dagger Y_2 + \frac{n_2}{2}\,Y_2Y_2^\dagger\right)\rho^S(t) + \right. \\ \left. + \rho^S(t)\overline{\gamma}_2\left(\frac{n_2+1}{2}\,Y_2^\dagger Y_2 + \frac{n_2}{2}\,Y_2Y_2^\dagger\right)\right\}.$$

4. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ПОТОКИ ЭНЕРГИИ

Чтобы иметь представление об энергообмене в рассматриваемой системе, вычислим средние значения энергии осцилляторов ω_c и ω_r, т. е. найдем величины $\langle c^\dagger c\rangle = \mathrm{Tr}\left(c^\dagger c\rho^S(t)\right)$ и $\langle r^\dagger r\rangle = \mathrm{Tr}\left(r^\dagger r\rho^S(t)\right)$. Оказывается, что из уравнения (9) следует замкнутая система уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\langle c^\dagger c\rangle = \mathrm{Tr}\left(c^\dagger c\frac{d\rho^S(t)}{dt}\right) = \\
&\quad = -\overline{g}Y + \overline{\gamma}_1\left(n_1 - \langle c^\dagger c\rangle + \lambda\frac{X}{2}\right) + \\
&\quad + \lambda\overline{\gamma}_2\left(\lambda n_2 - \lambda\langle c^\dagger c\rangle + \frac{X}{2}\right), \\
&\frac{d}{dt}\langle r^\dagger r\rangle = \mathrm{Tr}\left(r^\dagger r\frac{d\rho^S(t)}{dt}\right) = \\
&\quad = \overline{g}Y + \overline{\gamma}_2\left(n_2 - \langle r^\dagger r\rangle + \lambda\frac{X}{2}\right) + \\
&\quad + \lambda\overline{\gamma}_1\left(\lambda n_1 - \lambda\langle r^\dagger r\rangle + \frac{X}{2}\right), \\
&\frac{dX}{dt} = \mathrm{Tr}\left((c^\dagger r + cr^\dagger)\frac{d\rho^S(t)}{dt}\right) = \\
&= -\overline{\gamma}_1\left(2\lambda n_1 - \lambda\langle c^\dagger c\rangle - \lambda\langle r^\dagger r\rangle + (1+\lambda^2)\frac{X}{2}\right) - \\
&- \overline{\gamma}_2\left(2\lambda n_2 - \lambda\langle c^\dagger c\rangle - \lambda\langle r^\dagger r\rangle + (1+\lambda^2)\frac{X}{2}\right), \\
&\frac{dY}{dt} = \mathrm{Tr}\left(i(c^\dagger r - cr^\dagger)\frac{d\rho^S(t)}{dt}\right) = \\
&\quad = -2\overline{g}\left(\langle r^\dagger r\rangle - \langle c^\dagger c\rangle\right) - (1+\lambda^2)\left(\overline{\gamma}_1 + \overline{\gamma}_2\right)\frac{Y}{2}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) имеют стационарное решение, обладающее определенной симметрией при заменах индексов $A \leftrightarrow B$ и $1 \leftrightarrow 2$, отражающей исходную перестановочную симметрию задачи:

$$\langle c^\dagger c\rangle = \frac{\overline{\gamma}_1 n_1\left(\overline{\gamma}_2\dfrac{1}{1+\lambda^2} + 4\dfrac{\overline{g}^2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\,\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}\right) + \overline{\gamma}_2 n_2\left(\overline{\gamma}_1\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2} + 4\dfrac{\overline{g}^2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\,\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}\right)}{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2},$$

$$\langle r^\dagger r\rangle = \frac{\overline{\gamma}_2 n_2\left(\overline{\gamma}_1\dfrac{1}{1+\lambda^2} + 4\dfrac{\overline{g}^2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\,\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}\right) + \overline{\gamma}_1 n_1\left(\overline{\gamma}_2\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2} + 4\dfrac{\overline{g}^2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\,\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}\right)}{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2},$$

$$\langle X\rangle = 2\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{\dfrac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}(\overline{\gamma}_1-\overline{\gamma}_2)}{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}+\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}(n_2-n_1),\quad \langle Y\rangle = 4\frac{\overline{g}}{1+\lambda^2}\frac{\dfrac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}}{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}+\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}(n_1-n_2).$$

Теперь нетрудно определить стационарные потоки энергии в имеющиеся термостаты, состояния которых считались неизменными.

1. Поток энергии в термостаты от осциллятора ω_c. От осциллятора ω_c тепловой поток в термостат A определяется по формуле $Q_{c-A} = \hbar\omega_c \operatorname{Tr}\left(\hat{\Gamma}_A\rho^S(t)c^\dagger c\right)$. В указанной формуле для наглядности использованы размерные величины. В безразмерном виде (как его отношение к единичному кванту энергии этого осциллятора) имеем

$$\overline{Q}_{c-A} = \frac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\frac{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}+2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2}}{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}+\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}(n_1-n_2).$$

Также от осциллятора ω_c тепловой поток идет и в термостат B; этот поток вычисляется по формуле $Q_{c-B} = \hbar\omega_c \operatorname{Tr}\left(\hat{\Gamma}_B\rho^S(t)c^\dagger c\right)$. В безразмерном виде имеем

$$\overline{Q}_{c-B} = \frac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\frac{4\overline{g}^2\dfrac{1}{1+\lambda^2}+2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}+\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}(n_2-n_1).$$

2. Поток энергии в термостаты от осциллятора ω_r. В «свой» термостат B поток вычисляется по формуле $Q_{r-B} = \hbar\omega_r \operatorname{Tr}\left(\hat{\Gamma}_B\rho^S(t)r^\dagger r\right)$. В безразмерном виде его величина в точности равна величине безразмерного потока $\overline{Q}_{c-A}$, взятого с обратным знаком: $\overline{Q}_{r-B} = -\overline{Q}_{c-A}$.

Как и в случае с осциллятором ω_c, от осциллятора ω_r идет тепловой поток в «чужой» термостат, в данном случае в термостат A, который вычисляется по формуле $Q_{r-A} = \hbar\omega_r \operatorname{Tr}\left(\hat{\Gamma}_A\rho^S(t)r^\dagger r\right)$. Подчеркнем, что оба потока в «чужие» термостаты обусловлены взаимодействием между осцилляторами ω_c и ω_r, что наглядно видно на примере соответствующих слагаемых алгебраической теории возмущений. В безразмерном виде обсуждаемый поток дается выражением

$$\overline{Q}_{r-A} = \frac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\frac{4\overline{g}^2\dfrac{1}{1+\lambda^2}+2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{4\overline{g}^2\dfrac{1}{(1+\lambda^2)^2}+\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}(n_1-n_2),$$

которое равно по величине и противоположно по знаку соответствующему безразмерному потоку от осциллятора ω_c в «чужой» термостат B.

Если говорить об энергии открытой системы, то она, помимо энергий каждого из осцилляторов ω_c и ω_r, включает также энергию их взаимодействия. Нетрудно видеть, что соответствующие потоки от одного осциллятора к другому равны, так что

$$\operatorname{Tr}\left[\hat{\Gamma}_B\rho^S(t)\overline{g}\left(cr^\dagger + c^\dagger r\right)\right] = -\operatorname{Tr}\left[\hat{\Gamma}_A\rho^S(t)\overline{g}\left(cr^\dagger + c^\dagger r\right)\right] = 2\lambda\frac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}(n_2-n_1).$$

В результате имеем очевидное: сумма потоков от осцилляторов к термостатам задачи равна нулю, а направление потока (в силу равенства частот осцилляторов) определяется температурами термостата — от «горячего» к «холодному». Если горячий термостат — это термостат A, то $n_1 > n_2$. В силу рассмотренных ограничений алгебраической теории возмущений мы не вправе, как это было в работе [23], манипулировать частотами термостатных фотонов, чтобы влиять на значение величины плотности фотонов термостатов. Подчеркнем, что плотности фотонов термостатов n_1 и n_2 вычисляются на одной и той же резонансной частоте $\omega_c = \omega_r$. Таким образом, второе начало термодинамики в динамике открытой системы, состоящей из двух резонансно взаимодействующих осцилляторов, не нарушается.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы продемонстрировали применение алгебраической теории возмущений к задаче о двух резонансно взаимодействующих осцилляторах, каждый из которых резонансно связан со «своим» термостатом. Показано, что взаимодействие между осцилляторами приводит к эффективной связи осцилляторов с «чужими» термостатами. Таким образом, задача о резонансно связанных осцилляторах, каждый из которых распадается в свой термостат, в определенном смысле подобна задаче об одном осцилляторе, связанном с двумя различными термостатами. В более простой задаче также следует применить алгебраическую теорию возмущений, чтобы не иметь дела с «глобальным» подходом для получения результатов, не противоречащих второму началу термодинамики. Вкратце приведем результаты здесь.

Уравнение для матрицы плотности одного осциллятора ω_c, получаемое по изложенной в статье методике, имеет вид, полностью совпадающий с (9′), только со следующими значениями входящих операторов $H^{Eff-S}(t) = 0$ и $Y_1 = Y_2 = c$. Тогда среднее число фотонов осциллятора дается очень наглядной формулой

$$\langle c^\dagger c\rangle = \frac{\overline{\gamma}_1 n_1 + \overline{\gamma}_2 n_2}{\overline{\gamma}_1 + \overline{\gamma}_2},$$

сравнение которой с формулой в случае двух взаимодействующих осцилляторов, проясняет роль каждого слагаемого. Потоки энергии от осциллятора к термостатам, определяемые как описано выше, также имеют простые выражения

$$Q_{c-A} = \frac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\,(n_1 - n_2), \quad Q_{c-B} = \frac{\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\overline{\gamma}_1+\overline{\gamma}_2}\,(n_2 - n_1).$$

Суммарный поток $Q_{c-A} + Q_{c-B}$ при этом равен нулю, но отчетливо виден тепловой поток от горячего термостата к холодному, что подчеркивает преимущества нашего подхода перед «глобальным» подходом. В нашем подходе здесь нет взаимодействия, нет двух подсистем, нет диагонализации «глобального» подхода, а поток от горячего термостата к холодному есть. Еще раз отметим, что используемый метод не привлекает к описанию какое-либо феноменологическое моделирование процессов и явлений, а исходит исключительно из первых принципов и естественного предположения о марковости взаимодействия с термостатами.

Таким образом, мы не только продемонстрировали эффективность метода алгебраической теории возмущений [19] в новом для него классе задач, но и получили непротиворечивые результаты в задаче, которая до сих пор неоднократно обсуждалась в рамках «глобального» и «локального» подходов, неадекватных, на наш взгляд, физической постановке классической задачи о двух резонансно взаимодействующих осцилляторах, каждый из которых также резонансно связан со «своим» термостатом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Техника вычислений слагаемых эффективного гамильтониана

Удобно операторы взаимодействия с широкополосными полями записать в виде

$$V_c(t) = \gamma_c \sum_{\forall\omega\neq 0}\left(ce^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t}\right)a_\omega e^{-i\omega t},$$
$$a_{-\omega} = a_\omega^\dagger, \quad \omega > 0,$$

$$V_r(t) = \gamma_r \sum_{\forall\omega\neq 0}\left(re^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t}\right)b_\omega e^{-i\omega t},$$
$$b_{-\omega} = b_\omega^\dagger, \quad \omega > 0.$$

Тогда медленно меняющиеся во времени слагаемые имеют вид

$$V_c'(t) = \gamma_c \sum_{\omega\in(\omega_c)}\left(ca_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_c)t} + c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}\right),$$

$$V_r'(t) = \gamma_r \sum_{\omega\in(\omega_r)}\left(rb_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t} + r^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t}\right).$$

Они определяют операторы первого порядка по константам связи.

Быстро меняющиеся слагаемые можно представить в виде

$$V_c''(t) = \gamma_c \sum_{\forall\omega\notin(-\omega_c)} ca_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t} + \\ + \gamma_c \sum_{\forall\omega\notin(\omega_c)} c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t},$$

$$V_r''(t) = \gamma_r \sum_{\forall\omega\notin(-\omega_r)} rb_\omega e^{-i(\omega+\omega_r)t} + \\ + \gamma_r \sum_{\forall\omega\notin(\omega_r)} r^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t},$$

где (ω_c) — область размерами $|\omega - \omega_c| \ll \omega_c$ вблизи значения $\omega = \omega_c$, но не меньшая обратной скорости релаксации по данному каналу связи с широкополосным полем. Аналогично определяются области непрерывного спектра $(-\omega_c)$, (ω_r) и $(-\omega_r)$.

Выделение быстро и медленно меняющихся слагаемых в операторе взаимодействия между осцилляторами вообще не вызывает каких-либо особенностей в случае равенства частот осцилляторов $\omega_c = \omega_r$:

$$V_{c-r}'(t) = g\left(cr^\dagger + c^\dagger r\right),$$
$$V_{c-r}''(t) = g\left(c^\dagger r^\dagger e^{i(\omega_c+\omega_r)t} + cre^{-i(\omega_c+\omega_r)t}\right).$$

Генераторы преобразования первого порядка находятся из соотношений

$$\frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} = -\hbar^{-1}V_{c-r}''(t),$$
$$\frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} = -\hbar^{-1}V_c''(t),$$
$$\frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} = -\hbar^{-1}V_r''(t).$$

Они являются быстрыми функциями времени. В предположении адиабатического включения взаимодействий генераторы преобразования первого порядка определяются выражениями

$$S^{(1,0,0)}(t) = cr\frac{ge^{-i(\omega_c+\omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c+\omega_r)} - c^\dagger r^\dagger\frac{ge^{i(\omega_c+\omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c+\omega_r)},$$

$$S^{(0,1,0)}(t) = \gamma_c \sum_{\omega\notin(-\omega_c)} \frac{c a_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t}}{i\hbar(\omega+\omega_c)} + \gamma_c \sum_{\omega\notin(\omega_c)} \frac{c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}}{i\hbar(\omega-\omega_c)},$$

$$S^{(0,0,1)}(t) = \gamma_r \sum_{\omega\notin(-\omega_r)} \frac{r b_\omega e^{-i(\omega+\omega_r)t}}{i\hbar(\omega+\omega_r)} + \gamma_r \sum_{\omega\notin(\omega_r)} \frac{r^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega-\omega_r)}.$$

Тогда

$$\left[S^{(1,0,0)}(t), V_c''(t)\right]' = \frac{g\gamma_c}{i\hbar(\omega_c+\omega_r)} \times \sum_{\omega\in(\omega_r)} r a_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t} + \frac{g\gamma_c}{i\hbar(\omega_c+\omega_r)} \times \sum_{\omega\in(\omega_r)} r^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t},$$

$$\left[S^{(0,1,0)}(t), V_{c-r}''(t)\right]' = \gamma_c g \sum_{\omega\in(\omega_r)} \frac{a_\omega^\dagger r e^{i(\omega-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega+\omega_c)} + \gamma_c g \sum_{\omega\in(\omega_r)} \frac{a_\omega r^\dagger e^{-i(\omega-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega+\omega_c)}.$$

В результате в эффективном гамильтониане появляется слагаемое, которое описывает связь одномодового осциллятора частоты ω_r с «чужим» термостатом:

$$\tilde{H}^{(1,1,0)}(t) = -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_r)} r^\dagger c a_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t} - \frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_r)} r a_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t}.$$

Здесь мы положили $\omega_c = \omega_r \approx \omega$.

Аналогично нетрудно получить

$$\tilde{H}^{(1,0,1)}(t) = -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_c)} c^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t} - \frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_c)} b c_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_c)t}.$$

Оператор $\tilde{H}^{(0,1,1)}(t)$ описывает связь второго порядка между термостатами, не затрагивающую открытую систему, поэтому далее он не учитывается.

Другие, возможно релевантные, слагаемые второго порядка имеют вид

$$\tilde{H}^{(2,0,0)}(t) = -\frac{i}{2}\left[S^{(1,0,0)}(t), V_{c-r}''(t)\right]' = -\frac{g^2}{2\hbar\omega_c}\left(c^\dagger c + r^\dagger r + 1\right),$$

$$\tilde{H}^{(0,2,0)}(t) = -\frac{i}{2}\left[S^{(0,1,0)}(t), V_c''(t)\right]',$$

$$\begin{aligned}\left[S^{(0,1,0)}(t), V_c''(t)\right]' = &\left[\gamma_c \sum_{\omega\notin(-\omega_c)} \frac{c a_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t}}{i\hbar(\omega+\omega_c)} + \gamma_c \sum_{\omega\notin(\omega_c)} \frac{c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}}{i\hbar(\omega-\omega_c)}, \gamma_c \sum_{\forall\omega\notin(-\omega_c)} c a_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t} + \right.\\ &\left. + \gamma_c \sum_{\forall\omega\notin(\omega_c)} c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}\right] = \left[\gamma_c \sum_{\omega\notin(\omega_c)} \frac{c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}}{i\hbar(\omega-\omega_c)}, \gamma_c \sum_{\forall\omega'\notin(-\omega_c)} c a_{\omega'} e^{-i(\omega'+\omega_c)t}\right] + \\ &+ \left[\gamma_c \sum_{\omega\notin(-\omega_c)} \frac{c a_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t}}{i\hbar(\omega+\omega_c)}, \gamma_c \sum_{\forall\omega'\notin(\omega_c)} c^\dagger a_{\omega'} e^{-i(\omega'-\omega_c)t}\right].\end{aligned}$$

В результате имеем вклады $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ в эффективный гамильтониан,

$$\tilde{H}^{(0,2,0)}(t) = -\gamma_c^2(c^\dagger c + 1) \sum_{\forall\omega\notin(-\omega_c)} \frac{1}{\hbar(\omega+\omega_c)} - \gamma_c^2 \sum_{\omega\notin(-\omega_c)} \frac{a_\omega^\dagger a_{\omega'} e^{i\omega t} e^{-i\omega' t}}{2\hbar(\omega+\omega_c)} - \gamma_c^2 \sum_{\substack{\omega\notin(-\omega_c)\\ \forall\omega'\notin(-\omega_c)}} \frac{a_{\omega'}^\dagger a_\omega e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\hbar(\omega+\omega_c)},$$

а оператор $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ получается из $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ одновременными заменами нижних индексов и одноименных операторов $c \to r$ и операторов широкополосного поля $a_\omega \to b_\omega$. Операторы $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ могут быть представлены квантовыми считывающими процессами аналогично работам [30, 31, 33]. Эти процессы удовлетворяют другой алгебре дифференциалов Ито [33], обобщающей известную алгебру Хадсона – Партасарати [34]. Если воспользоваться результатами [30, 31, 33] анализа их роли наряду с винеровскими процессами, то можно констатировать, что слагаемыми $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ в рассматриваемой здесь постановке задачи следует пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Brantut, C. Grenier, J. Meineke, D. Stadler, S. Krinner, C. Kollath, T. Esslinger, and A. Georges, Science **342**, 713 (2013).

2. M. Brunelli, L. Fusco, R. Landig, W. Wieczorek, J. Hoelscher-Obermaier, G. Landi, F. L. Semio, A. Ferraro, N. Kiesel, T. Donner, G. De Chiara, and M. Paternostro, Phys. Rev. Lett. **121**, 160604 (2018).

3. R. Landig, L. Hruby, N. Dogra, M. Landini, R. Mottl, T. Donner, and T. Esslinger, Nature **532**, 476 (2016).

4. S. Krinner, T. Esslinger, and J.-P. Brantut, J. Phys.: Condens. Matter **29**, 343003 (2017).

5. M. Josefsson, A. Svilans, A. M. Burke, E. A. Hoffmann, S. Fahlvik, C. Thelander, M. Leijnse, and H. Linke, Nature Nanotechnol. **13**, 920 (2018).

6. A. Nitzan and M. A. Ratner, Science **300**, 1384 (2003).

7. Y. Dubi and M. Di Ventra, Rev. Mod. Phys. **83**, 131 (2011).

8. J. P. Pekola and I. M. Khaymovich, Ann. Rev. Condens. Matter Phys. (2018).

9. A. Levy and R. Kosloff, Phys. Rev. Lett. **108**, 070604 (2012).

10. A. Roulet, S. Nimmrichter, J. M. Arrazola, S. Seah, and V. Scarani, Phys. Rev. E **95**, 062131 (2017).

11. B. Reid, S. Pigeon, M. Antezza, and G. De Chiara, Europhys. Lett. **120**, 60006 (2017).

12. A. Hewgill, A. Ferraro, and G. De Chiara, Phys. Rev. A **98**, 042102 (2018).

13. S. Scopa, G. T. Landi, and D. Karevski, Phys. Rev. A **97**, 062121 (2018).

14. E. B. Davis, *Quantum Theory of Open Systems*, Acad. Press (1976).

15. R. S. Ingarden, A. Kossakowski, and M. Ohya, *Information Dynamics and Open Systems*: *Classical and Quantum Approach*, Springer, Netherlands (1997).

16. A. Joye, S. Attal, and Cl.-A. Pillet, *Open Quantum Systems I. The Hamiltonian Approach*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg (2005).

17. G. Schaller, *Open Quantum Systems Far from Equilibrium*, Springer Int. Publ. (2014).

18. И. Г. Ланг, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ **43**, 1843 (1962).

19. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).

20. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).

21. V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, Rep. Math. Phys. **13**, 149 (1978).

22. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, *Новый метод в теории сверхпроводимости*, Изд. АН СССР, Москва (1958).

23. A. Levy and R. Kozloff, Europhys. Lett. **107**, 20004 (2014).

24. A. S. Trushechkin and I. V. Volovich, Europhys. Lett. **113**, 30005 (2016).

25. D. F. Walls, Z. Phys. **234**, 231 (1970).

26. C. Joshi, P. Ohberg, J. D. Cresser, and E. Andersson, Phys. Rev. A **90**, 063815 (2014).

27. V. N. Bogaevski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer (1991).

28. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).

29. W. H. Louissel and L. R. Walker, Phys. Rev. **137**, B204 (1965).

30. A. M. Basharov, Phys. Rev. A **84**, 013801 (2011).

31. A. M. Basharov, Phys. Lett. A **376**, 1881 (2012).

32. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2004).

33. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **155**, 425 (2019).

34. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Comm. Math. Phys. **93**, 301 (1984).