

# ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ТРАНСПОРТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НОРМАЛЬНЫХ МЕТАЛЛАХ

С. П. Новиков<sup>a,b</sup>, Р. Де Лео<sup>c\*</sup>, И. А. Дынников<sup>b</sup>, А. Я. Мальцев<sup>a\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Department of Mathematics, Howard University  
DC 20059, Washington*

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г.,  
после переработки 18 марта 2019 г.  
Принята к публикации 19 марта 2019 г.

Представлены результаты последних исследований в теории динамических систем, связанных с движением электронов на сложных поверхностях Ферми в нормальных металлах. Рассматриваемая задача тесно связана с задачей описания электронных транспортных явлений в сильных магнитных полях и вместе с тем представляет огромный интерес с точки зрения топологии и теории динамических систем. Мы постараемся дать краткий общий обзор современного состояния данной области исследований, а также указать ряд интересных вопросов, активно изучаемых в настоящее время.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова*

DOI: 10.1134/S0044451019100195

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Мы хотели бы представить обзор современного состояния области исследований, зарождение которой произошло в 1950-х–1960-х гг. в работах научной школы И. М. Лифшица, тесно связанной в эти годы с Институтом теоретической физики им. Л. Д. Ландау. А именно, мы рассмотрим вопросы, связанные с особенностями транспортных явлений в металлах со сложными поверхностями Ферми в присутствии сильных магнитных полей. Как правило, в качестве главного примера таких явлений рассматриваются гальваномагнитные явления в нормальных металлах, хотя все рассматриваемое ниже имеет отношение также и к другим типам таких явлений (например, термотранспортным). В качестве главного приближения к описанию рассматриваемых явлений выступает кинетическое описание электронных процессов, основанное на квазиклассическом при-

ближении для электронной динамики в кристалле. Как оказывается, квазиклассическое описание динамики электронных состояний в пространстве квазиимпульсов может быть крайне нетривиальным для металлов со сложными поверхностями Ферми. Здесь мы хотели бы представить результаты исследований соответствующей динамической задачи, проводимых в течение последних десятилетий и использующих наиболее современные методы топологии и теории динамических систем. Как будет видно из приведенных результатов, на настоящее время большинство важнейших аспектов рассматриваемой задачи являются изученными весьма детально, что позволяет также дать весьма детальное описание связанных с ней физических явлений. Вместе с тем, можно также указать ряд интереснейших проблем, связанных с рассматриваемой задачей и активно исследуемых в настоящее время.

Все приводимое ниже будет относиться к металлам со сложными поверхностями Ферми, при этом металлические образцы будут полагаться монокристаллическими, а также достаточно чистыми и имеющими достаточно низкую температуру, так что

\* R. De Leo

\*\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

время свободного пробега электронов в металле  $\tau$  может полагаться довольно большим. Металлический образец будет предполагаться помещенным в постоянное внешнее магнитное поле, величина которого удовлетворяет условию  $\omega_{B\tau} \gg 1$ , где  $\omega = eB/m^*c$  играет роль электронной циклотронной частоты в металле. Надо сказать, в действительности, что как величина  $m^* \approx p_F/v_F$ , так и величина  $\omega_B$  имеют здесь несколько формальный смысл, поскольку спектр электрона в кристалле задается в общем случае произвольной 3-периодической функцией  $\epsilon(\mathbf{p})$  с периодами, равными периодам обратной решетки. Изменение электронного состояния в присутствии магнитного поля задается адиабатической системой в пространстве квазиимпульсов (см., например, [1–3])

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \equiv \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}], \quad (1.1)$$

имеющей, вообще говоря, траектории самой различной геометрии (что и будет главной тематикой, обсуждаемой в данной работе). Можно говорить при этом, что магнитное поле  $B$  является достаточно сильным, если электрон успевает пройти много раз по типичным замкнутым траекториям системы (1.1) или проходит достаточно большое расстояние (много больше  $p_F$ ) по открытым траекториям той же системы между двумя актами рассеяния на примесях.

Как нетрудно видеть, система (1.1) сохраняет как значение энергии электронного состояния  $\epsilon(\mathbf{p})$ , так и проекцию квазиимпульса вдоль направления магнитного поля. Как следствие этого, траектории системы (1.1) в  $\mathbf{p}$ -пространстве геометрически задаются пересечениями поверхностей постоянной энергии  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  с плоскостями, ортогональными магнитному полю.

Можно также выписать квазиклассическую систему, описывающую движение электронного волнового пакета в координатном пространстве

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \equiv \nabla \epsilon(\mathbf{p}). \quad (1.2)$$

Как также нетрудно видеть, траектории системы (1.2) определяются в действительности траекториями системы (1.1), в частности, их проекции на плоскость, ортогональную  $\mathbf{B}$ , подобны траекториям системы (1.1), повернутым на  $90^\circ$ . Траектории системы (1.2) не являются, вообще говоря, плоскими и описывают также движение вдоль направления  $\mathbf{B}$ , определяемое соответствующими значениями групповой скорости  $\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})$ .

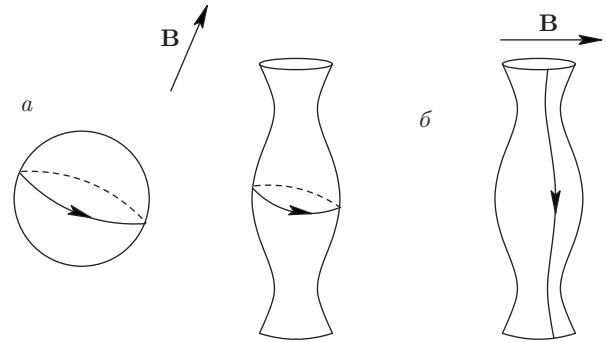


Рис. 1. Замкнутые (а) и периодические (б) траектории системы (1.1), возникающие на поверхностях Ферми различной формы

Главную роль при рассмотрении транспортных электронных явлений в металлах играет поверхность Ферми, определяемая уравнением

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$$

и представляющая собой 3-периодическую поверхность в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Можно видеть, таким образом, что сложность поведения транспортных явлений в сильных магнитных полях определяется во многом сложностью поверхности Ферми металла. Это важнейшее свойство транспортных явлений в сильных магнитных полях было впервые отмечено в пионерской работе [4], где были рассмотрены два принципиально различных типа траекторий системы (1.1) на различных поверхностях Ферми. А именно, в работе [4] были рассмотрены вклады в магнитопроводимость, возникающие от замкнутых и периодических траекторий системы (1.1) (рис. 1), и показано, что в главном порядке по значению параметра  $\omega_{B\tau} \gg 1$  они могут быть представлены в виде

$$\sigma^{kl} \approx \frac{ne^2\tau}{m^*} \times \begin{pmatrix} (\omega_{B\tau})^{-2} & (\omega_{B\tau})^{-1} & (\omega_{B\tau})^{-1} \\ (\omega_{B\tau})^{-1} & (\omega_{B\tau})^{-2} & (\omega_{B\tau})^{-1} \\ (\omega_{B\tau})^{-1} & (\omega_{B\tau})^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$\omega_{B\tau} \rightarrow \infty$

(замкнутые траектории),

$$\sigma^{kl} \approx \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_{B\tau})^{-2} & (\omega_{B\tau})^{-1} & (\omega_{B\tau})^{-1} \\ (\omega_{B\tau})^{-1} & * & * \\ (\omega_{B\tau})^{-1} & * & * \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$\omega_{B\tau} \rightarrow \infty$

(открытые периодические траектории).

Формулы (1.3), (1.4) представляют собой порядок величин  $\sigma^{kl}(B)$  в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ . В частности, предполагается, что каждый из матричных элементов имеет в действительности некоторый постоянный безразмерный коэффициент, так же как обозначения «\*» представляют некоторые безразмерные величины порядка единицы. Как нетрудно видеть, главным различием вклада замкнутых и периодических траекторий в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  является сильная анизотропия проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , возникающая во втором случае. Здесь и далее мы всегда будем полагать, что ось  $z$  выбрана вдоль направления магнитного поля. В формуле (1.4) мы также предполагаем, что ось  $x$  выбрана вдоль среднего направления периодических открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

В работах [5, 6] были рассмотрены более общие примеры открытых траекторий системы (1.1), также обладающие сильно анизотропными свойствами. Множество вопросов, связанных с геометрией поверхности Ферми и связанных с ней физических явлений, рассматривавшихся в указанный (а также более поздний) период, представлено в работах [7–10], а также в книгах [1–3, 11, 12].

В настоящей работе мы приведем обзор более поздних результатов, основанных на детальных топологических исследованиях структуры системы (1.1) для произвольного дисперсионного закона  $\epsilon(\mathbf{p})$  и направления магнитного поля. Задача полной классификации всевозможных траекторий системы (1.1) была впервые поставлена Новиковым в работе [13], где также были проведены первые ее исследования в общей постановке. В течение последующих десятилетий эта задача интенсивно исследовалась в топологической школе С. П. Новикова (С. П. Новиков, А. В. Зорич, С. П. Царев, И. А. Дынников), что привело к ряду довольно глубоких математических результатов, позволивших, в конечном итоге, получить к настоящему моменту ответы на большинство связанных с ней важнейших вопросов.

При описании траекторий системы (1.1) важнейшую роль играет описание ее устойчивых открытых траекторий, полученное в работах [14–16]. Особенно важную роль при этом играет в действительности топологическая структура поверхности Ферми, возникающая на ней при появлении устойчивых открытых траекторий системы (1.1) и приводящая к наличию замечательных геометрических свойств у таких траекторий. Как было отмечено в работах [17, 18], устойчивые открытые траектории (1.1) обладают также важными топологическими характеристиками (топологическими числами), непосред-

ственно наблюдаемыми в транспортных явлениях в сильных магнитных полях. Соответствующие топологические характеристики выражаются при этом целыми числами и являются локально устойчивыми при малых изменениях направления магнитного поля. В самом общем случае, все устойчивые открытые траектории для заданной поверхности Ферми (или всего дисперсионного закона [19]) могут быть в действительности разделены на семейства, соответствующие различным значениям указанных топологических характеристик и представленные определенными зонами устойчивости на диаграмме направлений магнитного поля. Общая структура зон устойчивости на угловой диаграмме проводимости металла может быть при этом крайне нетривиальной, что приводит в общем случае к большому разнообразию эффектов, наблюдаемых экспериментально (см., например, [19–32]). В следующем разделе мы постараемся привести по возможности наиболее детальный обзор вопросов, связанных с поведением устойчивых открытых траекторий системы (1.1), а также физических явлений, обусловленных различной структурой угловых диаграмм для металлов с произвольными поверхностями Ферми.

Устойчивые открытые траектории, однако, не являются единственным примером нетривиальных траекторий системы (1.1), и на достаточно сложных поверхностях Ферми могут возникать также траектории совершенно другого типа, обладающие гораздо более сложным («хаотическим») поведением как на поверхности Ферми, так и в накрывающем  $\mathbf{p}$ -пространстве. Первый пример таких траекторий был построен Царевым [33]. Надо сказать, что траектории, построенные Царевым, также имеют свои особые свойства и образуют в действительности отдельный класс открытых траекторий системы (1.1), представляющий существенную часть общей классификации ее траекторий.

Еще более сложные примеры хаотических траекторий, появляющихся на достаточно сложных поверхностях Ферми, были построены Дынниковым [34]. Траектории типа траекторий Дынникова обладают наиболее сложным поведением, что имеет также яркое проявление в поведении транспортных электронных явлений в сильных магнитных полях (см. [35, 36]). Общие свойства хаотических траекторий Дынникова, а также структура множеств, на которых они возникают, представляют в настоящее время предмет интенсивных исследований в теории динамических систем (см. [37–53]). Так же как и траектории Царева, траектории Дынникова могут быть отнесены к специальному классу траекторий систе-

мы (1.1), представляющему важную составляющую общей классификации всех ее траекторий. В разд. 3 мы постараемся дать обзор результатов, относящихся к хаотическим траекториям системы (1.1) и связанным с ними физическими явлениями в сильных магнитных полях.

## 2. УСТОЙЧИВЫЕ ОТКРЫТЫЕ ТРАЕКТОРИИ И УГЛОВЫЕ ДИАГРАММЫ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Мы начнем данную главу с описания структуры поверхности Ферми при возникновении на ней устойчивых открытых траекторий системы (1.1). Отметим прежде всего, что поверхность Ферми может рассматриваться двояким образом. А именно, с одной стороны, поверхность Ферми может рассматриваться как 3-периодическая поверхность в  $\mathbf{p}$ -пространстве, задаваемая уравнением  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ . При этом мы должны помнить, однако, что точки поверхности Ферми, различающиеся на векторы обратной решетки, задают одно и то же электронное состояние. С другой стороны,  $\mathbf{p}$ -пространство и поверхность Ферми могут быть профакторизованы по векторам обратной решетки и могут рассматриваться как компактные многообразия. Полная зона Бриллюэна будет представлять собой при этом трехмерный тор  $\mathbb{T}^3$ , а поверхность Ферми — гладкую компактную двумерную поверхность  $S_F$ , вложенную в  $\mathbb{T}^3$ . Как абстрактная компактная поверхность поверхность Ферми обладает при этом фиксированным родом  $g \geq 0$  и диффеоморфна канонической двумерной поверхности соответствующего рода (рис. 2). Кроме того, вложение поверхности Ферми в  $\mathbb{T}^3$  (или ее представление в виде периодической поверхности в  $\mathbf{p}$ -пространстве) может быть охарактеризовано топологическим рангом, могущим принимать значения 0, 1, 2 или 3 (рис. 3). Нам здесь будут интересны, прежде всего, наиболее сложные поверхности Ферми, поэтому мы будем, как правило, подразумевать, что рассматриваемая поверхность Ферми имеет ранг 3. Можно также показать, что род такой поверхности должен удовлетворять соотношению  $g \geq 3$ .

Начнем с того, что удалим из поверхности Ферми все замкнутые (сингулярные и несингулярные) траектории системы (1.1) и рассмотрим оставшуюся ее часть, несущую открытые траектории. В общем случае, все несингулярные замкнутые траектории (1.1) на поверхности Ферми будут образовывать конечное число (неэквивалентных) цилиндров,

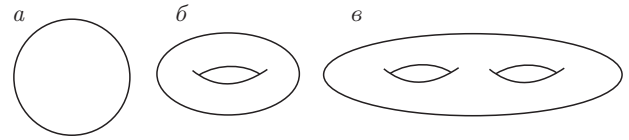


Рис. 2. Канонические компактные поверхности, имеющие род 0 (а), 1 (б), 2 (в) (и т. д.)

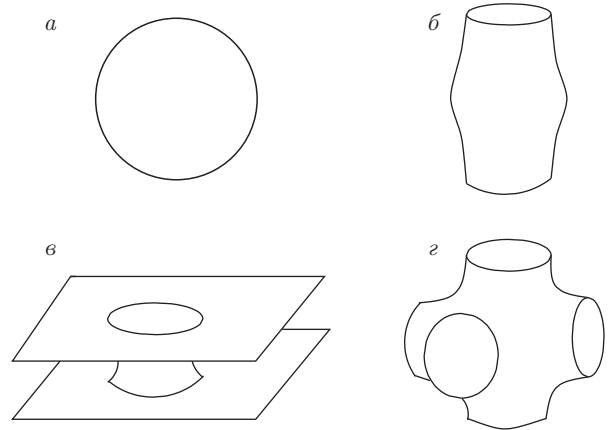


Рис. 3. Примеры поверхностей Ферми в  $\mathbf{p}$ -пространстве ранга 0 (а), 1 (б), 2 (в), 3 (з)

ограниченных сингулярными траекториями (1.1) на своих основаниях (частным случаем такого основания может быть также единственная узловая особая точка системы (1.1)). После такого удаления оставшаяся часть поверхности Ферми также будет представлена конечным числом (неэквивалентных) компонент с отверстиями, ограниченными сингулярными траекториями системы (1.1). Мы можем называть получаемую таким образом совокупность двумерных компонент с отверстиями редуцированной поверхностью Ферми, соответствующей заданному направлению магнитного поля.

При описании устойчивых открытых траекторий системы (1.1) мы можем полагать, что направление  $\mathbf{B}$  является полностью иррациональным, т.е. плоскость, ортогональная  $\mathbf{B}$ , не содержит векторов обратной решетки. Важнейшим свойством редуцированной поверхности Ферми при наличии устойчивых открытых траекторий системы (1.1) является то, что каждая ее связная компонента представляет собой двумерный тор с отверстиями, вложенный в  $\mathbb{T}^3$  [14, 16]. Возвращаясь к расширенному  $\mathbf{p}$ -пространству, можно также сформулировать эти свойства так, что каждая связная компонента редуцированной поверхности Ферми представляет собой целочисленную (порожденную двумя векторами об-

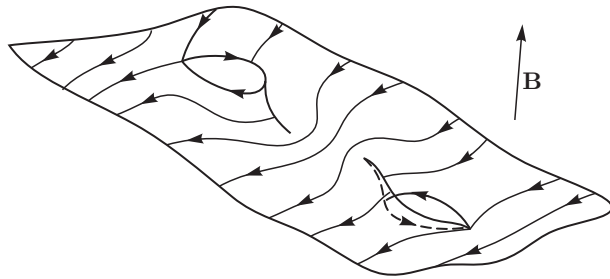


Рис. 4. Связная компонента редуцированной поверхности Ферми в  $\mathbf{p}$ -пространстве, несущая устойчивые открытые траектории системы (1.1)

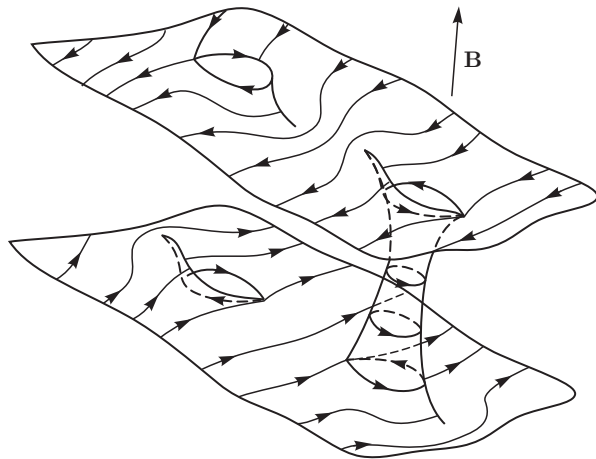


Рис. 5. Общая структура поверхности Ферми в  $\mathbf{p}$ -пространстве, несущая устойчивые открытые траектории системы (1.1) (схематично)

ратной решетки) периодически деформированную плоскость с отверстиями, вложенную в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 4).

В целом, полная поверхность Ферми в описанной ситуации может быть представлена в случае общего положения в виде набора четного числа (неэквивалентных) целочисленных плоскостей в  $\mathbf{p}$ -пространстве, соединенных компонентами, состоящими из цилиндров замкнутых траекторий системы (1.1) конечной высоты (рис. 5). Такая структура поверхности Ферми является локально устойчивой по отношению к малым вращениям направления  $\mathbf{B}$ , а также к малым вариациям уровня Ферми  $\epsilon_F$ . При этом поверхность Ферми будет иметь различные описанные выше представления для направлений  $\mathbf{B}$ , лежащих в различных зонах устойчивости на угловой диаграмме (на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ ).

Что касается устойчивых открытых траекторий системы (1.1), можно видеть, что они в описанной ситуации должны обладать следующими двумя замечательными свойствами:

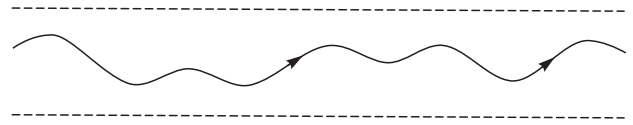


Рис. 6. Вид устойчивой открытой траектории в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , в расширенном  $\mathbf{p}$ -пространстве

- 1) каждая устойчивая открытая траектория системы (1.1) (в  $\mathbf{p}$ -пространстве) лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , проходя ее насквозь (рис. 6) (см. также [15]);
- 2) среднее направление всех устойчивых открытых траекторий одинаково при заданном направлении  $\mathbf{B}$  и дается пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , и некоторой (локально) фиксированной целочисленной плоскости  $\Gamma$  в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Геометрические свойства устойчивых открытых траекторий системы (1.1) имеют самое непосредственное отношение к транспортным явлениям в металле в сильных магнитных полях. Так же, как и в случае периодических открытых траекторий, тензор проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , обладает здесь сильной анизотропией в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$ . Общее свойство полного тензора проводимости

$$\sigma^{ik} \approx \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & * & * \\ o(1) & * & * \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$\omega_{BT} \rightarrow \infty,$

позволяет при этом определить среднее направление открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве как направление наибольшего подавления проводимости (в  $\mathbf{x}$ -пространстве) в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ . Устойчивость открытых траекторий по отношению к малым вращениям направления  $\mathbf{B}$  позволяет определить также целочисленную плоскость  $\Gamma$  как плоскость, содержащую направления наибольшего подавления проводимости для всех направлений  $\mathbf{B}$ , лежащих в соответствующей зоне устойчивости  $\Omega$  (на единичной сфере).

Наблюдаемая экспериментально плоскость  $\Gamma$  порождена некоторыми двумя векторами обратной решетки и, в частности, не обязана совпадать с какой-либо из кристаллографических плоскостей. Вместо этого она ортогональна одному из кристаллографических направлений образца и может, таким образом, быть задана несократимой тройкой целых чисел  $(M^1, M^2, M^3)$ . Целочисленные параметры  $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$  плоскостей  $\Gamma_\alpha$  для каждой из зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  были введены в работе [17] как



важные топологические характеристики, наблюдаемые в проводимости нормальных металлов. Полный набор топологических чисел ( $M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3$ ), а также геометрия соответствующих зон устойчивости представляют собой важные характеристики электронного спектра в кристалле. Отметим здесь, что зона устойчивости  $\Omega_\alpha$  может быть определена либо как связная область (на  $S^2$ ), отвечающая заданному семейству устойчивых открытых траекторий (1.1), либо как полный набор всех таких областей, соответствующих одной и той же целочисленной тройке ( $M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3$ ). Довольно часто бывает удобным второе определение, которое, в частности, относит к одной и той же зоне диаметрально противоположные области на единичной сфере.

Возвращаясь к полной структуре поверхности Ферми при наличии на ней устойчивых открытых траекторий системы (1.1), можно утверждать, как мы уже сказали, что для направлений  $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$  общего положения поверхность Ферми может быть представлена в виде четного набора (неэквивалентных) деформированных целочисленных плоскостей с отверстиями, соединенных компонентами конечной высоты, несущими замкнутые траектории системы (1.1). Как можно также видеть, в «физически реалистичной» ситуации каждая из таких компонент должна представлять собой в действительности простой цилиндр, состоящий из замкнутых траекторий и ограниченный сингулярными траекториями на своих основаниях (рис. 5). Такая структура позволяет в действительности сказать несколько больше о траекториях системы (1.1) для направлений  $\mathbf{V}$ , лежащих внутри какой-либо из зон устойчивости, а также вблизи нее (см., например, [19, 29–31]).

Действительно, можно отметить, прежде всего, что указанная структура на поверхности Ферми должна приводить к появлению периодических открытых траекторий при  $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$  всякий раз, когда пересечение плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$  и соответствующей плоскости  $\Gamma_\alpha$ , имеет рациональное направление в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Как следствие этого, в каждой зоне  $\Omega_\alpha$  можно в действительности указать всюду плотное множество (состоящее из сегментов больших кругов) направлений  $\mathbf{V}$ , соответствующее появлению периодических открытых траекторий системы (1.1). Периодические траектории, в отличие от траекторий общего положения, не являются всюду плотными на носителях открытых траекторий, что приводит в действительности к несколько другим значениям проводимости для соответствующих направлений  $\mathbf{V}$  в пределе  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ . Как следствие

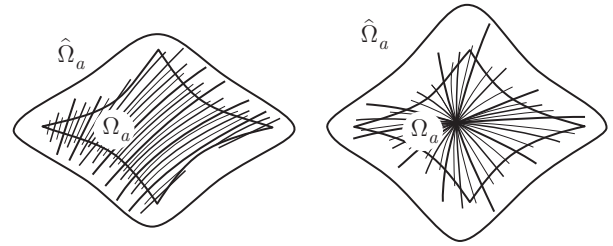


Рис. 7. «Экспериментально наблюдаемые» зоны устойчивости в экспериментах по прямым измерениям проводимости в сильных магнитных полях

этого, угловая зависимость тензора проводимости при  $\mathbf{V}/B \in \Omega_\alpha$  имеет некоторую иррегулярность, что может вносить определенный элемент случайности в экспериментальные данные при измерении проводимости. Кроме того, как можно также показать, при описанной структуре поверхности Ферми периодические открытые траектории системы (1.1) существуют также на продолжениях указанных выше сегментов больших кругов за пределы зоны устойчивости. Последнее обстоятельство, вместе с появлением длинных замкнутых траекторий для близких направлений  $\mathbf{V}$ , приводит к тому, что «экспериментально наблюдаемая» зона устойчивости  $\hat{\Omega}_\alpha$  при прямых измерениях проводимости оказывается несколько больше точной математической зоны даже в достаточно сильных магнитных полях (рис. 7). В общем и целом, аналитические свойства тензора проводимости в «экспериментально наблюдаемой» зоне устойчивости могут быть достаточно сложными (см. [29]).

Вместе с тем, границы точных математических зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  являются также экспериментально наблюдаемыми при соответствующей постановке эксперимента. Данное обстоятельство связано с тем, что граница зоны  $\Omega_\alpha$  связана с определенной перестройкой траекторий системы (1.1) и разрушением структуры, показанной на рис. 5, при соответствующих направлениях  $\mathbf{V}$ . А именно, на границе любой из зон  $\Omega_\alpha$  происходит обращение в нуль высоты одного из цилиндров замкнутых траекторий, соединяющего носители открытых траекторий, и его последующее исчезновение после пересечения границы  $\Omega_\alpha$ . Исчезновение любого из таких цилиндров замкнутых траекторий может быть при этом обнаружено экспериментально, например, при исследовании осцилляционных явлений (классических или квантовых) в металле в сильных магнитных полях (см., например, [30]). Как мы увидим ниже, именно структура точных математических зон устойчивос-

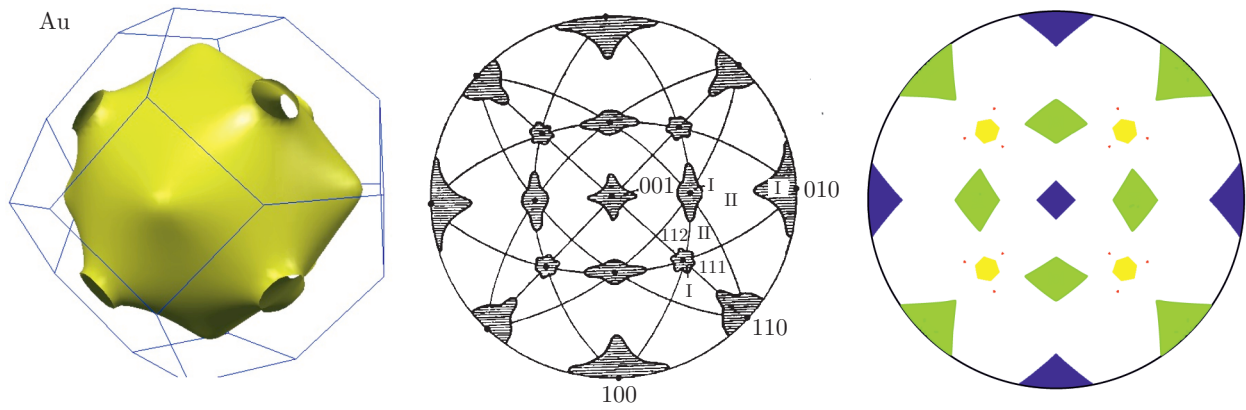


Рис. 8. Форма поверхности Ферми золота, экспериментально измеренные зоны устойчивости [54] и зоны устойчивости, полученные в результате прецизионных численных вычислений [25, 26]

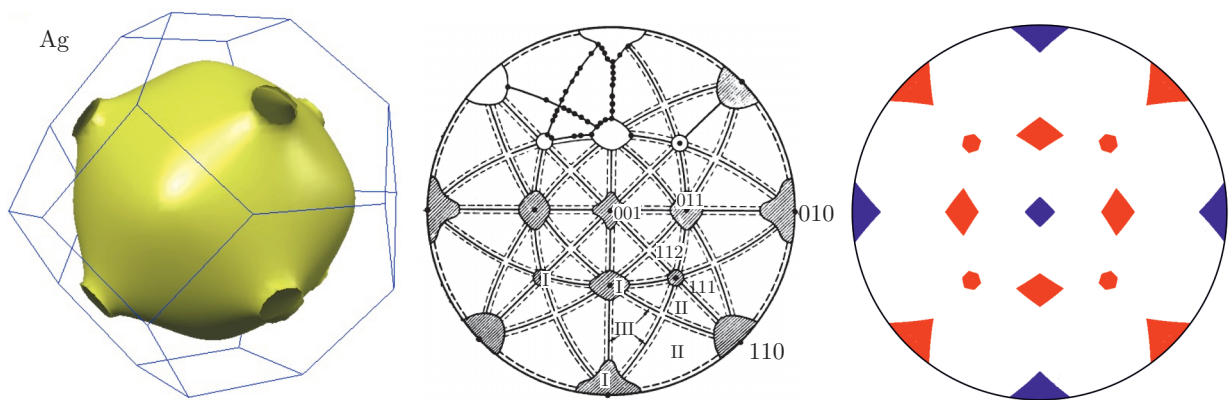


Рис. 9. Форма поверхности Ферми серебра, экспериментально измеренные зоны устойчивости [55] и зоны устойчивости, полученные в результате прецизионных численных вычислений [25, 26]

ти является наиболее интересной для металлов со сложными поверхностями Ферми с точки зрения ее математического описания.

Еще одной важной особенностью структуры, приведенной на рис. 5, является то, что пересечение границы зоны  $\Omega_\alpha$  приводит в действительности лишь к частичному ее разрушению. Действительно, можно видеть, что исчезновение лишь одного из цилиндров замкнутых траекторий не дает полного исчезновения этой структуры, поскольку поверхность Ферми остается при этом разбитой на разделенные оставшимися цилиндрами замкнутых траекторий пары «слившихся» бывших носителей открытых траекторий. Таким образом, для полного исчезновения структуры, представленной на рис. 5, необходимо исчезновение хотя бы еще одного цилиндра замкнутых траекторий, делающее возможным «перескоки» траекторий между парами «слившихся»

бывших носителей. Можно видеть, таким образом, что для каждой из зон  $\Omega_\alpha$  естественно ввести еще одну (вторую) границу (вообще говоря, не совпадающую с границей «экспериментально наблюдаемой» зоны  $\hat{\Omega}_\alpha$ ), соответствующую полному исчезновению описанной структуры. В области  $\Omega'_\alpha$ , ограниченной первой и второй границами зоны  $\Omega_\alpha$ , траектории системы (1.1) также поддаются эффективному описанию на основе структуры, возникающей в зоне  $\Omega_\alpha$ , что позволяет также дать описание основных физических явлений, связанных с геометрией траекторий системы (1.1) [31]. Отметим здесь, что, в отличие от зон  $\Omega_\alpha$ , различные зоны  $\Omega'_\alpha, \Omega'_\beta$  могут пересекаться друг с другом.

Описанная структура системы (1.1) на поверхности Ферми при наличии устойчивых открытых траекторий явилась также основой для построения численных методов исследования этой системы в об-

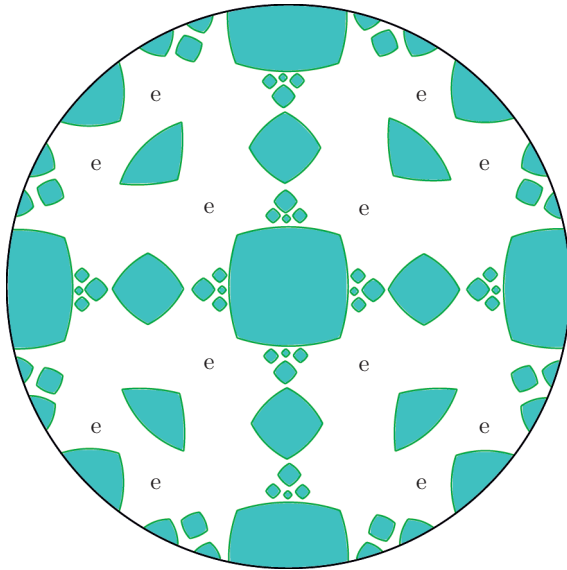


Рис. 10. Пример диаграммы типа А (очень схематично) с одним и тем же типом поведения холловской проводимости (электронным) вне зон устойчивости

щем случае и вычисления структуры зон устойчивости в особенно сложных примерах (см., например, [20, 24–26]). А именно, исследование топологии циклов, задаваемых замкнутыми траекториями (1.1) на поверхности Ферми, позволяет эффективно описать глобальную структуру траекторий даже при весьма сложной геометрии поверхности Ферми и наличии зон устойчивости весьма малых размеров. На рис. 8, 9 приведены картины зон устойчивости для поверхностей Ферми золота и серебра, полученные экспериментально и вычисленные на основе топологических методов, приведенных выше. Как можно видеть, численные методы существенно уточняют картину зон устойчивости, в частности, существенно уточняют границы экспериментально измеренных зон. На диаграмме рис. 8 можно, кроме точных зон устойчивости, обнаруженных экспериментально, видеть также наличие (весьма малых) дополнительных зон, не обнаруженных ранее в экспериментах.

Отмечая возможную сложность угловых диаграмм для проводимости, можно специально отметить, что все нетривиальные (содержащие зоны устойчивости) угловые диаграммы для нормальных металлов можно в действительности разделить на 2 различных типа [31, 32]. Тип диаграммы определяется при этом, исходя из поведения холловской проводимости для направлений  $\mathbf{V}$ , лежащих вне зон устойчивости, однако, именно это поведение оказы-

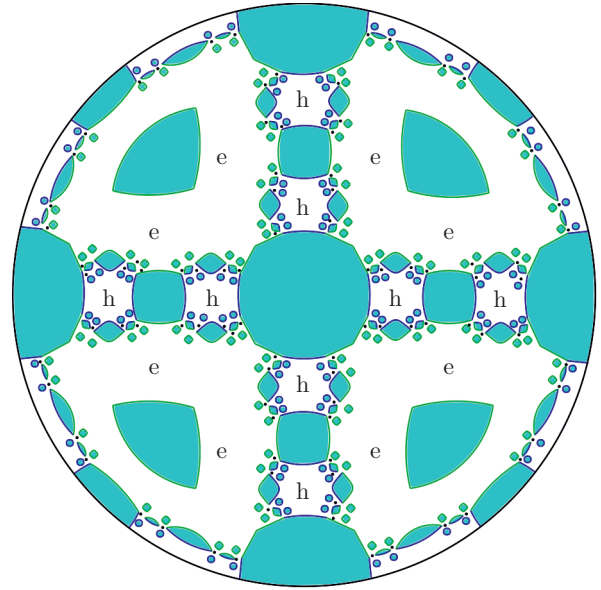


Рис. 11. Пример диаграммы типа В (очень схематично, показано лишь конечное число зон устойчивости и «хаотических» направлений  $\mathbf{V}$ ) с различными типами холловской проводимости (электронным и дырочным) в различных областях вне зон устойчивости

вает, как правило, наиболее важное влияние на общую сложность угловой диаграммы. Более точно, диаграммы, для которых холловская проводимость имеет одно и то же значение везде вне зон устойчивости (при заданной величине  $B$ ,  $\omega_{BT} \gg 1$ ), можно отнести к типу А. Напротив, диаграммы, на которых существуют области вне зон устойчивости с различными значениями холловской проводимости (часто с различными типами проводимости, электронной и дырочной), относятся к типу В (рис. 10, 11). Предположительно, диаграммы типа А являются наиболее распространенными среди всех диаграмм для реальных веществ, однако, они являются априори более простыми, нежели диаграммы типа В. В частности, диаграмма типа В содержит в случае общего положения бесконечное число зон устойчивости со сколь угодно большими значениями топологических чисел, в то время как для диаграмм типа А наличие бесконечного числа зон устойчивости является исключительным случаем (см. [32]).

Рассматривая устойчивые открытые траектории системы (1.1) и соответствующие им зоны устойчивости в пространстве направлений  $\mathbf{V}$ , нельзя не сказать здесь о возможности введения общей угловой диаграммы для всего дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , описывающей поведение открытых траекторий (1.1) на всех энергетических уровнях



$\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  одновременно [19]. Возможность введения такой диаграммы базируется на следующих важных утверждениях о траекториях системы (1.1), доказанных в работе [19].

Рассмотрим произвольное 3-периодическое дисперсионное соотношение  $\epsilon(\mathbf{p})$  и соответствующие ему системы (1.1), возникающие для различных направлений  $\mathbf{V}$ . Тогда верны следующие утверждения:

1) для каждого направления  $\mathbf{V}$  открытые траектории системы (1.1) существуют либо в замкнутом энергетическом интервале  $\epsilon \in [\epsilon_1(\mathbf{V}/B), \epsilon_2(\mathbf{V}/B)]$ , либо на единственном энергетическом уровне  $\epsilon = \epsilon_0(\mathbf{V}/B) = \epsilon_1(\mathbf{V}/B) = \epsilon_2(\mathbf{V}/B)$ ;

2) всякий раз, когда открытые траектории системы (1.1) возникают в конечном энергетическом интервале  $[\epsilon_1(\mathbf{V}/B), \epsilon_2(\mathbf{V}/B)]$ , все несингулярные открытые траектории лежат в прямых полосах конечной ширины в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , проходя их насквозь;

3) для направлений  $\mathbf{V}$  общего положения значения функций  $\epsilon_1(\mathbf{V}/B)$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V}/B)$  совпадают со значениями некоторых непрерывных функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$ , определенных всюду на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ . Для специальных направлений  $\mathbf{V}$ , таких что плоскость, ортогональная  $\mathbf{V}$ , содержит вектор обратной решетки, значения  $\epsilon_1(\mathbf{V}/B)$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V}/B)$  могут не совпадать с  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B)$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$  (если данное направление  $\mathbf{V}$  соответствует появлению периодических траекторий системы (1.1)). При этом мы всегда имеем соотношения

$$\epsilon_1(\mathbf{V}/B) \leq \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B), \quad \epsilon_2(\mathbf{V}/B) \geq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B).$$

4) Для направлений  $\mathbf{V}$  общего положения, таких что  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B) < \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$ , все несингулярные открытые траектории (1.1) имеют одно и то же среднее направление в  $\mathbf{p}$ -пространстве, задаваемое пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и некоторой целочисленной (порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскости  $\Gamma$ , неизменной при малых вращениях направления  $\mathbf{V}$ . Плоскость  $\Gamma$ , таким образом, является постоянной для любой связной области на  $\mathbb{S}^2$ , где выполняется соотношение  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B) < \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$ . Максимальные (открытые) связные области  $\Omega_\alpha$ , удовлетворяющие указанному выше условию, можно назвать зонами устойчивости для всего дисперсионного закона  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Каждая зона устойчивости имеет кусочно-гладкую границу, на которой выполняются соотношения  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}/B) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}/B)$ . Каждой из зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  соответствует при этом некоторая целочисленная плоскость  $\Gamma_\alpha$ , определяемая приведенными выше условиями.

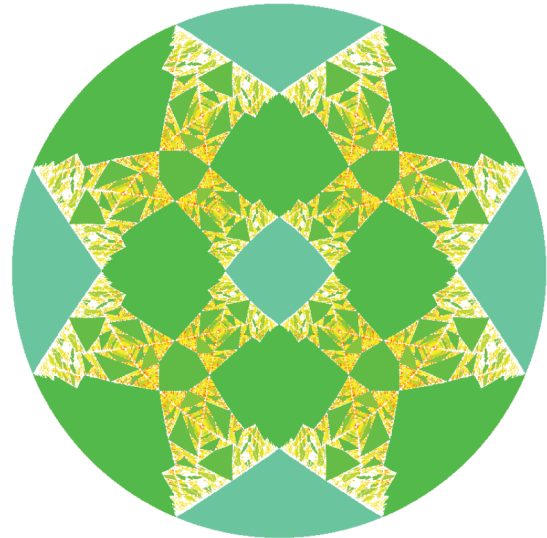


Рис. 12. (В цвете онлайн) Пример сложной угловой диаграммы для дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p}) = \cos x \cos y + \cos y \cos z + \cos z \cos x$  (показано лишь конечное число зон устойчивости (цветом) в порядке возрастания соответствующих топологических чисел [51])

5) Совокупность всех зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  образует всюду плотное открытое множество на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ .

Можно также отметить, что все угловые диаграммы для дисперсионного соотношения можно разделить на два класса, а именно:

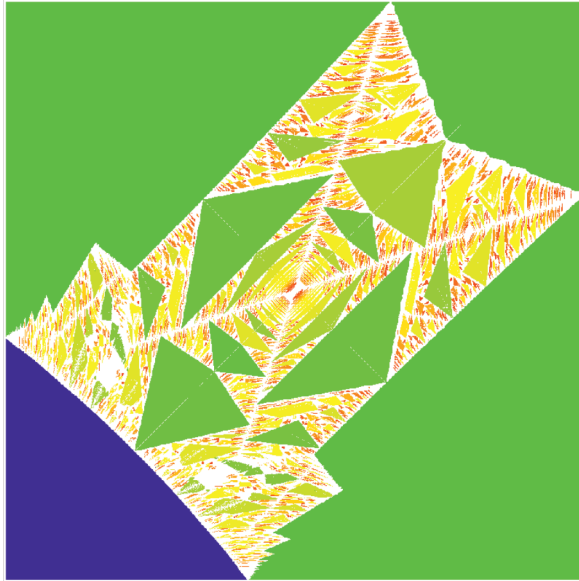
- 1) сложные диаграммы, содержащие бесконечное число зон устойчивости (рис. 12);
- 2) простые диаграммы, содержащие единственную зону устойчивости, заполняющую всю сферу  $\mathbb{S}^2$ .

Для сложных угловых диаграмм, описанных выше, большой интерес представляет также структура множества

$$\mathbb{S}^2 \setminus \cup \overline{\Omega_\alpha}.$$

Данное множество представляет собой множество направлений  $\mathbf{V}$ , для которых возникают «хаотические» траектории системы (1.1), которые мы обсудим в следующей главе. Структура данного множества, в действительности, является весьма сложной (фрактальной, рис. 13). Согласно гипотезе Новикова [23], для дисперсионных законов общего положения Хаусдорфова размерность этого множества строго меньше двух.

Как можно видеть, структура угловых диаграмм для всего дисперсионного закона является в большинстве случаев гораздо более сложной, нежели структура угловых диаграмм для фиксированной поверхности Ферми. Интересно обратить внимание,



**Рис. 13.** Фрактальная структура множества «хаотических» направлений  $\mathbf{V}$  (дополнение к зонам устойчивости) на угловой диаграмме

однако, на то, что существуют также специальные поверхности Ферми, угловые диаграммы для которых совпадают с угловыми диаграммами для всего дисперсионного закона [20]. Например, такой поверхностью является поверхность

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0,$$

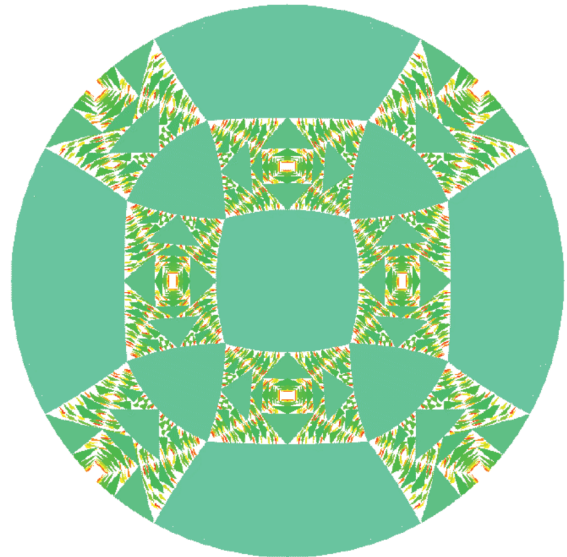
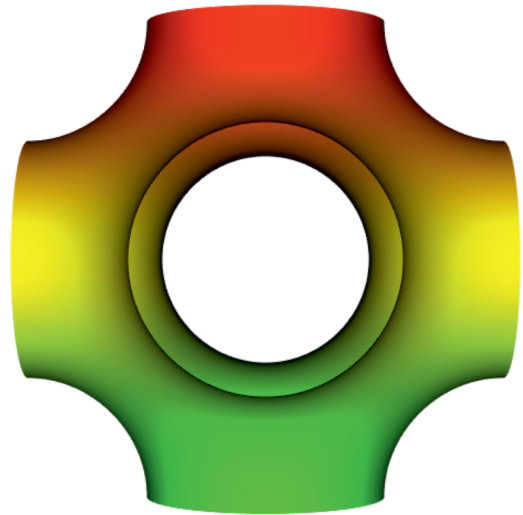
угловая диаграмма для которой (частично) приведена на рис. 14.

Отметим здесь также, что угловые диаграммы для всего дисперсионного закона являются до некоторой степени абстрактными с точки зрения теории нормальных металлов. Не исключено, однако, что существует некоторая возможность наблюдения таких диаграмм в полупроводниковых монокристаллах в присутствии сверхсильных магнитных полей [56].

### 3. ХАОТИЧЕСКИЕ ОТКРЫТЫЕ ТРАЕКТОРИИ СИСТЕМЫ (1.1)

Мы рассмотрим здесь открытые траектории системы (1.1), отличающиеся от рассмотренных в предыдущем разделе, и связанные с ними физические явления.

Как мы уже указывали во Введении, первые примеры такого типа были построены Царевым в 1992 г. Мы здесь опишем лишь общие свойства траекторий Царева, более подробное их описание может быть



**Рис. 14.** Форма поверхности  $\cos x + \cos y + \cos z = 0$  (род 3) и соответствующие зоны устойчивости на угловой диаграмме [25, 26]

найдено, например, в работах [34, 52]. Отметим сразу, что траектории типа траекторий Царева представляют собой отдельный класс неустойчивых открытых траекторий системы (1.1), они появляются при «частично иррациональных» направлениях  $\mathbf{V}$  (плоскость, ортогональная  $\mathbf{V}$ , содержит вектор обратной решетки). Можно сразу отметить, что носитель (замыкание) каждой траектории, построенной Царевым, представляет собой топологически более сложную часть поверхности Ферми, нежели описанные в предыдущем разделе двумерные торы с отверстиями. Как следствие этого, поведение траекторий

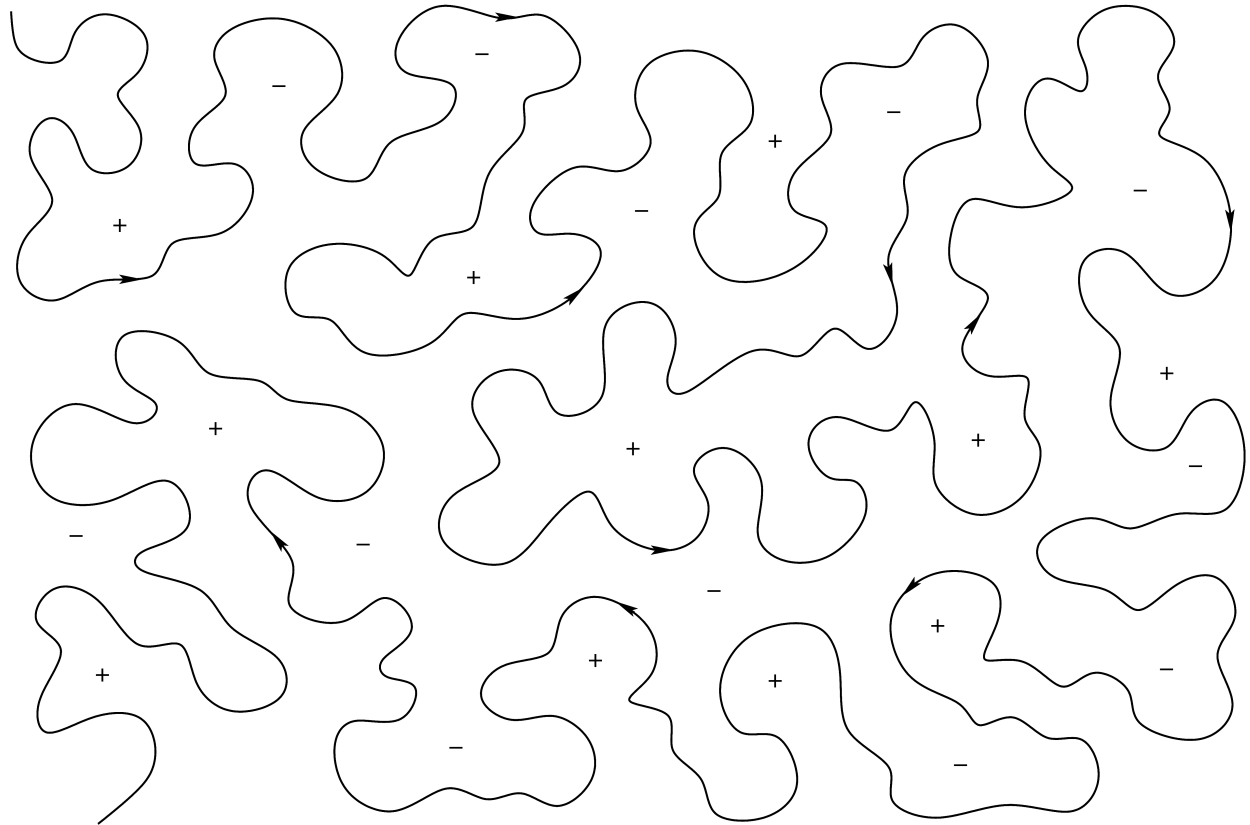


Рис. 15. Вид хаотической траектории Дынникова в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , в расширенном  $\mathbf{p}$ -пространстве

Царева на поверхности Ферми более хаотично, а сами траектории можно отнести уже к классу «хаотических» траекторий.

Что касается формы траекторий типа траекторий Царева в расширенном  $\mathbf{p}$ -пространстве, то они, в действительности, обладают здесь в некоторой степени как свойствами устойчивых открытых траекторий, так и свойствами, не присущими устойчивым открытым траекториям. Так, в частности, открытая траектория Царева не может быть заключена ни в какую прямую полосу конечной ширины в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ . Вместе с тем, все открытые траектории Царева при заданном направлении магнитного поля обладают одним и тем же асимптотическим направлением в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$ , что делает их несколько похожими на устойчивые открытые траектории системы (1.1). Данное свойство, в действительности, присуще всем неустойчивым открытым траекториям, возникающим при частично иррациональных направлениях  $\mathbf{B}$  [34], что позволяет отнести все такие примеры к классу траекторий, имеющих один и тот же тип. Кроме того, указанное свойство траекторий Царева

приводит к тому, что вклад части поверхности Ферми, несущей такие траектории, также является сильно анизотропным в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$ , как и для случая устойчивых открытых траекторий системы (1.1). В частности, здесь мы также имеем соотношение (2.1) для тензора проводимости в правильно выбранной системе координат. Надо отметить, однако, что соотношения (1.4) в данном случае уже не выполняются и поведение тензора проводимости в случае появления траекторий Царева становится несколько более сложным. Можно отметить также, что в силу неустойчивости описанных траекторий структура тензора проводимости не связана здесь с топологическими числами, аналогичными введенным выше для устойчивых открытых траекторий системы (1.1).

Второй класс хаотических открытых траекторий системы (1.1) составляют неустойчивые открытые траектории, возникающие при направлениях  $\mathbf{B}$  максимальной иррациональности. Такие траектории были впервые построены Дынниковым в работе [34], они обладают максимально хаотическим поведением как на поверхности Ферми, так и в на-

крывающем  $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 15). Данное свойство траекторий Дынникова приводит также к весьма нетривиальному поведению тензора магнитопроводимости в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$  при возникновении таких траекторий на поверхности Ферми. Одной из наиболее интересных особенностей такого поведения является резкое подавление проводимости вдоль направления магнитного поля при  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  [35]. Другой особенностью здесь является появление дробных степеней параметра  $\omega_{BT}$  в асимптотиках компонент тензора проводимости [35, 36], что также отражает специфику хаотической динамики таких траекторий. В целом, вклад носителей хаотических траекторий Дынникова во все компоненты тензора проводимости стремится к нулю в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ .

В исследовании хаотических режимов, возникающих в системе (1.1), можно (несколько упрощенно) выделить два основных направления, а именно, исследование множества параметров системы (1.1), при которых возникают такие режимы, а также исследование особенностей динамики соответствующих хаотических траекторий и связанных с ними особенностей транспортных явлений в металлах.

К пространству параметров системы (1.1) можно отнести параметры дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , значение энергии Ферми  $\epsilon_F$ , а также направление магнитного поля  $\mathbf{V}$ . Для наиболее полного теоретического описания системы (1.1) при заданном дисперсионном соотношении  $\epsilon(\mathbf{p})$  при этом является естественной постановка вопроса о множестве направлений  $\mathbf{V}$ , соответствующих появлению хаотических траекторий на любом из энергетических уровней. Как мы уже отмечали в предыдущей главе, данное множество является достаточно сложным и может описываться некоторой фрактальной структурой на сфере  $S^2$ . Как мы также уже отмечали, согласно гипотезе Новикова (верхняя) фрактальная размерность этого множества строго меньше 2 для дисперсионных соотношений общего положения. Исследования структуры указанного множества (как аналитические, так и численные) в настоящее время являются довольно интенсивными и можно сказать, что гипотеза Новикова в целом подтверждается на настоящий момент (см., например, [41, 42, 44, 50, 53]). Возвращаясь к теории нормальных металлов, мы должны также поставить вопрос о структуре указанного множества для фиксированного уровня Ферми  $\epsilon_F$ . Можно показать [19], что мера Лебега такого множества равна нулю для поверхности Ферми общего положения. Согласно гипотезе Новикова [21, 22], верхняя размерность Хаус-

дорфа указанного множества в этом случае строго меньше единицы для поверхности Ферми общего положения (хотя может быть больше для специальных поверхностей Ферми). Можно здесь также отметить, что появление хаотических траекторий на поверхности Ферми свойственно в общем случае угловым диаграммам типа В (рис. 11), упомянутым в предыдущем разделе, в то время как для угловых диаграмм типа А их появление может происходить лишь в исключительных случаях (см. [32]). Как мы уже сказали, исследования структуры множества направлений  $\mathbf{V}$ , отвечающих появлению хаотических траекторий как на фиксированной поверхности Ферми, так и на любой поверхности постоянной энергии для данного дисперсионного закона, представляют на данный момент довольно активно развивающуюся область топологии и теории динамических систем.

Исследование особенностей динамики хаотических траекторий является наиболее актуальным в случае траекторий типа траекторий Дынникова, обладающих наиболее сложным поведением как на поверхности Ферми (в  $T^3$ ), так и в расширенном  $\mathbf{p}$ -пространстве. Специальные примеры таких траекторий могут при этом обладать весьма замечательными свойствами. Так, например, траектории, построенные в работе [34], обладают свойством «самоподобности» в  $\mathbf{p}$ -пространстве. А именно, каждая из таких траекторий совпадает сама с собой после растяжения вдоль некоторых двух векторов в соответствующей плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , с некоторыми собственными числами, и последующей конечной деформации, получившейся после растяжения траектории (изотопии траектории в плоскости, при которой расстояние между начальной точкой траектории и любым ее образом в процессе изотопии не превышает фиксированной константы).

Замечательное свойство, описанное выше, к сожалению, не присуще хаотическим траекториям Дынникова в общем случае. Для исследования динамики таких траекторий, однако, оказались весьма эффективными методы, возникшие первоначально в абстрактной теории динамических систем и слогений на двумерных поверхностях (см., например, [36, 38–40, 45–49]). В частности, весьма важными характеристиками хаотических траекторий оказались так называемые индексы Зорича – Концевича – Формани (см., например, [40]), описывающие важные аспекты поведения таких траекторий как на поверхности Ферми, так и в расширенном  $\mathbf{p}$ -пространстве. Здесь мы не можем привести подробного описания указанных характеристик, отметим, однако, что они



играют, в действительности, весьма важную роль в появлении дробных степеней параметра  $\omega_{BT}$  в асимптотиках компонент тензора проводимости при возникновении хаотических траекторий типа Дынникова на поверхности Ферми в общем случае (см. [36]). Можно также отметить, что наиболее полное возможное описание поведения хаотических траекторий Дынникова с точки зрения общей теории динамических систем является на данный момент весьма актуальной задачей, представляющей интерес для многих исследователей.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены последние результаты исследований задачи динамики электронных состояний на сложных поверхностях Ферми в присутствии внешнего магнитного поля и их связь с электронными транспортными явлениями в металлах в сильных магнитных полях. Рассмотрение транспортных явлений в металлах проводится в главном (квазиклассическом) приближении, что непосредственно связывает особенности динамики электронов с различными режимами электронного транспорта в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$ . Результаты основаны на общих теоремах топологического характера и включают в себя описание всех возможных типов электронной динамики и соответствующих им режимов электронного транспорта в металле при самых общих предположениях относительно электронного спектра. Вместе с тем, в работе обсуждаются также вопросы, интересные для дальнейшего развития данной области исследований.

**Финансирование.** Работа одного из соавторов (Р. Д. Л.) выполнена при поддержке National Science Foundation (грант № DMS-1832126), другого (А. Я. М.) — при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-11-00316).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
2. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974).
3. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
4. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
5. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
6. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).
7. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959).
8. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **78**, 411 (1962).
9. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
10. M. I. Kaganov and V. G. Peshansky, Phys. Rep. **372**, 445 (2002).
11. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
12. *Электроны проводимости*, под ред. М. И. Каганова, В. С. Эдельмана, Наука, Москва (1985).
13. С. П. Новиков, УМН **37**:5, 3 (1982).
14. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
15. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
16. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993).
17. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
18. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
19. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
20. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
21. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Solid State Phys., *Bulletin of Braz. Math. Society, New Series* **34**, 171 (2003).
22. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
23. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, arXiv:cond-mat/0304471.
24. R. De Leo, SIAM J. Appl. Dynam. Syst. **2**, 517 (2003).
25. R. De Leo, Phys. Lett. A **332**, 469 (2004).
26. R. De Leo, Physica B: Cond. Matt. **362**, 62 (2005).
27. R. De Leo, Exper. Math. **15**, 109 (2006).

28. R. De Leo and I. A. Dynnikov, *Geom. Dedicata* **138**, 51 (2009).
29. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **151**, 944 (2017).
30. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **152**, 1053 (2017).
31. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **154**, 1183 (2018).
32. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **156**, 140 (2019).
33. С. П. Царев, Частное сообщение (1992–93).
34. I. A. Dynnikov, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
35. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 1710 (1997).
36. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *Труды МИАН* **302**, 296 (2018).
37. A. V. Zorich, in: *Proc. Geometric Study of Foliations*, (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
38. A. V. Zorich, *Ann. de l'Institut Fourier* **46**, 325 (1996).
39. A. Zorich, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 173.
40. A. Zorich, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, Vol. 197, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
41. Р. Де Лео, *УМН* **55**, 181 (2000).
42. Р. Де Лео, *УМН* **58**, 197 (2003).
43. A. Zorich, in: *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry*, Vol. 1: *On Random Matrices, Zeta Functions and Dynamical Systems*, Ecole de Physique des Houches, France, March 9–21 (2003), Springer-Verlag, Berlin (2006), p. 439.
44. Р. Де Лео, И. А. Дынников, *УМН* **62**, 151 (2007).
45. A. Skripchenko, *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **32**, 643 (2012).
46. A. Skripchenko, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **43**, 253 (2013).
47. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, Vol. 234, AMS, Providence, RI (2014), p. 173, arXiv:1309.4884.
48. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Trans. Moscow Math. Soc.* **76**, 287 (2015).
49. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Invent. Math.* **206**, 109 (2016).
50. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **144**, 539 (2016).
51. R. De Leo, in: *Advanced Mathematical Methods in Biosciences & Applications*, ed. by F. Berezovskaya and B. Toni, Springer (2018); arXiv:1711.01716.
52. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *УМН* **74**, 149 (2019).
53. R. Gutiérrez-Romo and C. Matheus, arXiv:1902.04516 [math.DS].
54. Ю. П. Гайдуков, *ЖЭТФ* **37**, 1281 (1959).
55. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, *ЖЭТФ* **42**, 69 (1962).
56. И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 371 (1997).