

ДИНАМИКА БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ АТОМОВ И ТРИМЕРНЫХ МОЛЕКУЛ С ОБРАЗОВАНИЕМ АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПАР

А. П. Зинган^{a*}, О. Ф. Васильева^a, П. И. Хаджи^{a,b}

^a Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
3300, Тирасполь, Молдова

^b Институт прикладной физики Академии наук Молдовы
2028, Кишинёв, Молдова

Поступила в редакцию 30 марта 2019 г.,
после переработки 24 апреля 2019 г.
Принята к публикации 24 апреля 2019 г.

Представлены результаты исследования динамики процесса фотоассоциации трехатомных бозе-конденсированных ультрахолодных молекул (тримеров) с образованием атомов и двухатомных (димерных) пар. Предложен гамильтониан взаимодействия и построена система нелинейных уравнений, описывающая эволюцию атомов и молекул. Получены интегралы движения, с учетом которых найдено нелинейное дифференциальное уравнение для временной эволюции плотности атомов. Из решений этого уравнения в разных приближениях следует, что возможны различные режимы временной эволюции системы в зависимости от начальных условий: периодический и аperiodический режимы.

DOI: 10.1134/S0044451019110014

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальная реализация атомной бозе-эйнштейновской конденсации при сверхнизких температурах привела к быстрому прогрессу в исследовании свойств ультрахолодных молекул. Это способствовало рождению новой области научных исследований — когерентной материально-волновой суперхимии, которая может обеспечить квантовый контроль материально-волновых реакций при сверхнизких температурах. В последние два десятилетия эксперименты были связаны с рождением и исследованием свойств холодных двухатомных гомо- и гетероядерных молекул [1, 2]. Поэтому к начальному этапу исследований можно отнести изучение когерентной атомно-молекулярной (атомно-димерной) конверсии $A + A \rightarrow A_2$ и $A + B \rightarrow AB$, где A и B — атомы, A_2 и AB — молекулы (димеры). Наиболее поразительным свойством атомно-молекулярной динамики является беспрецедентная роль нелинейных, коллективных эффектов, в частности, эффек-

тов бозе-стимуляции. Вероятность отдельного бозона испытать переход существенно усиливается идентичными частицами как в начальном, так и в конечном состоянии. Роль бозе-стимуляции в образовании и распаде молекулярного конденсата исследовалась в ряде работ [1, 3, 4]. Было показано, что атомно-молекулярный бозе-конденсат испытывает когерентные осцилляции большой амплитуды между атомами и молекулами, причем частота этих осцилляций существенно зависит от плотности атомов, молекул и фотонов [5–8]. Вместе с тем экспериментально наблюдались не только двухатомные молекулы, но также трех- и четырехатомные, такие как ${}^6\text{Li}_3$, ${}^{40}\text{K}_3$, ${}^{87}\text{Rb}{}^{40}\text{K}{}^6\text{Li}$ [9] и др. Недавно в [10] наблюдалось резонансное связывание димеров Cs_2 в молекулярные тетрамеры Cs_4 , а также образование тримеров Cs_3 [11, 12]. В работе [10] доказана возможность протекания когерентной атомно-молекулярной конверсии с образованием как гомоядерных A_4 , так и гетероядерных тетрамеров A_3B и A_2B_2 , а также мультимолекулярных реакций типа $2AB \rightarrow A_2 + B_2$, $2A_2 \rightarrow A_3 + A$, $3A \rightarrow A_2 + A$. В работе [13] показано, что изотопно-обменные реакции вида ${}^n A {}^m A + {}^n A {}^m A \rightarrow {}^n A_2 + {}^m A_2$ между основными состояниями щелочно-галлоидных гетероядерных

* E-mail: zingan.anna@mail.ru

димеров, состоящих из двух изотопов одного и того же атома, являются экзотермическими с изменением энергии в области 1–8000 МГц. Поэтому гетероядерные димеры являются химически нестабильными при ультранизких температурах. Например, две гетеромолекулы ${}^6\text{Li}{}^7\text{Li}$ распадаются на два димера ${}^6\text{Li}_2$ и ${}^7\text{Li}_2$ с выделением энергии, равной 8104 МГц.

В работе [14] исследовались многочастичные процессы в ультрахолодной смеси бозе-атомов Na и Rb и слабосвязанных фешбах-димеров NaRb. Наблюдалась тетрамерная состояния Na_2Rb_2 . Атомно-димерная система приводила к образованию тримеров NaRb_2 и Na_2Rb . Также при связывании двух димеров NaRb образовывались тетрамеры Na_2Rb_2 , а также тримеры NaRb_2 и Na_2Rb и свободные атомы Na и Rb соответственно.

В работах [1, 11] было показано, что методы фешбах-резонанса и фотоассоциации, которые успешно применялись для получения двухатомных молекул, могут быть использованы для образования молекулярных тримеров. Основная идея состоит в том, чтобы создать возбужденные димеры с помощью фешбах-резонанса, а затем посредством фотоассоциации связать димеры и атомы в тримеры. Исследование этого процесса привело к выводу, что комбинированные эффекты бозе-стимуляции и конкуренции каналов распада для конечного числа молекул приводят к усилению селективности реакции между обоими каналами. Относительно слабая контролируемость одночастичного процесса трансформируется в практически полную контролируемость бозе-стимулированного N -частичного процесса. В работе [11] получены решения системы нелинейных уравнений в приближении заданной плотности трехатомных молекул N без учета роли начальных плотностей двухатомных молекул и атомов. Показано, что эволюция системы является аperiодической и состоит в распаде трехатомных молекул по двум каналам. Однако при учете начального макрозаполнения атомов и молекул могут возникнуть и периодические режимы эволюции системы. Отметим также, что детальное исследование эволюции системы под действием ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения произвольной формы не проводилось. Вместе с тем импульсное возбуждение системы с длительностями импульсов, намного меньшими времен релаксации атомов и молекул, является наиболее интересным, так как оно допускает возможность гибкого управления процессами распада. Поэтому дальнейшее исследование реакции, предложенной в [11], по-прежнему является актуальным.

В статье показано, что большую роль в динамике атомно-молекулярной конверсии играют заданные разности фаз. Для создания определенной разности фаз используется метод впечатывания фазы (phase imprinting method). В работе [15] говорится о методе впечатывания фазы как об эффективном методе для получения наперед заданной динамики в бозе-эйнштейновском конденсате. Было продемонстрировано два подхода к построению фазы волновой функции с заданной пространственной зависимостью. В этом случае фаза может быть передана с помощью двухфотонного процесса комбинационного рассеяния, причем фаза или угловой момент, переносимый фотоном, затем впечатывается в волновую функцию атома. В экспериментальной работе [15] авторы придерживаются подхода к впечатыванию произвольной фазы считая, что пространственно-зависимый потенциал пульсирует в течение короткого времени по сравнению с временем движения атома (например, периодом захвата), таким образом потенциал впечатывается в атомную фазу. Этот потенциал может быть получен с помощью лазерного импульса с дальним резонансом, как, например, для приготовления солитона. Отмечалось также, что путем оптимизации величины впечатанной фазы появляется возможность контролировать конечный скачок фазы и, следовательно, свойства солитона. Был предложен метод подготовки состояний заданной квантованной циркуляции в кольцевых бозе-эйнштейновских конденсатах, содержащихся в кольцевой ловушке, с использованием метода впечатывания фазы без использования двухфотонной передачи углового момента. Требуемый фазовый профиль отпечатывался на атомной волновой функции с использованием короткого светового импульса с индивидуальной диаграммой интенсивности.

При экспериментальном исследовании темных солитонов в бозе-эйнштейновских конденсатах атомов Rb была обнаружена когерентная и диссипативная динамика солитонов, в этом случае солитоны также создавались методом впечатывания фазы [16].

В работе [17] показано, что уравнения Гросса–Питаевского часто используются для описания спиновой динамики бозе-конденсатов, где фаза действует как решающий фактор, поскольку отражает квантовые характеристики конденсата. Для случая, когда фаза может быть пространственно модулирована, показано, что спиновая динамика может быть вызвана соответствующими фазовыми сдвигами. Результаты [17] показывают, что фазовая инже-

нерия решает вопрос о контроле разности фаз и может играть важную роль в изменении квантовых характеристик спиновых бозе-конденсатов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной статье приводятся результаты теоретического исследования динамики процесса фотодиссоциации (или фотоассоциации) трехатомных бозе-конденсированных ультрахолодных молекул ABC с образованием атомно-молекулярных пар AB + C либо A + BC под действием двух рамановских импульсов резонансного лазерного излучения. Здесь символы A и C относятся к атомам, AB и BC — к двухатомным молекулам (димеры), а ABC — к гетеромолекуле (тример), состоящей из атомов A, B и C. Предполагается, что состояния атомов и молекул являются макрозанполненными. После адиабатического исключения промежуточных состояний возбужденной трехатомной молекулы многочастичный гамильтониан взаимодействия в представлении вторичного квантования и в приближении вращающейся волны можно записать в виде [18]

$$H_{int} = \hbar\hat{\Phi}(\mathbf{r}) \left[\Omega_1 \hat{\Psi}_{AB}^+(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_C^+(\mathbf{r}) + \Omega_2 \hat{\Psi}_A^+(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{BC}^+(\mathbf{r}) \right] + \text{c.c.} \quad (1)$$

Здесь $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}_{AB}$, $\hat{\Psi}_{BC}$, $\hat{\Psi}_A$, $\hat{\Psi}_C$ — бозонные операторы уничтожения молекул ABC, двухатомных молекул AB и BC, а также атомов A и C соответственно, с.с. — комплексно-сопряженные слагаемые. Первое слагаемое в правой части (1) описывает стимулированный двумя рамановскими импульсами распад трехатомной молекулы с образованием атомно-молекулярной пары C + AB, а второе — соответственно A + BC. Комплексно-сопряженные слагаемые в (1) описывают связывание атомно-молекулярных пар в тример ABC. Константы связи Ω_1 и Ω_2 определяются амплитудами полей обоих импульсов и атомно-молекулярного взаимодействия по первому и второму каналу реакции.

Используя (1), легко получить систему гейзенберговских уравнений для операторов $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}_{AB}$, $\hat{\Psi}_{BC}$, $\hat{\Psi}_A$, $\hat{\Psi}_C$. Усредняя эту систему и используя приближение среднего поля (mean field approximation [19]), можно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений для амплитуд (параметров порядка) материальных полей $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}_{AB}$, $\hat{\Psi}_{BC}$, $\hat{\Psi}_A$, $\hat{\Psi}_C$, которые в условиях точного резонанса принимают вид

$$\begin{aligned} i\dot{\Psi}_{AB} &= \Omega_1 \Phi \Psi_C^*, & i\dot{\Psi}_C &= \Omega_1 \Phi \Psi_{AB}^*, \\ i\dot{\Psi}_{BC} &= \Omega_2 \Phi \Psi_A^*, & i\dot{\Psi}_A &= \Omega_2 \Phi \Psi_{BC}^*, \\ i\dot{\Phi} &= \Omega_1 \Psi_{AB} \Psi_C + \Omega_2 \Psi_{BC} \Psi_A, \end{aligned} \quad (2)$$

где точка над символами означает производную по времени. Решения этих уравнений будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{N} \exp(i\varphi), & \Psi_{AB} &= \sqrt{N_{AB}} \exp(i\varphi_{AB}), \\ \Psi_C &= \sqrt{N_C} \exp(i\varphi_C), \\ \Psi_{BC} &= \sqrt{N_{BC}} \exp(i\varphi_{BC}), \\ \Psi_A &= \sqrt{N_A} \exp(i\varphi_A), \end{aligned} \quad (3)$$

где N_j под знаками квадратных корней и φ_j в экспонентах являются действительными функциями и представляют собой числа частиц и их фазы соответственно. Подставляя (3) в (2), приходим к следующей системе нелинейных эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{AB} &= \dot{N}_C = 2\Omega_1 \sqrt{NN_C N_{AB}} \sin \theta_1, \\ \dot{N}_{BC} &= \dot{N}_A = 2\Omega_2 \sqrt{NN_A N_{BC}} \sin \theta_2, \\ \dot{N} &= -2\Omega_1 \sqrt{NN_C N_{AB}} \sin \theta_1 - \\ &\quad - 2\Omega_2 \sqrt{NN_A N_{BC}} \sin \theta_2, \\ \dot{\theta}_1 &= \Omega_1 \left(\sqrt{\frac{NN_{AB}}{N_C}} + \sqrt{\frac{NN_C}{N_{AB}}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{N_C N_{AB}}{N}} \right) \cos \theta_1 - \Omega_2 \sqrt{\frac{N_A N_{BC}}{N}} \cos \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= \Omega_2 \left(\sqrt{\frac{NN_{BC}}{N_A}} + \sqrt{\frac{NN_A}{N_{BC}}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{N_A N_{BC}}{N}} \right) \cos \theta_2 - \Omega_1 \sqrt{\frac{N_{AB} N_C}{N}} \cos \theta_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\theta_1 = \varphi - \varphi_C - \varphi_{AB}$, $\theta_2 = \varphi - \varphi_A - \varphi_{BC}$. Первые пять уравнений в (4) приводят к трем независимым интегралам движения:

$$\begin{aligned} N_{AB} - N_C &= N_{AB0} - N_{C0}, \\ N_{BC} - N_A &= N_{BC0} - N_{A0}, \\ N + N_A + N_C &= N_0 + N_{A0} + N_{C0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где N_0 , N_{AB0} , N_{BC0} , N_{A0} , N_{C0} — начальные плотности частиц. Соотношения (5) представляют собой законы сохранения частиц в системе. Легко видеть также, что решения для разностей фаз

$$\theta_1 = \pm\pi/2, \quad \theta_2 = \pm\pi/2, \quad (6)$$

удовлетворяют системе уравнений (4). Решения с $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ($\theta_1 = \theta_2 = -\pi/2$) соответствуют

реакции фотодиссоциации (фотоассоциации) трехатомных молекул. Их можно назвать синфазными решениями, так как они соответствуют синфазной динамике частиц по обоим каналам реакции. Решения же с $\theta_1 = \pi/2$ и $\theta_2 = \pi/2$ или $\theta_1 = -\pi/2$ и $\theta_2 = \pi/2$ можно назвать антифазными. В этом случае, как видно из (4), динамика частиц по одному из каналов находится в противофазе с динамикой частиц по другому каналу.

Из уравнений для \dot{N}_A и \dot{N}_C в (4) можно получить еще один интеграл движения, связывающий числа частиц в обоих каналах реакции:

$$N_A = \left(\sqrt{N_{A0}} \operatorname{ch} x + \sqrt{N_{BC0}} \operatorname{sh} x \right)^2 \quad (7a)$$

для синфазного случая и

$$N_A = \left(\sqrt{N_{A0}} \operatorname{ch} x - \sqrt{N_{BC0}} \operatorname{sh} x \right)^2 \quad (7b)$$

для антифазного случая, где

$$x = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \ln \left(\frac{\sqrt{N_{AB0} - N_{C0} + N_C} + \sqrt{N_C}}{\sqrt{N_{AB0} + N_{C0}}} \right). \quad (8)$$

Для значений начальных плотностей частиц $N_{AB0} = N_{C0}$, $N_{BC0} = N_{A0}$ и при равенстве констант связи $\alpha = \Omega_2/\Omega_1 = 1$ выражения (7a), (7b) сводятся к простым соотношениям:

$$N_A = \frac{N_{A0}}{N_{C0}} N_C \quad (9a)$$

для синфазного случая и

$$N_A = \frac{N_{A0}}{N_C} N_{C0} \quad (9b)$$

для антифазного случая. В первом случае количество атомов N_A в одном канале пропорционально количеству атомов N_C в другом канале в любой момент времени. Плотности атомов в обоих каналах либо растут, либо убывают одновременно, в то время как в антифазном случае плотности атомов изменяются обратно пропорционально друг другу. Связи (7a) и (7b) либо (9a) и (9b) определяют две радикально различающиеся динамики системы частиц. На рис. 1 представлены графики зависимостей N_A от N_C при различных соотношениях между параметрами системы.

Используя полученные интегралы движения, систему уравнений (4) можно привести к одному дифференциальному уравнению, например для N_C , которое имеет вид

$$\frac{dN_C}{dt} = \pm 2\Omega_1 \times \sqrt{N_C(N_{AB0} - N_{C0} + N_C)(N_0 + N_{A0} + N_{C0} - N_C - N_A)}, \quad (10)$$

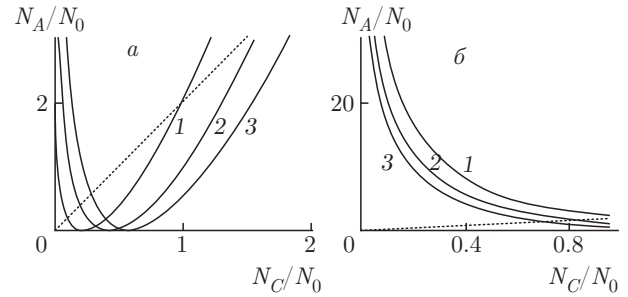


Рис. 1. Зависимости N_A от N_C при $N_{A0}/N_0 = 2$ (1), 1 (2), 0.5 (3); $N_{C0}/N_0 = 1$; $N_{AB0}/N_0 = 2$; $N_{BC0}/N_0 = 4$; $\Omega_2/\Omega_1 = 2$ (сплошные линии), 1 (пунктирные линии); а) синфазный случай, б) антифазный случай

где N_A выражается через N_C с помощью формул (7a), (7b), (8). Полученное уравнение является существенно нелинейным. Его аналитическое решение можно представить в квадратурах.

Далее для удобства введем нормированные на N_{C0} плотности:

$$\begin{aligned} N_C &= N_{C0}n_C = N_{C0}y^2, & N_A &= N_{C0}n_A, \\ N_0 &= N_{C0}n_0, & N_{A0} &= N_{C0}n_{A0}, \\ N_{AB0} &= N_{C0}n_{AB0}, & N_{BC0} &= N_{C0}n_{BC0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда уравнение (10) для определения N_C принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = \pm \Omega_1 \times \sqrt{(n_{AB0} - 1 + y^2)(n_0 + n_{A0} + 1 - y^2 - n_A)}, \quad (12)$$

где

$$n_A = (\sqrt{n_{A0}} \operatorname{ch} x \pm \sqrt{n_{BC0}} \operatorname{sh} x)^2 \quad (13)$$

для синфазного и антифазного случаев соответственно, а

$$x = \alpha \ln \left(\frac{\sqrt{n_{AB0} - 1 + y^2} + y}{\sqrt{n_{AB0} + 1}} \right). \quad (14)$$

Уравнение (12) можно записать в виде уравнения колебаний нелинейного осциллятора

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + W(y) = 0,$$

где

$$W(y) = -\Omega_1^2(n_{AB0} - 1 + y^2)(n_0 + n_{A0} + 1 - y^2 - n_A)$$

играет роль потенциальной энергии некоторого нелинейного осциллятора. Исследование поведения $W(y)$ может дать качественное объяснение

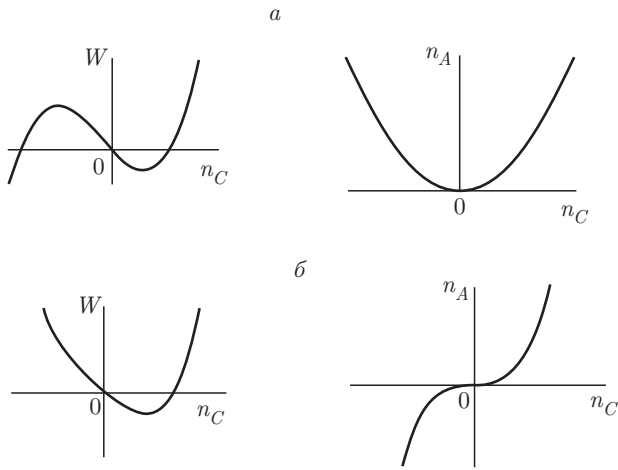


Рис. 2. Графики потенциальной энергии $W(n_C)$ и функции $n_A(n_C)$ при $n_{A0} = n_{BC0} = 3, n_{C0} = n_{AB0} = 2, n_0 = 1;$ Ω_2/Ω_1 — четное (а), нечетное (б)

поведения самого решения $y(t)$ в зависимости от времени t и начальных параметров системы. В зависимости от значений начальных плотностей частиц эволюция плотности атомов сорта C может быть как периодической, так и аperiodической.

Рассмотрим ряд простейших частных случаев, допускающих точные аналитические решения. Пусть $N_{A0} = N_{BC0}$ и $N_{C0} = N_{AB0}$, т.е. числа атомов и двухатомных молекул в каждом канале реакции одинаковы. Кроме того, полагаем, что временная эволюция системы является синфазной. Тогда плотность атомов определяется как $n_A = n_{A0}n_C^\alpha$, а потенциальная энергия $W(n_C)$ имеет вид

$$W(n_C) = -n_C(n_0 + n_{A0} + 1 - n_C - n_{A0}n_C^\alpha).$$

На рис. 2 представлены графики потенциальной энергии нелинейного осциллятора. Изменение плотности атомов сорта C со временем возможно лишь в той области значений n_C , где $W(n_C) \leq 0$. Особенности эволюции системы определяются не только значениями начальных плотностей частиц, но также и соотношениями между ними. Легко понять, что плотность дополнительно генерируемых молекул равна наименьшей из плотностей атомов и димеров. Так как каждая новая образующаяся молекула содержит по одному из атомов первого и второго сорта, то процесс образования дополнительных молекул заканчивается, как только обратятся в нуль плотности атомов одного из сортов.

Отсюда видно, что $W(n_C) \leq 0$ в области $0 \leq n_C \leq n_{CM}$, где n_{CM} — максимальная нормированная плотность атомов типа C в процессе эволюции,

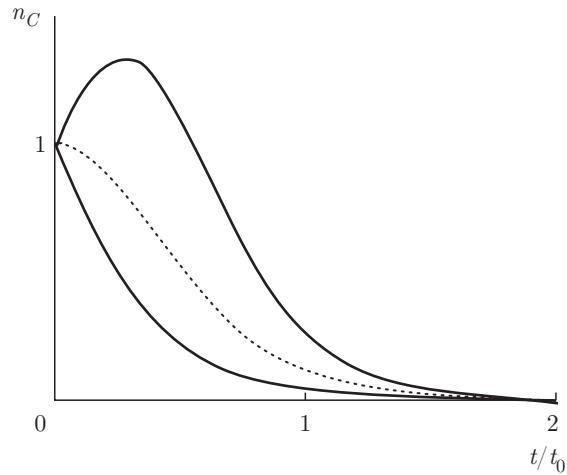


Рис. 3. Временные зависимости нормированной плотности n_C при $N_0/N_{C0} = 1, N_{AB0}/N_{C0} = 2, N_{BC0}/N_{C0} = 4,$ $\Omega_2/\Omega_1 = 1$ (пунктирная линия — $N_0/N_{C0} = 0$)

которая определяется как ближайший к единице положительный корень уравнения

$$n_0 + n_{A0} + 1 - n_{CM} - n_{A0}n_{CM}^\alpha = 0.$$

С ростом n_{A0} и α плотность n_{CM} убывает, асимптотически стремится к единице справа при больших n_{A0} и α и монотонно возрастает с ростом n_0 . Наличие двукратного корня $n_C = 0$ уравнения $W(n_C) = 0$ свидетельствует о том, что эволюция системы в синфазном случае является аperiodической. В самом деле, полагая $\alpha = 1$, легко получить решение уравнения (12), которое для $n_C = y^2$ выражается в виде

$$n_C = n_{CM} \operatorname{sch}^2(\pm \sqrt{n_0 + n_{A0} + 1} \Omega_1 t + \varphi), \quad (15)$$

где

$$n_{CM} = 1 + \frac{n_0}{n_{A0} + 1}, \quad \varphi = \operatorname{arch} \sqrt{n_{CM}}.$$

Из (15) и рис. 3 видно, что эволюция плотности атомов $n_C(t)$ действительно является аperiodической. При этом решение для n_C со знаком «+» в аргументе секанса гиперболического показывает, что плотность атомов n_C монотонно убывает со временем, асимптотически стремясь к нулю на больших временах. Решение со знаком «-» сначала растет, достигает максимальной величины n_{CM} в момент времени

$$t = t_M = \frac{1}{\Omega_1 \sqrt{n_0 + n_{A0} + 1}} \operatorname{arch} \sqrt{n_{CM}},$$

после чего монотонно убывает и также асимптотически стремится к нулю. В этот момент времени число

трехатомных молекул обращается в нуль. Следовательно, на этапе $0 \leq t \leq t_M$ плотность атомов типа C растет за счет распада трехатомных молекул. Чем больше начальная плотность n_0 трехатомных молекул, тем позже возникает максимум функции $n_C(t)$ для решения со знаком «-» и тем выше этот максимум. Такое поведение функции $n_C(t)$ обусловлено знаком производной $\dot{n}_C|_{t=0}$ в начальный момент времени и особенностями бозе-стимулирования процесса. В случае одинаковых начальных чисел атомов и двухатомных молекул в каждом из каналов вероятность связывания их в трехатомные молекулы обращается в нуль вместе со стремлением чисел этих частиц к нулю в процессе эволюции. Таким образом, эволюция атомно-молекулярной системы в этом случае является необратимой и завершается тем, что все атомы и двухатомные молекулы исчезают, превращаясь в трехатомные молекулы.

Если трехатомные молекулы в начальный момент времени отсутствуют в системе ($n_0 = 0$), что с практической точки зрения является наиболее интересным случаем, то полученное решение (15) существенно упрощается и принимает вид

$$n_C = \operatorname{sch}^2(\sqrt{n_{A0} + 1} \Omega_1 t). \quad (15a)$$

При этом исчезает различие, связанное со знаками «+» и «-», так как в начальный момент времени осциллятор находится в точке с координатой $n_C = 1$ с потенциальной энергией W , равной нулю, в силу чего единственным направлением смещения может быть движение в сторону уменьшения величины $n_C(t)$ до нуля, т. е. все атомы и двухатомные молекулы связываются в трехатомные гетероядерные тримеры.

При произвольном значении отношения констант связи α качественно динамика плотности атомов сорта C сохраняется, т. е. по-прежнему имеет место необратимый аperiодический режим эволюции. При этом максимальное значение плотности атомов n_{CM} в решении со знаком «-» определяется уравнением $n_0 + n_{A0} + 1 = n_{CM} + n_A$. Видно, что максимальное значение n_{CM} монотонно возрастает с ростом начальной плотности трехатомных молекул n_0 при фиксированном значении плотности атомов n_{A0} и монотонно убывает с ростом плотности атомов n_{A0} при фиксированной плотности трехатомных молекул n_0 .

Легко получить аналитическое решение также и для случая, когда константа связи по первому каналу реакции в два раза меньше константы связи по второму каналу ($\alpha = 1/2$):

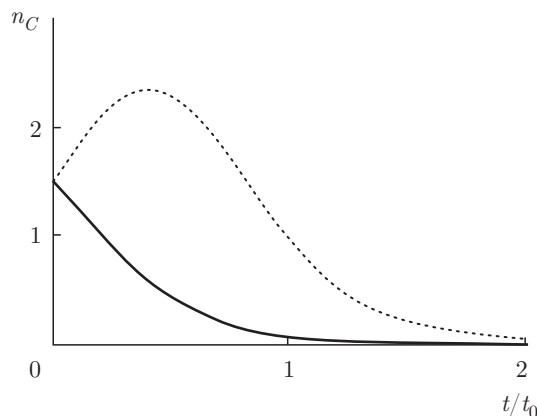


Рис. 4. Временные зависимости плотности атомов типа C при $\alpha = 1/2$ (пунктирная линия), 2 (сплошная линия)

$$n_C = \frac{4(n_0 + n_{A0} + 1)^2}{(n_{A0} + 2)^2 + 4n_0} \times \left[\operatorname{ch}(\pm\sqrt{n_0 + n_{A0} + 1} \Omega_1 t + \varphi) + \frac{n_{A0}}{\sqrt{(n_{A0} + 2)^2 + 4n_0}} \right]^{-2}, \quad (15b)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arch} \left(\frac{2(n_0 + 1) + n_{A0}}{\sqrt{(n_{A0} + 2)^2 + 4n_0}} \right).$$

В этом случае также имеет место аperiодический режим эволюции. Наконец, полагая отношение констант связи $\alpha = 2$, получаем

$$n_C = \left(1 + \sqrt{1 + 4n_{A0}(n_0 + n_{A0} + 1)} \times \operatorname{ch}(\pm 2\sqrt{n_0 + n_{A0} + 1} \Omega_1 t + \psi) \right)^{-1}, \quad (15c)$$

где

$$\psi = \operatorname{arch} \left(\frac{2(n_0 + n_{A0}) + 1}{\sqrt{1 + 4n_{A0}(n_0 + n_{A0} + 1)}} \right).$$

Отсюда видно, что и в этом случае решение является аperiодическим (рис. 4).

Таким образом, можно высказать общий вывод, состоящий в том, что при любом отношении констант связи эволюция системы в синфазном режиме является аperiодической и необратимой во времени.

Рассмотрим теперь решение для случая антифазной эволюции. Из (9b) получаем $n_A = n_{A0}/n_C$. Следовательно, произведение $n_A n_C$ сохраняется со временем: если одна из величин возрастает со временем, то другая — убывает. В этом и заключается смысл термина антифазная эволюция. Уравнение

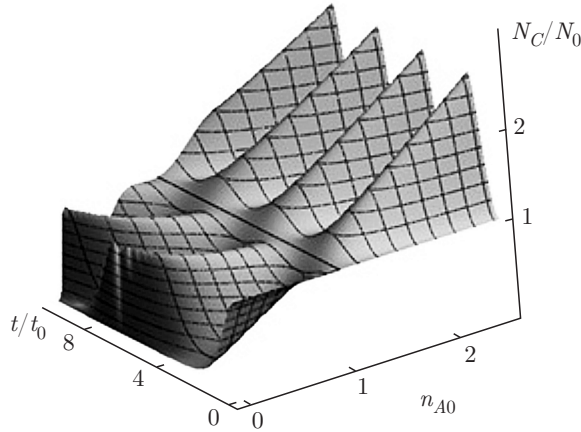


Рис. 5. Временная эволюция нормированной плотности n_C в зависимости от значений параметра n_{A0} при $N_{C0}/N_0 = 1$, $n_0 = 0$, $\Omega_1 = 1$

для динамики плотности атомов $n_C(t)$ в этом случае имеет вид

$$\dot{n}_C = \pm 2\Omega_1 \sqrt{N_{C0}} \sqrt{n_C(n_+ - n_C)(n_C - n_-)}, \quad (16)$$

где

$$n_{\pm} = \frac{1}{2} \times \left(n_0 + n_{A0} + 1 \pm \sqrt{(n_0 - n_{A0} + 1)^2 + 4n_0 n_{A0}} \right). \quad (17)$$

Здесь n_{\pm} — максимальная (+) и минимальная (−) плотности атомов n_C , которые возможны в процессе эволюции. Решение уравнения (16) имеет вид

$$n_C = \frac{n_-}{\text{dn}^2(\pm 2\Omega_1 \sqrt{N_{C0}} n_+ t + F(\varphi_0, k))}, \quad (18)$$

где $F(\varphi_0, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода с параметром φ_0 и модулем k [20, 21], которые определяются выражениями

$$k^2 = 1 - \frac{n_-}{n_+}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{n_+(1 - n_-)}{n_+ - n_-}}, \quad (19)$$

а $\text{dn}(x)$ — эллиптическая функция Якоби [20, 21]. Из (18) и рис. 5 видно, что плотность атомов n_C периодически изменяется со временем в пределах $n_- \leq n_C \leq n_+$ с периодом T , равным

$$T = \frac{2K(k)}{\Omega_1 \sqrt{N_{C0} n_+}}, \quad (20)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [20, 21]. Знаки « \pm » в аргументе функции

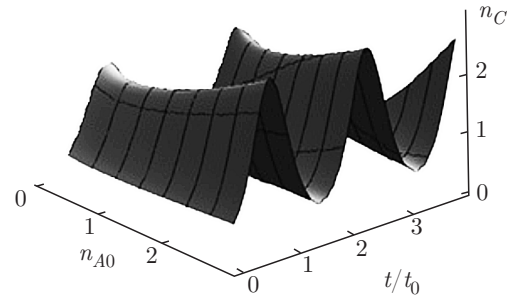


Рис. 6. Временная эволюция нормированной плотности атомов n_C в зависимости от значений параметра n_{A0} при $n_0 = 2$, $\alpha = 2$

Якоби $\text{dn}(x)$ свидетельствуют о том, что в начальный момент времени плотность атомов $n_C(t)$ возрастает либо убывает со временем, что, в свою очередь, определяется направлением начальной скорости $\dot{n}_C|_{t=0}$. Решения со знаками «+» и «−» в аргументе функции $\text{dn}(x)$ различаются постоянной величиной $F(\varphi_0, k)$. Легко видеть, что $\varphi_0 = 0$ при $n_0 = 0$, тогда решение (18) упрощается и приводится к виду

$$n_C = \text{dn}^2(\Omega_1 \sqrt{N_{C0}} t), \quad k^2 = 1 - n_{A0} \quad (18a)$$

при $n_{A0} < 1$,

$$n_C = \frac{1}{\text{dn}^2(\Omega_1 \sqrt{N_{C0} n_{A0}} t)}, \quad k^2 = 1 - \frac{1}{n_{A0}} \quad (18b)$$

при $n_{A0} > 1$ и

$$n_C = 1 \quad (18c)$$

при $n_{A0} = 1$. Таким образом, если начальная плотность трехатомных молекул равна нулю, $n_0 = 0$, а начальные плотности атомов и димеров равны $n_{A0} = n_{C0} = n_{AB0} = n_{BC0} = 1$, то временная эволюция в системе атомов и молекул отсутствует, т. е. плотности атомов и молекул сохраняются. Как видно из (4), это обусловлено спецификой бозе-стимуляции процесса.

Если рассматривать случай произвольных значений отношения констант связи $\alpha = \Omega_2/\Omega_1$, то уравнение для определения плотности атомов $n_C(t)$ запишется в виде

$$\dot{n}_C = \pm 2\Omega_1 \sqrt{N_{C0}} \times n_C \sqrt{n_0 + n_{A0} + 1 - n_C - n_{A0} n_C^{-\alpha}}. \quad (21)$$

Видно, что временная эволюция системы по-прежнему является периодической и плотность атомов $n_C(t)$ периодически осциллирует между двумя наибольшими корнями уравнения

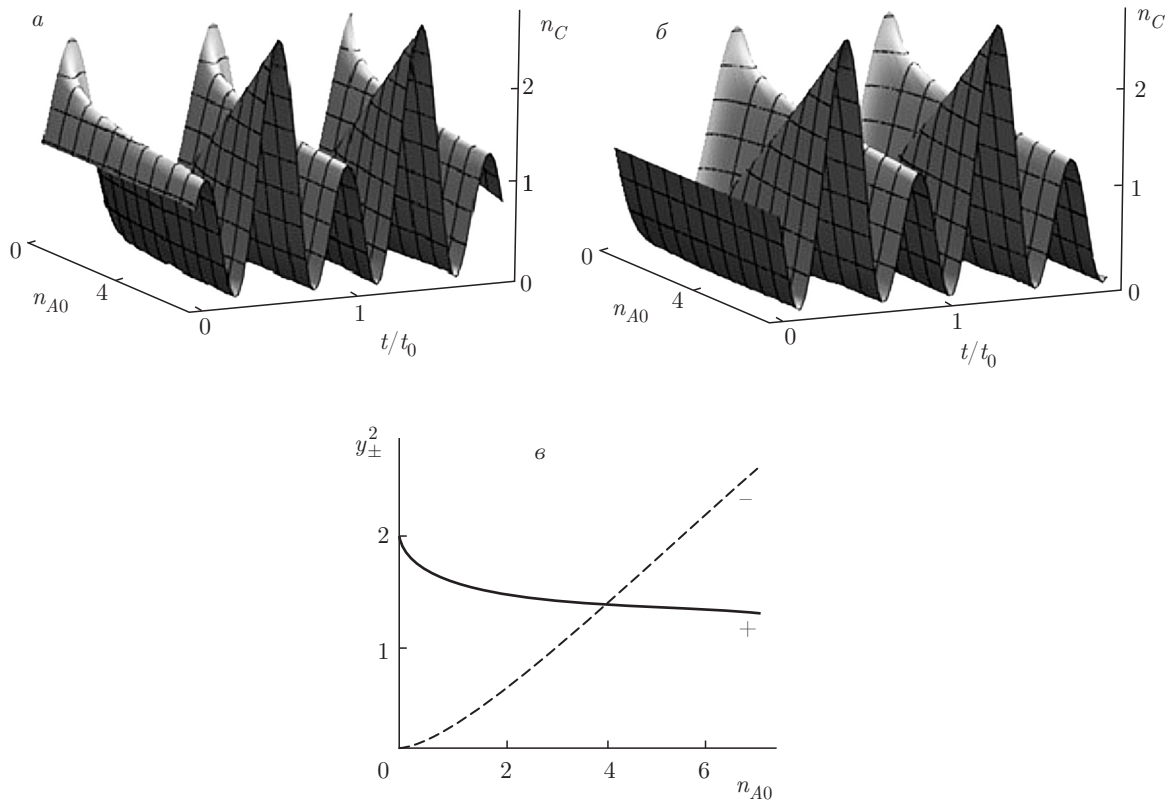


Рис. 7. Временная эволюция нормированной плотности атомов n_C в зависимости от значений параметра n_{A0} в синфазном случае при $n_0 = 2, \alpha = 2$; а) решение со знаком «+», б) решение со знаком «-», в) максимальное и минимальное значения нормированной плотности атомов n_C в зависимости от значений параметра n_{A0} в синфазном случае

$$n_C^{\alpha+1} - (n_0 + n_{A0} + 1)n_C^\alpha + n_{A0} = 0. \quad (22)$$

Если положить отношение констант связи $\alpha = 2$, то решение уравнения (21) запишется в виде

$$n_C = \alpha_3 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\text{dn}^2\left(\pm \Omega_1 \sqrt{N_{C0}(\alpha_1 - \alpha_3)} t + F(\varphi_0, k)\right)}, \quad (23)$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ — три действительных корня кубического уравнения (22) (рис. 6),

$$k^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_3}}. \quad (24)$$

Таким образом, плотность атомов $n_C(t)$ периодически осциллирует в пределах $\alpha_2 \leq n_C \leq \alpha_1$ с периодом T , равным

$$T = \frac{2K(k)}{\Omega_1 \sqrt{N_{C0}(\alpha_1 - \alpha_3)}}. \quad (25)$$

Из рис. 6 видно, что колебания плотности атомов типа C происходят между максимальным и средним корнями (22).

Если рассматривать случай произвольных значений отношения констант связи $\alpha > 0$, то исследование поведения потенциальной энергии $W(n_C)$ нелинейного осциллятора показывает, что уравнение $W(n_C) = 0$ всегда имеет два положительных корня $\alpha_1 > \alpha_2$, между которыми изменяется плотность атомов $n_C(t)$. Поэтому, хотя общее решение уравнения (21) в известных функциях представить не удастся, однако в квадратурах это решение имеет вид

$$\int_1^{n_C} \frac{dx}{\sqrt{x(n_0 + n_{A0} + 1 - x - n_{A0}x^{-\alpha})}} = \pm 2\Omega_1 \sqrt{N_{C0}} t. \quad (26)$$

Следовательно, плотность атомов $n_C(t)$ колеблется в пределах $\alpha_2 \leq n_C \leq \alpha_1$ с периодом T , который определяется выражением

$$T = \frac{1}{4\Omega_1 \sqrt{N_{C0}}} \times \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{dx}{\sqrt{x(n_0 + n_{A0} + 1 - x - n_{A0}x^{-\alpha})}}. \quad (27)$$

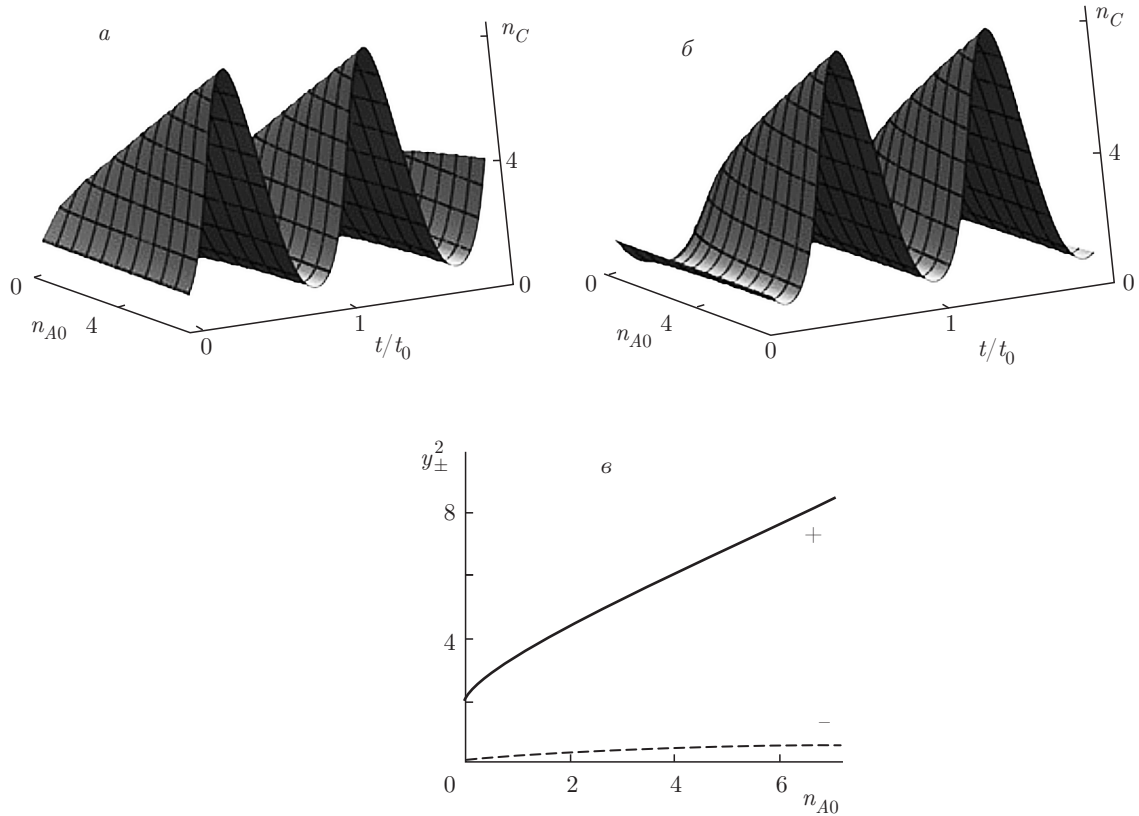


Рис. 8. Временная эволюция нормированной плотности атомов n_C в зависимости от значений параметра n_{A0} в антифазном случае при $n_0 = 2, \alpha = 2$; а) решение со знаком «+», б) решение со знаком «-», в) максимальное и минимальное значения нормированной плотности атомов n_C в зависимости от значений параметра n_{A0} в антифазном случае

Рассмотрим теперь временную эволюцию системы в приближении заданных плотностей двухатомных молекул: $N_{AB0} = N_{BC0} \gg N_0, N_{C0}, N_{A0}$. В этом приближении плотности двухатомных молекул сохраняются: $N_{AB}(t) = N_{AB0}, N_{BC}(t) = N_{BC0}$. Интегралы движения (7), связывающие плотности атомов в различных каналах, принимают вид

$$n_A = (\sqrt{n_{A0}} \pm \alpha(\sqrt{n_C} - 1))^2 \quad (28)$$

для синфазного (+) и антифазного (-) случаев, где $\alpha = \gamma_2/\gamma_1, \gamma_1 = 2\Omega_1\sqrt{N_{AB0}}, \gamma_2 = 2\Omega_2\sqrt{N_{BC0}}$. Тогда решение уравнения (12) для синфазного случая записывается как

$$n_C = \frac{N_{C0}}{4} \left(y_+ + y_- + (y_+ - y_-) \times \sin \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} t + \arcsin \left(\frac{1 + \alpha\sqrt{n_{A0}}}{\sqrt{(1 + \alpha^2)n_0 + (1 + \alpha\sqrt{n_{A0}})^2}} \right) \right) \right)^2, \quad (29)$$

где

$$y_{\pm} = \frac{1}{1 + \alpha^2} \times \left(\alpha(\alpha - \sqrt{n_{A0}}) \pm \sqrt{(1 + \alpha^2)n_0 + (1 + \alpha\sqrt{n_{A0}})^2} \right).$$

На рис. 7а,б представлены зависимости плотности атомов n_C от времени при различных значениях параметров. Видно, что имеет место периодический режим превращения атомов и молекул в трехатомные молекулы и обратно с периодом T , равным

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_1^2 N_{AB0} + \Omega_2^2 N_{BC0}}}. \quad (30)$$

При больших значениях n_{A0} решение со знаком «+» в аргументе синуса в начальный момент времени возрастает, достигая значения y_-^2 , затем убывает до нуля и далее снова возрастает до значения y_+^2 ; решение со знаком «-» в начальный момент убывает, а при больших значениях t эволюция совпадает с решением со знаком «+». Как видно из (29), эти

решения отличаются друг от друга постоянной разностью фаз, равной

$$\arcsin \left(\frac{1 + \alpha \sqrt{n_{A0}}}{\sqrt{(1 + \alpha^2)n_0 + (1 + \alpha \sqrt{n_{A0}})^2}} \right).$$

При близких к нулю значениях n_{A0} максимумы колебаний с меньшей амплитудой определяются значением y_-^2 , а с большей — y_+^2 , тогда как при значении $n_{A0} > n_{A0cr}$ (n_{A0cr} численно равно α^2), при котором $y_-^2 = y_+^2$, максимумы колебаний с меньшей амплитудой определяются значением y_+^2 , а с большей — y_-^2 (рис. 7в). При $n_{A0} = n_{A0cr}$ амплитуда колебаний плотности атомов n_C периодически изменяется от нуля до y_{\pm}^2 .

Что касается антифазной эволюции (рис. 8), то она сводится здесь к замене параметра α на $-\alpha$. При этом, как видно из рис. 8а,б, амплитуда колебаний плотности n_C с течением времени, в отличие от синфазной эволюции, не изменяется при фиксированном значении нормированной плотности атомов n_{A0} . В этом случае значения плотности атомов n_C периодически изменяются от значения y_-^2 до y_+^2 (рис. 8в), где значения y_{\pm} определяются так же, как и в случае синфазной эволюции, но с заменой параметра α на $-\alpha$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в данной работе представлены результаты исследования явления фотоассоциации бозе-конденсированных ультрахолодных атомов и трехатомных молекул с образованием двухатомных гетероядерных димеров и атомов. Предсказана возможность существования синфазного и антифазного режимов эволюции системы. Если числа атомов и двухатомных молекул в каждом канале реакции одинаковы, то эволюция системы в синфазном режиме при любом значении параметра Ω_2/Ω_1 является аperiodической и необратимой во времени. Все атомы и двухатомные молекулы в процессе эволюции связываются в трехатомные молекулы, чем эволюция и завершается. Для антифазного случая характерна преимущественно периодическая эволюция конверсии бозе-конденсированных атомов и молекул. Более того, если начальная плотность трехатомных молекул тождественно равна нулю и все атомы и двухатомные молекулы имеют одинаковые начальные плотности,

то временная эволюция в системе атомов и молекул отсутствует, т. е. плотности атомов и молекул сохраняются постоянными.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Кеттерле, УФН **173**, 1339 (2003).
2. Э. А. Корнелл, К. Э. Виман, УФН **173**, 1320 (2003).
3. J. M. Sage et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 203001 (2005).
4. D. J. Heinzen et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 5029 (2005).
5. П. И. Хаджи, А. П. Зинган, ЖЭТФ **139**, 645 (2011).
6. П. И. Хаджи, А. П. Зинган, Письма в ЖТФ **37**, 29 (2011).
7. П. И. Хаджи, А. П. Зинган, Письма в ЖЭТФ **92**, 490 (2010).
8. П. И. Хаджи, Д. В. Ткаченко, Письма в ЖТФ **34**, 87 (2008).
9. M. Taglieber et al., Phys. Rev. Lett. **100**, 010401 (2008).
10. C. Chin et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 123201 (2005).
11. J. Perez-Rios et al., Phys. Rev. Lett. **115**, 073201 (2015).
12. H. Jing et al., Phys. Rev. A **77**, 043614 (2008).
13. M. Tomza, Phys. Rev. Lett. **115**, 063201 (2015).
14. X. Ye et al., Science Adv. **4**, 0083 (2016).
15. A. Kumar et al., Phys. Rev. A **97**, 043615 (2018).
16. S. Burger et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
17. Ch. Tao and Q. Gu, Phys. Rev. A **79**, 023612 (2009).
18. M. G. Moore and A. Vardi, Phys. Rev. Lett. **88**, 160402 (2002).
19. P. I. Khadzhi and D. V. Tkachenko, J. Nanoelectr. Optoelectr. **4**, 101 (2009).
20. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
21. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1968).