ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 3, стр. 394–405

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОНДУЛЯТОРОВ С ГАРМОНИКАМИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. М. Калитенко, К. В. Жуковский[*]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 мая 2019 г.,
после переработки 12 июля 2019 г.
Принята к публикации 12 июля 2019 г.

Исследуется ондуляторное излучение в некоторых мультипериодических магнитных полях. Рассмотрены ондуляторы с плоскими, спиральными и эллиптическими асимметричными магнитными полями с высшими полевыми гармониками. Для этих ондуляторов получены точные аналитические выражения обобщенных функций Бесселя и коэффициентов Бесселя. Аналитические результаты сравниваются с результатами численного моделирования. Анализируется влияние дополнительной третьей гармоники поля на излучение этих ондуляторов. Для спирального ондулятора с дополнительным асимметричным полем третьей гармоники выявлено преобладание пятой гармоники ондуляторного излучения над третьей гармоникой. Проводится трехмерное моделирование изучения лазеров на свободных электронах с таким ондулятором с помощью созданной нами численной программы, которая учитывает разброс энергий электронов в пучке и бетатронные колебания. Исследуется двухчастотный ондулятор с гармоническим эллиптически поляризованным магнитным полем и моделируется излучение лазера на свободных электронах с таким ондулятором.

DOI: 10.31857/S0044451020030025

1. ВВЕДЕНИЕ

Ондуляторное излучение (ОИ) испускается релятивистскими электронами, которые движутся в периодической системе магнитных полей — ондуляторе. ОИ имеет ту же природу, что и синхротронное излучение [1]. Идея ондулятора впервые была высказана Гинзбургом [2]. Он также предложил динамический ондулятор, где электронный пучок движется в переменном во времени поле электромагнитной волны, распространяющейся в двухпроводной линии. Гинзбург рассмотрел излучение от последовательности сгустков электронов, продольные размеры которых меньше длины волны генерируемого излучения, и подчеркнул, что оно будет когерентным. Позднее, в середине 20-го века, Мотцом [3] был предложен ондулятор — усилитель лазера на свободных электронах (ЛСЭ), состоящий из последовательности дипольных магнитов с чередующейся полярностью, равномерно расположенных вдоль оси. В настоящее время ондуляторы и их излучение [4–8] представляют интерес в контексте использования в ЛСЭ, где взаимодействие электронов с излучением группирует электроны в сгустки, удаленные друг от друга на расстояние длины волны излучения [9–17]. Следует отметить, что кроме спонтанного и вынужденного ОИ для генерации когерентного излучения в рентгеновском и гамма диапазонах можно использовать обратное комптоновское рассеяние электронами и обратное резонансное рассеяние не полностью ионизованными ионами фотонов лазерного пучка оптического диапазона [18].

Точное аналитическое описание излучения релятивистских зарядов в магнитном поле системы ондуляторов возможно с привлечением обобщенных форм функций Бесселя и Эйри. Описания ОИ в плоском и спиральном ондуляторах включают известные специальные функции и их относительно простые обобщения, в то время как точное описание излучения в составных магнитных полях, состоящих из мультипериодических и непериодических компонент, остается сложной математической проблемой. Эти вопросы были рассмотрены в ряде работ [19–31], однако полученные в них различные

[*] E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

аналитические результаты не согласуются друг с другом. К сожалению, коэффициенты Бесселя были рассчитаны ошибочно [20, 31]. Независимо от этого, исследования в работах [24, 25] дали противоречивые результаты.

Ранее и, возможно, впервые, тема ондуляторов с полями сложных конфигураций была предложена в работах [32–34] для получения жесткого циркулярно-поляризованного гамма-излучения на высших гармониках ОИ и его конверсии в среде в продольно поляризованные позитроны. В работе [35] была решена обратная задача по нахождению распределения поля ондулятора, в котором излучение в направлении оси ондулятора линейно поляризовано и строго монохроматично при оптимальных условиях генерации. Поле такого ондулятора в основном описывается суммой первой и третьей гармоник.

В настоящей работе мы получили и исследовали явные аналитические выражения для коэффициентов Бесселя и интенсивностей ОИ с новыми конфигурациями магнитных полей в ондуляторах с гармоническим эллиптически поляризованным магнитным полем, которые для краткости будем называть эллиптическими (см. подробнее работу [36]). В предельных случаях эти выражения описывают спиральный и плоский ондуляторы с учетом гармоник поля и корректируют некоторые результаты работ [19–31]. Спектральные интенсивности ОИ с учетом разброса энергии и размеров пучка электронов проверены путем независимого численного моделирования с помощью программы SPECTRA [37, 38]. Интенсивности ОИ для спирального ондулятора с антисимметричной гармоникой поля сопоставлены и согласуются с экспериментальными данными [39].

В отличие от работы [40], где изучался частный случай спирального ондулятора с гармониками поля, в настоящей работе получены аналитические выражения для интенсивности и спектра ОИ в асимметричных эллиптических ондуляторах с высшими гармониками магнитного поля. С их помощью мы определяем конфигурацию поля ондулятора для генерации доминирующих третьей и пятой гармоник ОИ. Проводится моделирование излучения ЛСЭ с учетом гармоник поля в ондуляторе. Для этого применяются специально разработанная нами численная программа трехмерного моделирования ЛСЭ и феноменологическая модель ЛСЭ [41–44]. Последняя допускает произвольные магнитные поля и легко реализуется в программе Mathematica для быстрой и реалистичной оценки излучаемой мощности и эволюции коэффициентов группировки вдоль оси ЛСЭ.

2. ИНТЕНСИВНОСТЬ И СПЕКТР ОИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОНДУЛЯТОРА С АСИММЕТРИЧНОЙ ГАРМОНИКОЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Как известно, синусоидальное поле ондулятора является идеализацией реального поля ондулятора. В нем могут присутствовать и другие поля с кратным периодом. Обычно эти дополнительные поля слабы, но амплитуда третьей гармоники поля может достигать 10 % от амплитуды основного поля H_0. Это влияет на структуру ОИ [39]. Такие ондуляторы могут увеличивать мощность излучения высших гармоник и коэффициенты усиления, подобно тому как в гироприборах с двухчастотной группировкой растет степень группировки электронов за счет конструктивного взаимодействия на двух разных гармониках [45–47]. К примеру, в работе [48] предлагалось оптимизировать работу лазера путем захвата электронных сгустков высокочастотным электромагнитным полем. В эксперименте [39] использовался ондулятор KAERI с магнитным полем

$$\mathbf{H} = H_0\left(\sin(k_\lambda z) - d\sin(hk_\lambda z), \cos(k_\lambda z) + + d\cos(hk_\lambda z), 0\right), \quad h = 1, 2, 3, \ldots \quad (1)$$

в нашем случае с параметрами $h = 3$, $d = 0.0825$, $k_\lambda = 2\pi/\lambda_u = 2.21622$, $\lambda_u = 2.3$ см — период ондулятора. Резонансные длины волн излучения, испускаемого электронами под углом θ к оси ондулятора, представлены ниже (n — номер гармоники):

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}\left[1 + k_{eff}^2 + (\gamma\theta)^2\right], \quad (2)$$

где

$$k_{eff}^2 = k_{x,eff}^2 + k_{y,eff}^2,$$
$$k_{x,eff} = k_{y,eff} = k\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]}, \quad (3)$$
$$k = \frac{eH_0}{mc^2}\,\frac{\lambda_u}{2\pi},$$

γ — фактор Лоренца для электрона. Вычисляя спектральную плотность в ондуляторном поле (1), мы получаем для обобщенных функций Бесселя следующие точные аналитические выражения:

$$J_{n,m}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \times \\ \times \exp\left\{i\left[n\alpha + \xi_1\cos\alpha + \xi_2\cos(h\alpha) - \right.\right. \\ \left.\left. - \xi_3\sin\alpha + \xi_4\sin(h\alpha) - \xi_5\sin((h+1)\alpha)\right]\right\}, \quad (4)$$

где

$$\xi_1 = \frac{2mk\gamma\theta\cos\varphi}{1+k^2[1+(d/h)^2]+\gamma^2\theta^2}, \quad \xi_2 = \frac{d}{h^2}\,\xi_1,$$
$$\xi_3 = \xi_1 \operatorname{tg}\varphi, \quad \xi_4 = \frac{d}{h^2}\,\xi_1 \operatorname{tg}\varphi, \qquad (5)$$
$$\xi_5 = \frac{2mdk^2}{h(h+1)\{1+k^2[1+(d/h)^2]+\gamma^2\theta^2\}},$$

φ — полярный угол в плоскости, перпендикулярной оси ондулятора. Используя выражение (4), получаем следующие коэффициенты Бесселя для спонтанного излучения гармоник ОИ под углом θ к оси ондулятора:

$$T_{n,x} = \frac{2}{k}\gamma\theta\, J_{n,n}\cos\varphi + i\,(J_{n+1,n} - J_{n-1,n}) + {} + i\frac{d}{h}\,(J_{n+h,n} - J_{n-h,n})\,, \qquad (6)$$

$$T_{n,y} = \frac{2}{k}\gamma\theta\, J_{n,n}\sin\varphi - (J_{n+1,m} + J_{n-1,m}) + {} + \frac{d}{h}\,(J_{n+h,m} + J_{n-h,m})\,. \qquad (7)$$

Последние учитываются в следующем выражении для полной интенсивности ОИ в телесный угол Ω:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2N^2\gamma^2k^2}{c(1+k_{eff}^2+\gamma^2\theta^2)^2} \times {} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\nu_n}{2}\right)\left(|T_{n,x}|^2 + |T_{n,y}|^2\right), \qquad (8)$$

где N — число периодов в ондуляторе, $\nu_n = 2\pi nN[(\omega/\omega_n)-1]$ — параметр расстройки, $\omega_n = 2\pi c/\lambda_n$ — резонансные частоты ОИ. При $\theta = 0$ выражение (4) упрощается, аргументы $\xi_1, \ldots, \xi_4$ в (5) исчезают и остается только аргумент ξ_5. При $d = 0$ получаем спиральный ондулятор:

$$f_{1;x,y} = 1, \quad f_{n\neq 1} = 0,$$

где $f_{n;x} = |T_{n,x}|$, $f_{n;y} = |T_{n,y}|$. Численное моделирование излучения ондулятора KAERI с полем (1) было проведено в работе [39]. Некоторые предварительные оценки возможного излучения ЛСЭ с таким ондулятором были сделаны в работах [40, 44].

Одним из основных источников потерь ОИ и уширения его спектральных линий является разброс энергии σ_e электронного пучка и отклонение электронов от оси ондулятора на угол θ. Их можно учесть, вычислив интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2I(\nu_n + 2\pi nN\varepsilon, \theta)}{d\omega\, d\Omega}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_e}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_e^2}\right)d\varepsilon.$$

Расчет характеристик излучения и эволюции мощности гармоник в ЛСЭ представляет собой более сложную и трудоемкую задачу. Он обычно выполняется в компьютерных программах, где численно решаются уравнения движения и поля излучения для каждой гармоники. Это требует достаточно большого времени, специальных программ и подготовленного для работы с ними персонала. Быструю оценку можно выполнить с помощью феноменологической модели, откалиброванной и проверенной в экспериментах с ЛСЭ [41–44]. Обобщение феноменологической модели для эллиптических ондуляторов было дано в работе [40]. Попытка аналитически связать степень уширения спектральных линий спонтанного излучения со степенью усиления соответствующих гармоник ЛСЭ была предпринята в работе [49], в которой была установлена приблизительная корреляция между потерями в спонтанном и вынужденном излучениях.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ ПОЛЯ НА ОИ ПЛОСКОГО ДВУХЧАСТОТНОГО ОНДУЛЯТОРА

В данном разделе обобщены исследования, проведенные в работах [19–31]. В отличие от аналитического формализма обобщенных функций Бесселя, который позволяет исследовать излучение ондулятора с практически любой конфигурацией магнитного поля, численный расчет с готовыми программами возможен лишь для нескольких относительно простых конфигураций полей ондуляторов. Например, с использованием программы SPECTRA [37, 38] можно численно рассчитать ОИ с магнитным полем

$$\mathbf{H} = H_0\,(0, \sin(k_\lambda z) + d\sin(hk_\lambda z), 0)\,, \quad k_\lambda = 2\pi/\lambda_u, \quad h = 1, 2, 3. \qquad (9)$$

С помощью гармоник поля $\mathbf{H}$ можно увеличить или уменьшить мощность высших гармоник ОИ в зависимости от выбора d и h в выражении (9) [20, 23–25, 31]. Резонансы ОИ с полем (9) приходятся на длины волн (2), где

$$k_{eff} = \frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\frac{d}{h}\right)^2}.$$

Точный расчет ОИ с полем (9) приводит к следующим обобщенным функциям Бесселя:

$$J_{n,m}\left(\xi_m,\xi_m^{(i)}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\phi\cos\Big\{n\phi+\xi_m^{(1)}\sin\phi+\\ +\xi_m^{(2)}\sin(\phi h)+\xi_m^{(3)}\sin[\phi(h-1)]+\xi_m^{(4)}\sin[\phi(h+1)]+\\ +\xi_m^{(5)}\sin(2\phi h)+\xi_m\sin 2\phi\Big\}, \quad (10)$$

где

$$\xi_m\cong\frac{1}{4}\frac{mk^2}{1+\dfrac{k^2}{2}\left(1+\dfrac{d^2}{h^2}\right)+(\gamma\theta)^2},$$
$$\xi_m^{(1)}=\frac{8\xi_m\gamma\theta\cos\varphi}{k},\quad \xi_m^{(2)}=\frac{d\xi_1}{h^2}, \quad (11)$$
$$\xi_m^{(3)}=\frac{4d\xi_m}{h(h-1)},\quad \xi_m^{(4)}=\frac{4d\xi_m}{h(h+1)},$$
$$\xi_m^{(5)}=\frac{d^2\xi_m}{h^3}.$$

Они формируют амплитуды интенсивности ОИ для гармоник с номером $n=1,2,3,4,5,\ldots$:

$$T_{n,x}=J_{n-1,n}+J_{n+1,n}+\frac{d}{h}\left(J_{n+h,n}+J_{n-h,n}\right)+\\ +\frac{2\gamma\theta\cos\varphi}{k}J_{n,n},\quad T_{n,y}=\frac{2\gamma\theta\sin\varphi}{k}J_{n,n}. \quad (12)$$

Для обычного плоского ондулятора $d=0$, а T_n сводится к обычным функциям Бесселя $J_n(\xi_0\equiv\xi|_{d=0})$, которые дают хорошо известные коэффициенты Бесселя на оси ондулятора:

$$f_n=J_{\frac{n-1}{2}}(-\xi_0)+J_{\frac{n+1}{2}}(-\xi_0).$$

Интенсивность спонтанного ОИ электрона в поле (9) [22, 23] описывается выражением (8) с учетом (12).

Дополнительные постоянные магнитные компоненты поля были правильно учтены в работе [30]. Здесь мы не рассматриваем бетатронные колебания, которые возникают из-за отклонения пучка электронов от оси поля. В работе [44] для этого предлагается ввести феноменологический угол исходя из геометрии пучка, что дает реалистичные оценки.

Мы сравнили интенсивности гармоник ОИ в широком диапазоне напряженности поля третьей гармоники ондулятора. Результаты получены как аналитически по формулам (10), (11) (см. графики слева на рис. 1–6), так и численно с помощью программы SPECTRA (см. графики справа на рис. 1–6). Расчеты сделаны для $N=150$ периодов, чтобы лучше различать спектры ОИ. Амплитуда третьей гармоники поля ондулятора задана отношением d напряженности второй компоненты поля к напряженности основного поля H_0 в выражении (9), равным $d=-1.22$, -0.41, -0.244, 0, 0.41, 0.73.

Параметры пучка и ондулятора таковы: энергия электронов $E_e=151.9$ МэВ, $\gamma=297.26$, мощность электронного пучка $P_E=8.05$ ГВт, плотность тока $J=4.35\cdot10^8$ А/м^2, полное сечение пучка $\Sigma_{full}=1.219\cdot10^{-7}$ м^2, ток $I_0=53$ А, разброс энергий электронов $\sigma_e=0.0009$, ондуляторный параметр $k=2.1$ и период ондулятора $\lambda_u=2.8$ см.

Численные и аналитические результаты хорошо согласуются между собой (см. рис. 1–6), что подтверждает обоснованность нашего подхода. Небольшое количественное несоответствие для очень сильной третьей гармоники поля с $d=-1.22$ на рис. 6 связано с тем, что программа SPECTRA, по-видимому, учитывает относительно слабые возмущения основного поля ондулятора, в то время как аналитический формализм этим не ограничивается. Формулы (10)–(12) и другие формулы, представленные ниже, могут использоваться для анализа и оценки однопроходного излучения ЛСЭ с высоким коэффициентом усиления, например, с помощью проверенной в ЛСЭ-экспериментах феноменологической модели [40–44] и ее дальнейшего развития в [50].

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ ПОЛЯ НА СПЕКТР ОИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВУХЧАСТОТНОГО ОНДУЛЯТОРА

Качество спектральной линии ОИ зависит от электронного пучка. Для ондулятора с полем (1) мы выбрали согласно работе [39] следующие параметры: $\lambda_u=2.3$ см, $N=30$, $k=2.21622$, $h=3$, $d=0.0825$, энергия электронов $E_e=6.5$ МэВ, $\gamma=12.72$, эмиттансы $\varepsilon_x=1.5$ мм·мрад, $\varepsilon_y=0.35$ мм·мрад, параметры Твисса $\beta_x=43.66$ см, $\beta_y=28.75$ см, углы расходимости $\theta_x=4.5$ мрад и $\theta_y=1.6$ мрад. Ожидаемая интенсивность ОИ с учетом разброса энергий электронов в пучке представлена на рис. 7. Так как пучок имеет конечные поперечные размеры и расходимости, возникают четные гармоники, которые в идеальном случае отсутствуют. Вторая гармоника заметна и составляет 2–3 % от первой (см. рис. 7), что согласуется с работой [39]. Пятая гармоника излучения также была зарегистрирована и составляет ≈ 1.7–2.0 % от основного тона. Она имеет бо́льшую мощность, чем третья гармоника ОИ.

Мы также рассмотрели случай поля (1) с $d=0.3$ и провели сравнение относительных величин мощностей (см. рис. 7). Форма линий ОИ может быть продемонстрирована аналогично тому, как это сделано в работах [22–30]; мы опускаем это для краткости.

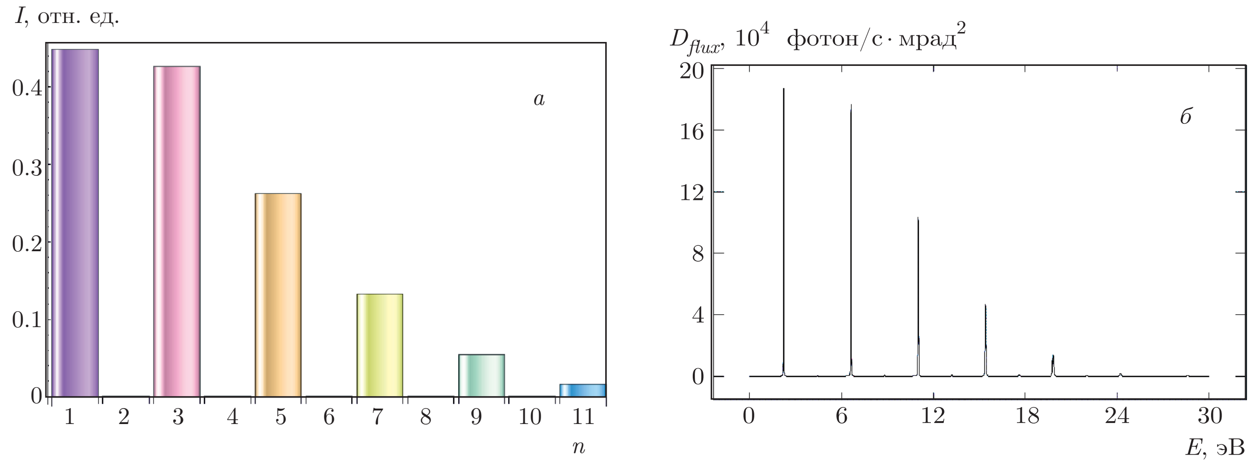

Рис. 1. Интенсивности гармоник ОИ в ондуляторе с $k = 2.133$, $h = 3$, $d = 0.73$, $\sigma_e = 0.9 \cdot 10^{-3}$ (a) и зависимость плотности числа фотонов D_{flux} от энергии (ширина полосы спектра 0.1 % от энергии в эВ)

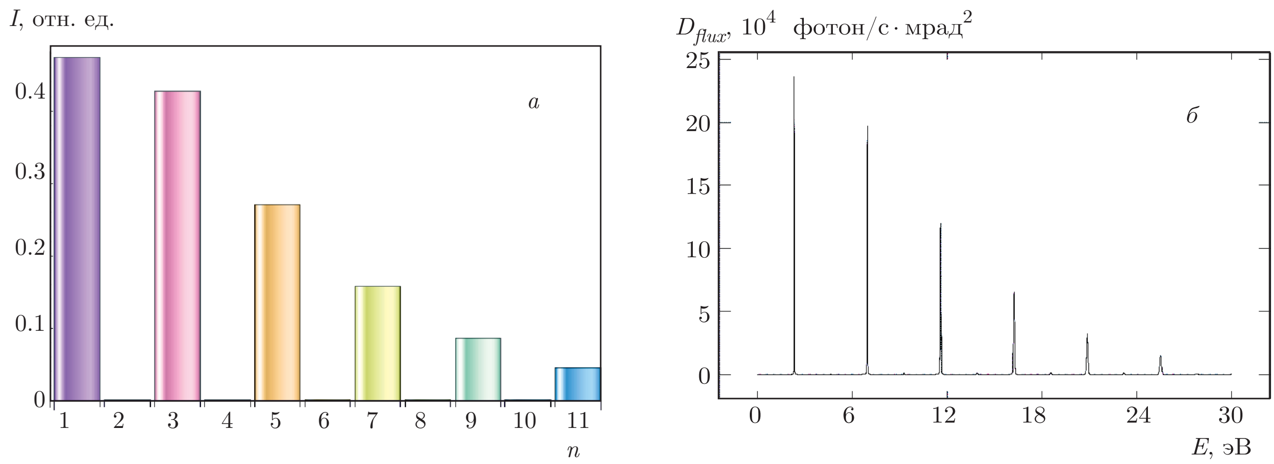

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для $d = 0.41$

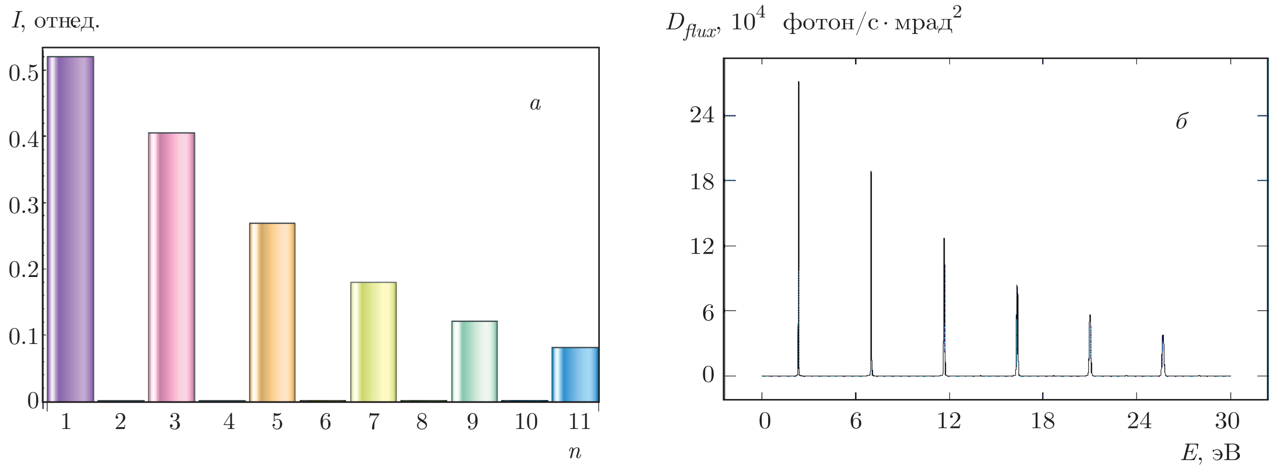

Рис. 3. То же, что на рис. 1, но для $d = 0$

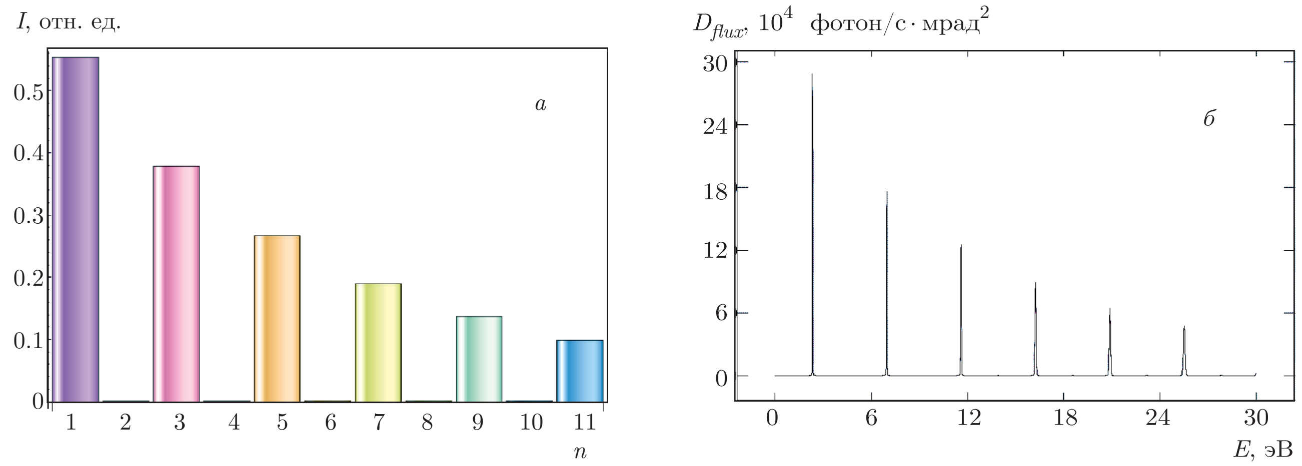

Рис. 4. То же, что на рис. 1, но для $d = -0.244$

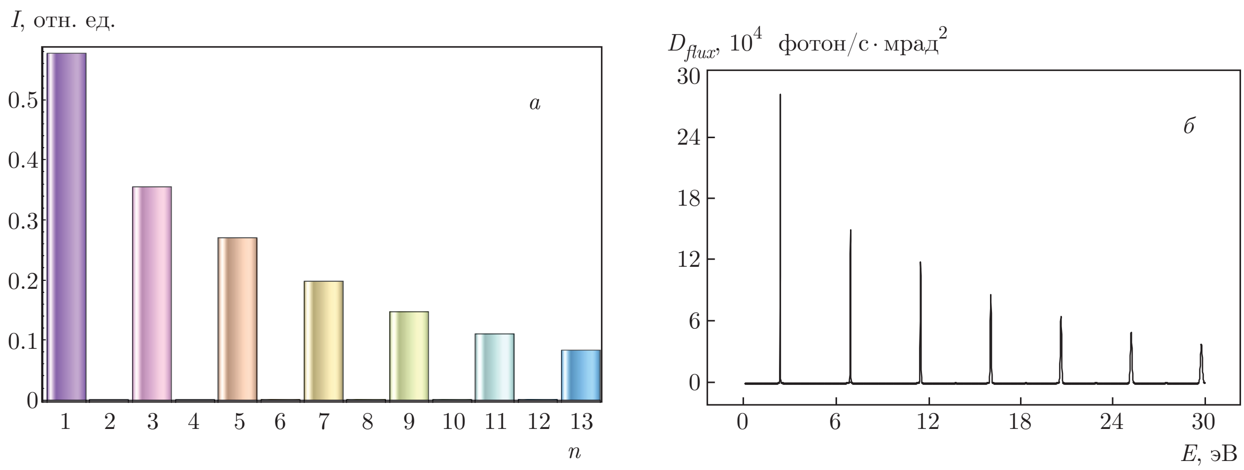

Рис. 5. То же, что на рис. 1, но для $d = -0.41$

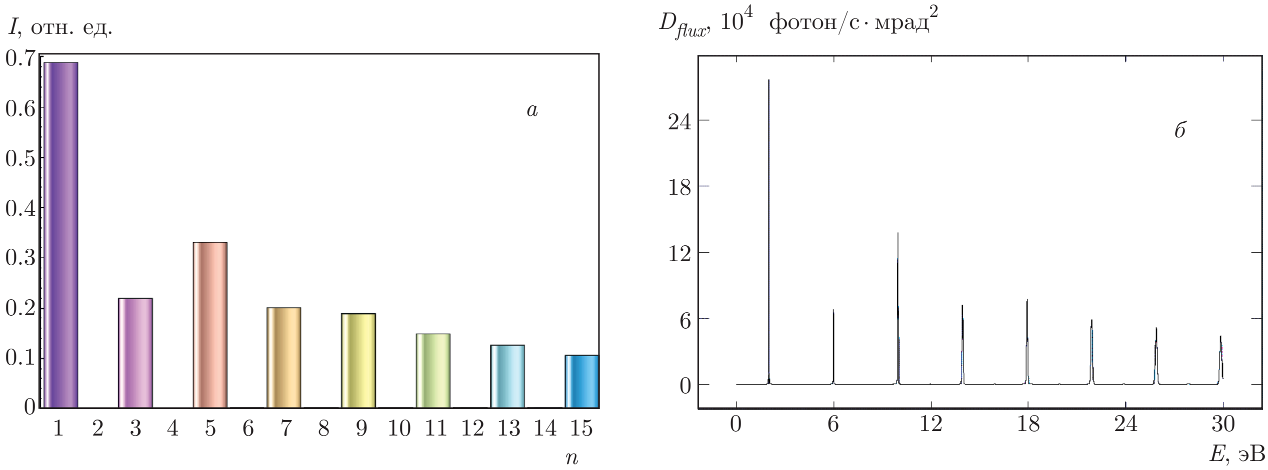

Рис. 6. То же, что на рис. 1, но для $d = -1.22$

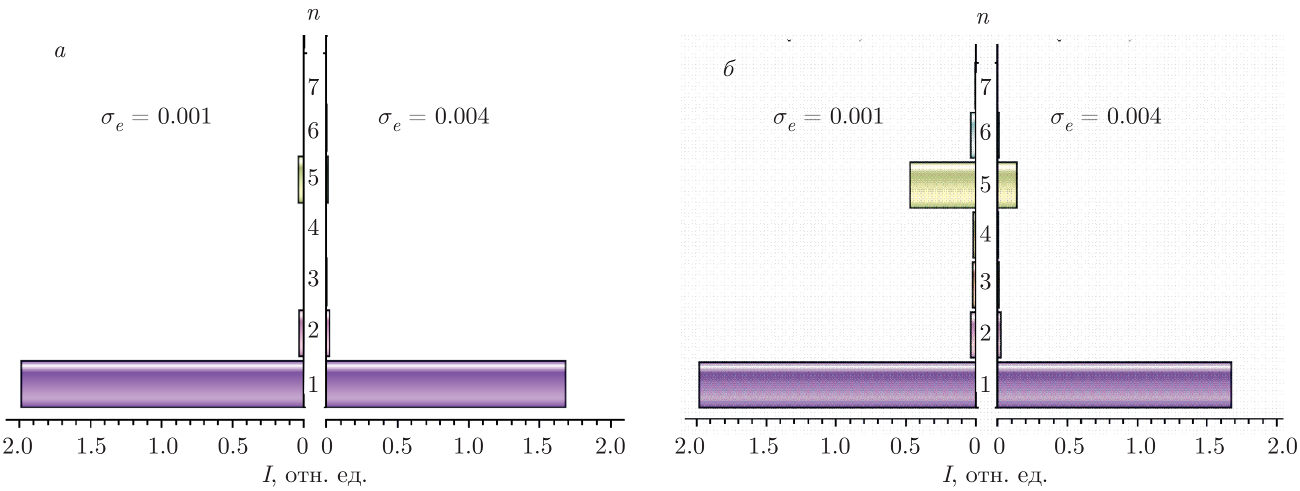

Рис. 7. Интенсивности гармоник ОИ с полем (1) на оси с учетом разброса энергий электронов: $d = 0.0825$ (a) и $d = 0.3$ ($б$); $\gamma = 12.72$, оценка для энергетического разброса $\sigma_e = 0.001$ и $\sigma_e = 0.004$ соответственно

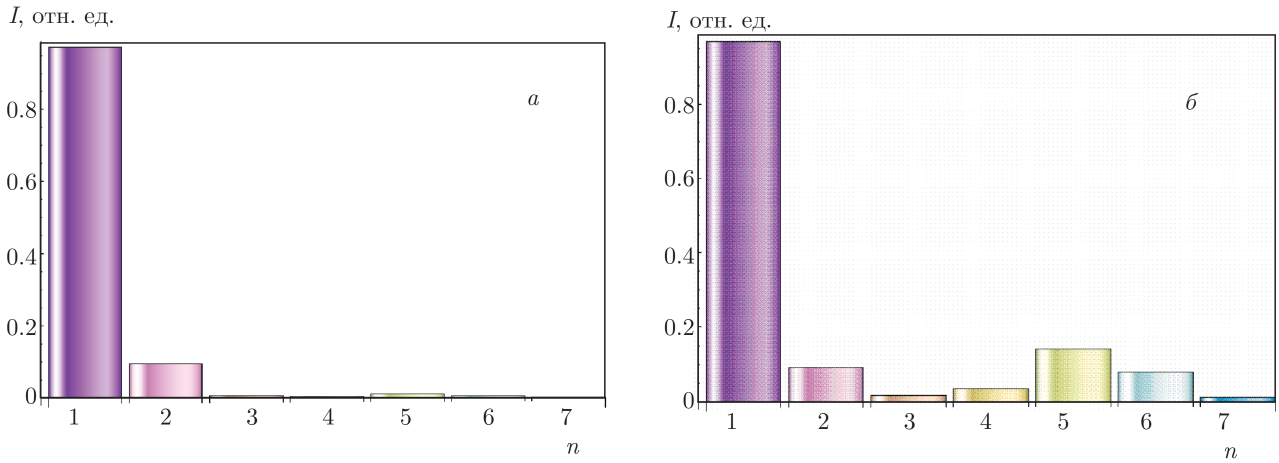

Рис. 8. Интенсивности гармоник ОИ с полем (1) на оси для $d = 0.0825$ (a) и $d = 0.3$ ($б$); $\gamma = 1570$, $\varepsilon_{norm} = 3 \cdot 10^{-6}$ мм·мрад, $\beta = 0.4$ м

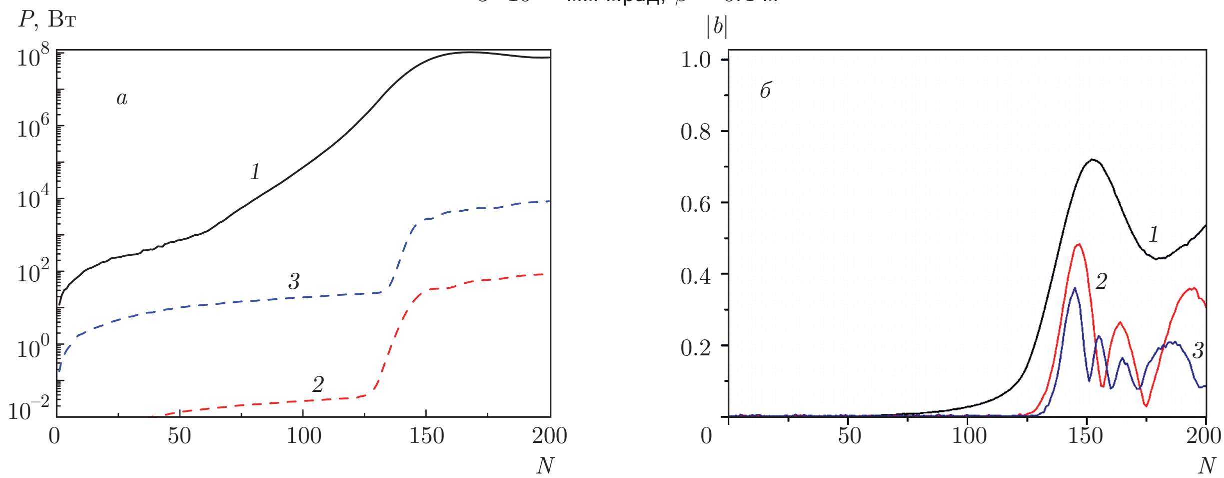

Рис. 9. Эволюция мощности гармоник (a) и коэффициента группировки электронов ($б$) в зависимости от номера периода N в ЛСЭ с полем ондулятора (1) в режиме суперлюминесценции (самоусиления спонтанного излучения) с $\gamma = 300$, $\sigma_e = 0.02 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon_{norm} = 2$ мкм·рад, $\beta = 2$ м, $I_0 = 100$ А, $\lambda_u = 3$ см, $k = 3.5$, $d = 0.3$, $h = 3$: $n = 1$ (кривые *1*), $n = 3$ (*2*), $n = 5$ (*3*)

Рассмотрим ондулятор с полем (1) с пучком эксперимента SACLA: $\gamma = 1570$, эмиттанс $\varepsilon_{norm} = 3$ мм·мрад/γ, параметр Твисса $\beta = 0.4$ м [39] (рис. 8).

Интенсивности гармоник обеих поляризаций излучения одинаковы, поэтому для них показана одна диаграмма. Интенсивность второй гармоники достигает 10 % от интенсивности первой (рис. 8). Интенсивность пятой гармоники при $d = 0.3$ в (1) достигает 15 % от интенсивности первой (см. рис. 8*б*). Присутствуют также и другие высшие гармоники. При этом пятая гармоника превалирует в спонтанном излучении.

Представляет интерес рассмотреть ЛСЭ с ондулятором, аналогичным KAERI: вблизи оси ондулятора обе поляризации дают одинаковый вклад в интенсивность каждой из гармоник. Для данного ондулятора была сделана программа трехмерного моделирования излучения ЛСЭ с параметрами $k = 3.5$, $d = 0.3$, $h = 3$. Получаем лазер, в котором пятая гармоника излучения преобладает над третьей (рис. 9).

Основной тон является доминирующим, как и в случае плоского ондулятора, так как коэффициент Бесселя для первой гармоники практически равен единице. При $d = 0$ получаем спиральный ондулятор, в котором генерируется только первая гармоника на оси.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОИ ДВУХЧАСТОТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОНДУЛЯТОРА

Рассмотрим следующую нетривиальную конфигурацию магнитного поля ондулятора с кратными периодами:

$$\begin{gathered}\mathbf{H} = H_0\left(\sin(k_\lambda z), d_1 \sin(hk_\lambda z) + \right.\\ \left. + d_2\cos(lk_\lambda, z), 0\right), \quad l \neq h, \quad l, h = 1, 2, 3, \ldots \end{gathered} \tag{13}$$

В пределе $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$ и $d_1 \neq 0$, $d_2 = 0$ формула (13) описывает поле эллиптического ондулятора. Выражения для коэффициентов Бесселя для ондуляторов с гармоническим эллиптически поляризованным магнитным полем наилучшим образом представлены в работе [35]. При $d_1 = h = 1$ получаем плоский ондулятор, а при $d_1 = 0$, а $d_2 = l = 1$ — спиральный ондулятор.

По оси x в конфигурации магнитного поля (13) присутствует обычное синусоидальное поле, как в плоском ондуляторе; по оси y имеем комбинацию полей кратных частот с синусом и косинусом. Следует сразу уточнить, что формулы, представленные ниже, справедливы в случаях $l \neq h$. Такая комбинация полей удобна, так как является обобщением эллиптических ондуляторов с конфигурациями полей sin–sin и sin–cos. При $d_2 = 0$ имеем конфигурацию sin–sin, а при $d_1 = 0$, соответственно, sin–cos. Аналитический формализм следует из общего подхода, представленного, например, в работах [20, 35]. Он заключается в выделении осциллирующей части в экспоненте выражения для спектральной интенсивности, которая после некоторых манипуляций с индексами и рядами становится обобщенной функцией Бесселя.

При расчете ОИ в поле (13) получаем следующие обобщенные функции Бесселя:

$$\begin{gathered} J_n^m(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \,\times \\ \times \exp\left\{i\left[n\alpha + \xi_1\sin(h\alpha) + \xi_2\cos(l\alpha) + \xi_3\sin\alpha \; + \right.\right.\\ + \;\xi_4\sin(2\alpha) + \xi_5\sin(2h\alpha) + \xi_6\sin(2l\alpha) \; + \\ \left.\left. + \;\xi_7\cos((l+h)\alpha) + \xi_8\cos((l-h)\alpha)\right]\right\}, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\xi_4 = \frac{1}{4}\,\frac{mk^2}{1 + \dfrac{k^2}{2}\left[1 + \left(\dfrac{d_1}{h}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{l}\right)^2\right] + \gamma^2\theta^2}, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \xi_1 = \frac{8d_1}{kh^2}\,\gamma\theta\xi_4\cos\varphi, \quad \xi_2 = \frac{8d_2}{kl^2}\,\gamma\theta\xi_4\cos\varphi, \\ \xi_3 = \frac{8}{k}\,\gamma\theta\sin\varphi\xi_4, \quad \xi_5 = \frac{d_1^2}{h^3}\,{}_4\xi_4, \quad \xi_6 = -\frac{d_2^2}{l^3}\,\xi_4 \\ \xi_7 = \frac{4d_1d_2}{hl(l+h)}\,\xi_4, \quad \xi_8 = \frac{4d_1d_2}{hl(l-h)}\,\xi_4. \end{gathered} \tag{16}$$

Амплитуды $T_{n;x,y}$ для x- и y-поляризаций ОИ имеют вид

$$\begin{gathered} T_{n,x} = \frac{2}{k}\gamma\theta J_n^n\cos\varphi + \frac{d_1}{h}\left(J_{n+h}^n + J_{n-h}^n\right) + \\ + i\frac{d_2}{l}\left(J_{n+l}^n - J_{n-l}^n\right), \end{gathered} \tag{17}$$

$$T_{n,y} = \frac{2}{k}\gamma\theta J_n^n\sin\varphi + \left(J_{n+1}^n + J_{n-1}^n\right), \tag{18}$$

где $J_n^m \equiv J_n^m(\xi_{1,2,3,4,5,6,7,8}(m))$ (см. (14)). Для длин волн резонансов ОИ (8) используется эффективный ондуляторный параметр

$$k_{eff}^2 = \frac{k^2}{2}\left[1 + \left(\frac{d_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{l}\right)^2\right], \tag{19}$$

где $k = H_0\lambda_u e/2\pi m_e c^2$, а полная интенсивность определяется формулой (8) с учетом (9). В большинстве установок $\gamma\theta \sim 10^{-2}$, $(\gamma\theta)^2 \ll 1$. Для $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ и $l = 1$ получаем спиральный ондулятор с коэффициентами Бесселя $T_{1;x,y} = 1$ и $T_{n\neq 1} = 0$.

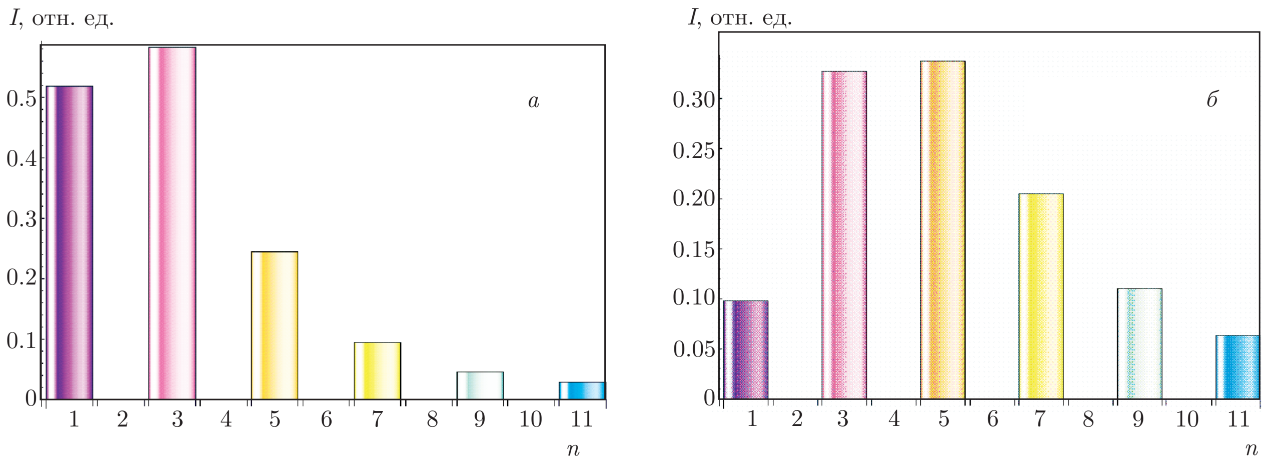

Рис. 10. Интенсивности гармоник ОИ с полем (13) на оси с учетом эмиттанса и разброса энергии при $k = 2.21622$, $h = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.3$, $l = 1$, $\sigma_e = 0.9\cdot 10^{-3}$, $N = 150$ для y-поляризации (a) и x-поляризации ($б$)

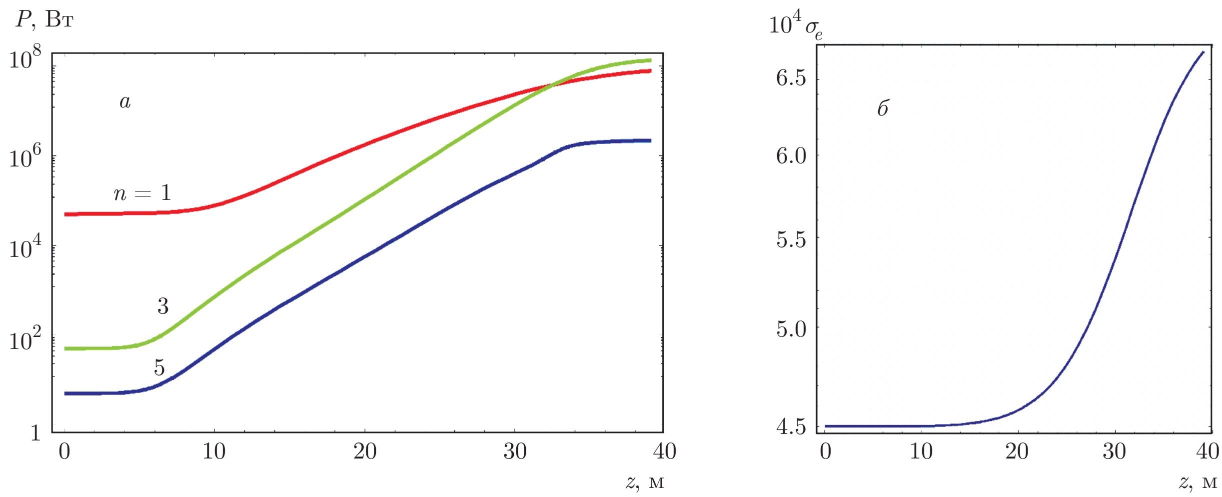

Рис. 11. Оценка мощности x-поляризованного излучения для $n = 1, 3, 5$ (a) и эволюция энергетического разброса электронов ($б$) вдоль оси ЛСЭ с эллиптическим ондулятором (13), $h = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.25$, $l = 1$, $k = 2.216$, $\lambda_u = 2.3$ см, параметры электронного пучка из эксперимента SACLA: $\gamma = 1570$, $I = 300$ А, $\sigma_e = 4.5\cdot 10^{-4}$, $\beta = 5$ м, $\varepsilon_{x,y} = 3$ мм·мрад

Рассмотрим ондулятор с полем

$$\mathbf{H} = H_0\left(\sin(k_\lambda z), \sin(3k_\lambda z) + 0.3\cos(k_\lambda z), 0\right),$$

т. е. в выражении (13) $h = 3$, $l = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.3$. ОИ при этом обладает довольно интересными особенностями. Выберем $k = 2.21622$, $\lambda_u = 0.023$ м, как в работе [39], и рассмотрим пучок с $\gamma = 11.8$, $\varepsilon_{norm} = 0.925/\gamma$ мм·мрад, $\beta = 0.37$ м. Тогда получаем следующие значения коэффициентов Бесселя $f_{n,x}$, $f_{n,y}$:

$$f_{x;n=1,\ldots,11} = \left\{\begin{array}{l}\mathbf{0.347327}, 0.00460441, \mathbf{0.295931}, 0.00249113, \mathbf{0.224602}, 0.00214126,\\ 0.145829, 0.00234819, 0.0935949, 0.00233896, 0.0636811\end{array}\right\}, \tag{20}$$

$$f_{y;n=1,\ldots,11} = \left\{\begin{array}{l}\mathbf{0.79742}, 0.0018173, \mathbf{0.394852}, 0.00215424, \mathbf{0.191188}, 0.00239025,\\ 0.0986364, 0.00215422, 0.0602848, 0.00173364, 0.0429623\end{array}\right\} \tag{21}$$

(жирным шрифтом выделены гармоники, дающие преобладающий вклад в излучение). Заметим, что в (20) коэффициент Бесселя для основного тона в x-поляризации, $f_{x;1} \approx \mathbf{0.35}$, близок по величине к коэффициенту Бесселя третьей гармоники, $f_{x;3} \approx \approx \mathbf{0.30}$, и пятая гармоника также имеет близкое значение коэффициента Бесселя, $f_{x;5} \approx \mathbf{0.22}$. Безразмерные интенсивности гармоник ОИ представлены на рис. 10.

Обратим внимание на правую диаграмму на рис. 10. Третья и пятая гармоники ОИ с x-поляризацией более чем в три раза сильнее основного тона соответственной поляризации; в y-поляризации третья гармоника также сильнее основного тона.

Для генерации высших гармоник ОИ целесообразно использовать поле (13) с $h = 3$, $l = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.25$. Соответствующие коэффициенты Бесселя для x-поляризации таковы:

$$f_{x;n=1,\ldots,11} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0.291609}, 0.00426642, \mathbf{0.279681}, 0.00217237, \mathbf{0.217977}, 0.00196355, \\ 0.145185, 0.00224461, 0.0969743, 0.00229411, 0.0688733 \end{array} \right\}. \quad (22)$$

В y-поляризации излучения преобладает основной тон; предполагается, что эту поляризацию можно отфильтровать. Эволюция мощности x-поляризации излучения и разброса энергии электронов по длине ондуляторов ЛСЭ, полученная с помощью феноменологической модели [40], показана на рис. 11. Мощность третьей гармоники ЛСЭ с длиной волны $\lambda_3 = 6$ нм растет быстрее, чем мощность основного тона с $\lambda_1 = 18$ нм. Их выход на насыщение происходит примерно на одной длине ондулятора. Генерация третьей гармоники идет в линейном режиме вплоть до насыщения, и ее мощность насыщения даже немного превышает мощность основного тона. Разброс энергии, вызванный основным тоном этой поляризации, является малым. Рассмотренный пример демонстрирует, что эллиптические бигармонические ондуляторы могут быть использованы в ЛСЭ для генерации поляризованных гармоник с большой мощностью излучения без применения сдвига фаз для подавления основного тона.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели ондуляторное излучение в мультипериодических ондуляторах и получили, используя формализм обобщенных функций Бесселя, строгие аналитические выражения для коэффициентов Бесселя и интенсивностей ОИ с учетом размера пучка и разброса энергии электронов. Мы сравнили аналитические результаты для некоторых ондуляторов с численными результатами, полученными нами в программе SPECTRA, и получили хорошее согласие между ними.

Для ОИ спирального ондулятора с антисимметричной высшей гармоникой поля (1) получены точные аналитические выражения для коэффициентов Бесселя и интенсивности излучения с учетом геометрии реальных пучков. Наши результаты хорошо согласуются с экспериментом. Интенсивность второй гармоники ОИ из-за конечного размера пучка составляет 2–3 % от интенсивности первой гармоники. Мы показали, что слабая третья гармоника ондуляторного поля, около 10 % от основного периодического поля H_0, $d = 0.1$, $h = 3$, порождает пятую гармонику в спектре ОИ. При этом мощность ее излучения составляет менее 2 % от мощности основного тона, что согласуется с экспериментом. Более сильная третья гармоника поля ондулятора, $d = 0.3$, обеспечивает мощность пятой гармоники ОИ на уровне 10–25 % от мощности основного тона. Вторая гармоника излучения ЛСЭ вызвана конечным размером и фокусировкой пучка электронов.

Мы изучили ОИ эллиптического асимметричного бигармонического ондулятора с магнитным полем (13). Получены точные аналитические выражения для коэффициентов Бесселя и интенсивности гармоник ОИ в терминах обобщенных функций Бесселя. Определены параметры $h = 3$, $l = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.3$ для эллиптического бигармонического ондулятора, которые дают малые значения коэффициентов Бесселя для основного тона в x-поляризации и одновременно с этим большие значения коэффициентов Бесселя для третьей и пятой гармоник ОИ. В спектре спонтанного ОИ этого ондулятора в x-поляризации пятая гармоника самая сильная, за ней следует третья, а первая гармоника оказывается слабой. В y-поляризации третья гармоника самая сильная, следующая по мощности первая гармоника. Моделирование однопроходного ЛСЭ с таким ондулятором показало, что мощность третьей гармоники излучения с x-поляризацией достигла мощности основного тона в конце ЛСЭ без использования сдвига фаз и подавления роста основной гармоники.

Таким образом, проведенные нами исследования ОИ эллиптических бигармонических ондуляторов демонстрируют определенные преимущества последних в генерации гармоник по сравнению с обычными ондуляторами и позволяют вести их дальнейшее изучение на основе полученных нами точных аналитических выражений.

Благодарности. Авторы благодарят А. В. Борисова и В. Ч. Жуковского за полезные обсуждения. Один из авторов (А. М. К.) выражает благодарность Фонду развития теоретической физики и математики «Базис» за оказанную поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **16**, 379 (1946).

2. В. Л. Гинзбург, Изв. АНСССР, сер. физ. **11**, 1651 (1947).

3. H. Motz, W. Thon, and R. N. J. Whitehurst, Appl. Phys. **24**, 826 (1953).

4. Д. Ф. Алферов, Ю. А. Башмаков, Е. Г. Бессонов, ЖТФ **43**, 2126 (1973).

5. Д. Ф. Алферов, Ю. А. Башмаков, П. А. Черенков, УФН **157**, 389 (1989).

6. В. Г. Багров, Г. С. Бисноватый-Коган, В. А. Бордовицын, *Теория излучения релятивистских частиц*, Физматлит, Москва (2002).

7. В. Г. Багров, И. М. Тернов, Б. В. Холомай, *Излучение релятивистских электронов в продольном периодическом электрическом поле кристалла*, ТФ СО АН СССР, Томск (1987).

8. Н. А. Винокуров, Е. Б. Левичев, УФН **185**, 917 (2015).

9. B. W. J. McNeil and N. R. Thompson, Nature Photonics **4**, 814 (2010).

10. C. Pellegrini, A. Marinelli, and S. Reiche, Rev. Mod. Phys. **88**, 015006 (2016).

11. Z. Huang and K. J. Kim, Phys. Rev. ST-AB **10**, 034801 (2007).

12. E. L. Saldin, E. A. Schneidmiller, and M. V. Yurkov, *The Physics of Free Electron Lasers*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).

13. R. Bonifacio, C. Pellegrini, and L. Narducci, Opt. Comm. **50**, 373 (1984).

14. P. Schmüser, M. Dohlus, J. Rossbach, and C. Behrens, *Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime*, Springer Tracts Mod. Phys. Springer Internat. Publ., Switherland (2014).

15. C. Pellegrini, Phys. Scr. **2016**, 014004 (2016).

16. G. Margaritondo and P. R. Ribic, J. Synchrotron Rad. **18**, 101 (2011).

17. G. Margaritondo, Rivista Nuovo Cim. **40**, 411 (2017).

18. W. Placzek, A. Abramov, S. E. Alden et al., in *XXV Cracow Epiphany Conference on Advances in Heavy Ion Physics*, 8–11 January 2019, Cracow, Poland, https://arxiv.org/abs/1903.09032.

19. K. Zhukovsky, J. Opt. **20**, 095003 (2018).

20. G. Dattoli, V. V. Mikhailin, P. L. Ottaviani, and K. Zhukovsky, J. Appl. Phys. **100**, 084507 (2006).

21. G. Dattoli, A. Doria, L. Giannessi, and P. L. Ottaviani, Nuclear Instrum. Meth. Phys. Res. A **507**, 388 (2003).

22. К. В. Жуковский, Вестник МГУ, серия 3: физика, астрономия, вып. 4, 18 (2015).

23. K. Zhukovsky, Laser Part. Beams **34**, 447 (2016).

24. J. Hussain and G. Mishra, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **656**, 101 (2011).

25. G. Mishra, M. Gehlot, and J.-K. Hussain, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **603**, 495 (2009).

26. K. Zhukovsky, Nucl. Instr. Meth. B **369**, 9 (2016).

27. K. Zhukovsky, J. Appl. Phys. **122**, 233103 (2017).

28. К. В. Жуковский, Изв. вузов, физика **60**, вып. 9 (2017).

29. K. Zhukovsky, Opt. Comm. **353**, 35 (2015).

30. K. Zhukovsky, J. Electromagn. Wave **29**, 132 (2015).

31. Q. Jia, Phys. Rev. ST-AB **14**, 060702 (2011).

32. Е. Г. Бессонов, Препринт ФИАН №18 (1982).

33. В. И. Алексеев, Е. Г. Бессонов, в сб. *Труды VI Всесоюзн. совещ. по использованию синхротронного излучения СИ-84*, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск (1984), с. 92.

34. E. G. Bessonov, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **282**, 405 (1989).

35. V. I. Alexeev and E. G. Bessonov, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **308**, 140 (1991).

36. А. А. Коломенский, И. В. Синильщикова, Е. Г. Бессонов и др., Труды ФИАН **214**, 193 (1993), ISSN 0203-5820.

37. T. Tanaka, Phys. Rev. ST–AB **17**, 060702 (2014).

38. T. Tanaka and H. Kitamura, J. Synchrotron Rad. **8**, 1221 (2001).

39. K. Lee, J. Mun, S.-H. Park et al, Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A **776**, 27 (2015).

40. K. Zhukovsky, Results in Phys. **13**, 102248 (2019).

41. K. Zhukovsky and A. Kalitenko, J. Synchrotron Rad. **26**, 159 (2019).

42. K. Zhukovsky and A. Kalitenko, J. Synchrotron Rad. **26**, 605 (2019).

43. К. В. Жуковский, Вестник МГУ, серия 3: физика, астрономия, вып. 5, 60 (2019).

44. К. В. Жуковский, А. М. Калитенко, Изв. вузов, физика **62**, вып. 2, 153 (2019).

45. A. V. Savilov and G. S. Nusinovich, Phys. Plasmas **14**, 053113 (2007).

46. G. S. Nusinovich and O. Dumbrajs, Phys. Plasmas **2**, 568 (1995).

47. A. V. Savilov and G. S. Nusinovich, Phys. Plasmas **15**, 013112 (2008).

48. Е. Д. Белявский, И. А. Гончаров, А. А. Силивра, ЖЭТФ **108**, 1318 (1995).

49. K. Zhukovsky, J. Phys. D **50**, 505601 (2017).

50. K. Zhukovsky, J. Synchrotron Rad. **26**, 1481 (2019).