ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 4, стр. 754–764

ДИССИПАТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН

С. Г. Чефранов [*]

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
119017, Москва, Россия

Physics Department, Technion-Israel Institute of Technology
32000, Haifa, Israel

Поступила в редакцию 2 октября 2019 г.,
после переработки 17 ноября 2019 г.
Принята к публикации 20 ноября 2019 г.

Получено новое условие линейной неустойчивости плоского фронта сильной ударной волны в произвольной среде, определяемое конечностью вязкости среды. Показано, что неустойчивость фронта ударной волны реализуется за счет диссипативной неустойчивости течения за фронтом, аналогичной неустойчивости течения в пограничном слое. Установлено, что в пределе малой вязкости одномерные продольные возмущения растут намного быстрее двумерных (гофрировочных) возмущений. Проведено сравнение с известными результатами экспериментального наблюдения и численного моделирования неустойчивости ударных волн. Оно указывает на лучшее соответствие нового условия абсолютной неустойчивости ударной волны по сравнению с условием такой неустойчивости в классической теории Дьякова, не учитывающей вязкость.

DOI: 10.31857/S0044451020040197

1. ВВЕДЕНИЕ

Ударные волны возникают во многих нелинейных процессах в физике плазмы, гидродинамике, аэродинамике и астрофизике [1–7]. При этом важную роль играет проблема устойчивости этих волн. Однако до настоящего времени существует проблема классической линейной теории неустойчивости ударных волн в идеальных невязких средах [8–10], которая не объясняет неустойчивость плоского фронта ударной волны, наблюдаемую в реальных газах [11]. В классической теории Дьякова [8] условия неустойчивости получены только для поперечных двумерных (гофрировочных) возмущений. При этом в [8], как и в теории Ландау [10], ударная волна всегда устойчива относительно одномерных продольных (вдоль направления движения плоской ударной волны) возмущений.

Учет в [12] вязкости и связанной с ней конечной ширины фронта ударной волны [13] не изменил, однако, вывод теории Ландау об устойчивости плоского фронта ударной волны относительно малых продольных одномерных возмущений в случае слабых ударных волн. Более того, и для поперечных двумерных возмущений в [14] получен вывод об устойчивости плоского фронта слабой ударной волны, так же как и в [12] моделируемой на основе решения уравнения Бюргерса.

В линейной теории неустойчивости ударных волн [15] для ударных волн произвольной интенсивности дано обобщение теории Дьякова [8–10], в котором уже учтена вязкость. При этом в [15], действительно, установлена дестабилизирующая роль вязкости для моды, которая в теории [8–10] соответствовала нейтрально устойчивой акустической моде с постоянной во времени амплитудой. Однако учет вязкости не привел в теории [15] к изменению условий абсолютной неустойчивости, полученных в [8] для двумерных возмущений и имеющих вид

$$h < -1, \tag{1.1}$$

$$h > 1 + 2M, \tag{1.2}$$

где M — число Маха в области сжатия за фронтом ударной волны, $M < 1$; $h = j^2(dV/dp)_H$ — параметр Дьякова, определенный в [8] и представляющий собой отношение тангенсов углов наклона прямой Рэлея и касательной к ударной адиабате Гюгонио [10]. При этом для случая одномерных продольных воз-

[*] E-mail: schefranov@mail.ru, csergei@technion.ac.il

мущений в [15] фронт плоской ударной волны является всегда устойчивым, как и в теории [8, 10], не учитывающей вязкость.

В настоящей работе, для простоты, рассмотрены только акустические возмущения в отличие от теории [8–10, 15], где наряду с акустическими возмущениями рассмотрены и возмущения энтропии. При этом показана возможность неустойчивости относительно одномерных продольных возмущений, которые в пределе малой вязкости могут расти быстрее двумерных гофрировочных возмущений. Инкремент экспоненциального роста одномерных возмущений в данном случае пропорционален параметру $\tau^{-1} = 2w^2/\nu$, введенному также в работе [12], $|w|$ — величина скачка скорости на разрыве, а ν — коэффициент кинематической вязкости. В результате, установлен диссипативный механизм неустойчивости течения в области сжатия за плоским фронтом ударной волны, аналогичный реализуемой для течений в пограничных слоях, когда именно конечность вязкости обеспечивает неустойчивость при достаточно больших числах Рейнольдса [10, 16]. При этом получено новое условие абсолютной неустойчивости, которое в отличие от условий (1.1), (1.2) (и условия неустойчивости, указанного в [15]) для одномерных и для двумерных возмущений имеет вид

$$1 - 2M^2 < h < 1. \tag{1.3}$$

Условие неустойчивости (1.3), в отличие от (1.1) и (1.2), уже не противоречит данным эксперимента [11], где неустойчивость фронта плоской ударной волны в аргоне и в углекислом газе наблюдается при величине параметра Дьякова $h \approx 0.05$.

Конкретизация величины h и условия (1.3) проведена для ударных волн в жидкостях и в газах на основе использования известных из эксперимента представлений для ударной адиабаты (в виде линейной зависимости скорости ударной волны от скорости среды за фронтом [17–19]). В этой связи рассмотрены также результаты численного моделирования неустойчивости фронта ударной волны [7, 20–22].

2. ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим плоскую стационарную ударную волну произвольной интенсивности, распространяющуюся в произвольной среде в положительном направлении вдоль оси x.

Далее будем использовать те же обозначения, что и в работе [9], вводя нижний индекс «0» для обозначения величин, относящихся к области перед фронтом ударной волны в области $x > 0$ в системе координат, в которой плоский фронт ударной волны является неподвижным и находится в точке $x = 0$.

Будем рассматривать только возмущения, относящиеся к области сжатия вдоль отрицательной полуоси $x < 0$. Для области $x > 0$ среда остается невозмущенной, поскольку, как обычно, считается выполненным условие для числа Маха в невозмущенной среде $M_0 > 1$, где $M_0 = |w_0|/c_0$, $w_0 = U_0 - D < 0$ [9]. При этом D, U_0, c_0 — скорости фронта ударной волны, частиц невозмущенной среды и невозмущенной скорости звука в неподвижной системе координат. Скорость невозмущенной среды обычно принимают равной нулю $U_0 = 0$. Аналогичным образом определяется и число Маха в области сжатия $M = |w|/c$, $w = U - D < 0$ [9]. При этом U, c — скорости частиц возмущенной среды за фронтом ударной волны и местная скорость звука в возмущенной среде в неподвижной системе координат. Как обычно, считаются выполненными условия в виде $M_0 > 1$, $M < 1$ [8–10].

Ограничимся, для простоты, рассмотрением случая двумерных возмущений, когда предполагается однородность фронта ударной волны, расположенного в плоскости (z, y), в направлении оси y, когда отсутствуют возмущения поля скорости с компонентой вдоль этой оси. При этом уравнение для возмущенной плоской поверхности ударной волны имеет вид, соответствующий зависимости от координаты z для амплитуды отклонений от равновесного положения $x = 0$ вдоль оси x:

$$x_{sh} = g(z, t). \tag{2.1}$$

В системе координат, в которой невозмущенный фронт ударной волны неподвижен, уравнения гидродинамики для вязкой сжимаемой среды для малых возмущений поля скорости и давления за фронтом ударной волны в области $x < 0$ в линейном приближении имеют вид [10]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial V_{1z}}{\partial t} + w\frac{\partial V_{1z}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu_1 \Delta_2 V_{1z} + \\
+ \left(\frac{\nu_1}{3} + \nu_2\right)\frac{\partial \operatorname{div}\mathbf{V}_1}{\partial z}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial V_{1x}}{\partial t} + w\frac{\partial V_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu_1 \Delta_2 V_{1x} + \\
+ \left(\frac{\nu_1}{3} + \nu_2\right)\frac{\partial \operatorname{div}\mathbf{V}_1}{\partial x}, \quad \operatorname{div}\mathbf{V}_1 = \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial V_{1x}}{\partial x}, \\
\frac{\partial p_1}{\partial t} + w\frac{\partial p_1}{\partial x} + c^2\rho \operatorname{div}\mathbf{V}_1 = 0, \quad \nu = \frac{4}{3}\nu_1 + \nu_2.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

В (2.2) $\nu_1 = \eta/\rho$, $\nu_2 = \zeta/\rho$ — коэффициенты соответственно сдвиговой и объемной кинематической вязкости. В [15] уравнения (2.2) рассмотрены в случае нулевого коэффициента объемной вязкости $\nu_2 = 0$. Как и в [8–10,15], для простоты, будем пренебрегать влиянием ускорения силы тяжести и других внешних сил.

В (2.2) поля возмущений обозначены нижним индексом 1, $c^2 = (\partial p/\partial\rho)_s$ — квадрат местной скорости звука в области за фронтом ударной волны, когда в изэнтропическом приближении соотношение между малыми возмущениями плотности и давления имеет вид $p_1 = c^2\rho_1$ [8–10]. Поэтому уравнение для возмущений поля давления в (2.2) следует из уравнения неразрывности для возмущений плотности.

Ограничимся исследованием системы (2.2) для возмущений акустического типа, не рассматривая эволюцию возмущений энтропии. При нулевой вязкости система (2.2) точно совпадает с рассмотренной в [8, 9] системой уравнений для возмущений акустического типа. Как и в [8, 9], рассмотрим систему (2.2) совместно с граничными условиями на поверхности разрыва, определяемой функцией (2.1) с учетом того, что для тангенциального и нормального единичных векторов к этой поверхности имеем представления [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (t_x, t_z) = (-g_z, -1)/\sqrt{1+g_z^2}, \\ \mathbf{n} &= (n_x, n_z) = (1, -g_z)/\sqrt{1+g_z^2}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $g_z = \partial g/\partial z$.

Из граничного условия непрерывности тангенциальной компоненты поля скорости на возмущенном фронте ударной волны следует равенство скалярных произведений с вектором $\mathbf{t}$ для векторов скорости слева и справа от фронта $(w + V_{1x}, V_{1z}) \cdot \mathbf{t} = (w_0, 0) \cdot \mathbf{t}$. В линейном приближении $g_z \ll 1$ при этом с учетом (2.3) получаем [9]

$$V_{1z} = g_z(w_0 - w). \tag{2.4}$$

Второе граничное условие для нормальной компоненты поля скорости определяется в виде разности скалярного произведения вектора $\mathbf{n}$ из (2.3) со скоростями слева $x < 0$ и справа $x > 0$ от фронта в виде $(w + V_{1x}, V_{1z}) \cdot \mathbf{n} - (w_0, 0) \cdot \mathbf{n} = w - w_0 + w_1$.

При этом величины w_0, w в (2.4) и в граничном условии для нормальной компоненты поля скорости определяются из уравнений баланса массы и импульса на разрыве, когда дополнительно можно учесть и влияние вязкости в уравнении баланса импульса [10]. Как будет показано далее, дестабилизирующее влияние вязкости возникает только при учете соответствующих членов в (2.2), а учет вязкости в уравнении баланса импульса на разрыве приводит лишь к стабилизации системы и то при достаточно большой вязкости. Поэтому основной результат настоящей работы в виде нового условия неустойчивости (1.3) соответствует обычному рассмотрению условия баланса на разрыве, когда влиянием малой вязкости можно пренебречь.

В этой связи ограничимся приближенным учетом вязкости в известном представлении баланса импульса (см. формулу (93.2) в [10]). Получим модификацию этого представления для фронта, имеющего конечную малую ширину λ. При этом в результате приближенной замены

$$\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) j\frac{dV}{dx} \cong \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)|j|\frac{V}{\lambda}$$

в формуле (93.2) в [10], получаем квадратное уравнение для постоянной величины потока массы j:

$$\begin{aligned} &j^2 + |j|\frac{\alpha\lambda\rho_0}{\delta - 1} - \rho_0^2 F_0 = 0, \\ &F_0 = \frac{(p-p_0)\delta}{\rho_0(\delta-1)}, \quad \delta = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad |j| = \rho_0|w_0| = \rho|w|, \\ &\alpha = \frac{\nu_0}{\lambda^2}, \quad \nu_0 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

В (2.5) для удобства введен коэффициент однородного трения α, определяемый величиной суммарного коэффициента кинематической вязкости $\nu_0 \equiv \nu\delta$ и шириной фронта λ.

Таким образом, при написании граничного условия для нормальной компоненты поля скорости величина возмущения w_1 должна определяться из представления для величины $w - w_0$, которое следует из решения квадратного уравнения (2.5) для скорости $|w_0|$:

$$\begin{aligned} &w - w_0 = \frac{\delta - 1}{\delta}|w_0|, \quad w_0^2 = F(\alpha), \\ &F(\alpha = 0) = F_0, \\ &F(\alpha) = F_0 - \frac{\alpha\lambda}{2(\delta-1)^2}\left(\sqrt{q} - \alpha\lambda\right), \\ &q = \alpha^2\lambda^2 + 4F_0(\delta - 1)^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В этом представлении надо сделать замену $p \to p + p_1$, $\rho \to \rho + \rho_1$ и разложить в ряд Тейлора в пределе $p_1 \ll p$, $\rho_1 \ll \rho$, отбрасывая квадратичные по возмущению члены. В результате, граничное условие для нормальной компоненты поля скорости приводит к уравнению, которое при величине $\alpha > 0$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
V_{1x} &= \frac{(\delta-1)F_0}{2\delta\sqrt{F}}\times \\
&\times\left(\frac{p_1}{p-p_0}\left(1-\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{q}}\right)+\frac{\rho_1}{\rho_0\delta(\delta-1)}A\right), \\
A &= \frac{2F}{F_0}-1-\lambda\alpha B, \\
B &= \frac{2\delta-1}{\sqrt{q}}-\frac{\delta\left(\sqrt{q}-\lambda\alpha\right)}{(\delta-1)^2F_0}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

При нулевом трении $\alpha = 0$ уравнение (2.7) точно совпадает с уравнением, приведенным в работе [9]. В (2.4) также необходимо учитывать решение уравнения (2.5) в виде (2.6). Как и в теории [8, 9], при этом будем в (2.7) использовать связь между возмущениями плотности и давления на ударной адиабате Гюгонио в виде

$$
p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_H \rho_1 = -\rho^2\left(\frac{dp}{dV}\right)_H \rho_1. \tag{2.8}
$$

Для нахождения уравнения, определяющего вид функции (2.1), используем равенство, определяющее возмущение скорости ударной волны в виде $D_1 = \partial g/\partial t$, а также соотношение, полученное для величины $w_0^2 = (U_0 - D)^2$ в (2.6). При этом надо в левой части выражения (2.6) для квадрата скорости w_0^2 заменить $D \to D + D_1$, а в правой части сделать замену $p \to p + p_1$, $\rho \to \rho + \rho_1$ и провести разложение в ряд Тейлора. Необходимо оставить только члены не выше первого порядка малости по возмущениям. При этом получается уравнение

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{F_0}{2\sqrt{F}}\times \\
&\times\left(\frac{p_1}{p-p_0}\left(1-\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{q}}\right)-\frac{\rho_1}{\rho_0\delta(\delta-1)}(1+\lambda\alpha B)\right).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

При нулевом трении уравнение (2.9) совпадает с уравнением, приведенным в работе [9].

Будем, как и в [8, 9], искать решение системы уравнений (2.2) при граничных условиях (2.4)–(2.9) в виде

$$
\begin{aligned}
x_{sh} &= g(z,t) = \overline{g}\exp\left(i(kz-\omega t)\right), \\
(V_{1x}, V_{1z}, p_1) &= (\overline{V}_{1x}, \overline{V}_{1z}, \overline{p}_1)\times \\
&\times\exp\left(i(kz+lx-\omega t)\right).
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

При этом еще дополнительно требуется выполнение нулевого граничного условия на бесконечности вдали от фронта $x \to -\infty$ для возмущений скорости и давления в (2.10). Это накладывает ограничение на величину продольного волнового числа l, мнимая часть которого должна быть отличной от нуля и отрицательной, $\operatorname{Im} l < 0$. Амплитуда возмущений фронта ударной волны в (2.10) определяется величиной смещения участков фронта вдоль оси x и эти смещения различны в зависимости от координаты z, что характеризуется действительным волновым числом k.

2. Из условия разрешимости системы (2.2) для решений в виде (2.10) получаем дисперсионное уравнение

$$
\begin{aligned}
\omega &= -i\alpha_1 + wl \pm \sqrt{c^2(k^2+l^2)-\alpha_1^2}, \\
\alpha_1 &= \frac{\nu}{2}(k^2+l^2), \quad \nu = \frac{4}{3}\nu_1 + \nu_2.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Дисперсионное уравнение (2.11) при нулевой вязкости точно совпадает с уравнением, приведенным в [8, 9] (в [9] это дисперсионное уравнение (18)). Соответственно, (2.11) является обобщением этого дисперсионного уравнения при конечной величине вязкости. В (2.11) необходимо выбрать случай, соответствующий знаку минус, что соответствует отсутствию незатухающих колебаний в пределе большой вязкости, когда в подкоренном выражении в (2.11) $\alpha_1^2 \gg c^2(k^2 + l^2)$.

Отметим, что (2.11) при нулевой объемной вязкости $\nu_2 = 0$ точно совпадает и с дисперсионным уравнением, приведенным в [15] (см. (32) в [15]) для возмущений акустического типа.

3. В [15] система уравнений (2.2) рассматривается совместно с уравнением для возмущения энтропии s_1, которое с учетом представления (2.10) имеет вид $(\omega - wl)\overline{s}_1 = 0$. При этом для случая не равного нулю возмущения энтропии $\overline{s}_1 \neq 0$ следует, что должно выполняться равенство $l = l_e = \omega/w$. При этом из (2.2) для возмущений энтропийного типа в [15] получается система уравнений

$$
\begin{aligned}
&-i\nu_1\left(\frac{4l_e^2}{3}+k^2\right)V_{ex}-\frac{1}{3}i\nu_1 k l_e V_{ez}+\frac{l_e}{\rho}\overline{p}_{1e}=0, \\
&-i\nu_1\left(l_e^2+\frac{4}{3}k^2\right)V_{ez}-\frac{1}{3}i\nu_1 k l_e V_{ex}+\frac{k}{\rho}k\overline{p}_{1e}=0, \\
&kV_{ez}+l_eV_{ex}=0.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Умножая первое уравнение в (2.12) на l_e и второе на k и складывая результаты, получаем уравнение

$$
(k^2+l_e^2)\left(\frac{\overline{p}_{1e}}{\rho} - i\frac{4}{3}\nu_1(kV_{ez}+l_eV_{ex})\right) = 0.
$$

Из него, с учетом третьего уравнения в (2.12), в [15] получено, что $(k^2 + l_e^2)\overline{p}_{1e} = 0$. Отсюда в [15] делается вывод, что равно нулю возмущение давления энтропийного типа $\overline{p}_{1e} = 0$. При этом в [15] неявно предполагается, что $k^2 + l_e^2 \neq 0$.

Это предположение, однако, при конечной вязкости в (2.12) приводит к противоречию. Действительно, если в (2.12) при ненулевой вязкости положить равным нулю возмущение поля давления энтропийного типа $\overline{p}_{1e} = 0$, то оставшиеся члены в первых двух уравнениях системы (2.12) будут давать ненулевое решение для возмущения поля скорости энтропийного типа только при условии, когда имеет место дополнительное, не учтенное в [15], дисперсионное уравнение $k^2 + l_e^2 = 0$.

Это указывает на то, что при учете вязкости некорректно рассматривать возмущения энтропийного типа в адиабатическом приближении даже в линейной постановке задачи.

4. Дополнительное к (2.11) дисперсионное уравнение может быть получено из граничных условий (2.4)–(2.9) при учете представления решения в виде (2.10). При этом из (2.4) и (2.9) можно исключить неизвестную функцию g. В результате, из (2.10), (2.7), (2.8) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \overline{V}_{1x} &= \frac{a_2}{2\rho_0\sqrt{F}}\,\overline{p}_1, \\ \overline{V}_{1z} &= \frac{a_1 k}{2\omega\rho_0}\,\overline{p}_1, \\ a_1 &= 1 - \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{q}} + \frac{hF_0}{F}(1+\lambda\alpha\beta), \\ a_2 &= a_1 - 2h, \quad h = j^2\left(\frac{dV}{dp}\right)_H. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для замыкания системы (2.13) используем дополнительное уравнение, определяющее связь давления $\overline{p}_1$ и поля скорости $\overline{V}_{1x}$, $\overline{V}_{1z}$, следующее из (2.2) и (2.10) и имеющее вид

$$\overline{p}_1 = \frac{c^2\rho(l\overline{V}_{1x} + k\overline{V}_{1z})}{\omega - wl}. \tag{2.14}$$

Из условия разрешимости системы (2.13), (2.14) получаем дополнительное к (2.11) дисперсионное уравнение, которое имеет вид

$$\omega + clM\left(1 - \frac{a_2(h)}{2M^2}\right) = \frac{a_1(h)}{2}\,\frac{k^2c^2\delta}{\omega}. \tag{2.15}$$

В (2.13) и (2.15) h — параметр Дьякова. Для функций $a_1(h)$, $a_2(h)$ в пределе $\lambda\alpha \ll \sqrt{F_0}$ имеем

$$\begin{aligned} a_1 = 1 + h - \frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{F_0}\,(\delta-1)}\,(1 + h(2\delta-1)) + \\ + O\left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{F_0}\right), \quad a_2 = a_1 - 2h. \end{aligned} \tag{2.16}$$

В противоположном пределе $\varepsilon = F_0(\delta-1)/\lambda^2\alpha^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2h(\delta-1) + 2\varepsilon\,(1 + h(2\delta-1)) + O\left(\varepsilon^2\right), \\ a_2 &= a_1 - 2h. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Отметим, что предел $\varepsilon \ll 1$ и оценка в (2.17) соответствуют случаю малых чисел Рейнольдса, определяемых шириной фронта $\sqrt{\varepsilon} \approx \mathrm{Re}_\lambda = |w_0|\lambda/\nu \ll 1$.

3. УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В общем случае, при конечной вязкости в (2.11) и (2.15) можно использовать представление волновых чисел в виде:

$$k = \frac{\Omega}{c}\cos\theta, \quad l = \frac{\Omega}{c}\sin\theta.$$

Если при этом принять, что

$$\sin\theta = -i\rho, \quad \cos\theta = \sqrt{1+\rho^2},$$
$$\rho > 0, \quad \mathrm{Im}\,\rho = 0,$$

то для продольного волнового числа получаем

$$l = -i\frac{k\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}. \tag{3.1}$$

Из (2.11) для частоты при этом имеем

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega(F - M\sin\theta) = \frac{kc}{\sqrt{1+\rho^2}}\,(iM\rho + F), \\ F &= -i\frac{\nu k}{2c\sqrt{1+\rho^2}} - \sqrt{1 - \frac{\nu^2k^2}{4c^2(1+\rho^2)}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Неустойчивость ударной волны может иметь место, когда в (3.1) и (3.2) одновременно выполняются условия $\mathrm{Im}\,l < 0$, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$. Неравенство $\mathrm{Im}\,l < 0$ имеет место для любых положительных действительных величин ρ, а $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ выполняется лишь при достаточно больших числах Рейнольдса:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}_k = \frac{2|w|}{k\nu} > \mathrm{Re}_{th}, \\ &\mathrm{Re}_{th} = \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}, \quad \frac{k\nu}{2c\sqrt{1+\rho^2}} < 1, \\ &\mathrm{Re}_{th} = \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4c^2(1+\rho^2)}{\nu^2k^2}}\right), \\ &\qquad\qquad \frac{k\nu}{2c\sqrt{1+\rho^2}} > 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Величина ρ, входящая в (3.1)–(3.3), должна определяться из действительного и положительного решения уравнения, следующего из (2.15), (3.1), (3.2) и имеющего вид

$$\rho^2 + i\rho F(\rho)\frac{a_2 + 2M^2}{M(a_2 + a_1\delta)} + \frac{a_1\delta - 2F^2(\rho)}{a_2 + a_1\delta} = 0. \tag{3.4}$$

При нулевой вязкости $F(\rho) = -1$ в (3.4) и это уравнение не имеет решения с $\operatorname{Im}\rho = 0$. При конечной вязкости решение уравнения (3.4) с $\operatorname{Im}\rho = 0$ может существовать лишь при следующем из (3.3) условии:

$$\frac{1}{1+\rho^2} > \mathrm{Re}_S^2 > \frac{\rho(2-\rho)}{1+\rho^2}, \qquad \mathrm{Re}_S = \frac{2c}{k\nu}, \quad \rho > 1. \tag{3.5}$$

При условии (3.5) величина F в (3.2) и (3.4) уже имеет нулевую действительную часть и при этом уравнение (3.4) может иметь положительное действительное решение с нулевой мнимой частью.

Отметим, что при конечной вязкости уравнение (3.4) уже не является квадратным уравнением относительно неизвестной величины ρ, как в [8,9]. Поэтому в общем случае затруднительно получение аналитических выражений для условий неустойчивости и в следующих параграфах в этой связи рассмотрены два частных случая, относящиеся к пределам длинных $k \to 0$ и коротких $k^2 \gg |l^2|$ волн поперечных возмущений. При этом первый случай соответствует случаю одномерных продольных возмущений.

4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ К ОДНОМЕРНЫМ ПРОДОЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Рассмотрим возможность неустойчивости относительно одномерных продольных возмущений, когда в (2.11) и (2.15) имеет место предел нулевого поперечного волнового числа $k \to 0$. При этом из (2.11) и (2.15) для продольного волнового числа и для частоты получаем решения в виде

$$l = -i\frac{2cM}{a_2\nu}\left(1 - \frac{a_2^2}{4M^2}\right), \tag{4.1}$$

$$\omega = -lcM\left(1 - \frac{a_2}{2M^2}\right) = i\frac{2w^2}{a_2\nu}\left(1 - \frac{a_2^2}{4M^2}\right)\left(1 - \frac{a_2}{2M^2}\right). \tag{4.2}$$

Для неустойчивости ударной волны должны выполняться неравенства $\operatorname{Im} l < 0$, $\operatorname{Im}\omega > 0$, которые имеют место, если в (4.1) и (4.2) выполнен либо случай a) $0 < a_2 < 2M^2$, либо случай b) $a_2 = -|a_2| < 0$, $|a_2| > 2M$.

В пределе малой величины однородного трения случаю a) с учетом (2.16) соответствует следующее условие для параметра Дьякова, при котором имеет место неустойчивость:

$$1 - 2M^2(0) + \frac{\lambda\alpha M^2(0)(2\delta+1)}{\sqrt{F_0}\,(\delta-1)}\left(1 - \frac{M_{th}^2}{M^2(0)}\right) < h < 1 - \frac{\lambda\alpha\delta}{\sqrt{F_0}\,(\delta-1)} + O\left(\frac{\lambda^2\alpha^2}{F_0}\right), \tag{4.3}$$

$$M(0) = M(\alpha = 0), \quad M_{th} = \sqrt{\frac{\delta}{2\delta+1}}.$$

В пределе нулевого однородного трения, $\alpha \to 0$, из (4.3) следует условие абсолютной неустойчивости (1.3).

Случаю b) в этом же пределе соответствует условие неустойчивости

$$h > (1 + 2M(0))\left(1 - \frac{\lambda\alpha\delta}{\sqrt{F_0}\,(\delta-1)}\right) + O\left(\frac{\lambda^2\alpha^2}{F_0}\right). \tag{4.4}$$

Отметим, что при нулевом однородном трении $\alpha = 0$ условие неустойчивости (4.4) совпадает с условием неустойчивости (1.1).

В противоположном пределе относительно большого однородного трения для случая a) неустойчивость невозможна, а в случае b) с учетом (2.17) получаем условие неустойчивости в виде

$$h > \frac{2M(0)}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Итак, все полученные условия неустойчивости плоского фронта ударной волны (4.3)–(4.5) соответствуют одному и тому же представлению для инкремента экспоненциального возрастания одномерных продольных возмущений, который определен положительной мнимой частью частоты в (4.2). Величина инкремента, как нетрудно видеть из (4.2), пропорциональна величине $\tau^{-1} = 2w^2/\nu$, имеющей размерность обратного времени.

5. ГОФРИРОВОЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим дисперсионные уравнения (2.11) и (2.15) для случая двумерных (гофрировочных) возмущений в противоположном коротковолновом пределе $k^2 \gg |l^2|$. При этом из (2.11) получаем для продольного волнового числа выражение через частоту в виде

$$l = -\frac{\omega + K}{|w|}, \quad K = \frac{ik^2\nu}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \mathrm{Re}_S^2}\right), \qquad \mathrm{Re}_S = \frac{2c}{k\nu}. \tag{5.1}$$

При $\mathrm{Re}_S < 1$ величина K имеет нулевую действительную часть.

С учетом (5.1) из (2.15) можно получить квадратное уравнение для частоты, решение которого имеет вид

$$\omega = \frac{K(2M^2 - a_2)}{2a_2} \times \times \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4k^2 w^2 a_1 a_2 \delta}{K^2(2M^2 - a_2)^2}}\right]. \quad (5.2)$$

Из (5.1) и (5.2) следует, что условия неустойчивости ударной волны относительно двумерных возмущений при $\operatorname{Im}\omega > 0$, $\operatorname{Im}k < 0$ выполнены, когда имеет место неравенство $0 < a_2 < 2M^2$. Это точно совпадает со случаем a), рассмотренным выше для одномерных возмущений. Поэтому и для двумерных гофрировочных возмущений неустойчивость имеет место только при выполнении условия (4.3) или (1.3) в пределе $\alpha \to 0$. Для случая b), рассмотренного для одномерных возмущений, согласно (5.2) уже отсутствует возможность неустойчивости.

До сих пор рассмотрение относилось только к случаям, когда равны нулю действительные части частоты в (5.2) и продольного волнового числа в (5.1). Однако из (5.1) и (5.2) следует, что, например, при числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_S > 1$ возможна реализация колебательной неустойчивости, когда действительная часть частоты в (5.2) может быть конечной величиной.

Из (5.2) следует, что величина инкремента экспоненциального роста гофрировочных двумерных возмущений равна $\tau_c^{-1} = k^2\nu/2$ и в пределе малой вязкости при выполнении неравенства $\tau_c^{-1} \ll \tau^{-1} = 2w^2/\nu$ она намного меньше величины инкремента роста одномерных возмущений. Поэтому неустойчивость относительно предельно малых одномерных продольных возмущений может быть доминирующей на линейной стадии эволюции возмущений. При этом допустимо предположить, что лишь на нелинейной стадии развития одномерных возмущений уже могут проявляться и двумерные гофрировочные возмущения, наблюдаемые в эксперименте [11].

6. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ И ЧИСЛЕННЫМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ

Используем полученное условие неустойчивости (1.3) (следующее из условия (4.3), учитывающего малую вязкость в условиях баланса импульса на разрыве) при рассмотрении конкретных примеров, когда величина параметра Дьякова h может быть определена либо из теоретических оценок, либо из данных эксперимента.

6.1. Ударная адиабата для реальных газов и жидкостей

Для нахождения явного вида параметра Дьякова h используем известное, получаемое из данных эксперимента, линейное соотношение между скоростью ударной волны и скоростью вещества в области сжатия за фронтом ударной волны [17–19]:

$$D = A + BU. \quad (6.1)$$

В (6.1) предполагается, что величины A, B могут рассматриваться как постоянные в некотором диапазоне изменения величины сжатия $\delta = 1/y = V_0/V$. Например, для воды согласно [18] в диапазоне изменения скорости вещества за фронтом 7.1 км/с $> U >$ 1.5 км/с в линейном соотношении (6.1) $A = 2.393$ км/с, $B = 1.333$, а в диапазоне 0.3875 км/с $> U >$ 0.068 км/с согласно [19] в (6.1) $A = 1.45$ км/с, $B = 1.99$.

Для газов также могут быть получены величины постоянных коэффициентов в (6.1) при использовании соответствующих экспериментальных данных об ударных волнах. Например, из данных наблюдений ударных волн в воздухе [23] следует, что в интервале скоростей 3.982 км/с $> U >$ 1.705 км/с в (6.1) должны быть величины $A = 0.215$ км/с, $B = 1.0597$. Из наблюдений ударных волн в аргоне [24] для интервала скоростей 7.81 км/с $> U >$ 3.03 км/с величины $A = 0.819$ км/с, $B = 1.009$, а для ударных волн в азоте [25] $A = 0.386$ км/с, $B = 1.04046$ при 8.99 км/с $> U >$ 3.8 км/с.

На основе (6.1) и при учете соотношений Рэнкина–Гюгонио, записанных в виде

$$x = \frac{p}{p_0} = 1 + \frac{DU}{p_0 V_0}, \quad \frac{1}{\delta} = y = \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{U}{D},$$

получаем следующие представления для ударной адиабаты

$$x = 1 + \frac{\rho_0 A^2 (1-y)}{p_0 (1 - B + By)^2}$$

и других параметров, например, для числа Маха в области сжатия

$$M = \frac{A}{(B - \delta(B-1))c}$$

и для параметра Дьякова

$$h = -\frac{B - \delta(B-1)}{(B+1)\delta - B}.$$

При этом для всех допустимых величин сжатия,

$$1 < \delta < \delta_{max} = \frac{B}{B-1},$$

величина параметра Дьякова может принимать только отрицательные значения $h < 0$. В этом имеется сходство со случаем политропного газа (с показателем политропы $\gamma > 1$), для которого [10]

$$h = -\frac{1}{M_0^2}, \quad \delta_{max} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}.$$

Из условия неустойчивости (1.3) с учетом указанных выше представлений для M и h получаем условие неустойчивости в виде

$$\frac{c^2}{A^2} < \frac{(B+1)\delta - B}{\delta(B - \delta(B-1))^2}. \tag{6.2}$$

В (6.2) еще требуется определить зависимость скорости звука в области сжатия от величины сжатия δ. Для этого в случае ударной волны в газе можно использовать соотношение $c^2 = p\gamma/\rho = xc_0^2/\delta$, которое с учетом указанного выше вида функции $x = x(y)$ приводит к представлению

$$c^2 = \frac{c_0^2}{\delta}\left[1 + \frac{\delta(\delta-1)A^2\gamma}{c_0^2(B - \delta(B-1))^2}\right]. \tag{6.3}$$

Из (6.2) с учетом (6.3) получаем, что для газов плоский фронт ударной волны неустойчив в линейном приближении только при ограничении сверху и снизу на параметр сжатия:

$$\begin{gathered} 1 < \delta_- < \delta = \frac{DB}{A + D(B-1)} < \delta_+, \\ \delta_\pm = a \pm \sqrt{a^2 - b}, \\ a = \frac{B(B-1) + A^2(B+1+\gamma)/2c_0^2}{(B-1)^2 + A^2\gamma/c_0^2}, \\ b = \frac{B^2 + A^2/c_0^2}{(B-1)^2 + A^2\gamma/c_0^2}. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Из (6.4) следует, что неустойчивость фронта ударной волны может реализоваться в газе только при наличии ограничений сверху и снизу на величину скорости ударной волны:

$$\begin{gathered} D_{min} = D_- < D < D_{max} = D_+, \\ D_\pm = \frac{A\delta_\pm}{B - \delta_\pm(B-1)}. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Таким образом, при наличии соотношения (6.1) для реализации неустойчивости плоского фронта ударной волны в реальном газе должно выполняться условие (6.5).

В эксперименте [11], действительно, получено, что для аргона неустойчивость плоской ударной волны наблюдается только при скоростях ударной волны из ограниченного, достаточно узкого интервала 11.5 км/с $> D >$ 10 км/с, а для углекислого газа тоже лишь в диапазоне скоростей 6 км/с $> D >$ $>$ 5 км/с.

Кроме того, в [11] для ударной волны в углекислом газе неустойчивость наблюдается и при малых отрицательных значениях параметра Дьякова вблизи значения $h \approx -0.02$, когда скорость ударной волны равна $D \approx 3.5$ км/с. Это качественно соответствует случаю, когда в условиях (6.4) и (6.5) интервал скоростей вырождается в одну точку.

6.2. Неустойчивость ударных волн в жидкостях

Условие неустойчивости ударной волны в жидкости, имеющей ударную адиабату, следующую из (6.1), как и для газов, определяется неравенством (6.2). В отличие от ударных волн в газах вместо представления (6.3) для квадрата скорости звука в области сжатия можно использовать выражение [26, 27]

$$\begin{gathered} c^2 = \frac{dp}{d\rho} = c_0^2\delta^{n-1}, \\ p - p_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{n}(\delta^n - 1). \end{gathered} \tag{6.6}$$

Согласно [27] до давлений 25 кбар в (6.6) можно использовать показатель степени $n = 7.15$. В [17] для ударных волн в воде приведены данные о скорости звука в области сжатия, из которых следует, что при увеличении давления имеет место тенденция к снижению этого показателя. Например, $n = 6.14$ при давлении $p = 70$ кбар и $n = 5.26$ при давлении $p =$ $= 250$ кбар.

Если в (6.1) $A = c_0 = 1.483$ км/с, $B = 2.118$, то из условия неустойчивости (6.2) следует, что плоский фронт ударной волны в воде становится неустойчивым при ограничении снизу на параметр сжатия. Это ограничение вместе с необходимым, отмеченным выше, ограничением сверху $\delta < \delta_{max}$ определяет область реализации неустойчивости ударной волны в воде в виде

$$\delta_{min} = 1.5617 < \delta < \delta_{max} = B/(B-1) = 1.894. \tag{6.7}$$

При этом для получения нижней границы величины сжатия в (6.7) учтено, что это пороговое значение сжатия соответствует экспериментальным данным [17]. Согласно этим данным при указанном в (6.7) пороговом сжатии $p = 70$ кбар, $D = 4.414$ км/с, $U = 1.588$ км/с, а скорость звука равна $c = 4.666$ км/с, что соответствует $n = 6.14$ в (6.6). В результате получаем, что неустойчивость плоской ударной волны в воде может иметь место в интервале величин сжатия (6.7), который, согласно данным эксперимента [17], соответствует диапазону скоростей ударной волны

$$D_{min} = 4.414 \text{ км/с} < D < D_{max} = 6.679 \text{ км/с}. \quad (6.8)$$

Такие скорости ударной волны наблюдались в работе [17] в диапазоне давлений 70 кбар $\leq p \leq$ 210 кбар.

6.3. Сравнение с результатами численного моделирования

В [20] приведены результаты численного исследования устойчивости ударных волн (см. гл. 12 в работе [20], а также [21, 22]). Согласно этим расчетам показано, что на сугубо нелинейной стадии развитие возмущений происходит в ситуации, которая в классической теории [8–10] соответствует нейтральной устойчивости при выполнении условия

$$h_{min} = \frac{1 - M^2(1+\delta)}{1 + (\delta - 1)M^2} < h < h_{max} = 1 + 2M. \quad (6.9)$$

Кроме того, в [20] отмечается, что при выполнении условия (1.1) также имеет место неустойчивость, сопряженная с образованием структуры из двух ударных волн, следующих друг за другом. При этом для параметра Дьякова вне условий (6.9) или (1.1) ударная волна была вполне устойчивой [20], когда $-1 < h < h_{min}$.

Из сопоставления условия (6.9) и полученного в настоящей работе условия неустойчивости (1.3) следует, что интервал изменения параметра Дьякова, определенный в (1.3), полностью попадает внутрь интервала изменения этого параметра в условии (6.9). Действительно, верхний предел в (1.3) строго меньше величины $1 < h_{max}$ для любых положительных $M > 0$, а величина $h_{min} < 1 - 2M^2$ для любых $0 < M < 1$. Отметим, что условие (1.3) соответствует реализации абсолютной неустойчивости плоского фронта ударной волны, полученной в рамках линейной теории устойчивости. Оно при этом согласуется с указанными выше результатами численного моделирования нелинейной эволюции конечно-амплитудных возмущений.

Поскольку при численном моделировании неизбежно вводится численная вязкость, не удивительно, что имеет место соответствие полученного в настоящей работе условия неустойчивости (1.3) результатам численного моделирования неустойчивости плоского фронта ударной волны в [20].

Условие неустойчивости ударных волн (1.3) также согласуется с результатами численного моделирования в [7] ударных волн, образующихся при взрывах сверхновых звезд, когда для параметра Дьякова имеется оценка $-10^{-3} \leq h \leq 10^{-3}$ (автор признателен Д. А. Баджину за предоставление соответствующих оценок). Действительно, в [7] $D \approx 100$ км/с, $4 < \delta < 6000$, $c \approx 0.83$ км/с и условие (1.3) оказывается выполненным, например, для значения $h \approx -10^{-3}$ при величинах числа Маха и сжатия, удовлетворяющих условиям $M \geq 0.71$, $\delta \leq 170$.

В заключение отметим, что с учетом (4.1) и (4.2) можно оценить характерное время экспоненциального возрастания акустических возмущений для ударных волн в воде $\tau \approx (2w^2/\nu)^{-1} \approx 10^{-12}$ с, предполагая, что $\nu \approx O(10^{-6}$ м^2/с), $|w| \approx O(10^3$ м/с) [2]. При этом характерный масштаб изменения возмущений в пространстве $l^{-1} = L_x \approx 10^{-9}$ м.

Для астрофизических масштабов, соответствующих численному моделированию в [7] для среднего коэффициента кинематической вязкости (в переходном слое) $\nu \approx 4.5 \cdot 10^8$ км^2/с и величины скачка скорости $w = 0.6$ км/с, получаем оценку $\tau \approx 6.25 \cdot 10^8$ с ≈ 19.9 лет. Однако, если учесть величину численной (схемной) вязкости $\nu_{num} \approx 5 \cdot 10^{11}$ км^2/с, то эта оценка уже будет намного большей: $\tau \approx 6.945 \cdot 10^{11}$ с ≈ 22100 лет.

При этом характерное время существования ударной волны (около $2 \cdot 10^5$ лет) в рамках численной модели [7] на порядок превышает последнюю оценку, что указывает на допустимость реализации рассматриваемого в настоящей работе диссипативного механизма неустойчивости ударных волн.

Из этих оценок следует, что рассматриваемые акустические возмущения быстро убывают при удалении от плоскости фронта ударной волны. Они становятся исчезающе малыми уже на расстояниях соизмеримых с шириной фронта ударной волны (в [7] ширина переходной области $\lambda \approx 3.6 \cdot 10^{11}$ км). Диссипативная неустойчивость, реализуемая, в первую очередь, в течении за фронтом ударной волны по типу неустойчивости в пограничном слое, приводит и к неустойчивости самого фронта, наблюдаемой в эксперименте.

7. ВЫВОДЫ

Получены новые условия неустойчивости плоского фронта ударной волны произвольной интенсивности в произвольных средах при учете вязкости среды. Это достигнуто при рассмотрении лишь одних возмущений акустического типа, т. е. без учета возмущений энтропии. Получено условие неустойчивости относительно одномерных и двумерных возмущений, которое имеет одинаковый вид для этих двух типов возмущений в пределе малой вязкости. При этом инкремент неустойчивости относительно одномерных продольных возмущений в этом пределе существенно превышает инкремент экспоненциального роста во времени для обычно рассматриваемых гофрировочных двумерных возмущений. Это означает, что на линейной стадии неустойчивости должны доминировать именно одномерные продольные возмущения, которые только на нелинейной стадии могут приводить к проявлению наблюдаемой в работе [11] гофрировочной неустойчивости.

В настоящей работе установлен новый механизм диссипативной неустойчивости фронта плоской ударной волны. Физический смысл этого механизма состоит в реализации неустойчивости течения за фронтом при достаточно больших числах Рейнольдса подобно неустойчивости в пограничном слое.

Приведенный пример неустойчивости расширяет круг физических задач, где аналогичное явление диссипативной неустойчивости исследовалось ранее и приводило к новому пониманию базовых механизмов соответствующих явлений [16, 28, 29]. Рассмотрено применение выводов теории, когда область неустойчивости (6.2), следующая из условия (1.3), для ударной волны в реальных газах и в жидкостях получена на основе явного вида ударной адиабаты в форме (6.1). Важно, что представление для ударной адиабаты (6.1) получается непосредственно из экспериментальных данных без привлечения каких-либо модельных представлений об уравнении состояния среды. В [30] показано, что использование в уравнении Навье – Стокса для вязкой сжимаемой среды представлений для давления на основе предположения о локальном термодинамическом равновесии может приводить к некорректным выводам. При этом полученные в [30] выводы могут быть использованы и в связи с рассмотренной в [31, 32] аналогией между неустойчивостью ударной волны и численной неустойчивостью при решении уравнений Эйлера.

Из оценки величины инкремента экспоненциального роста возмущений следует, что неустойчивость плоского фронта ударной волны более реализуема для случая жидкостей по сравнению с газами, имеющими на порядок большие величины коэффициентов кинематической вязкости. Получены ограничения (6.7) на величину сжатия в воде, из которых в соответствии с данными эксперимента [17] можно ожидать возникновения неустойчивости плоского фронта ударной волны в воде в интервале скоростей ударной волны (6.8). Вместе с тем, из полученных в настоящей работе результатов следует необходимость в дальнейшем развитии теоретических и экспериментальных исследований проблемы устойчивости ударных волн, которая пока не может считаться вполне решенной. Отметим, что эти результаты получены на основе обобщения классического подхода [8–10] к исследованию устойчивости ударных волн благодаря учету вязкости. При этом не учитываются дополнительные возможности, которые дает, например, подход, предложенный в [33] при рассмотрении устойчивости ударной волны в неинерциальной системе координат.

Благодарности. Выражаю признательность В. Т. Гуровичу и Я. Е. Красику за поддержку и внимание на всех этапах подготовки статьи, а также В. Е. Фортову, А. С. Пирожкову, А. М. Белобородову, Д. Бардину, М. А. Гарасеву и Е. П. Курбатову за интерес к результатам работы и их обсуждение на конференции FNP2019.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-00806P) и Израильского научного фонда (Israel Science Foundation) (грант № 492/18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ya. B. Zel'dovich and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, New York and London (1966).

2. A. Rososhek, S. Efimov, V. Gurovich, A. Virozub, S. V. Tewari, and Ya. E. Krasik, Phys. Plasmas **26**, 042302 (2019).

3. A. Pirozhkov et al., Phys. Rev. Lett. **121**, 074802 (2018).

4. D. V. Bisikalo, A. G. Zhilkin, and E.P. Kurbatov, arXiv:1810.04454v1 [astro-ph.HE].

5. H. Ahmed et al., Phys. Rev. Lett. **110**, 205001 (2013).

6. М. А. Гарасев, А. И. Корытин, Ю. А. Мальков, А. А. Мурзанев, А. А. Нечаев, А. Н. Степанов, Письма в ЖЭТФ **105**, 148 (2017).

7. D. Badjin et al., MNRAS **459**, 2188 (2016).

8. С. П. Дьяков, ЖЭТФ **27**, 288 (1954).

9. G. W. Swan and G. R. Fowles, Phys. Fluids **18**, 28 (1975).

10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theoretical Physics. Hydrodynamics*, Pergamon Press, Oxford (1987).

11. R. W. Griffits, R. J. Sandeman, and H. G. Hornung, J. Phys. D: Appl. Phys. **8**, 1681 (1975).

12. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, Г. Е. Фалькович, Письма в ЖЭТФ **30**, 328 (1979).

13. И. Е. Тамм, Труды ФИАН СССР **29**, 239 (1965); Собр. науч. трудов, т. 1, Наука, Москва (1975).

14. М. Д. Спектор, Письма в ЖЭТФ **35**, 181 (1982).

15. A. G. Bashkirov, Phys. Fluids **A3**(5), 960 (1991).

16. С. Г. Чефранов, А. Г. Чефранов, ЖЭТФ **149**, 1068 (2016).

17. M. H. Rice and J. M. Walsh, J. Chem. Phys. **26**, 824 (1957).

18. A. C. Mitchell and W. J. Nellis, J. Chem. Phys. **76**, 6273 (1982).

19. K. Nagayama, Y. Mori, K. Shimada, and M. Nakahara, J. Appl. Phys. **91**, 476 (2002).

20. В. Е. Фортов, *Мощные ударные волны на Земле и в космосе*, Физматлит, Москва (2019), Гл. 12.

21. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, А. М. Опарин, С. И. Анисимов, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **125**, 927 (2004).

22. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, В. Е. Фортов, С. И. Анисимов и др., Письма в ЖЭТФ **90**, 21 (2009).

23. W. E. Deal, J. Appl. Phys. **28**, 782 (1957).

24. R. H. Christian and F. L. Yarger, J. Chem. Phys. **23**, 2042 (1955).

25. R. H. Christian and F. L. Yarger, J. Chem. Phys. **23**, 2045 (1955).

26. J. M. Richardson, A. B. Arons, and R. R. Halverson, J. Chem. Phys. **15**, 785 (1947).

27. S. Ridah, J. Appl. Phys. **64**, 152 (1988).

28. С. Г. Чефранов, Письма в ЖЭТФ **73**, 311 (2001).

29. S. G. Chefranov, Phys. Rev. Lett. **93**, 254801 (2004).

30. S. G. Chefranov and A. S. Chefranov, Phys. Scr. **94**, 054001 (2019).

31. J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.-M. Moschetta, J. Fluid Mech. **417**, 237 (2000).

32. J. Von Neumann and R. D. Richtmyer, J. Appl. Phys. **21**, 232 (1950).

33. A. A. Lubchich and M. I. Pudovkin, Phys. Fluids **16**, 4489 (2004).