

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЕТА, ПРОХОДЯЩЕГО ЧЕРЕЗ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКИЙ ФОТОННЫЙ КРИСТАЛЛ

*П. В. Долганов<sup>a,b\*</sup>, К. Д. Бакланова<sup>a,b</sup>, В. К. Долганов<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> *Институт физики твердого тела Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
101000, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 декабря 2019 г.,  
после переработки 4 декабря 2019 г.  
Принята к публикации 5 декабря 2019 г.

Проведены комплексные оптические исследования холестерического фотонного кристалла: измерены спектры пропускания, вращения плоскости поляризации света, поляризационные характеристики прошедшего через фотонный кристалл света. В спектрах вращения плоскости поляризации наблюдаются особенности, связанные с наличием квазизапрещенной фотонной зоны. Определена плотность фотонных состояний, ее трансформация при изменении температуры и толщины фотонного кристалла. Эллиптичность (отношение меньшей к большей осей эллипса) прошедшего через образец света максимальна вблизи середины запрещенной зоны и уменьшается с удалением от зоны. В середине квазизапрещенной фотонной зоны эллиптичность увеличивается с увеличением толщины  $L$  фотонного кристалла и с уменьшением температуры и в исследованных образцах близка к круговой при  $L > 5$  мкм. Проведено сопоставление полученных результатов с существующими теориями, с аналитическими выражениями, следующими из уравнений Максвелла, и с результатами численных расчетов методом  $4 \times 4$ -матриц Беремана.

DOI: 10.31857/S0044451020050156

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Фотонные кристаллы [1–3] в последние годы интенсивно изучаются экспериментально и теоретически в связи с их необычными оптическими свойствами и возможностью широкого практического использования. Периодическое изменение показателя преломления приводит к возникновению фотонной запрещенной зоны и к селективному отражению света в области запрещенной зоны. Жидкокристаллические фотонные кристаллы [3–6] составляют уникальный класс фотонных кристаллов, трансформирующих как спектральные, так и поляризационные характеристики света. Холестерический жидкий кристалл представляет собой пример одномерного кирального фотонного кристалла. Величины  $n_o$  и  $n_e$  характеризуют обыкновенный и необык-

новенный показатели преломления перпендикулярно локальному директору холестерического жидкого кристалла и вдоль него. Для направления вдоль оси холестерической спирали запрещенная фотонная зона образуется только для света одной (собственной) круговой поляризации, у которой направление вращения поляризации совпадает с направлением вращения холестерической спирали.

Спектральное положение центра брэгговской дифракционной полосы ( $\lambda_0$ ) определяется периодом  $p$  геликоидальной структуры и усредненным показателем преломления в плоскости, перпендикулярной геликоидальной оси,  $n = \sqrt{(n_e^2 + n_o^2)/2}$ . Оптический период в холестерике равен половине шага спирали,  $p/2$ , центр брэгговской дифракционной полосы при нормальном падении света находится при  $\lambda_0 = np$ . Ширина фотонной запрещенной зоны,  $\Delta\lambda \approx \lambda_0\delta$ , зависит от оптической анизотропии

$$\delta = \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2}.$$

\* E-mail: pauldol@issp.ac.ru

В образце конечной толщины запрещенная фотонная зона трансформируется в квазизапрещенную зону, характеристики которой существенным образом зависят от толщины фотонного кристалла, оптической анизотропии, температуры. Свет собственной круговой поляризации в области квазизапрещенной фотонной зоны практически полностью отражается при сравнительно небольшой толщине фотонного кристалла,  $L > \lambda_0/\delta$ .

В жидкокристаллическом фотонном кристалле наряду с селективным отражением происходит гигантское вращение плоскости поляризации света (ВППС). Это вращение кардинально отличается по величине, спектральной зависимости, поляризационным характеристикам от ВППС в жидкостях с киральными молекулами. Гигантская величина вращения связана с киральным упорядочением на микроскопических размерах порядка нескольких сотен нанометров и с тем, что свет только одной круговой поляризации (собственной) сильно взаимодействует с фотонной структурой. ВППС охватывает широкий спектральный интервал, в том числе вне запрещенной зоны. Теория предсказывает нетривиальную спектральную зависимость ВППС, наличие тонкой структуры в виде ступенек в спектре ВППС вне фотонной запрещенной зоны [7]. Более того, в отличие от ВППС, связанного только с киральностью молекул, при прохождении света через киральный фотонный кристалл происходит не только поворот плоскости поляризации света, но и трансформация линейно поляризованного света в эллиптически поляризованный. Направление длинной оси эллипса характеризует угол поворота плоскости поляризации.

Перечисленные особенности ВППС в фотонном кристалле содержат важную информацию о фотонных характеристиках и плотности фотонных состояний [8, 9]. Использование совершенных жидкокристаллических фотонных кристаллов в последние годы позволило обнаружить ступенчатый ход ВППС вне запрещенной зоны [8, 9], использовать фундаментальные соотношения Крамерса–Кронига для интерпретации спектров [8], восстановить плотность фотонных состояний  $\rho(\omega)$  жидкокристаллического фотонного кристалла [9–11].

В последние годы в связи с общим интересом к фотонным структурам и перспективами их широкого практического использования достигнут существенный прогресс в описании оптических свойств жидкокристаллических фотонных кристаллов [12–17], однако целый ряд вопросов остается не до конца выясненными. В настоящей работе

с использованием совершенных холестерических фотонных кристаллов экспериментально изучена спектральная зависимость поляризационных характеристик света, проходящего через фотонно-кристаллическую структуру (спектры пропускания, ВППС, эллиптичность). Восстановлена плотность фотонных состояний. Прослежена трансформация фотонных характеристик и плотности фотонных состояний при изменении температуры и толщины фотонного кристалла. Проведено сопоставление экспериментальных данных с теорией.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Жидкокристаллические фотонные кристаллыготавливались из смеси нематического жидкого кристалла E7, 65.2% вес. и кирального жидкого кристалла CB15, 34.8% вес. (Synthon Chemicals). Смесь образует холестерический фотонный кристалл при температуре ниже 31 °С с фотонной зоной в области 650 нм. Холестерический жидкий кристалл находился в оптической ячейке с покрытием, обеспечивающим планарную ориентацию молекул на ее внутренних поверхностях. Ось холестерической спирали перпендикулярна поверхности ячейки. Измерения проведены на образцах толщиной от 8.5 мкм до 2 мкм. Толщина зазора ячейки, в которую помещался холестерический жидкий кристалл, измерялась интерференционным методом.

Термостатирующее устройство Linkam LTS120 использовалось для регулировки и поддержания температуры. Качество образцов контролировалось наблюдением в поляризационный микроскоп и по спектрам пропускания света собственной (правой) круговой поляризации. Спектры пропускания измерялись с использованием микроскопа Altami, оборудованного волоконным спектрометром AvaSpec (Avantes).

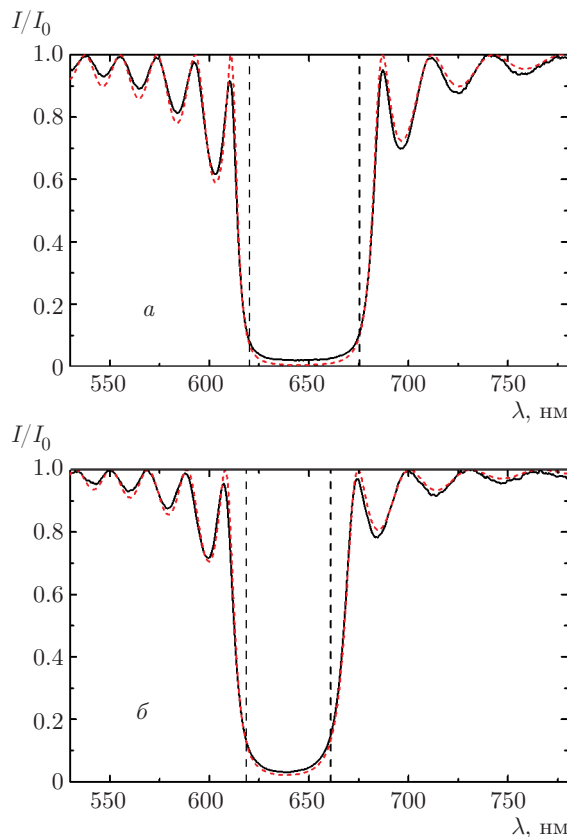
Спектры пропускания  $I/I_0$  представляют собой спектр прошедшего через фотонный кристалл света  $I$ , деленный на спектр падающего света  $I_0$ . Измерялись спектры света, распространяющегося перпендикулярно плоскости ячейки вдоль оси спирали. Поляризационные характеристики прошедшего через фотонный кристалл света (ВППС, эллиптичность) измерялись с того же участка образца размером около 100 мкм, что и спектры пропускания. Характеристики холестерического фотонного кристалла рассчитывались с использованием аналитической теории [18–20] и численного метода Берремана [21–23].

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 сплошными линиями показаны экспериментальные спектры пропускания холестерического фотонного кристалла,  $I/I_0$ , для света собственной круговой поляризации при двух температурах. Приводимые в работе спектры пропускания измерены с двумя круговыми поляризаторами, расположенными до и после образца. При прохождении светом одного поляризатора, находящегося до фотонного кристалла, для образца в термостатированном устройстве в области селективного отражения при 23 °С интенсивность  $I/I_0$  регистрируемого света была порядка 0.09 из-за многократного отражения от поверхностей стекло – воздух, от жидкого кристалла и прохождения части света несобственной круговой поляризации в спектрометр. Поскольку жидкий кристалл отражает свет без изменения знака круговой поляризации и при последующем отражении от границы стекло – воздух происходит изменение знака круговой поляризации, часть света несобственной круговой поляризации проходит через фотонный кристалл. Свет на выходе из холестерика представляет собой суперпозицию собственной и несобственной круговых поляризаций. Использование второго поляризатора для собственной круговой поляризации практически полностью устраняет паразитные эффекты, связанные со светом несобственной круговой поляризации (интенсивность в минимуме полосы менее  $2 \cdot 10^{-2}$  при 23 °С, см. рис. 1).

Спектры состоят из интенсивной дифракционной полосы и узких боковых минимумов (маятниковых осцилляций), наличие которых говорит о высоком качестве образца [7,8,19,24,25]. В исследованиях нами использовался холестерический жидкий кристалл, у которого положение фотонной зоны практически не зависело от температуры. Небольшое коротковолновое смещение дифракционной полосы при увеличении температуры (см. рис. 1) связано с уменьшением показателя преломления  $n$  при нагреве ( $\lambda_0 = np$ ). Близость спектрального положения дифракционных полос позволяет непосредственно сопоставлять фотонные характеристики при различных температурах. Полуширина дифракционной полосы определяется шириной фотонной запрещенной зоны, которая зависит от температуры (см. рис. 1). Форма дифракционной полосы существенно изменяется при изменении толщины фотонного кристалла (рис. 2).

Теория, описывающая оптические характеристики жидкокристаллических фотонных кристаллов,



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Спектры пропускания холестерического фотонного кристалла для света собственной круговой поляризации (сплошная черная кривая) при температурах 23 °С (а) и 28 °С (б). Штриховая красная кривая — результаты расчета спектров пропускания с использованием выражения (1). Теоретический спектр рассчитан при значениях параметров  $p = 404.95$  нм,  $\delta = 0.0889$ ,  $n = 1.601$  (а) и  $p = 402.33$  нм,  $\delta = 0.0693$ ,  $n = 1.591$  (б),  $L \approx 4.8$  мкм. Вертикальные линии показывают границы фотонной запрещенной зоны

развивалась в работах [7, 18–20]. Спектральная зависимость интенсивности проходящего через фотонный кристалл света при нормальном падении может быть представлена в аналитическом виде [19]:

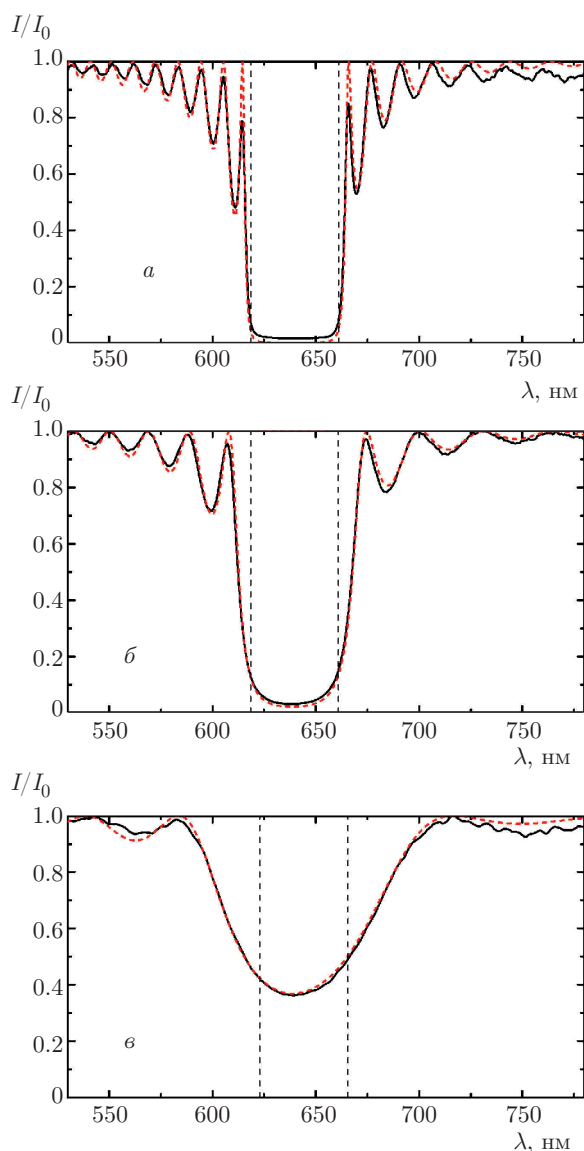
$$T(\omega) \equiv \frac{I}{I_0} = \frac{\tau^2 \beta_3^2}{\tau^2 \beta_3^2 + \kappa^4 \delta^2 \sin^2 \beta_3 L}, \quad (1)$$

где

$$\beta_3 = \kappa \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{2\kappa}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + \delta^2},$$

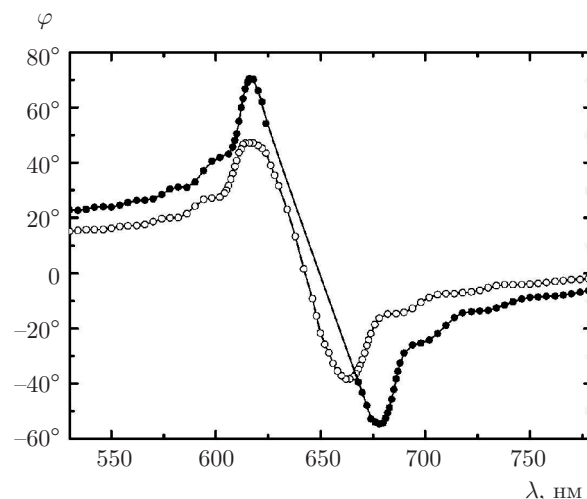
$\kappa = \omega n/c$ ,  $\omega = 2\pi c/\lambda$ ,  $\tau = 4\pi/p$ ,  $c$  — скорость света. Внутри фотонной зоны величина  $\beta_3$  является мнимой.

Спектры пропускания, рассчитанные с использованием уравнения (1), приведены штриховыми кривыми на рис. 1, 2. Подгоночными параметрами,



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Спектры пропускания холестерического фотонного кристалла для света собственной круговой поляризации (сплошные черные кривые) для фотонных кристаллов толщиной  $L \approx 8.5$  мкм (а), 4.8 мкм (б), 2 мкм (в). Штриховые красные кривые — результаты расчета спектров пропускания с использованием выражения (1). Теоретические спектры рассчитаны при значениях параметров  $p = 402.45$  нм (а),  $p = 402.33$  нм (б),  $p = 405.25$  нм (в),  $\delta = 0.0693$ ,  $n = 1.591$ ,  $T = 28^\circ\text{C}$ . Вертикальные линии показывают границы фотонной запрещенной зоны

определяющими вид спектра, служили шаг спирали  $p$ , оптическая анизотропия  $\delta$ , показатель преломления  $n$ . При расчете спектров учитывалась дисперсия показателя преломления [26]. Расчет с использованием метода Берремана [21–23] приводит к такой же

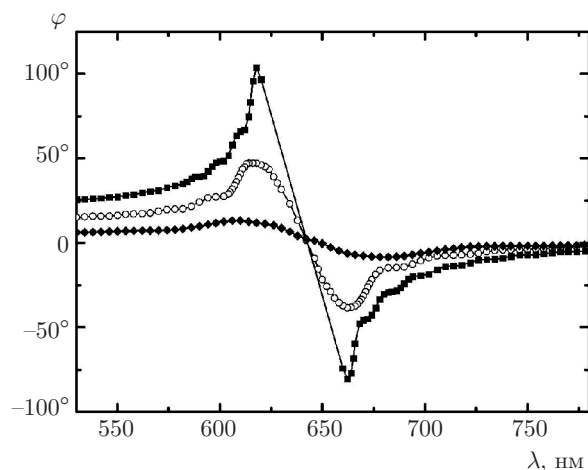


**Рис. 3.** Спектры ВППС холестерического фотонного кристалла при температурах  $T = 23^\circ\text{C}$  (темные символы) и  $T = 28^\circ\text{C}$  (светлые символы). Ступеньки в спектре ВППС связаны с периодической структурой образца.  $L \approx 4.8$  мкм

спектральной зависимости пропускания, что и уравнение (1).

Как можно видеть, рассчитанные спектры хорошо согласуются с экспериментальными спектрами. Прямыми вертикальными линиями показаны коротко- и длинноволновая границы запрещенной фотонной зоны  $\lambda_{1,2} = \lambda_0 \sqrt{1 \pm \delta}$  или  $\lambda_1 = n_o p$ ,  $\lambda_2 = n_e p$ . В то же время длины волн света в среде на границах зон,  $\lambda_1^m$  и  $\lambda_2^m$ , в бесконечном образце одинаковы и равны шагу спирали:  $\lambda_1^m = p$ ,  $\lambda_2^m = p$ . Изменение полуширины дифракционной полосы (см. рис. 1) коррелирует с уменьшениями оптической анизотропии  $\delta$  и ширины фотонной зоны при нагреве. У трех фотонных кристаллов на рис. 2 ширина фотонной запрещенной зоны одинакова. Трансформация спектров и существенное увеличение расстояния между ближайшими к полосе маятниковыми колебаниями (69 нм и 184 нм у фотонных кристаллов толщиной 8.5 мкм и 2 мкм) связаны с изменением толщины фотонного кристалла. Параметры, полученные при расчете спектров пропускания, будут в дальнейшем использованы при анализе ВППС, поляризационных характеристик, плотности фотонных состояний.

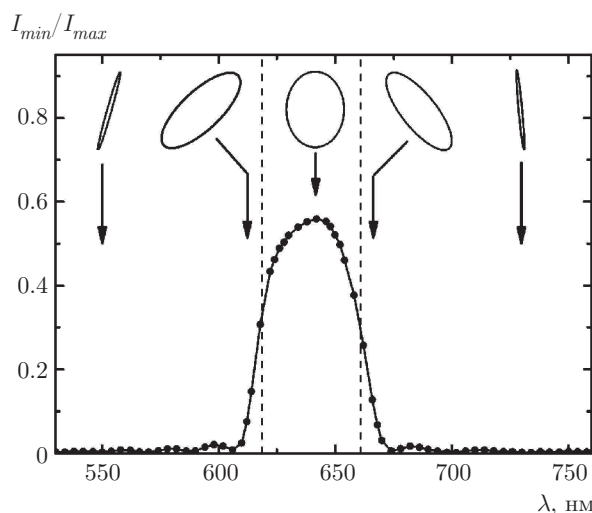
На рис. 3, 4 приведены результаты измерений спектров ВППС при различных температурах (рис. 3) и толщинах образцов (рис. 4). В толстых образцах ( $L \approx 8.5$  мкм) и в образце толщиной  $L \approx 4.8$  мкм при низкой температуре ВППС в спектральной области фотонной зоны измерить не удалось, поскольку поляризация проходящего света



**Рис. 4.** Спектры ВППС холестерических фотонных кристаллов различной толщины (символы). Ступеньки в спектре ВППС связаны с периодической структурой образца.  $T = 28^\circ\text{C}$ .  $L \approx 8.5$  мкм (■), 4.8 мкм (○), 2 мкм (◆)

близка к круговой. ВППС в изотропной фазе практически не зависит от длины волны и на несколько порядков меньше наблюдаемого нами вращения [27]. Фазовый переход в холестерик и образование фотонной зоны приводят к возникновению гигантского ВППС, связанного с периодической киральной структурой. Особенностью этого вращения являются резонансы вблизи границ фотонной зоны, ступеньки в спектре ВППС вне фотонной запрещенной зоны, спектральные положения которых коррелируют с маятниковыми колебаниями в спектре пропускания. Оптическая активность вне фотонной зоны практически не зависит от направления поляризации падающего света. Коротковолновый сдвиг резонансов и ступенек ВППС при нагреве (см. рис. 3), как и в спектре пропускания (см. рис. 1), связан с температурной зависимостью показателя преломления. Уширение резонансов ВППС с уменьшением толщины фотонного кристалла (см. рис. 4) приводит к нелинейной зависимости ВППС в максимумах резонансов от толщины фотонного кристалла.

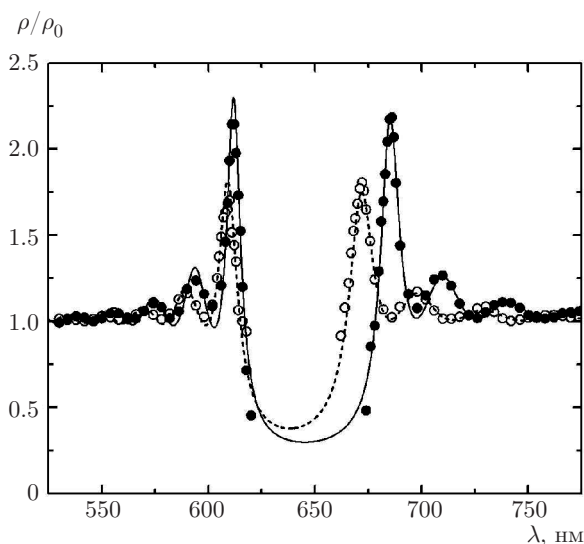
Еще одной особенностью распространения света в фотонном кристалле является нетривиальная трансформация поляризационных характеристик прошедшего света. Напомним, что в макроскопически изотропной киральной среде при ВППС линейно поляризованный свет остается линейно поляризованным. В киральном фотонном кристалле линейно поляризованный свет трансформируется в эллиптически поляризованный. ВППС в киральном фотонном кристалле характеризуется поворотом длинной оси эллиптически поляризованного света.



**Рис. 5.** Отношение минимальной и максимальной интенсивностей световой волны (точки) при ориентации поляризатора вдоль короткой и длинной осей эллиптически поляризованного света. Эллиптичность максимальна внутри фотонной зоны. Вдали от фотонной зоны отношение  $I_{min}/I_{max}$  близко к нулю и осциллирует с изменением длины волны. Эллипсы в верхней части рисунка с отношениями длинной и короткой осей эллиптически поляризованного света, определенными из эксперимента (точки на рисунке), характеризуют состояния световой волны на выходе из фотонного кристалла при различных длинах волн, когда на входе в образец свет поляризован вертикально. Эллипсы соответствуют длинам волн 550, 614, 642, 666, 734 нм.  $L \approx 4.8$  мкм,  $T = 28^\circ\text{C}$ . Вертикальные линии — границы фотонной запрещенной зоны

Анализ прошедшего света может быть проведен путем измерения отношения  $I_{min}/I_{max}$  минимальной и максимальной интенсивностей света при ориентации поляризатора вдоль короткой и длинной осей эллиптически поляризованного света, прошедшего через фотонный кристалл. Ориентацию поляризатора следует изменять с изменением длины волны света в соответствии с поворотом плоскости поляризации.

На рис. 5 точками показаны результаты измерений эллиптичности ( $I_{min}/I_{max}$ ). Эллиптичность максимальна внутри фотонной зоны. Для толстых образцов ( $L > 8$  мкм) при низкой температуре поляризация прошедшего через образец света близка к круговой, поскольку практически весь свет собственной (дифрагирующей) круговой поляризации испытывает отражение. Для образцов малой толщины (рис. 5) прошедший свет внутри зоны эллиптически поляризован, в то время как вдали от фотонной зоны свет остается практически линейно по-



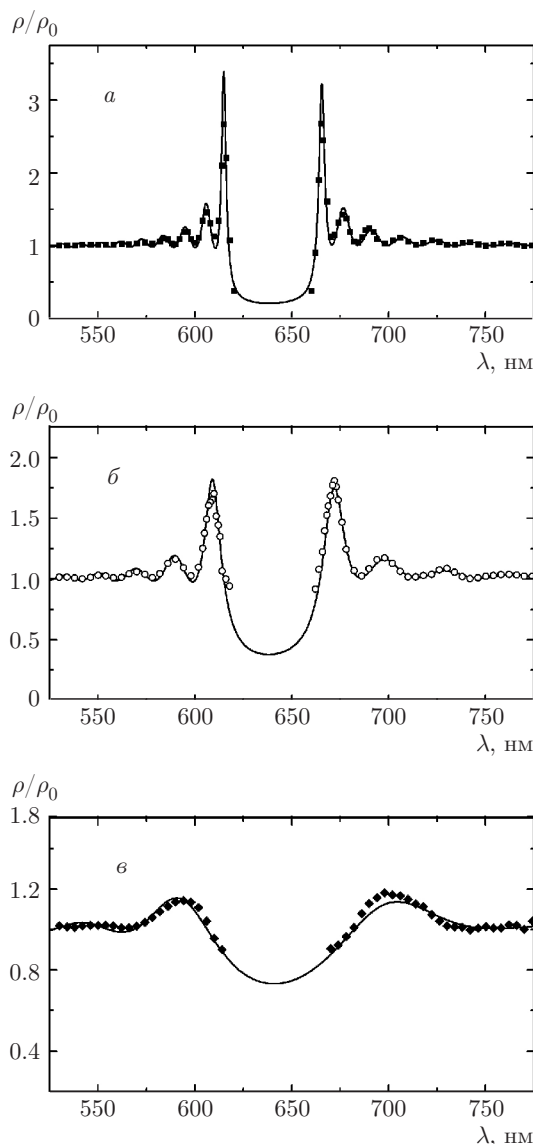
**Рис. 6.** Плотность фотонных состояний  $\rho/\rho_0$  холестерического фотонного кристалла при различных температурах, определенная из спектров ВППС.  $T = 23^\circ\text{C}$  (темные символы),  $T = 28^\circ\text{C}$  (светлые символы). Кривые — спектры плотности фотонных состояний, рассчитанные с использованием параметров, определенных из спектров пропускания.  $L \approx 4.8$  мкм

ляризованным с небольшими осцилляциями эллиптичности, аналогичными осцилляциям интенсивности в спектре пропускания. Эллипсы в верхней части рис. 5 с отношениями длинной и короткой осей, определенными из эксперимента, характеризуют состояния световой волны на выходе из фотонного кристалла при различных длинах волн (на входе в образец свет поляризован вертикально). В отличие от вращения, экстремумы которого находятся вне фотонной зоны вблизи ее границ, эллиптичность максимальна внутри квазизапрещенной зоны.

Наблюдающиеся в эксперименте ступеньки в спектральных зависимостях ВППС позволяют восстановить как плотность фотонных состояний, т. е. число фотонных состояний (волновых векторов  $k$ ) на единицу частоты (для света собственной круговой поляризации),  $\rho(\omega) = dk/d\omega$ , так и зависимости  $\rho(\omega)$  от температуры и толщины фотонного кристалла [8]:

$$\rho(\omega) = \frac{n}{c} + \frac{2}{L} \frac{d\varphi}{d\omega}. \quad (2)$$

В таком представлении величина  $\rho(\omega)$  состоит из двух частей: плотности состояний при отсутствии фотонной зоны,  $\rho_0 = n/c$ , и добавки, связанной с фотонной зоной [8].



**Рис. 7.** Плотность фотонных состояний  $\rho/\rho_0$  холестерических фотонных кристаллов различной толщины, определенная из спектров ВППС (символы). Кривые — спектры плотности фотонных состояний, рассчитанные с использованием параметров, определенных из спектров пропускания.  $T = 28^\circ\text{C}$ ,  $L \approx 8.5$  мкм (а), 4.8 мкм (б), 2 мкм (в)

Определение плотности фотонных состояний представляет существенный интерес, поскольку целый ряд оптических характеристик фотонных кристаллов определяется видом плотности состояний. На рис. 6, 7 символами показана плотность состояний, определенная из измерений ВППС по формуле (2) и нормированная на  $\rho_0$ . Плотность состояний получена нами для различных температур (23 и 28 °C) и толщин фотонного кристалла (8.5, 4.8 и 2 мкм). В бесконечном кристалле плотность

состояний расходятся на границах зоны вследствие пониженной размерности. В фотонном кристалле конечной толщины плотность фотонных состояний осциллирует, амплитуда осцилляций увеличивается вблизи границ фотонной запрещенной зоны. Максимумы плотности состояний вблизи границ фотонной зоны соответствуют максимумам  $d\varphi/d\omega$  вблизи экстремумов спектров ВППС. Спектральное положение минимумов плотности состояний вне зоны близко к минимумам спектра пропускания. В области аномальной дисперсии,  $d\varphi/d\omega < 0$ , плотность состояний меньше  $\rho_0$ . Расстояние между главными резонансами плотности состояний уменьшается с увеличением температуры. Резонансы плотности состояний вблизи краев фотонной зоны становятся уже, их амплитуда увеличивается с увеличением толщины образца и уменьшением температуры, плотность состояний внутри квазизапрещенной зоны уменьшается.

Традиционный метод расчета плотности фотонных состояний состоит в использовании действительной и мнимой частей комплексного коэффициента пропускания  $t(\omega) = X + iY$ , который содержит информацию о спектре пропускания  $T(\omega) = |t(\omega)|^2$ , фазе  $\text{tg } \varphi = Y/X$  и плотности фотонных состояний [24, 28–31]

$$\rho(\omega) = \frac{1}{L} \frac{Y'X - X'Y}{X^2 + Y^2}. \quad (3)$$

Действительные и мнимые части  $t(\omega)$  были получены в аналитическом виде, что облегчает вычисление плотности состояний [19]:

$$X = \frac{\tau^2 \beta_3^2 \cos \beta_3 L}{\tau^2 \beta_3^2 + \kappa^4 \delta^2 \sin^2 \beta_3 L}, \quad (4)$$

$$Y = -\frac{\tau \beta_3 (\beta_3^2 + \tau^2/4 - \kappa^2) \sin \beta_3 L}{\tau^2 \beta_3^2 + \kappa^4 \delta^2 \sin^2 \beta_3 L}. \quad (5)$$

Кривые на рис. 6, 7 — результат расчета  $\rho/\rho_0$  с использованием уравнений (3)–(5) и параметров  $\delta$ ,  $\tau$ ,  $n$ , полученных из спектров пропускания. Наблюдающиеся в эксперименте особенности плотности фотонных состояний (экстремумы по обе стороны границ фотонной зоны, осцилляции плотности состояний вне зоны) согласуются с расчетом. Трансформация плотности фотонных состояний при изменении температуры и толщины фотонного кристалла описывается существующей теорией. Следует отметить, что при расчете плотности состояний мы не использовали подгоночных параметров; фигурирующие в теории параметры были взяты из независимых измерений.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены комплексные оптические исследования холестерического фотонного кристалла. Приводятся результаты измерений спектров пропускания, ВППС, поляризационных характеристик прошедшего света в совершенных образцах жидкокристаллического фотонного кристалла. Прослежена трансформация оптических характеристик при изменении температуры и толщины фотонного кристалла. Анализ экспериментальных данных проведен с использованием аналитических выражений, следующих из решений уравнений Максвелла, численных расчетов методом  $4 \times 4$ -матриц Берремана. Определена плотность фотонных состояний, ее зависимость от ширины фотонной зоны, толщины фотонного кристалла. Спектральная зависимость эллиптичности  $I_{min}/I_{max}$ ,  $(E_{\perp}/E_{\parallel})$  прошедшего через фотонный кристалл света коррелирует со спектральной зависимостью спектра пропускания и достигает максимума в области фотонной запрещенной зоны.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках госзадания ИФТТ РАН при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-02-00246).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer, Berlin (2001).
2. S. G. Johnson and J. Joannopoulos, *Photonic Crystals: The Road from Theory to Practice*, Kluwer, Boston (2002).
3. Е. И. Кац, ЖЭТФ **59**, 1854 (1970).
4. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1995).
5. S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1977).
6. Л. М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*, Наука, Москва (1978).
7. V. A. Belyakov and V. E. Dmitrienko, *Optics of Chiral Liquid Crystals*, Harwood Acad. Publ., London (1989).
8. P. V. Dolganov, G. S. Ksyonz, V. E. Dmitrienko, and V. K. Dolganov, Phys. Rev. E **87**, 032506 (2013).
9. P. V. Dolganov, Phys. Rev. E **91**, 042509-1-5 (2015).

10. П. В. Долганов, В. К. Долганов, Письма в ЖЭТФ **108**, 170 (2018).
11. P. V. Dolganov, K. D. Baklanova, and V. K. Dolganov, *Liq. Cryst.* (2019), DOI:10.1080/02678292.2019.1641636.
12. P. Palfy-Muhoray, W. Cao, M. Moreira, B. Taheri, and A. Munoz, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **364**, 2747 (2006).
13. N. A. Christou, N. C. Papanicolaou, and A. C. Polycarpou, *Phys. Rev. E* **85**, 031702 (2012).
14. J. Xiang, A. Varanytsia, F. Minkowski, D. A. Paterson, J. M. D. Storey, C. T. Imrie, O. D. Lavrentovich, and P. Palfy-Muhoray, *PNAS* **113**, 12925 (2016).
15. M. S. Rafayelyan, H. Gharagulyan, T. M. Sarukhanyan, A. H. Gevorgyan, R. S. Nakobyan, and R. B. Alaverdyan, *Liq. Cryst.* **46**, 1079 (2019).
16. Н. М. Штыков, С. П. Палто, Б. А. Уманский, Д. О. Рыбаков, И. В. Симдянкин, КЭ **49**, 754 (2019).
17. C. L. Folcia, J. Ortega, and J. Etxebarria, *Liq. Cryst.* (2020), DOI:10.1080/02678292.2019.1693645.
18. R. Dreher, G. Meier, and A. Saupe, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **13**, 17 (1971).
19. В. А. Беляков, В. Е. Дмитриенко, В. П. Орлов, УФН **127**, 221 (1979).
20. R. Barbet-Massin and P. Pieranski, *J. de Phys.* **46**, C3-61–C3-79 (1985).
21. D. W. Berreman, *J. Opt. Soc. Amer.* **62**, 502 (1972).
22. H. Wohler, G. Haas, M. Fritsch, and D. A. Mlynski, *J. Opt. Soc. Amer. A* **5**, 1554 (1988).
23. С. П. Палто, ЖЭТФ **119**, 638 (2001).
24. J. Schmidke and W. Stille, *Eur. Phys. J. B* **31**, 179 (2003).
25. P. V. Dolganov, S. O. Gordeev, V. K. Dolganov, and A. Yu. Bobrovsky, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **633**, 14 (2016).
26. J. Li, G. Baird, Y. H. Lin, H. Ren, and S.-T. Wu, *JSID* **13/12**, 1017 (2005).
27. В. К. Долганов, С. П. Крылова, В. М. Филев, ЖЭТФ **78**, 2343 (1980).
28. J. M. Bendickson, J. P. Dowling, and M. Scalora, *Phys. Rev. E* **53**, 4107 (1996).
29. L. M. Blinov, Письма в ЖЭТФ **90**, 184 (2009).
30. Th. K. Mavrogordatos, S. M. Morris, F. Castles, P. J. W. Hands, A. D. Ford, H. J. Coles, and T. D. Wilkinson, *Phys. Rev. E* **86**, 011705 (2012).
31. Th. K. Mavrogordatos, S. M. Morris, S. M. Wood, H. J. Coles, and T. D. Wilkinson, *Phys. Rev. E* **87**, 062504 (2013).