

ЭНТРОПИЯ ВНУТРЕННЕГО ОБЪЕМА ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ШВАРЦШИЛЬДА В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ СО ВРЕМЕНЕМ МАССЫ

*С. Дутта**, *Р. Бисвас***

*Department of Mathematics, The University of Burdwan, Golapbag Academic Complex
713104, Burdwan, West Bengal, India*

Поступила в редакцию 25 октября 2019 г.,
после переработки 25 октября 2019 г.
Принята к публикации 15 ноября 2019 г.

(Перевод с английского)

ENTROPY FOR THE INTERIOR OF A SCHWARZSCHILD BLACK HOLE ASSUMING THE MASS IS INCREASING WITH TIME

S. Dutta, R. Biswas

Термодинамика черных дыр позволяет связать законы термодинамики с существованием горизонта событий черной дыры. Вычисляется энтропия, соответствующая внутреннему объему черной дыры Шварцшильда для безмассовых мод в предположении, что масса черной дыры возрастает со временем. Получено, что энтропия пропорциональна энтропии Бекенштейна–Хокинга. Кроме того, оказалось, что полученная энтропия удовлетворяет второму закону термодинамики. С использованием законов термодинамики получено соотношение между температурой и обратной температурой. Рассмотрены релятивистские поправки к термодинамическим величинам. Проанализированы изменения термодинамических свойств рассматриваемой системы при скоростях, сравнимых со скоростью света. Учтено влияние скалярного заряда.

DOI: 10.31857/S0044451020060036

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует много теорий, рассматривающих компактные объекты, такие как черные дыры. Недавнее детектирование гравитационных волн [1] от слияния черных дыр может служить свидетельством их существования. Ранее Хокинг теоретически показал, что черные дыры могут испаряться и испускать тепловое излучение [2, 3]. На основании этой концепции обсуждались различные аспекты термодинамики черных дыр [4] и вычислялись различные термодинамические величины.

Проведившиеся исследования были аналогичны классическим термодинамическим исследованиям. Энтропия черной дыры рассматривалась как величина, пропорциональная постоянно возрастающей площади горизонта событий. Энтропия Бекенштейна–Хокинга [5] обычно выражается как

$$S_{BH} = \frac{A}{4\hbar G},$$

где A — площадь горизонта событий черной дыры. Согласно второму закону термодинамики, со временем энтропия увеличивается. Еще одно определение энтропии — это энтропия фон Неймана:

$$S[\rho] = -\text{tr}(\rho \ln \rho),$$

где ρ — матрица плотности квантовой системы. На классическом уровне известно, что механика черной

* E-mail: duttasandip.mathematics@gmail.com

** E-mail: biswas.ritabrata@gmail.com

дыры подчиняется законам, аналогичным обыкновенным законам термодинамики [6]. Хорошо известная формула для энтропии черной дыры в терминах заряда Нетер была получена в конце 90-х гг. [7]. Однако в классической термодинамике черных дыр есть вопрос, на который до сих пор не было ответа: что является источником энтропии на классическом уровне? Или, в более общем виде, каковы классические микросостояния, соответствующие микросостояниям энтропии? Этому вопросу посвящено много работ, причем недавно он был переформулирован: какую энтропию имеют экстремальные черные дыры — нулевую или ненулевую [8]? Недавно был предложен новый способ определения внутреннего объема черной дыры Шварцшильда [17] (объем Кристофолу — Ровелли). Эти вычисления были проведены для метрики Керра [9]. Введем следующие допущения, которые были сделаны ранее в работе [10] без четкого объяснения.

(а) При учете зависимости от времени в уравнении Клейна — Гордона скалярное поле выбирается в виде

$$\exp\{-iET\} \exp\{iI(\lambda, \theta, \phi)\},$$

где E — энергия.

(б) Из свободной энергии можно получить энтропию, вычисляя производную по обратной температуре.

(с) Наконец, используется выражение для потока (выражение Хокинга) [10].

Обсудим приведенные выше допущения более подробно. Выразим внутренний объем в виде интеграла [10] и определим эффективную метрику. Тогда можно вычислить гамильтониан движущейся частицы. Наконец, используем свободную энергию Гиббса безмассовой частицы и получим, что энтропия зависит от времени, однако ее изменение довольно медленное.

Работа построена следующим образом. Сначала приводится краткий обзор результатов, полученных в работе [10]. В следующем разделе вычисляется энергия безмассовой частицы внутри черной дыры. В разд. 3 вычисляется энтропия, соответствующая свободной энергии Гиббса, а в разд. 4 рассматривается система, движущаяся со скоростью, сравнимой со скоростью света, и исследуется зависимость соответствующей термодинамики от отношения v/c . В разд. 5 рассматривается эффект присутствия скалярного заряда. Раздел 6 содержит выводы.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ

Рассмотрим координаты Эддингтона — Финкельштейна (v, r, θ, ϕ) . Для простоты выберем сферическую оболочку с энергией, соответствующей массе m , стягивающуюся в направлении поверхности $v = 0$. Пространство-время перед этой поверхностью является плоским. После пересечения поверхности линейный элемент описывается стандартной шварцшильдовской геометрией. Черная дыра Шварцшильда в координатах Эддингтона — Финкельштейна описывается как

$$ds^2 = -f dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

где

$$f = f(r, t) = 1 - \frac{2M(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n)}{r},$$

$$0 < a_i \ll 1,$$

а v — опережающее время:

$$v = t + \int \frac{dr}{f(r, t)} = t + r + 2M(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) \times \ln |r - 2M(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n)|.$$

Мы используем следующие единицы:

$$G = c = \hbar = \kappa_B = 1.$$

Такой тип метрики был предложен в работе [11], где масса черной дыры рассматривалась как функция как r , так и t . Испарение черной дыры в некоммутативной заряженной метрике Вайдья исследовалось в работе [13] (см. Приложение). Здесь a_i — малые параметры, такие что сумма $(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n)$ близка к 1. Важно отметить, что мы считаем, что масса черной дыры увеличивается, поскольку с течением времени материя аккрецирует на черную дыру. Однако средняя плотность материи во Вселенной очень мала, поэтому масса черной дыры увеличивается очень медленно. Вследствие этого мы считаем, что, если пренебречь малыми слагаемыми, частная производная $f(r, t)$ по t практически равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx 0,$$

и поэтому справедливы уравнения Эйнштейна. Кроме того, возрастание радиальной координаты весьма незначительно. Поэтому мы предполагаем, что масса черной дыры по прошествии времени t будет равна

$$M(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n),$$

при том что в момент времени $t = 0$ ее масса была равна m .

Пусть r изменяется от $2M(1+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n)$ до нуля. Например, в работе [14] рассматривалось обусловленное операторами Линдблада возмущение, которое описывает взаимодействие с марковским термостатом. Для подтверждения предложенного нами изменения массы черной дыры можно использовать зависящие от времени обобщенные ансамбли Гиббса. Нашу систему можно рассматривать как открытую квантовую систему.

Поиску зависящих от времени решений для черных дыр посвящено много работ. В работе [15] анализируется зависящее от времени решение с использованием AdS/CFT-соответствия. Подход, использующий зависящий от времени гамильтониан, предложен в работе [16].

Поскольку мы положили, что переменные a_1, a_2, \dots, a_n строго положительны, масса будет только возрастать. Это совершенно не нарушает второй закон термодинамики¹⁾.

Используя преобразования

$$v \rightarrow v(T, \lambda), \quad r \rightarrow r(T, \lambda),$$

получаем

$$ds^2 = \left\{ -f \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial r}{\partial T} \right\} dT^2 + \left\{ -f \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial \lambda} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right\} d\lambda^2 + r^2 d\Omega^2,$$

при этом кросс-члены будем считать равными нулю. Предполагая, что выполняется условие

$$-f \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial r}{\partial T} = -1,$$

и рассматривая сферически-симметричную гиперповерхность как прямое произведение 2-сферы и произвольной кривой, параметризованной с помощью λ на плоскости $v - r$, можно найти гиперповерхность $\Sigma : T = \text{const}$, см. [10, 17], где

$$ds_\Sigma^2 = -dT^2 + \{-f\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r}\} d\lambda^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Внутренний объем, ограниченный горизонтом, можно описать, используя поверхность

$$\Sigma \equiv \gamma \times S^2,$$

¹⁾ Если эти переменные выбрать отрицательными, так что второй закон термодинамики будет нарушен, то рассматриваемая система будет нефизической.

на которой метрика имеет вид

$$ds^2 = \{-f\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r}\} d\lambda^2 + r^2 d\Omega^2,$$

где $r = r(\lambda)$ и $v = v(\lambda)$, а λ — произвольный параметр [17].

Объем можно записать как

$$V_\Sigma = 4\pi \int d\lambda \sqrt{r^4 \{-f\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r}\}}. \quad (2)$$

Тогда метрика примет вид подынтегрального выражения от лагранжиана:

$$dS_{eff}^2 = r^4 \{-f\dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r}\} d\lambda^2. \quad (3)$$

Этому лагранжиану соответствуют координаты (r, v) и импульсы (P_r, P_v) . Тогда $\int dr dv dP_r dP_v$ представляет собой объем фазового пространства. В настоящей работе мы вычисляем энтропию внутри этого объема фазового пространства. Если проводить вычисление энтропии, основываясь на методах квантовой статистики, сначала нужно найти гамильтониан частицы, находящейся в данном объеме.

Пусть m — масса частицы, движущейся в пространстве-времени с фоновой метрикой

$$ds_{ansatz}^2 = g_{ab} dx^a dx^b = -dt^2 + r^4 (-f(r, t) dv^2 + 2dv dr), \quad (4)$$

тогда действие (которое, как мы предполагаем, имеет репараметризационную симметрию) будет иметь вид

$$S = m \int_1^2 dS_{ansatz} = m \int_1^2 (g_{ab} dx^a dx^b)^{1/2}. \quad (5)$$

Скорости частицы определяются выражением

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau},$$

где τ — произвольный параметр, а $x^a = x^a(\tau)$. Тогда путь частицы задается выражением

$$S = \int_1^2 \mathcal{L} d\tau = m \int_1^2 \left(g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} \right)^{1/2} d\tau. \quad (6)$$

Сравнивая обе части, получаем лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = m \left(g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} \right)^{1/2}.$$

Используя уравнение Эйлера–Лагранжа, нетрудно найти уравнение движения системы:

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{du^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a u^b u^c = 0,$$

где Γ_{bc}^a — символы Кристоффеля. Отметим, что приведенное выше уравнение геодезических верно для любого пространства-времени. Чтобы получить гамильтониан, полностью описывающий динамику системы, сначала нужно вычислить импульсы системы, которые задаются уравнением

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = \frac{m^2}{\mathcal{L}} g_{ab} \frac{dx^b}{d\tau}. \quad (7)$$

Поэтому канонический гамильтониан имеет вид

$$H_c = P_a \frac{dx^a}{d\tau} - \mathcal{L} = 0. \quad (8)$$

Для репараметризационно инвариантной теории характерно, что канонический гамильтониан равен нулю; для пространства-времени Минковского наблюдается то же самое. В настоящей работе мы будем рассматривать гамильтониан системы, которая задается метрикой (4). Анализ был проведен для хронологической калибровки в плоском пространстве-времени [18] и для калибровки собственного времени [19]. При вычислении энтропии мы будем использовать независимые связи.

Поскольку импульсы не являются независимыми,

$$P^2 = g^{ab} P_a P_b = m^2, \quad (9)$$

мы получаем первичную связь в виде

$$\Phi = P^2 - m^2 \approx 0. \quad (10)$$

Используя алгоритм Дирака [20], получаем, что первичная связь и гамильтониан пропорциональны друг другу, поэтому

$$H_T = \xi(\tau)\Phi = \xi(\tau)(P^2 - m^2), \quad (11)$$

где ξ — зависящий от τ коэффициент пропорциональности.

Тогда получаем

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\tau} = u^a = \{x^a, H_T\} = 2\xi P^a \quad (12)$$

и

$$\dot{P}_a = \{P_a, H_T\} = -\frac{\partial H}{\partial x^a} = -\xi \frac{\partial g^{bc}}{\partial x^a} P_b P_c. \quad (13)$$

Используя (86) и (12), получаем

$$u^a = 2\xi P^a = 2\xi \frac{m^2}{\mathcal{L}} u^a.$$

Тогда

$$\xi = \frac{\mathcal{L}}{2m^2}. \quad (14)$$

Таким образом, полный гамильтониан имеет вид

$$H_T = \frac{\mathcal{L}}{2m^2} (P^2 - m^2). \quad (15)$$

До сих пор мы рассматривали только одну связь (определяемую уравнением (10)). Это характеризует систему как систему со связями первого рода, которая поэтому имеет калибровочную свободу [21]. Накладывая некоторые условия на произвольный параметр τ , который мы будем интерпретировать как собственное время, можно устранить калибровочную свободу. Калибровку собственного времени мы используем позднее. Тогда получаем

$$\psi_2 = \frac{P^0}{m} \tau - x^0 \approx 0, \quad (16)$$

а для первичной связи (11) получаем

$$\psi_1 = P^2 - m^2 \approx 0, \quad (17)$$

что делает систему системой со связями второго рода.

Отсюда

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \{\psi_2, H_T\} = 0 \Rightarrow \frac{P^0}{m} - \{x^0, H_T\} + \frac{\tau}{m} \{P^0, H_T\} = 0. \quad (18)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \{x^0, H_T\} &= \{x^0, \xi P^2\} = \\ &= 2\xi g^{ab} \{x^0, P_a\} P_b = 2\xi P^0 \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$\{P^0, H_T\} = \xi \left(2P^0 \frac{\partial g^{0b}}{\partial x^a} P_b - g^{0a} \frac{\partial g^{bc}}{\partial x^a} P_b P_c \right). \quad (20)$$

Для метрики (4) получаем

$$\{P^0, H_T\} = 0.$$

Тогда уравнения (18) и (19) дают

$$\xi = \frac{1}{2m}. \quad (21)$$

Из уравнений (14) и (21) можно получить $\mathcal{L} = m$.

Также из уравнений (11) и (12) получаем

$$\dot{x}_a = \frac{1}{2m} \{x^a, P^2\} = \frac{P^a}{m}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}^a &= \frac{1}{2m} \{P^a, P^2\} = \\ &= \frac{1}{2m} \left(2 \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^c} g^{cd} - \frac{\partial g^{db}}{\partial x^c} g^{ca} \right) P_d P_b, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\dot{P}^a = -\frac{1}{m} \Gamma_{bc}^a P^b P^c. \quad (24)$$

Здесь мы использовали тождество

$$\partial_c g^{ab} = -g^{ad} g_{be} \partial_c g_{de}$$

для двух динамических переменных и вычислили дираковскую скобку [9, 22]

$$\begin{aligned} \{f_1, f_2\}^* &= \{f_1, f_2\} + \frac{1}{2P^0} \times \\ &\times (\{f_1, P^2\} \{f_2, f_2\} - \{f_1, f_2\} \{P^2, f_2\}). \end{aligned} \quad (25)$$

Для динамической переменной уравнение движения можно получить, используя следующее соотношение [20]:

$$\dot{f}_1 = \{f_1, H\}^*. \quad (26)$$

На самом деле полезно воспользоваться соотношением

$$H = P^0.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}^a &= \{x^a, P^0\}^* = \\ &= g^{a0} + \frac{1}{P^0} \left(P^a + \frac{\tau}{m} g^{a0} \Gamma_{bc}^0 P^b P^c \right), \\ \dot{P}^a &= \{P^a, P^0\}^* = \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^c} g^{0c} P_b - \frac{1}{P^0} \Gamma_{bc}^a P^b P^c + \\ &+ g^{0a} \Gamma_{bc}^0 P^b P^c. \end{aligned} \quad (27)$$

Фиксируя калибровку $a = 0$, получаем уравнение движения для пространственной компоненты $a(a = \mu)$:

$$\dot{x}^\mu = \frac{P^\mu}{P^0}, \quad \dot{P}^\mu = \frac{1}{P^0} \Gamma_{ab}^\mu P^a P^b. \quad (28)$$

Из этих двух уравнений можно исключить P^0 , тогда мы получим требуемое уравнение геодезической:

$$g^{ab} P_a P_b = -(P^0)^2 + 2r^{-4} P_r P_v - f r^{-4} P_r^2 = m^2. \quad (29)$$

Энергия частицы, т. е. гамильтониан, имеет вид

$$\epsilon = P^0 = \left(-\frac{f P_r^2}{r^4} + \frac{2 P_r P_v}{r^4} - m^2 \right)^{1/2}. \quad (30)$$

Мы вычисляем энергию для безмассовой частицы (такой как фотон), поэтому можно положить $m \rightarrow 0$. Тогда уравнение (30) можно записать как

$$\epsilon = \left(-\frac{f P_r^2}{r^4} + \frac{2 P_r P_v}{r^4} \right)^{1/2}. \quad (31)$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ НА ОСНОВАНИИ КЛАССИЧЕСКОЙ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ГИББСА

Найдем зависимость энтропии от энергии для безмассовой частицы. Эта энтропия определена внутри черной дыры. Поскольку не имеется слагаемых, соответствующих химическому потенциалу, свободная энергия Гиббса имеет вид

$$G_0 = -\frac{1}{\beta} \ln Z = \frac{1}{\beta} \sum_\epsilon \ln (1 - \exp\{-\beta \epsilon\}),$$

где Z — статсумма большого канонического распределения, а β — обратная температура. Свободная энергия Гиббса релятивистски инвариантна. Возрастание массы можно рассматривать как медленный процесс. Поэтому можно сказать, что влияние свободной энергии Гиббса пренебрежимо мало, т. е. свободная энергия Гиббса до и после смены гиперповерхности практически не меняется. На горизонте (при максимальном внутреннем объеме) значение радиальной координаты фиксировано, т. е. $\dot{r} = 0$, здесь r можно получить из уравнения (28), откуда следует

$$\dot{r} = r^{-4} \frac{(P_v + f P_r)}{P^0} = 0 \Rightarrow P_v + f P_r = 0.$$

Снова r и входящие координаты светового конуса зависят от некоторого параметра λ [17], т. е. $r = r(\lambda)$ и $v = v(\lambda)$, при этом $v = F(r)$ (функция от r). Поэтому свободная энергия Гиббса имеет вид

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{\beta} \int dP_r dP_v dr dv \times \\ &\times \ln (1 - \exp\{-\beta \epsilon\}) \times \delta(P_v + f P_r) \delta(v - F(r)). \end{aligned}$$

Используя дельта-функции Дирака, получаем

$$G_0 = \frac{1}{\beta} \int dP_r dr \ln \left[1 - \exp \left\{ -\beta \left(-\frac{f P_r^2}{r^4} \right)^{1/2} \right\} \right],$$

где P_r изменяется от 0 до ∞ . Тогда

$$G_0 = \frac{1}{\beta} \int dr \int_0^\infty \ln \left[1 - \exp \left\{ -\beta \left(-\frac{f P_r^2}{r^4} \right)^{1/2} \right\} \right].$$

Учитывая равенство

$$x = \frac{\beta P_r \sqrt{-f}}{r^2},$$

получаем

$$G_0 = -\frac{\pi^2}{6\beta^2} \int \frac{r^2}{\sqrt{-f}} dr. \quad (32)$$

Рассмотрим, как увеличивается со временем радиус черной дыры, если радиальная координата при

этом изменяется от $2M(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)$ до 0. Получаем

$$G_0 = -\frac{\pi^2}{6\beta^2} \int_0^{2M(1+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n)} \frac{r^2}{\sqrt{\frac{2M(1+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n)}{r} - 1}} dr.$$

Учитывая равенство

$$y = \frac{r}{2M(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)},$$

получаем

$$G_0 = \frac{5\pi^3}{12\beta^2} M^3 (1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)^3.$$

Хокинг показал, что благодаря квантовым эффектам черные дыры испускают электромагнитное излучение, аналогичное излучению абсолютно черного тела с температурой, обратно пропорциональной массе черной дыры [2]. Кроме того, наша система аналогична абсолютно черному телу с заключенными в нем безмассовыми частицами. Поэтому частицам также соответствует обратная температура

$$\beta = 8\pi M.$$

Тогда свободная энергия Гиббса имеет вид

$$G_0 = \frac{5}{6144} \beta (1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)^3. \quad (33)$$

Отсюда для энтропии получаем

$$S_0 = \beta^2 \frac{\partial G_0}{\partial \beta} = \frac{5\beta^2}{6144} (1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)^3. \quad (34)$$

Таким образом, можно сказать, что энтропия монотонно возрастает со временем, однако это происходит очень медленно.

В связи со сказанным выше, мы хотели бы воспроизвести результат, полученный ранее в работе [23], где было показано, что планковская энтропия является лоренц-инвариантной. Эмпирическая температура в релятивистской термодинамике лоренц-инвариантна [24]. Пусть (в собственной системе отсчета) T_0 — абсолютная температура, δQ_0 — количество теплоты, входящей в систему, δL_0 — термодинамическая работа, произведенная над системой. Для обратимых процессов

$$\delta Q_0 = T_0 dS_0. \quad (35)$$

Вначале, если предположить, что эффективность цикла Карно является инвариантом, то энтропия также будет инвариантом, т. е.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q_0}{T_0} = dS_0. \quad (36)$$

Согласно второму закону термодинамики, пфаффовая форма δQ_0 зависит только от эмпирической температуры. Это приводит к равенству Клаузиуса

$$\oint \frac{\delta Q_0}{T_0} = 0 \quad (37)$$

для любого циклического обратимого процесса.

Предположим, что второй закон термодинамики выполняется также и для релятивистской термодинамики в любой инерциальной системе отсчета. Тогда абсолютная температура имеет вид

$$T = T(T_0, v), \quad \lim_{v \rightarrow 0} T(T_0, v) = T_0, \quad (38)$$

где термодинамическая система движется с постоянной скоростью \mathbf{v} относительно системы отсчета K . В системе отсчета K равенство Клаузиуса принимает вид

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (39)$$

Релятивистские преобразования теплоемкости, полученные в работе [25] и независимо в работах [26] и [27, 28], можно записать как

$$\delta Q = \gamma(v) \delta Q_0 \quad (40)$$

(см. также [29]).

Подставляя выражения (40) и (38) в выражение (39), получаем

$$\oint \frac{\delta Q_0}{\{\gamma(v)\}^{-1} T(T_0, v)} = 0. \quad (41)$$

Сравнивая (41) и (37), получаем

$$\{\gamma(v)\}^{-1} T(T_0, v) = bT_0, \quad (42)$$

где b — произвольная постоянная. Положим $v \rightarrow 0$ в уравнении (42), тогда, с учетом (38), получаем $b = 1$. Окончательно находим

$$T = \gamma(v) T_0. \quad (43)$$

Это второй закон релятивистской термодинамики для обратимых процессов и релятивистское преобразование абсолютной температуры, что хорошо согласуется с равенством (40). Полученное правило преобразования отличается от закона (см. [23, 30–33])

$$T^{(Plank)} = \{\gamma(v)\}^{-1}T_0, \quad (44)$$

а следуя правилу преобразования [34–37], имеем

$$T^{(L)} = T_0, \quad (45)$$

что не противоречит тому, что

$$\delta Q^{(L)} = \delta Q_0. \quad (46)$$

Теперь из уравнений (35), (40) и (43) получаем

$$\delta Q = T dS_0, \quad (47)$$

откуда, согласно [23], следует, что энтропия является лоренц-инвариантной:

$$S = S_0. \quad (48)$$

Следует отметить несколько важных моментов. Во-первых, мы считаем, что безмассовым модам внутри горизонта событий соответствует та же температура, что и на горизонте. Напомним, что r меняется от 0 до $2M$, однако мы рассматриваем несколько другой случай. Мы предполагаем, что из-за аккреции материи масса черной дыры возрастает со временем. Однако средняя плотность Вселенной очень мала. Поэтому возрастание массы черной дыры происходит очень медленно, так что мы считаем, что и рост радиальной координаты также очень незначительный. Тогда, если масса черной дыры $M = M(t = t_0 = 0)$, то по прошествии времени t она будет равна $M(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)$. При этом r меняется от $2M(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)$ до нуля.

Кроме того, как показал Хокинг, для черных дыр характерен процесс излучения (излучение Хокинга) [5, 38], которому можно сопоставить некоторую температуру (температуру Хокинга) [2, 39]. Используя термодинамические соотношения между энергией, температурой и энтропией, Хокинг смог подтвердить предположение Бекенштейна и получить коэффициент пропорциональности, который оказался равен $1/4$ [40]. А именно, на горизонте черной дыры энтропия равна

$$S_{BH} = \frac{A}{4},$$

где $A = 16\pi M^2$ — площадь горизонта событий. Тогда S_0 и S_{BH} связаны следующим образом:

$$S_0 = \frac{5\pi}{384}(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)^3 S_{BH}.$$

Таким образом, как можно видеть, энтропия на горизонте больше энтропии внутри черной дыры, т. е. $S_{BH} > S_0$. Кроме того, энтропия внутри черной дыры пропорциональна времени t , т. е. со временем энтропия S_0 внутри черной дыры увеличивается.

На первом законе термодинамики основаны главные определения внутренней энергии и закон сохранения энергии для всех термодинамических систем. Второй закон термодинамики говорит о том, что естественные процессы могут проходить только в одном направлении и не являются обратимыми. Кроме того, как следует из сказанного выше,

$$\frac{dS_0}{dt} > 0.$$

Поэтому полная энтропия со временем не уменьшается и процесс является необратимым.

Согласно первому закону термодинамики,

$$dM = T_0 dS_0, \quad (49)$$

откуда следует

$$\beta = \frac{768}{15\pi T_0} \frac{1}{(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)^2},$$

здесь β — обратная термодинамическая температура системы [41, 42], которая термодинамически, посредством энтропии, обуславливает связь между информацией и энергией физической системы.

Случай 1.

Если $a_i = 0$ при $i > 1$, то

$$(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n) \approx (1 + a_1t),$$

$$S_0 = \frac{5\pi}{384}(1 + a_1t)^3 S_{BH},$$

$$\beta = \frac{768}{15\pi T_0} \frac{1}{(1 + a_1t)^2}.$$

На рис. 1 приведены соотношения между S_0 , S_{BH} и t (рис. 1а) и между β , T_0 и t (рис. 1б) при $a_1 = 0.05$. На рисунках видно, что зависимость между β и T_0 является гиперболической, а при изменяющемся времени энтропия внутри черной дыры увеличивается быстрее.

Случай 2.

Если $a_i = 0$ при $i > 2$, то

$$(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n) \approx (1 + a_1t + a_2t^2),$$

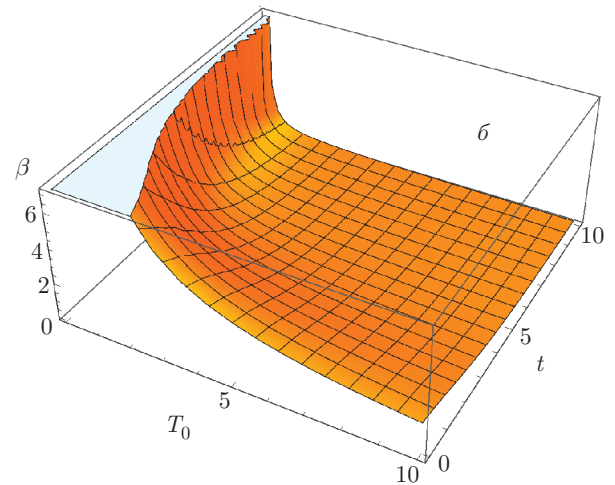
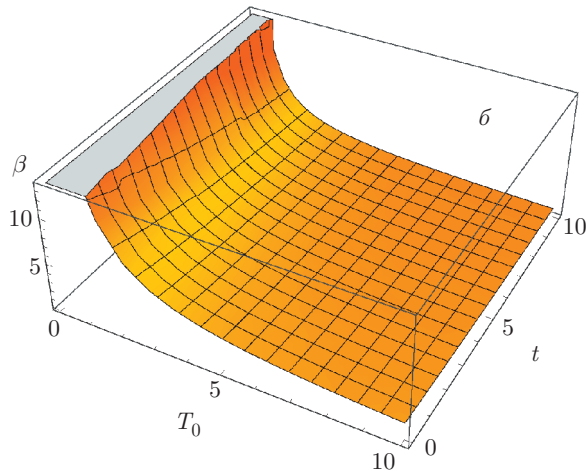
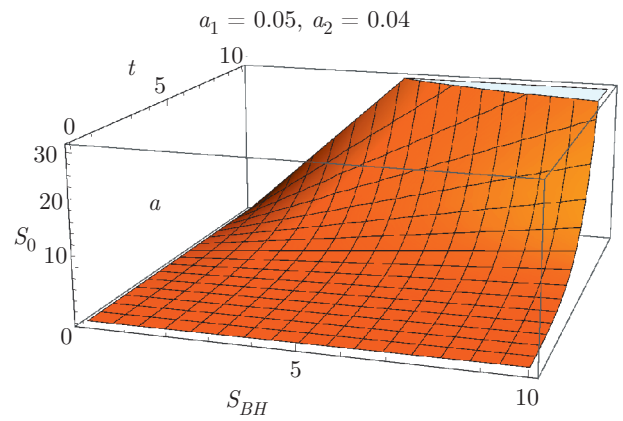
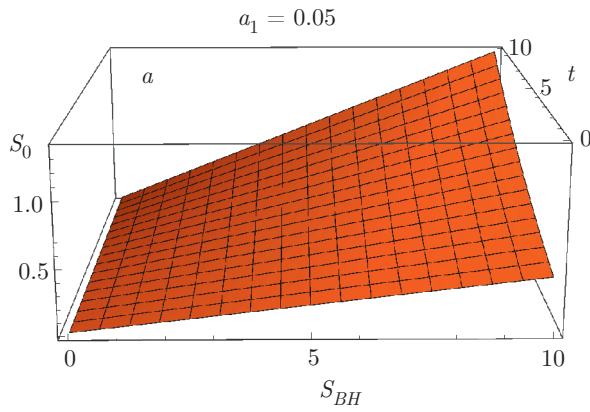


Рис. 1. Соотношения между S_0 , S_{BH} и t (а) и между β , T_0 и t (б) при $a_1 = 0.05$

Рис. 2. Соотношения между S_0 , S_{BH} и t (а) и между β , T_0 и t (б) при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$

$$S_0 = \frac{5\pi}{384}(1 + a_1t + a_2t^2)^3 S_{BH},$$

$$\beta = \frac{768}{15\pi T_0} \frac{1}{(1 + a_1t + a_2t^2)^2}.$$

При постоянном времени, если энтропия на горизонте черной дыры возрастает, то энтропия внутри черной дыры тоже будет увеличиваться. Если время изменяется, то энтропия внутри черной дыры будет увеличиваться быстрее. На рис. 2 приведены соотношения между S_0 , S_{BH} и t (рис. 2а) и между β , T_0 и t (рис. 2б) при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$. На рисунках видно, что энтропия внутри черной дыры увеличивается быстрее, чем в Случае 1.

Случай 3.

Если $a_i = 0$ при $i > 3$, то

$$(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n) \approx (1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3),$$

$$S_0 = \frac{5\pi}{384}(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)^3 S_{BH},$$

$$\beta = \frac{768}{15\pi T_0} \frac{1}{(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)^2}.$$

На рис. 3 приведены соотношения между S_0 , S_{BH} и t (рис. 3а) и между β , T_0 и t (рис. 3б) при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $a_3 = 0.03$. При изменяющемся времени скорость возрастания энтропии существенно выше, чем в Случаях 2 и 3.

4. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

В работе [33] приводится распределение Джуттнера — релятивистский аналог распределения Максвелла для идеального газа в чисто инерциальной системе отсчета (например, K_0). Позднее распределение Джуттнера было принято и использовано многими учеными [32, 43–47]. Если в лабораторном сосуде, движущемся с постоянной скоростью \mathbf{v} относительно лабораторной системы отсчета K , находится газ, то можно применять предположения и рассуждения, аналогичные рассуждениям, исполь-

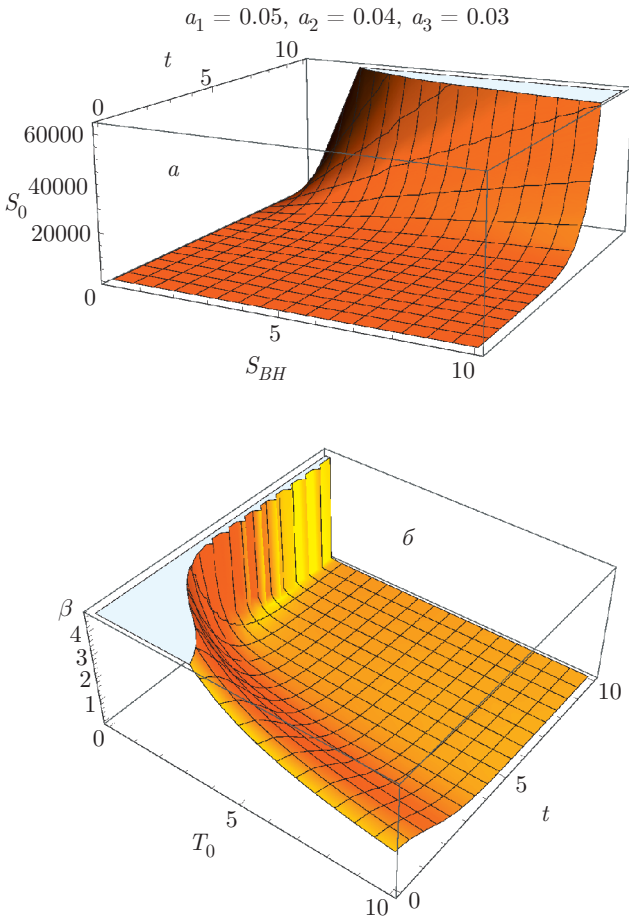


Рис. 3. Соотношения между S_0 , S_{BH} и t (а) и между β , T_0 и t (б) при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $a_3 = 0.03$

зованным при выводе распределения Джуттнера. В некоторых работах, основанных на компьютерных симуляциях [48–52], получено частичное подтверждение правильности формулы Джуттнера и ее обобщения. В этих работах были предложены и другие распределения. Эффективность использования распределения была показана в работе [53]. Релятивистское распределение Гиббса для идеального газа, находящегося в сосуде, движущемся с постоянной скоростью \mathbf{v} и имеющем 4-скорость

$$u^j = \left(\gamma(v) \frac{\mathbf{v}}{c}, \gamma(v) \right),$$

имеет вид

$$d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{3N} N! Z} \exp\{-\beta c u_j \mathcal{P}^j\} d^{3N} p d^{3N} q, \quad (50)$$

где N — число частиц, \mathcal{P}^j — полный импульс газа, $d^{3N} p d^{3N} q$ — элемент объема фазового пространства, а Z — функция распределения:

$$Z = \frac{V^N}{(2\pi)^{3N} N!} \int_{R^{3N}} \exp\{-\beta c u_j \mathcal{P}^j\} d^{3N} p. \quad (51)$$

При этом мера $d^3 p$ принимает вид [44]

$$d^3 p = \gamma(v) \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_0}{c \sqrt{\mathbf{p}_0^2 + m^2 c^2}} \right) d^3 p_0. \quad (52)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V^N}{(2\pi)^{3N} N!} \left(\int_{R^{3N}} \exp\{-\beta c u_j p^j\} d^3 p \right)^N = \\ &= \frac{V^N}{(2\pi)^{3N} N!} \left(\int_{R^{3N}} \exp\left\{-\beta c \sqrt{\mathbf{p}_0^2 + m^2 c^2}\right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\gamma(v) \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_0}{c \sqrt{\mathbf{p}_0^2 + m^2 c^2}} \right) \right] d^3 p_0 \right)^N = \\ &= \frac{V_0^N}{(2\pi)^{3N} N!} \left(\int_{R^{3N}} \exp\left\{-\beta c \sqrt{\mathbf{p}_0^2 + m^2 c^2}\right\} d^3 p_0 \right)^N = \\ &= Z_0, \quad (53) \end{aligned}$$

где нижний индекс «0» соответствует собственной системе отсчета K_0 . Из приведенного выше уравнения следует, что функция распределения Z является лоренц-инвариантной [44].

Окончательно, релятивистское распределение Гиббса (50) принимает вид

$$\omega_n = \frac{1}{Z} \exp\{-\beta c u_j \mathcal{P}_n^j\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (54)$$

где нижний индекс « n » соответствует квантовому состоянию. Кроме того, из первого закона релятивистской термодинамики (для идеальной жидкости) [24, 54] следует

$$dE = T dS - p dV + \{\gamma(v)\}^2 \frac{v^2}{c^2} V dp. \quad (55)$$

Из уравнения (55) нетрудно найти

$$d \left[E - \{\gamma(v)\}^2 \frac{v^2}{c^2} V p \right] = T dS - \{\gamma(v)\}^2 p dV. \quad (56)$$

Поэтому

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V - \{\gamma(v)\}^2 \frac{v^2}{c^2} V \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V, \quad (57)$$

$$p - \{\gamma(v)\}^2 \frac{v^2}{c^2} V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \quad (58)$$

и

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\{\gamma(v)\}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V. \quad (59)$$

Тогда из уравнений (55) и (56) получаем

$$T = \{\gamma(v)\}^2 \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,P}. \quad (60)$$

Поскольку давление представляет собой лоренцев инвариант [24], т. е. $p = p_0$, если объем $V_0 = \gamma(v)V$, можно записать

$$H = E + pV = \gamma(v)(E_0 + p_0V_0) = \gamma(v)H_0, \quad (61)$$

где H — энтальпия.

Используя определение энтальпии и уравнение (56), получаем

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p. \quad (62)$$

Отсюда свободная энергия F равна

$$F = E - TS - \{\gamma(v)\}^2 \frac{v^2}{c^2} pV = \gamma(v)F_0, \quad (63)$$

где

$$F_0 = E_0 - T_0S_0$$

— свободная энергия системы в собственной системе отсчета K_0 .

Подставляя уравнение (63) в уравнение (56), получаем

$$dF = -S dT - \{\gamma(v)\}^2 p dV. \quad (64)$$

Откуда получаем выражения

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad \{\gamma(v)\}^2 p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad (65)$$

$$E = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V - \frac{v^2}{c^2} V \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

и релятивистское тождество Максвелла

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \{\gamma(v)\}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T. \quad (66)$$

Определим функцию Гиббса G стандартным образом:

$$G = E - TS + pV = \gamma(v)G_0, \quad (67)$$

где

$$G_0 = E_0 - T_0S_0 + p_0V_0.$$

Заметим, что некоторые инвариантные термодинамические величины можно выразить с помощью функции Масье [55]:

$$\frac{G}{T} = \frac{G_0}{T_0}. \quad (68)$$

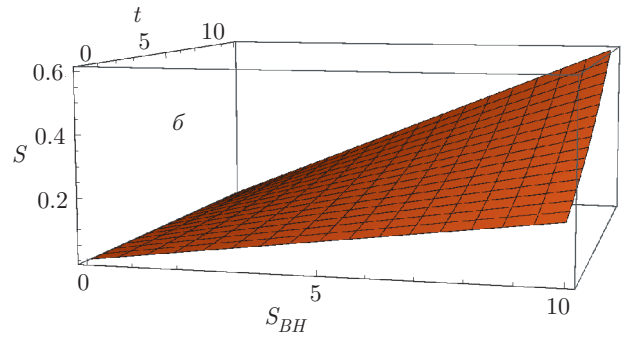
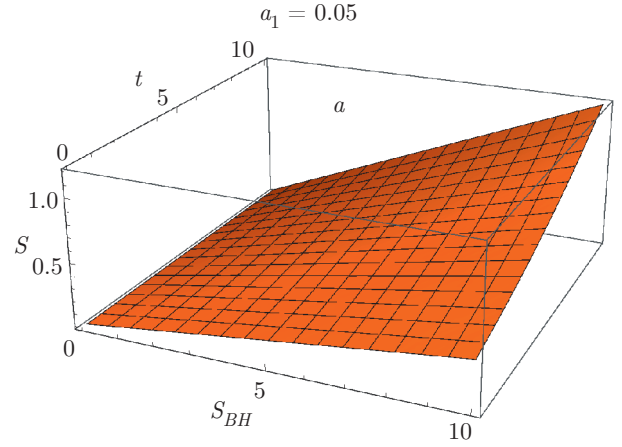


Рис. 4. Соотношения между S_0 , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $\alpha = 0.5$ (а) и между β , T_0 и t при $a_1 = 0.05$, $\alpha = 0.9$ (б)

Используя уравнения (33) и (67), получаем

$$G = \frac{5\gamma(v)}{6144} \beta (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n)^3. \quad (69)$$

Тогда энтропия равна

$$S = \beta^2 \frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{5\gamma(v)\beta^2}{6144} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n)^3 = \gamma(v)S_0. \quad (70)$$

Используя уравнение (70), согласно первому закону термодинамики, получаем

$$dM = T dS = \gamma^{-1} T_0 \gamma dS_0 = T_0 dS_0, \quad (71)$$

поскольку

$$T = \gamma(v)^{-1} T_0.$$

Приведенное выше уравнение аналогично уравнению (49) (см. также [55]).

Энтропия на горизонте черной дыры равна [40]

$$S_{BH} = \frac{A}{4},$$

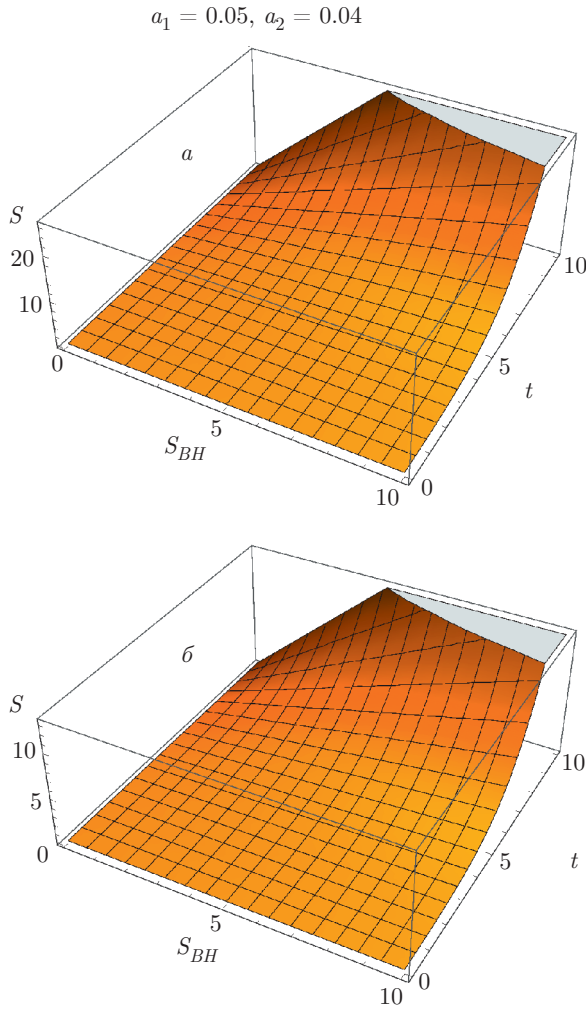


Рис. 5. Соотношения между S , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $\alpha = 0.5$ (а) и между β , T_0 и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $\alpha = 0.9$ (б)

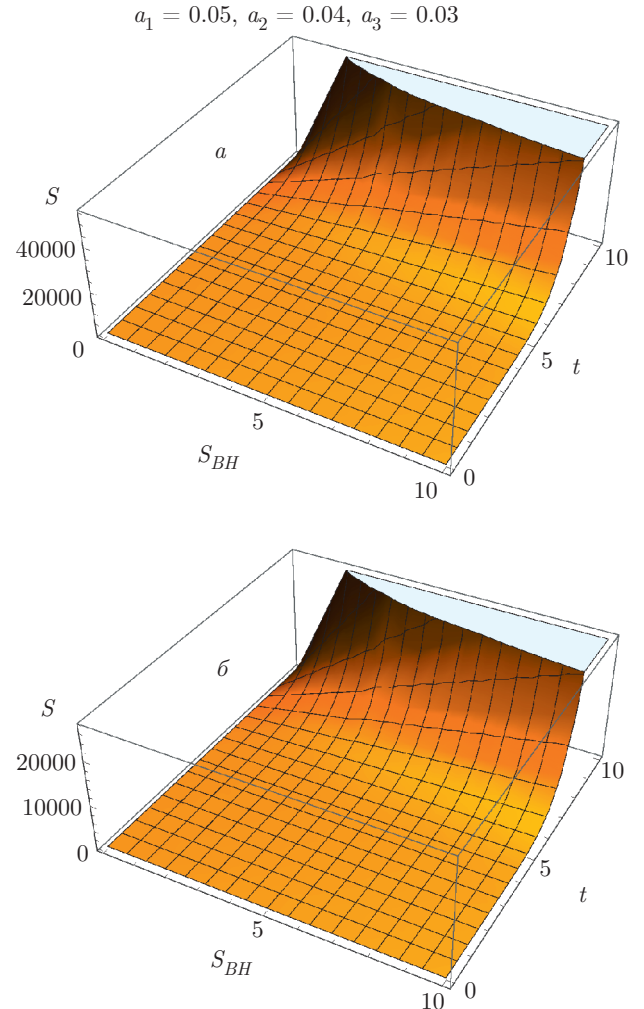


Рис. 6. Соотношения между S , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $a_3 = 0.03$, $\alpha = 0.5$ (а) и между β , T_0 и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $a_3 = 0.03$, $\alpha = 0.9$ (б)

где $A = 16\pi M^2$ — площадь горизонта событий. Отсюда получаем соотношение между S и S_{BH} :

$$S = \frac{5\pi\gamma(v)}{384}(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)^3 S_{BH}, \quad (72)$$

где

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

а v — разность скоростей между неподвижной и движущейся системами отсчета. Будем предполагать, что $v/c = \alpha$, где $0 \leq \alpha < 1$. Тогда из уравнения (72) получаем

$$S = \frac{5\pi\sqrt{1 - \alpha^2}}{384}(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)^3 S_{BH}. \quad (73)$$

Случай 1.

Если $a_i = 0$ при $i > 1$, то

$$(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n) \approx (1 + a_1t),$$

$$S = \frac{5\pi\sqrt{1 - \alpha^2}}{384}(1 + a_1t)^3 S_{BH}.$$

На рис. 4 приведены соотношения между S_0 , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $\alpha = 0.5$ (рис. 4а) и между β , T_0 и t при $a_1 = 0.05$, $\alpha = 0.9$ (рис. 4б). На рисунках видно, что когда α увеличивается, энтропия убывает. Это означает, что система движется со скоростью, близкой к скорости света, а энтропия растет медленнее, чем в классическом случае.

Случай 2.

Если $a_i = 0$ при $i > 2$, то

$$(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n) \approx (1 + a_1t + a_2t^2),$$

$$S = \frac{5\pi\sqrt{1-\alpha^2}}{384}(1+a_1t+a_2t^2)^3 S_{BH}.$$

На рис. 5 приведены соотношения между S_0 , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $\alpha = 0.5$ (рис. 5а) и между β , T_0 и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $\alpha = 0.9$ (рис. 5б). На рисунках видно, что в этих случаях S растет быстрее, чем в классическом случае.

Случай 3.

Если $a_i = 0$ при $i > 3$, то

$$(1+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n) \approx (1+a_1t+a_2t^2+a_3t^3),$$

$$S = \frac{5\pi\sqrt{1-\alpha^2}}{384}(1+a_1t+a_2t^2+a_3t^3)^3 S_{BH}.$$

На рис. 6 приведены соотношения между S_0 , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $a_3 = 0.03$, $\alpha = 0.5$ (рис. 6а) и между β , T_0 и t при $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.04$, $a_3 = 0.03$, $\alpha = 0.9$ (рис. 6б). Если a_1 , a_2 и a_3 не равны нулю, то S растет быстрее, чем в предыдущих случаях.

На рис. 4а, 5а, 6а и рис. 4б, 5б, 6б приведены соотношения между S , S_{BH} и t для $\alpha = 0.5$ и 0.9 , соответственно. Отметим, что рисунки для Случаев 1, 2 и 3, для которых $\alpha = 0$, тождественны соответствующим рис. 1а, 2а и 3а (см. разд. 4). Среда движется с постоянной скоростью \mathbf{v} относительно инерциальной системы отсчета K . Если скорость \mathbf{v} мала по сравнению со скоростью света, то этому случаю соответствует $\alpha = 0$. Для среды, движущейся со скоростью \mathbf{v} , сравнимой со скоростью света, $\alpha = 0.5$.

Для среды, движущейся со скоростью, близкой к скорости света, $\alpha = 0.9$. На рисунках видно, что при возрастании скорости среды энтропия убывает очень быстро, т.е. если уменьшать значение α , то энтропия будет расти.

5. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ СО СКАЛЯРНЫМ ЗАРЯДОМ

Рассмотрим решения для черной дыры другого типа, а именно, для массивной гравитационной черной дыры [56]. Анзац для решений для статической сферически-симметричной черной дыры можно записать в виде

$$ds^2 = -g(r, t) dt^2 + \frac{dr^2}{g(r, t)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (74)$$

где

$$g(r, t) = 1 - \frac{2M(1+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n)}{r} - \frac{Q}{r^\lambda},$$

а λ — параметр модели, зависящий от скалярного заряда Q . Наличие скалярного заряда требует модификации теории гравитации Эйнштейна. В настоящей работе мы будем рассматривать случай $Q > 0$ и $\lambda = 1$.

Из уравнения (32) получаем свободную энергию Гиббса:

$$G_0 = \frac{\pi \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q\right)^3}{576\beta^2} \left[60 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) - 60 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) - 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} - \right. \\ \left. - 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} - \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} + 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} + \right. \\ \left. + 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} + \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} \right], \quad (75)$$

где

$$a = (1+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n).$$

Тогда энтропия равна

$$\begin{aligned}
 S_0 = & \frac{1}{576} \pi \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q \right)^3 \left[\frac{15aQ}{2\pi \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q \right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}}} + \frac{45aQ \cos \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\}}{4\pi \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q \right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}}} + \right. \\
 & + \frac{15a}{2\pi \sqrt{1 - \frac{a\beta}{4\pi} - Q} \sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} + \frac{9aQ \cos \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\}}{2\pi \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q \right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}}} + \frac{3aQ \cos \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\}}{4\pi \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q \right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}}} + \\
 & + \left. \frac{45a \cos \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\}}{4\pi \sqrt{1 - \frac{a\beta}{4\pi} - Q} \sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} + \frac{9a \cos \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\}}{2\pi \sqrt{1 - \frac{a\beta}{4\pi} - Q} \sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} + \frac{3a \cos \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\}}{4\pi \sqrt{1 - \frac{a\beta}{4\pi} - Q} \sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right] + \\
 & + \frac{1}{768} a \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q \right)^2 \left[60 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) - 60 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) - 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} - \right. \\
 & - 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} + 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} - \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} + \\
 & \left. + 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} + \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} \right] - \\
 & - \frac{\pi \left(\frac{a\beta}{4\pi} + Q \right)^3}{288\beta} \left[60 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) - 60 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) - 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} - \right. \\
 & - 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} - \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q}} \right) \right\} + 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} + \\
 & \left. + 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} + \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a\beta}{4\pi} + Q} \right) \right\} \right]. \quad (76)
 \end{aligned}$$

Соотношение между S_0 , S_{BH} и t определяется уравнением

$$\begin{aligned}
 S_0 = & \frac{1}{576} \pi (a\sqrt{S_{BH}} + Q)^3 \left[\frac{15aQ}{2\pi\sqrt{1 - \frac{Q^2}{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} (a\sqrt{S_{BH}} + Q)^{3/2}} + \right. \\
 & + \frac{45aQ \cos \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\}}{4\pi\sqrt{1 - \frac{Q^2}{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} (a\sqrt{S_{BH}} + Q)^{3/2}} + \frac{15a}{2\pi\sqrt{1 - a\sqrt{S_{BH}} - Q}\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} + \\
 & + \frac{9aQ \cos \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\}}{2\pi\sqrt{1 - \frac{Q^2}{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} (a\sqrt{S_{BH}} + Q)^{3/2}} + \frac{3aQ \cos \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\}}{4\pi\sqrt{1 - \frac{Q^2}{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} (a\sqrt{S_{BH}} + Q)^{3/2}} + \\
 & + \frac{45a \cos \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\}}{4\pi\sqrt{1 - a\sqrt{S_{BH}} - Q}\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} + \frac{9a \cos \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\}}{2\pi\sqrt{1 - a\sqrt{S_{BH}} - Q}\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} + \\
 & \left. + \frac{3a \cos \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\}}{4\pi\sqrt{1 - a\sqrt{S_{BH}} - Q}\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right] + \frac{1}{768} a (a\sqrt{S_{BH}} + Q)^2 \left[60 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) - \right. \\
 & - 60 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) - 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\} - 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\} - \\
 & - \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\} + 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\} + 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\} + \\
 & + \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\} \left. \right] - \frac{1}{288} \pi (a\sqrt{S_{BH}} + Q)^3 \left[60 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) - \right. \\
 & - 60 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) - 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\} - 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\} - \\
 & - \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\frac{Q}{\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q}} \right) \right\} + 45 \sin \left\{ 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\} + 9 \sin \left\{ 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\} + \\
 & \left. + \sin \left\{ 6 \sin^{-1} \left(\sqrt{a\sqrt{S_{BH}} + Q} \right) \right\} \right]. \quad (77)
 \end{aligned}$$

Случай 1.

Если $a_i = 0$ при $i > 1$, то

$$(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) \approx (1 + a_1 t).$$

Случай 2.

Если $a_i = 0$ при $i > 2$, то

$$(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) \approx (1 + a_1 t + a_2 t^2).$$

Случай 3.

Если $a_i = 0$ при $i > 3$, то

$$(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) \approx (1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3).$$

На рис. 7 приведены соотношения между S_0 , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $Q = 0.1$ (рис. 7а), $a_1 = a_2 = 0.05$, $Q = 0.1$ (рис. 7б), $a_1 = a_2 = a_3 = 0.05$, $Q = 0.1$ (рис. 7в), что соответствует Случаям 1, 2 и 3.

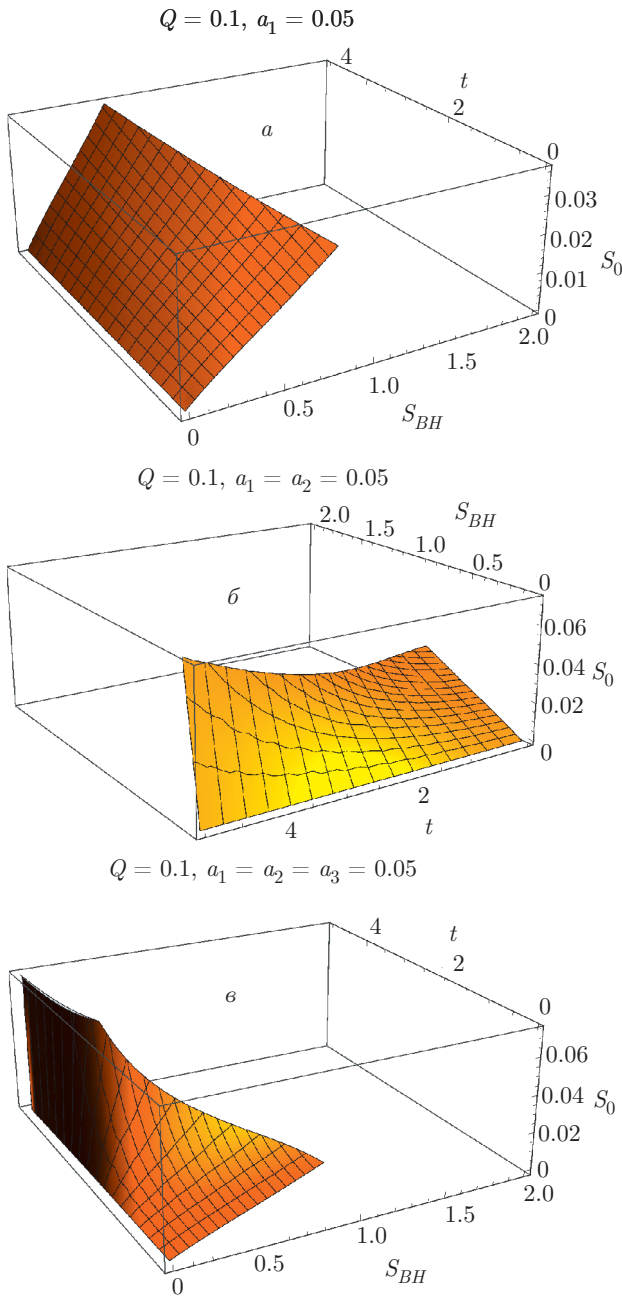


Рис. 7. Соотношения между S_0 , S_{BH} и t при $a_1 = 0.05$, $Q = 0.1$ (а), $a_1 = a_2 = 0.05$, $Q = 0.1$ (б), $a_1 = a_2 = a_3 = 0.05$, $Q = 0.1$ (в)

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В общем случае формирование компактного объекта типа черной дыры обусловлено катастрофическим коллапсом значительного количества материи или излучения, которые не могут выйти за пределы гравитационного притяжения. Как материя, так и излучение, порождающие черную дыру, имеют энтропию, которая сохраняется даже после формирования черной дыры, т. е. удерживается внутри гори-

зонта событий. Сторонний наблюдатель только на основании изменений, сделанных до и после коллапса, не может судить о присутствии какого-либо физического объекта внутри горизонта событий. В связи с этим термодинамический сценарий коллапса, который мог бы предсказать сторонний наблюдатель, не должен непосредственно зависеть от энтропии материи и излучения. Это обусловлено именно тем, что они в принципе ненаблюдаемы. Поскольку мы рассматриваем стационарную черную дыру, мы параметризуем ее посредством некоторых измеряемых термодинамических характеристик, а именно, ее массой, моментом импульса и иногда ее зарядом [57]. Различные наборы этих параметров задают различные сценарии формирования черных дыр. Каждый такой набор соответствует различным возможным состояниям соответствующей черной дыры. Более глубокие исследования термодинамики дают аналогичные результаты. Внутренние микросостояния системы находятся в согласии с наблюдаемыми макросостояниями. Термодинамическая энтропия представляет собой аналог кратности макросостояний, и именно поэтому мы рассматриваем связь между энтропией черной дыры и ее площадью горизонта событий.

В настоящей работе вычислена энтропия черной дыры Шварцшильда в объеме Кристодулу – Ровелли для безмассовых мод. Используемый подход является статистическим. Подынтегральное выражение для внутреннего объема введено как эффективная метрика. Получены энергии мод. Поскольку канонический гамильтониан обращается в нуль, можно использовать метод анализа связей. Ранее точное вычисление гамильтониана не проводилось. Используя свободную энергию Гиббса, сначала мы вычислили энтропию. Результат оказался очень интересным. Масса черной дыры со временем возрастает, однако средняя плотность Вселенной остается очень малой. Поэтому масса черной дыры растет очень медленно. Таким образом, масса черной дыры по прошествии времени t равна

$$M(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n).$$

При этом величина r изменяется от $2M(1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)$ до нуля. Наконец, было получено, что энтропия со временем монотонно возрастает, однако скорость ее роста практически не зависит от времени. Кроме того, мы показали, что энтропия на горизонте событий больше, чем внутри черной дыры, т. е. $S_{BH} > S$. Энтропия внутри черной дыры пропорциональна времени t , т. е. со временем энтропия S внутри черной дыры возрастает.

Благодарности. С. Д. выражает благодарность Правительству штата Западная Бенгалия за присуждение Non-NET Fellowship. Р. Б. выражает благодарность Межуниверситетскому центру астрономии и астрофизики (IUSAA), Пуне, Индия, за приглашение.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства штата Западная Бенгалия, Факультета высшего образования, науки и технологии и биотехнологии (File № ST/P/S & T/16G-19/2017).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть фоновая метрика в области больших времен, записанная в координатах (t, r, θ, ϕ) [12],

$$ds^2 = -e^{b(t,r)} dt^2 + e^{a(t,r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (78)$$

имеет вид метрики Вайдья [13]. Полевые уравнения Эйнштейна для сферически-симметричной геометрии лоренцевой сигнатуры вида (78) можно вывести из полевых уравнений Римана:

$$a' = 8\pi r T_{rr} + \frac{1 - e^a}{r}, \quad (79)$$

$$b' = 8\pi r e^{a-b} T_{tt} - \frac{1 - e^a}{r}, \quad (80)$$

$$\dot{a} = 8\pi r T_{rr} \quad (81)$$

$$1 - e^{-a} + \frac{1}{2} r e^{-a} (a' - b') - \frac{1}{2} r^2 R^{(0)} = 8\pi T_{\theta\theta} = \frac{8\pi T_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta}, \quad (82)$$

где

$$R^{(0)} = -\frac{2}{r^2} (1 - e^{-a}) + e^{-(a+b)/2} \times \left[\partial_t (\dot{a} e^{(a+b)/2}) - \partial_r (b' e^{(b-a)/2}) \right]. \quad (83)$$

Штрихи и точки означают дифференцирование по r и t , соответственно. Тогда из уравнений (82) и (83) следует, что

$$T_{rr} = e^{(a-b)} T_{tt}. \quad (84)$$

Из уравнений (79) и (80) можно получить

$$\frac{1}{2} (a' - b') = \frac{1 - e^a}{r}. \quad (85)$$

Теперь из метрики Вайдья [13] можно определить функцию $m(t, r)$:

$$e^{-a(t,r)} = 1 - \frac{2m(t,r)}{r}. \quad (86)$$

Используя уравнения (79), (81) и (84), получаем

$$a' + \frac{1 - e^a}{r} + \dot{a} e^{(a-b)/2} = 0. \quad (87)$$

Окончательно, из уравнений (86) и (87) получаем

$$e^{(b-a)/2} = -\frac{\dot{m}}{m'}, \quad (88)$$

откуда

$$e^{b(t,r)} = \left(\frac{\dot{m}}{m'} \right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}. \quad (89)$$

Таким образом, мы получили решение Вайдья в виде (78)

$$ds^2 = -\left(\frac{\dot{m}}{m'} \right)^2 \left(1 - \frac{2m(t,r)}{r} \right)^{-1} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(t,r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (90)$$

где $m(t, r)$ — медленно-меняющаяся «массовая функция», причем

$$\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial t},$$

$$m' = \frac{\partial m}{\partial r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. B. P. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016); arXiv:1602.03837v1[gr-qc].
2. S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
3. S. W. Hawking, Phys. Rev. D **14**, 2460 (1976).
4. J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
5. J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
6. R. M. Wald, Living Rev. Relativity **4**, 6 (2001); arXiv:9912119[gr-qc].
7. R. M. Wald, Phys. Rev. Relativity D **48**, 3427 (1993); arXiv:9307038v1[gr-qc].
8. S. Carroll, M. C. Jahnson, and L. Randall, JHEP **0911**, 109 (2009); arXiv:0901.0931[hep-th].
9. I. Bengtsson and E. Jakobson, Mod. Phys. Lett. A **30**, 1550103 (2015); arXiv:1502.01907[gr-qc].

10. B. Zhang, Phys. Rev. D **92**, 081501(R) (2015); arXiv:1510.02182[gr-qc].
11. M. Sharif and W. Javed, J. Exp. Theor. Phys. **114**, 933 (2012).
12. A. N. St. J. Farley and P. D. D'Eath, Gen. Relativ. Gravit. **38**, 425 (2006); arXiv:gr-qc/0510040.
13. P. C. Vaidya, Proc. Indian Acad. Sci. A **33**, 264 (1951).
14. F. Lange, Z. Lenarčič, and A. Rosch, Phys. Rev. B **97**, 165138 (2018); arXiv:1801.07646[cond-mat.str-el].
15. D. Bak, M. Gutperle, and M. Karch, JHEP **0712**, 034 (2007); arXiv:0708.3691[hep-th].
16. B. R. Majhi and S. Samanta, Phys. Lett. B **770**, 314 (2017).
17. M. Christodoulou and C. Rovelli, Phys. Rev. D **91**, 064046 (2015); arXiv:1411.2854[gr-qc].
18. A. Hanson, T. Reggc, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian System*, Academia Nazionale Dei Lincei (1976).
19. G. Fulop, D. M. Gitman, and I. V. Tyutin, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1941 (1999); arXiv:9805040[hep-th].
20. P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University Press, New York (1964).
21. H. Kawai and Y. Yokokura, Phys. Rev. D **93**, 044011 (2016); arXiv:1509.08472[hep-th].
22. B. R. Majhi and S. Samanta, Phys. Lett. B **770**, 314 (2017); arXiv:1703.00142[gr-qc].
23. M. Planck, Ann. Physik **26**, 1 (1908).
24. M. Przanowski and J. Tosiek, Phys. Scr. **84**, 055008 (2011); arXiv:1010.5701[cond-mat.stat-mech].
25. H. Ott, Z. Physik **175**, 70 (1963).
26. H. Arzelies, Nuovo Cim. **35**, 792 (1965).
27. C. Moller, Det. Kong. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Medd. **36**, 1 (1967).
28. C. Moller, *Thermodynamics in the Special and the General Theory of Relativity*, Academic Press (1968).
29. C. Moller, *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Oxford (1972).
30. A. Einstein, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **4**, 411 (1907).
31. K. V. Mosengeil, Ann. Physik **22**, 876 (1907).
32. W. Pauli, *Relativitätstheorie*, Teubner, Berlin (1921).
33. M. V. Laue, *Die Relativitätstheorie, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany* (1921).
34. P. T. Landsberg, Nature **212**, 571 (1966).
35. P. T. Landsberg, Nature **214**, 903 (1967).
36. P. T. Landsberg and K. A. John, Ann. Phys. **56**, 299 (1970).
37. P. T. Landsberg, Europ. J. Phys. **2**, 203 (1981).
38. S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).
39. S. W. Hawking, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, New York (1973).
40. S. W. Hawking, *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press (1994); arXiv:9409195[hep-th].
41. J. Castle, W. Emmenish, R. Henkes, R. Miller, and J. Rayne, *Science by Degrees: Temperature from Zero to Zero*, Westinghouse Search Book Series, Walker and Company, New York (1965).
42. C. Garrod, *Statistical Mechanics and Thermodynamics*, Oxford University Press (1995).
43. R. K. Pathria, Proc. Nat. Inst. Sci. India **21**, 331 (1955).
44. R. K. Pathria, Proc. Nat. Inst. Sci. India **23**, 168 (1957).
45. J. L. Synge, *The Relativistic Gas*, North-Holland, Amsterdam (1957).
46. D. T. Haar and H. Wegeland, Phys. Rep. **1**, 31 (1971).
47. S. R. D. Groot, W. W. V. Leeuwen, and C. G. V. Weert, *Relativistic Kinetic Theory: Principles and Applications*, North-Holland, Amsterdam (1980).
48. D. Cubero, J. C. Pascual, J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hanggi, Phys. Rev. Lett. **99**, 170601 (2007).
49. J. Dunkel, P. H'anggi, and S. Hilbert, Nature Phys. **5**, 741 (2009); arXiv:0902.4651v2[cond-mat.stat-mech].
50. C. Rasinariu, arXiv:0804.3836.
51. A. Montakhab, M. Ghodrat, and M. Barati, Phys. Rev. E **79**, 031124 (2009); arXiv:0809.1517v2[cond-mat.stat-mech].
52. M. Ghodrat and A. Montakhab, Phys. Rev. E **82**, 011110 (2010); arXiv:0908.3753[cond-mat.stat-mech].
53. F. Peano, M. Marti, L. O. Silva, and G. Coppa, Phys. Rev. E **79**, 025701 (2009); arXiv:0902.1762v1[physics.plasm-ph].

54. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford (1980).
55. B. L. Carrera, V. Granados, and G. A. D. Parga, *Rev. Mex. Fs.* **54**, 15 (2008).
56. M. V. Bebronne and P. G. Tinyakov, *JHEP* **0904**, 100 (2009); arXiv:0902.3899[gr-qc].
57. R. Ruffini and J. A. Wheeler, *Phys. Today* **24**, 30 (1971); <https://doi.org/10.1063/1.3022513>.