

# ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТРЕХМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

М. А. Федотова <sup>a\*</sup>, А. С. Петросян <sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 20 декабря 2019 г.,  
после переработки 3 февраля 2020 г.  
Принята к публикации 4 февраля 2020 г.

Исследуются магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска. Развита теория течений на  $f$ -плоскости, на нестандартной  $f$ -плоскости (с учетом горизонтальной компоненты силы Кориолиса), на  $\beta$ -плоскости и на нестандартной  $\beta$ -плоскости. В каждом рассматриваемом случае получены линейные решения систем трехмерных магнитогидродинамических уравнений в приближении Буссинеска, описывающие магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитоостровочные волны и волны магнито-Россби. С использованием дисперсионных уравнений найдены все существующие типы трехволновых взаимодействий. Для случая волн магнито-Россби в приближении  $\beta$ -плоскости показана эквивалентность низкочастотной моды волны магнито-Россби в приближении Буссинеска и в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды. Методом многомасштабных разложений получена система амплитудных уравнений для взаимодействующих волн и инкременты двух типов неустойчивости, имеющих место в системе: распада и усиления. Для каждого из найденных типов трехволновых взаимодействий показано различие в коэффициентах и дифференциальных операторах в системе трехволновых взаимодействий.

DOI: 10.31857/S0044451020080155

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Большая часть объектов, наблюдаемых во Вселенной, находится в состоянии плазмы. Изучением плазменных объектов и сред за пределами земной атмосферы занимается такая наука, как плазменная астрофизика. Она включает в себя область астрофизики (при изучении объектов вне солнечной системы) и область космической физики (при изучении процессов на Солнце). Настоящая работа посвящена изучению волновых процессов в астрофизической плазме.

Отметим целый ряд новых приложений, возникших в последние годы, которые делают актуальной задачу изучения крупномасштабных магнитогидродинамических течений, например в тонком слое

внутри Солнца [1–4], находящемся под конвективной зоной (солнечный тахоклин), при аккреции вещества на нейтронные звезды [5–7], а также в динамике атмосфер нейтронных звезд и магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами несущей звезды [8]. Практически, речь идет о развитии фундаментальных основ магнитной гидродинамики вращающейся плазмы для понимания широкого класса астрофизических объектов.

Одной из ключевых приближенных магнитогидродинамических моделей для описания крупномасштабных процессов во вращающихся течениях астрофизической плазмы, в том числе для перечисленных выше явлений, является модель мелкой воды. Магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Большое количество ра-

\* E-mail: fedotova.maria@gmail.com

бот было посвящено изучению волн в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды [9–27], в особенности волнам магнито-Россби. Такие волны определяют крупномасштабную динамику солнца и звезд [1, 21, 22], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [8], течений в аккреционных дисках нейтронных звезд [5]. Крупномасштабные волны Россби в нейтральной жидкости определяют глобальную динамику планетных атмосфер и являются предметом исследований в геофизической гидродинамике [23–25, 28]. Отметим также первые экспериментальные результаты по обнаружению волн Россби на Солнце [26, 29, 30].

Течения в плазменной астрофизике, так же как и течения в геофизике, как правило, являются стратифицированными. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы важен для анализа множества астрофизических объектов и явлений, например процессов в солнечном тахоклине, устойчиво-стратифицированных областей в недрах звезд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра) [31, 32], осциллирующих вращающихся звезд и Солнца [33–36], астрофизических дисков [37], экзопланет [38]. Кроме того, учет стратификации позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце [1, 22, 29]. Полная система уравнений магнитной гидродинамики вращающейся стратифицированной плазмы в поле силы тяжести представляет собой практически неразрешимую проблему как для аналитического исследования, так и для численного моделирования.

В работе [39] мы получили магнитогидродинамические уравнения мелкой воды во внешнем магнитном поле, которые учитывают стратификацию в модели двух слоев плазмы различной, но постоянной плотности. На основе данной модели были получены линейные волны магнито-Россби, найдены поправки к ним, связанные с различием в плотностях слоев, показано влияние стратификации в данной модели на групповые и фазовые скорости полученных волн, развита слабонелинейная теория волн магнито-Россби и предсказаны параметрические неустойчивости на основе полученных амплитудных уравнений трех взаимодействующих волн. Однако магнитогидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает не только вертикальные компоненты скоростей и магнитного поля, но и учет вертикального изменения их горизонтальных составляющих. Таким образом, не явля-

ясь трехмерной, магнитогидродинамическая система уравнений в приближении мелкой воды не может полностью описывать важный для астрофизики случай устойчиво и непрерывно стратифицированного слоя плазмы.

В настоящей работе сделан существенный шаг вперед в изучении трехмерных волновых процессов в магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы, являющийся принципиальным для реальных течений с непрерывной стратификацией. Как хорошо известно, в геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны [40] вследствие двух восстанавливающих механизмов — вращения и стратификации. В рассматриваемом нами случае магнитных течений волновая картина гораздо богаче вследствие наличия дополнительной восстанавливающей силы, а именно, силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести. Кроме того, учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби [34] обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца.

Мы изучаем устойчиво стратифицированный слой астрофизической плазмы во вращающейся системе координат в приближении Буссинеска с линейным профилем плотности. Приближение Буссинеска повсеместно используется для изучения устойчиво-стратифицированных течений как нейтральной жидкости [41–43], так и астрофизической плазмы [44–46]. В нашей работе мы используем трехмерную магнитогидродинамическую систему в приближении Буссинеска с учетом силы Кориолиса в четырех различных приближениях: на  $f$ -плоскости, на нестандартной  $f$ -плоскости (с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса), на  $\beta$ -плоскости и на нестандартной  $\beta$ -плоскости. Получены законы дисперсии различных типов магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн, и волн магнито-Россби, динамика которых определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести. Для уравнений вращающейся стратифицированной плазмы без учета сферичности (в приближении  $f$ -плоскости и нестандартной  $f$ -плоскости) найдены дисперсионные соотношения для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн и трехмерных магнитострофических волн. При распростране-

нии найденных волн только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора их дисперсионные соотношения описывают два типа магнитных волн, первый из которых является частным случаем магнитных инерционно-гравитационных волн, распространяющихся только по вертикали, а второй — частным случаем магнитострофических волн, распространяющихся только по вертикали.

Кроме того, обнаружено, что аналогичный частный вид имеют и дисперсионные соотношения, описывающие распространение волн с учетом сферичности в первом приближении (на  $\beta$ -плоскости и на нестандартной  $\beta$ -плоскости) вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В частном случае распространения волн в горизонтальной плоскости магнитные инерционно-гравитационные волны превращаются в волны Альфвена, а магнитострофические волны превращаются в магнитогравитационные волны. Кроме того, для волн на нестандартной  $f$ -плоскости показано влияние горизонтальной составляющей силы Кориолиса на существование различных типов трехволновых взаимодействий.

Для уравнений вращающейся стратифицированной плазмы в приближениях  $\beta$ -плоскости и нестандартной  $\beta$ -плоскости найдены дисперсионные соотношения для двумерных волн на горизонтальной плоскости, описывающие магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на  $f$ -плоскости, и различные типы волн магнито-Россби. Кроме того, показано, что в низкочастотном пределе дисперсионное уравнение, описывающее горизонтально распространяющиеся волны в стратифицированных вращающихся течениях в приближении Буссинеска, имеет решение в виде волны магнито-Россби, аналогичное полученному в работах по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на  $\beta$ -плоскости в приближении мелкой воды [13, 39]. Дисперсионные кривые для всех найденных типов волн качественно проанализированы для выявления выполнения условия синхронизма, обеспечивающего наличие трехволновых взаимодействий. Для всех найденных типов трехволновых взаимодействий получены амплитудные уравнения и описаны возможные параметрические неустойчивости и найдены их инкременты.

В разд. 2.1 получены дисперсионные соотношения для линейных магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в приближении Буссинеска на  $f$ -плоскости, а в разд. 2.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, удовлетворяющие условию синхронизма, выведены уравнения

для амплитуд взаимодействующих волн и получены инкременты двух возможных в данной системе неустойчивостей — распада и усиления. В разд. 3.1 получены дисперсионные соотношения для линейных магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в приближении Буссинеска на нестандартной  $f$ -плоскости, а в разд. 3.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и инкременты неустойчивостей.

В разд. 4.1 получены дисперсионные соотношения для горизонтальных магнитогравитационных волн и волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на  $\beta$ -плоскости, а в разд. 4.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и инкременты неустойчивостей. В разд. 5.1 получены дисперсионные соотношения для горизонтальных магнитогравитационных волн и волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на нестандартной  $\beta$ -плоскости, а в разд. 5.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и инкременты неустойчивостей.

## 2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА $f$ -ПЛОСКОСТИ

### 2.1. Магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Будем исследовать плоские течения несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы в рамках трехмерных магнитогидродинамических уравнений в приближении Буссинеска в геометрии устойчиво стратифицированного слоя с линейным профилем плотности:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \nabla p + \frac{\rho \mathbf{g}}{\tilde{\rho}_0} - \frac{1}{4\pi \tilde{\rho}_0} \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} &= (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)_h \rho &= -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} u_z, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость плазмы,  $\mathbf{b}$  — напряженность магнитного поля в плазме,  $f$  — параметр Кориолиса,  $\rho$  — плотность плазмы,  $\bar{\rho}_0$  — плотность при равновесной температуре,  $\bar{\rho}(z) = N^2 z \bar{\rho}_0 / g$  — начальный линейный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию ( $N^2$  — частота Брента–Вяйсяля),  $p$  — давление,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ,  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) h = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y}$ . Первое уравнение системы — уравнение изменения импульса, второе — уравнение переноса магнитного поля, третье — уравнение изменения плотности, четвертое — условие бездивергентности поля скоростей. Введем следующие переобозначения:

$$\rho' = \frac{\rho g}{\bar{\rho}_0}, \quad P = \frac{p}{\bar{\rho}_0}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{4\pi \bar{\rho}_0}}.$$

Исследуем плоские течения несжимающейся вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска на  $f$ -плоскости. В данном приближении параметр Кориолиса имеет вид  $\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$ . Запишем стационарное решение, удовлетворяющее системе (1), в виде

$$\mathbf{q}_0 = (u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}, B_{x0}, B_{y0}, B_{z0}, P_0, \bar{\rho})^T, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}_0 = 0$ ,  $\mathbf{B}_0 = \text{const}$ ,  $\partial P_0 / \partial z = -\bar{\rho}(z)$ . Линеаризованная система (1) на фоне стационарного решения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{f} \times \mathbf{u}_1 + \nabla P_1 + \rho'_1 \hat{\mathbf{z}} + \\ + \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 &= 0, \\ \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + N^2 u_{z1} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ .

Ищем решение системы (3) в следующем виде:

$$\mathbf{q}_1 e^{i\varphi} = (u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, B_{x1}, B_{y1}, B_{z1}, P_1, \rho'_1)^T \times \\ \times \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)], \quad (4)$$

где  $\omega$  — частота возмущения, а  $\mathbf{k}$  — волновой вектор. Условие равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (3) обеспечивает наличие

нетривиальных решений. Дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска на  $f$ -плоскости имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 \left( f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \\ + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left( (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{k}_h = (k_x, k_y)$  — горизонтальная составляющая волнового вектора.

Решениями уравнения (5) являются дисперсионные соотношения, описывающие два типа волн, восстанавливаемыми силами которых являются сила Лоренца, сила Кориолиса и сила плавучести — трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Рассмотрим подробнее первый тип волн. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_{mig3D} = \pm \left\{ \frac{1}{2} \left( f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k^2} \left[ f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

в котором знак «+» соответствует волне, распространяющейся по направлению волнового вектора  $\mathbf{k}$ , а знак «−» — волне, распространяющейся в направлении, противоположном  $\mathbf{k}$ . В отсутствие магнитного поля в системе ( $B_0 = 0$ ) полученный тип волн описывает трехмерные инерционно-гравитационные волны [47], являющиеся точным решением дисперсионного соотношения (5) при  $B_0 = 0$ :

$$\omega_{gr3D} = \pm \sqrt{f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2}}. \quad (7)$$

Отметим, что для инерционно-гравитационных волн в отсутствие магнитного поля (7) выполняется условие перпендикулярности групповой скорости волновому вектору,  $\mathbf{v}_{gr} \cdot \mathbf{k} = 0$  [47], в то время как присутствие магнитного поля это условие нарушает.

При распространении магнитных инерционно-гравитационных волн только вдоль вертикальной компоненты  $k_z$  волнового вектора  $\mathbf{k}$  их дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_{z1} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 + f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}. \quad (8)$$

Знак «+» соответствует волнам, распространяющимся в направлении  $k_z$ , а знак «-» — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном  $k_z$ . Динамика полученных волн определяется уже только силой Кориолиса и силой Лоренца. Отметим, что данный тип волн в отсутствие магнитного поля в системе ( $B_0 = 0$ ) описывается дисперсионным соотношением  $\omega = \pm f_0$ .

При распространении магнитных инерционно-гравитационных волн в плоскости  $(k_x, k_y)$  их дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_A = \pm(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2, \tag{9}$$

и описывает волны Альфвена, динамика которых определяется только силой Лоренца. Знак «+» соответствует волнам Альфвена, распространяющимся в направлении  $\mathbf{k}_h$ , а знак «-» — волнам Альфвена, распространяющимся в направлении, противоположном  $\mathbf{k}_h$ .

Рассмотрим второй тип волн, удовлетворяющих дисперсионному уравнению (5) и не имеющих аналога в гидродинамике нейтральной жидкости. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнито-строфических волн имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr} = \pm \left\{ \frac{1}{2} \left( f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \left[ f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \tag{10}$$

в котором знак «+» соответствует волне, распространяющейся в направлении  $\mathbf{k}$ , а знак «-» — волне, распространяющейся в направлении, противоположном  $\mathbf{k}$ . Данный тип волн исчезает в отсутствие магнитного поля.

При распространении магнито-строфических волн только вдоль вертикальной компоненты  $k_z$  волнового вектора  $\mathbf{k}$  их дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_{z2} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2} - f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}. \tag{11}$$

Знак «+» соответствует волнам, распространяющимся в направлении  $k_z$ , а знак «-» — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном  $k_z$ . Динамика полученных волн определяется уже только силой Кориолиса и силой Лоренца.

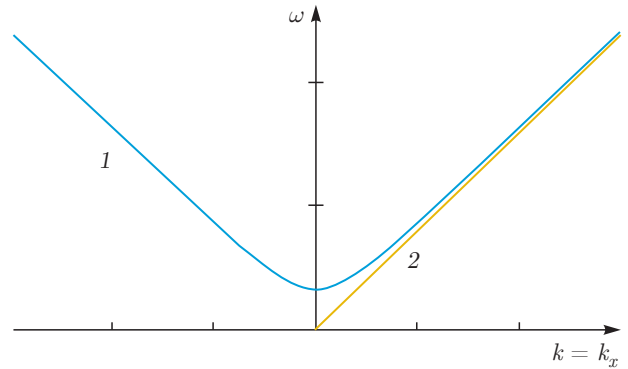


Рис. 1. Дисперсионные кривые: 1 —  $\omega_{mgr}$ ; 2 —  $\omega_A$

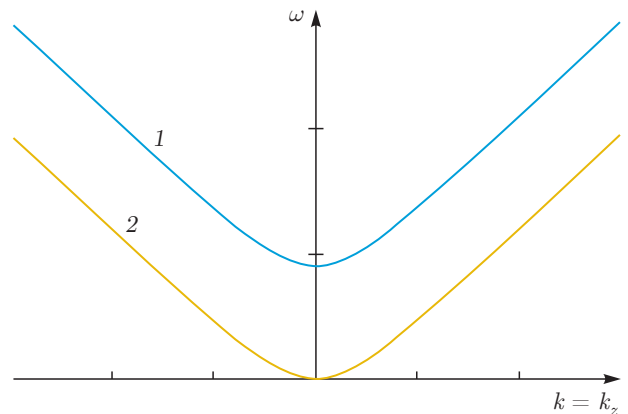


Рис. 2. Дисперсионные кривые: 1 —  $\omega_{z1}$ ; 2 —  $\omega_{z2}$

При распространении магнито-строфических волн в плоскости  $(k_x, k_y)$  их дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_{mgr} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2}, \tag{12}$$

и описывает магнито-гравитационные волны, динамика которых определяется силой Лоренца и силой плавучести. Знак «+» соответствует магнито-гравитационным волнам, распространяющимся в направлении  $\mathbf{k}_h$ , а знак «-» — магнито-гравитационным волнам, распространяющимся в направлении, противоположном  $\mathbf{k}_h$ .

Общий вид дисперсионных кривых для волн на  $f$ -плоскости при  $\omega > 0$  и  $k = k_x, k = k_z$  представлен на рис. 1 и 2.



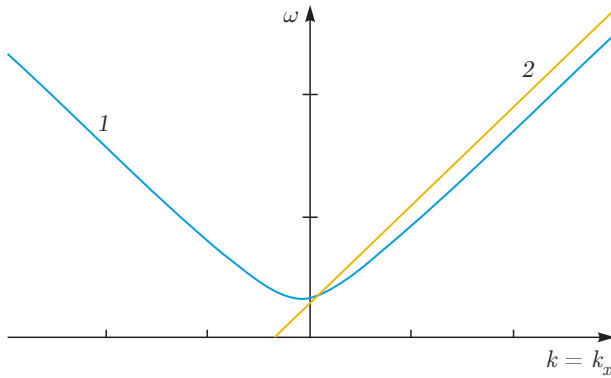


Рис. 3. Условие синхронизма для двух магнитогравитационных волн и одной волны Альфвена: 1 —  $\omega = \omega_{mgr}(k_x)$ ; 2 —  $\omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$

### 2.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Ниже будем исследовать трехволновые взаимодействия волн на  $f$ -плоскости. Чтобы оценить возможность существования межволновых взаимодействий для найденных волн, проанализируем их дисперсионные соотношения. Наличие трехволновых взаимодействий определяется выполнением условия синхронизма [48]

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \quad (13)$$

Проверим, существует ли трехволновое взаимодействие между двумя магнитогравитационными волнами (12) и волной Альфвена (9). Для этого изобразим дисперсионную кривую для магнитогравитационной волны (12) и смещенную относительно начала координат дисперсионную кривую для волны Альфвена (9). Если две дисперсионные кривые пересекаются в некоторой точке  $(\omega(k_3), k_3)$ , то это означает выполнение условия синхронизма (13). На рис. 3 показано пересечение дисперсионных кривых двух магнитогравитационных волн (12) и одной волны Альфвена (9).

Для волн, распространяющихся строго по  $k_z$  на рис. 4 показано пересечение дисперсионных кривых двух волн с частотами  $\omega_{z1}$  (8) и одной волны с частотой  $\omega_{z2}$ , а на рис. 5 — трех волн с частотами  $\omega_{z2}$  (11).

Таким образом, качественный анализ линейных дисперсионных соотношений показывает возможность существования следующих трехволновых взаимодействий: две магнитогравитационные волны с

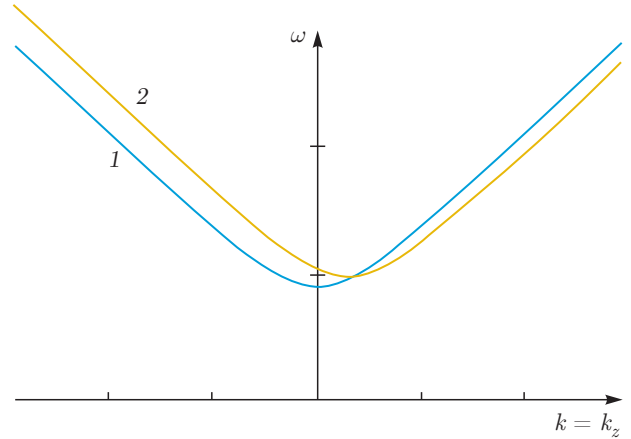


Рис. 4. Условие синхронизма для двух волн с частотами  $\omega_{z1}$  и одной волны с частотой  $\omega_{z2}$ : 1 —  $\omega = \omega_{z1}(k_z)$ ; 2 —  $\omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z1}(k_{zc})$

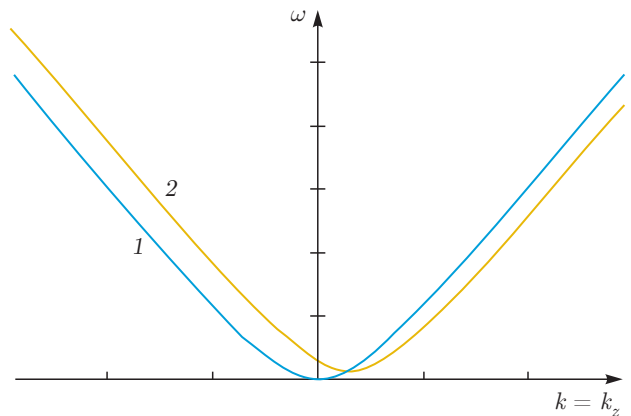


Рис. 5. Условие синхронизма для трех волн с частотами  $\omega_{z2}$ : 1 —  $\omega = \omega_{z2}(k_z)$ ; 2 —  $\omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z2}(k_{zc})$

частотой  $\omega_{mgr}$  (12) взаимодействуют с волной Альфвена с частотой  $\omega_A$  (9); две магнитные волны с частотой  $\omega_{z1}$  (8) взаимодействуют с магнитной волной с частотой  $\omega_{z2}$  (11); три магнитные волны с частотой  $\omega_{z2}$  (11) взаимодействуют между собой.

Для анализа слабонелинейных взаимодействий на  $f$ -плоскости используем асимптотический метод многомасштабных разложений для системы трехмерных магнитогидродинамических уравнений вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска (1). Данный метод широко используется для исследования слабонелинейных взаимодействий, поэтому ограничимся кратким изложением вывода амплитудных уравнений и приведем полученные выражения для коэффициентов взаимодействия трех волн. Существенные различия между полученными амплитудными уравнениями

для взаимодействующих волн содержатся в дифференциальных операторах и коэффициентах, зависящих от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн. Таким образом, краткий вывод уравнений приведен далее только для случая  $f$ -плоскости. Детали применения метода многих масштабов в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы можно найти в работах [12, 13, 15].

Получим амплитудные уравнения для всех выявленных нелинейных трехволновых взаимодействий, используя метод многомасштабных разложений. Подставим в систему (1) на  $f$ -плоскости решение в виде асимптотически сходящегося ряда  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \varepsilon \mathbf{q}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{q}_2 + \dots$  по малому параметру  $\varepsilon$ , характеризующему слабую нелинейность. Здесь  $\mathbf{q}_0$  — стационарное решение (2),  $\mathbf{q}_1$  — решение линейной системы (3), а  $\mathbf{q}_2$  — слагаемое, описывающее эффекты квадратичной нелинейности. Во втором порядке малости по  $\varepsilon$  получим уравнение для  $\mathbf{q}_2$ , содержащее резонансные слагаемые, нарушающие условие сходимости ряда ( $\varepsilon \mathbf{q}_1 \gg \varepsilon^2 \mathbf{q}_2$ ). Исключим эти слагаемые следующим образом. Введем медленно-меняющуюся амплитуду  $\mathbf{q}_1(T_1, X_1, Y_1, Z_1)$  и представим решение в виде суммы трех взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}_1(T_1, X_1, Y_1, Z_1) \times \\ & \times \exp(i\omega T_0 - ik_x X_0 - ik_y Y_0 - ik_z Z_0) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{a}(\mathbf{k}_i) \exp(i\vartheta_i) + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\alpha_1 \equiv \phi$ ,  $\alpha_2 \equiv \psi$ ,  $\alpha_3 \equiv \chi$  — амплитуды трех взаимодействующих волн, а взаимосвязь «медленных» переменных (с индексом «1») и «быстрых» (с индексом «0») определена следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, & \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial Z_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Z_1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим решение в виде суммы трех волн (14) в систему уравнений (1) на  $f$ -плоскости с учетом (15). Во втором порядке малости получим систему с резонансными слагаемыми, от которых мы можем избавиться, используя условие совместности, а именно, ортогональность правой части уравнения ядру линейного оператора, стоящего в левой части. Систему во втором порядке малости по  $\varepsilon$  для квадратичной поправки  $\mathbf{q}_2$  запишем в следующем виде:

$$\mathbf{A} \mathbf{q}_2 = -\text{NL}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) - \text{NL}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1),$$

где  $\mathbf{A}$  — линейный оператор системы (3) на  $f$ -плоскости, зависящий от  $\mathbf{q}_0, T_0, X_0, Y_0, Z_0$ ; оператор  $\text{NL}_1$  из правой части включает в себя производные по медленному переменному, а  $\text{NL}_2$  — по быстрым. Умножая уравнение на собственный вектор  $\mathbf{z}$  оператора  $\mathbf{A}$  и последовательно выписывая слагаемые в правой части пропорциональные  $e^{i\vartheta_1}$ ,  $e^{i\vartheta_2}$  и  $e^{i\vartheta_3}$ , получим систему для трех взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} s_1 \phi &= f_1 \psi^* \chi, \\ s_2 \psi &= f_2 \phi^* \chi, \\ s_3 \chi &= f_3 \phi \psi, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $s_j$  — дифференциальный оператор по медленному переменному,

$$s_j = r_j \frac{\partial}{\partial T_1} + p_j \frac{\partial}{\partial X_1} + q_j \frac{\partial}{\partial Y_1} + w_j \frac{\partial}{\partial Z_1}, \quad (17)$$

а коэффициенты  $f_j$  зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн. Именно в выражениях для операторов  $s_j$  и коэффициентов  $f_j$  состоит различие в амплитудных уравнениях (16) для различных типов взаимодействующих волн.

Выпишем полученные выражения для дифференциальных операторов и коэффициентов взаимодействия волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на  $f$ -плоскости. Коэффициент  $r_j$  при производной по медленному времени имеет вид

$$r_j = \sum_{i=1}^3 z_i a_i + z_4 a_8 + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-1}. \quad (18)$$

Коэффициент  $p_j$  при производной по медленной координате  $X_1$  —

$$\begin{aligned} p_j &= z_1(a_7 + B_{y0} a_5 + B_{z0} a_6) - \\ & - B_{x0} \left( \sum_{i=2}^3 z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициент  $q_j$  при производной по медленной координате  $Y_1$  —

$$\begin{aligned} q_j &= z_2(a_7 + B_{y0} a_5 + B_{z0} a_6) - \\ & - B_{y0} \left( \sum_{i=1}^2 z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Коэффициент  $w_j$  при производной по медленной координате  $Z_1$  —

$$\begin{aligned} w_j &= z_3(a_7 + B_{x0} a_4 + B_{y0} a_5) + \rho_0 z_4 a_3 - \\ & - B_{z0} \left( \sum_{i=1}^2 z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициенты  $f_j$ , зависящие от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн, представим в виде

$$f_j = \sum_{s=1}^7 z_s \varkappa_{sj}. \quad (22)$$

Выражение (22) содержит семь слагаемых вместо восьми, поскольку  $\varkappa_8 = 0$ . Для слагаемых в сумме (22) в случае волн на  $f$ -плоскости имеем

$$\begin{aligned} \varkappa_{1j} = & \left[ -ik_{xn}(a_{1_{lm}}^2 + a_{5_{lm}}^2 + a_{6_{lm}}^2) + \right. \\ & + i\gamma k_{ym}(a_{2_{kl}} a'_{1_{km}} - a_{5_{kl}} a'_{4_{km}}) + \\ & + ik_{yl}(a'_{5_{km}} a_{4_{kl}} - a'_{2_{km}} a_{1_{kl}}) + \\ & + i\gamma k_{zm}(a_{3_{kl}} a'_{1_{km}} - a_{6_{kl}} a'_{4_{km}}) + \\ & \left. + ik_{zl}(a'_{6_{km}} a_{4_{kl}} - a'_{3_{km}} a_{1_{kl}}) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{2j} = & \left[ i\gamma k_{xm}(a_{1_{kl}} a'_{2_{km}} - a_{4_{kl}} a'_{5_{km}}) + \right. \\ & + ik_{xl}(a'_{4_{km}} a_{5_{kl}} - a'_{1_{km}} a_{2_{kl}}) - ik_{yn}(a_{2_{lm}}^2 + a_{4_{lm}}^2 + a_{6_{lm}}^2) + \\ & + i\gamma k_{zm}(a_{3_{kl}} a'_{2_{km}} - a_{6_{kl}} a'_{5_{km}}) + \\ & \left. + ik_{zl}(a'_{6_{km}} a_{5_{kl}} - a'_{3_{km}} a_{2_{kl}}) \right], \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{3j} = & \left[ i\gamma k_{xm}(a_{1_{kl}} a'_{3_{km}} - a_{4_{kl}} a'_{6_{km}}) + \right. \\ & + ik_{xl}(a'_{6_{km}} a_{6_{kl}} - a'_{1_{km}} a_{3_{kl}}) + \\ & + i\gamma k_{ym}(a_{2_{kl}} a'_{3_{km}} - a_{5_{kl}} a'_{6_{km}}) + \\ & + ik_{yl}(a'_{5_{km}} a_{6_{kl}} - a'_{2_{km}} a_{3_{kl}}) - \\ & \left. - ik_{zn}(a_{3_{lm}}^2 + a_{4_{lm}}^2 + a_{5_{lm}}^2) \right], \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{4j} = & \left[ i\gamma a'_{8_{km}}(k_{xm} a_{1_{kl}} + k_{ym} a_{2_{kl}} + k_{zm} a_{3_{kl}}) - \right. \\ & \left. - ia_{8_{kl}}(k_{xl} a'_{1_{km}} + k_{yl} a'_{2_{km}} + k_{zl} a'_{3_{km}}) \right], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{5j} = & \left[ i(\gamma k_{xm} + k_{xl}) \hat{a}_{14_{lm}} + \right. \\ & + i\gamma k_{ym}(a_{2_{kl}} a'_{4_{km}} - a_{5_{kl}} a'_{1_{km}}) + \\ & \left. + ik_{yl}(a'_{5_{km}} a_{1_{kl}} - a'_{2_{km}} a_{4_{kl}}) \right], \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{6j} = & \left[ i\gamma k_{xm}(a_{1_{kl}} a'_{5_{km}} - a_{4_{kl}} a'_{2_{km}}) + \right. \\ & + ik_{xl}(a'_{4_{km}} a_{2_{kl}} - a'_{1_{km}} a_{5_{kl}}) + i(\gamma k_{ym} + k_{yl}) \hat{a}_{25_{lm}} + \\ & + i\gamma k_{zm}(a_{3_{kl}} a'_{5_{km}} - a_{6_{kl}} a'_{2_{km}}) + \\ & \left. + ik_{zl}(a'_{6_{km}} a_{2_{kl}} - a'_{3_{km}} a_{5_{kl}}) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{7j} = & \left[ i\gamma k_{xm}(a_{1_{kl}} a'_{6_{km}} - a_{4_{kl}} a'_{3_{km}}) + \right. \\ & + ik_{xl}(a'_{4_{km}} a_{3_{kl}} - a'_{1_{km}} a_{6_{kl}}) + \\ & + \gamma k_{ym}(a_{2_{kl}} a'_{6_{km}} - a_{5_{kl}} a'_{3_{km}}) + \\ & + ik_{yl}(a'_{5_{km}} a_{3_{kl}} - a'_{2_{km}} a_{6_{kl}}) + \\ & \left. + i(\gamma k_{zm} + k_{zl}) \hat{a}_{36_{lm}} \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

В выражениях (23)–(29) использованы следующие обозначения:

$$a_{i_{lm}}^2 = a_{i_{kl}} a'_{i_{km}}, \quad a_{i,ii_{lm}} = a_{i_{kl}} a'_{ii_{km}} + a_{ii_{kl}} a'_{i_{km}},$$

$$\hat{a}_{i,ii_{lm}} = a_{i_{kl}} a'_{ii_{km}} - a_{ii_{kl}} a'_{i_{km}}.$$

Индексы в коэффициентах  $f_j$  связаны следующим образом: когда индекс  $j = 1$ , то индекс  $l = 3$ , индекс  $m = 2$ , индекс  $n = 1$ ,  $\gamma = 1$ , индекс «'» (штрих)  $\rightarrow$  «\*» (комплексное сопряжение); когда индекс  $j = 2$ , то индекс  $l = 3$ , индекс  $m = 1$ , индекс  $n = 2$ ,  $\gamma = 1$ , индекс «'» (штрих)  $\rightarrow$  «\*» (комплексное сопряжение); когда индекс  $j = 3$ , то индекс  $l = 1$ , индекс  $m = 2$ , индекс  $n = 3$ ,  $\gamma = -1$ , а индекс «'» снимается.

В приближении  $f$ -плоскости при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_h$  взаимодействуют две магнитогравитационные волны и волна Альфвена. В таком случае индекс  $j = 1$  соответствует волне Альфвена, а индексы  $j = 2, j = 3$  — магнитогравитационным волнам. При  $k = k_z$  взаимодействуют либо две волны с частотой  $\omega_{z1}$  и одна волна с частотой  $\omega_{z2}$ , либо три волны с частотами  $\omega_{z2}$ . В первом случае индекс  $j = 1$  соответствует волне с частотой  $\omega_{z2}$ , а индексы  $j = 2, j = 3$  соответствуют волнам с частотой  $\omega_{z1}$ . Во втором случае, очевидно, индексы  $j = 1, j = 2, j = 3$  соответствуют волнам с частотой  $\omega_{z2}$ .

Система уравнений (16) является универсальной системой для описания параметрических неустойчивостей трехволновых взаимодействий и для различных случаев различается только коэффициентами взаимодействия и дифференциальными операторами. Таким образом, можно говорить о реализации двух типов параметрических неустойчивостей [12, 13, 15] в магнитогидродинамических течениях стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на  $f$ -плоскости. Первый — распад волны (магнитогравитационной волны; магнитной волны, распространяющейся вертикально с частотой  $\omega_{z1}$ ; магнитной волны, распространяющейся вертикально с частотой  $\omega_{z2}$ ) с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  на две волны (волна Альфвена и магнитогравитационная волна; магнитная волна, распространяющаяся вертикально с частотой  $\omega_{z2}$  и магнитная волна, распространяющаяся вертикально с частотой  $\omega_{z1}$ ; две магнитные волны, распространяющиеся вертикально с частотами  $\omega_{z2}$ ) с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и инкрементом неустойчивости  $\Gamma = \sqrt{|f_2 f_3| / |r_2 r_3|} |\phi_0| > 0$  реализуется, когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много больше двух других ( $\phi = \phi_0 \gg \psi, \chi$ ).



Второй тип параметрической неустойчивости — усиление волны (волна Альфвена и магнитограви- тационная волна; магнитная волна, распространя- ющаяся вертикально с частотой  $\omega_{z2}$  и магнитная волна, распространяющаяся вертикально с часто- той  $\omega_{z1}$ ; две магнитные волны, распространяющиеся вертикально с частотами  $\omega_{z2}$ ) с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  двумя волнами (волной Альф- вена и магнитогравиационной волной; магнитной волной, распространяющейся вертикально с часто- той  $\omega_{z2}$  и магнитной волной, распространяющейся вертикально с частотой  $\omega_{z1}$ ; двумя магнитными вол- нами, распространяющимися вертикально с часто- тами  $\omega_{z2}$ ) с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частота- ми  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и коэффициентом усиления  $\Gamma = (|f_1|/|r_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$  реализуется, когда в началь- ный момент времени амплитуда одной из волн много меньше двух других ( $\phi \ll \psi = \psi_0, \chi = \chi_0$ ).

Таким образом, магнитогидродинамические те- чения вращающейся плазмы в приближении Бусси- неска в устойчиво стратифицированном слое с ли- нейным профилем плотности на  $f$ -плоскости вклю- чают трехмерные магнитные инерционно-гравита- ционные волны и трехмерные магнитострофиче- ские волны. Показано, что в частном случае го- ризонтальных течений магнитные инерционно-грав- итационные волны превращаются в волны Альф- вена, а магнитострофические волны превращают- ся в магнитогравиационные волны. Для них ис- следовано трехволновое взаимодействие двух маг- нитогравиационных волн и одной волны Альфвена. Также найден частный вид магнитных инерционно- гравитационных и магнитострофических волн в слу- чае распространения только по вертикали, для ко- торых исследованы два типа трехволновых взаимо- действий.

### 3. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА НЕСТАНДАРТНОЙ $f$ -ПЛОСКОСТИ

#### 3.1. Магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Будем исследовать плоские течения в рамках линеаризованных уравнений (3) в приближении нестандартной  $f$ -плоскости. В изучении вращаю- щихся течений на  $f$ -плоскости горизонтальной ком-

понентой вектора силы Кориолиса обычно прене- брегают, однако рост интереса к ее роли в дина- мике волн на  $f$ -плоскости возрос в последнее вре- мя в силу того, что она играет ключевую роль в экваториальных течениях, поскольку вертикальная компонента силы Кориолиса на экваторе исчезает [42]. Если в приближении  $f$ -плоскости предпола- гается, что вектор  $\mathbf{f}$  направлен строго по вертикали ( $\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$ ), то в приближении нестандартной  $f$ -плоскости будем полагать небольшое отклонение вектора  $\mathbf{f}$  от вертикали. Таким образом, в параметре Кориолиса появляется горизонтальная составля- ющая:  $\mathbf{f} = (0, f_H, f_V)$ , где  $f_V = 2\Omega \sin \theta$ ,  $f_H = 2\Omega \cos \theta$ ,  $\Omega$  — угловая скорость вращения, а  $\theta$  — широта. Ста- ционарное решение (2) удовлетворяет системе (1) в приближении нестандартной  $f$ -плоскости. Решени- ем линеаризованной системы (3) на нестандартной  $f$ -плоскости будет дисперсионное соотношение

$$\omega^4 - \omega^2 \left( \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left( (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0, \quad (30)$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,  $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Решениями уравнения (30) являются дисперси- онные соотношения, которые аналогичны получен- ным в разд. 2 уравнениям (6), (10) и описывают два типа волн: трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для трехмерных маг- нитных инерционно-гравитационных волн в прибли- жении Буссинеска на нестандартной  $f$ -плоскости имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{migr3D}} = & \\ = \pm & \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2k^2} \left[ (f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - \right. \\ & \left. \left. - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (31) \end{aligned}$$

При распространении магнитных инерцион- но-гравитационных волн только вдоль  $z$ -компо- ненты волнового вектора ( $k = k_z$ ) дисперсионное соотношение (31) описывает магнитные волны, аналогичные волнам на  $f$ -плоскости (8):

$$\omega_{z1} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 + f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}. \quad (32)$$

При распространении магнитных инерционно-гравитационных волн в плоскости  $(k_x, k_y)$  дисперсионное соотношение (31) принимает вид

$$\omega_{mig'} = \pm \left\{ \frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + \left[ \frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (33)$$

и описывает двумерные магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной  $f$ -плоскости. В отсутствие магнитного поля дисперсионное соотношение (33) переходит в

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2}$$

и описывает двумерные инерционно-гравитационные волны.

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн на нестандартной  $f$ -плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr} = \\ = \pm \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2k^2} \left[ (f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (34)$$

При распространении магнитострофических волн только вдоль  $z$ -компоненты волнового вектора ( $k = k_z$ ) дисперсионное соотношение (34) описывает магнитные волны, аналогичные волнам на  $f$ -плоскости (11):

$$\omega_{z2} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 - f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}. \quad (35)$$

При распространении магнитострофических волн в плоскости  $(k_x, k_y)$  дисперсионное соотношение (34) принимает вид

$$\omega_{mstr'} = \pm \left\{ \frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - \left[ \frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (36)$$

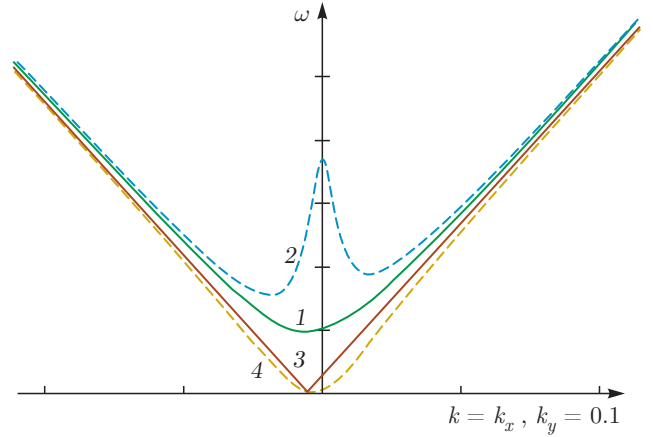


Рис. 6. Дисперсионные кривые: 1 и 3 — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой  $\omega_{mig'}(k_x)$  и магнитострофическая волна с частотой  $\omega_{mstr'}(k_x)$  при  $f_H < 1$ ; 2 и 4 — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой  $\omega_{mig'}(k_x)$  и магнитострофическая волна с частотой  $\omega_{mstr'}(k_x)$  при  $f_H \gg 1$

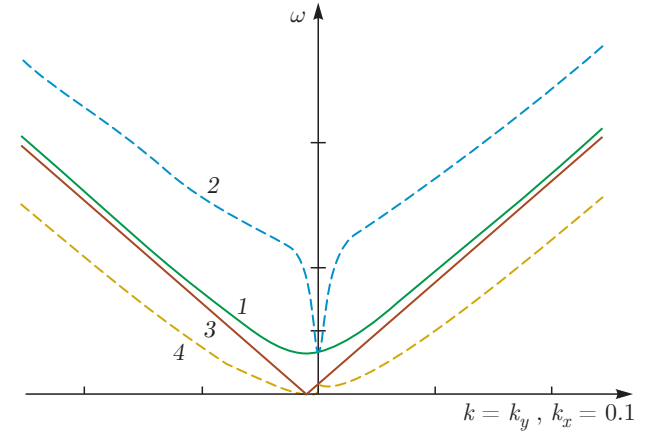


Рис. 7. Дисперсионные кривые: 1 и 3 — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой  $\omega_{mig'}(k_y)$  и магнитострофическая волна с частотой  $\omega_{mstr'}(k_y)$  при  $f_H < 1$ ; 2 и 4 — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой  $\omega_{mig'}(k_y)$  и магнитострофическая волна с частотой  $\omega_{mstr'}(k_y)$  при  $f_H \gg 1$

и описывает двумерные магнитострофические волны на нестандартной  $f$ -плоскости, не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости.

Дисперсионные кривые имеют различный вид в зависимости от порядка величины горизонтальной составляющей  $f_H$  параметра Кориолиса. Общий вид дисперсионных кривых при  $\omega(k_x) > 0$ ,  $k_y = \text{const}$  и  $k_x = \text{const}$  представлены на рис. 6 и 7.

Найденные различия в дисперсионных кривых, связанные с горизонтальной компонентой  $f_H$  в

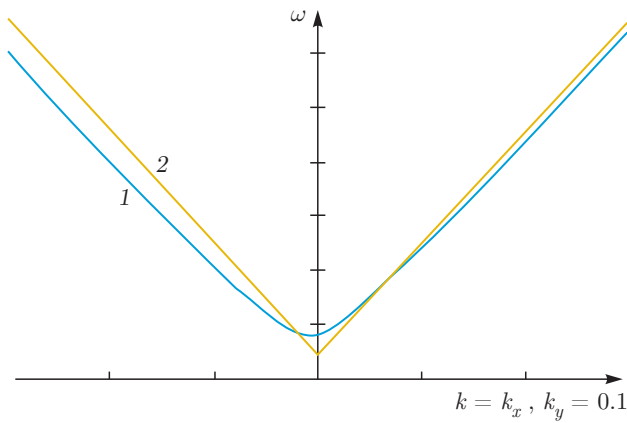


Рис. 8. Условие синхронизма для двух магнитострофических волн с частотами  $\omega_{mstr'}$  и одной магнитно-гравитационной волны с частотой  $\omega_{mig'}$  при  $f_H < 1$ : 1 —  $\omega = \omega_{mig'(k_x)}$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mstr'(k_x - k_{xc})} + \omega_{mstr'(k_{xc})}$

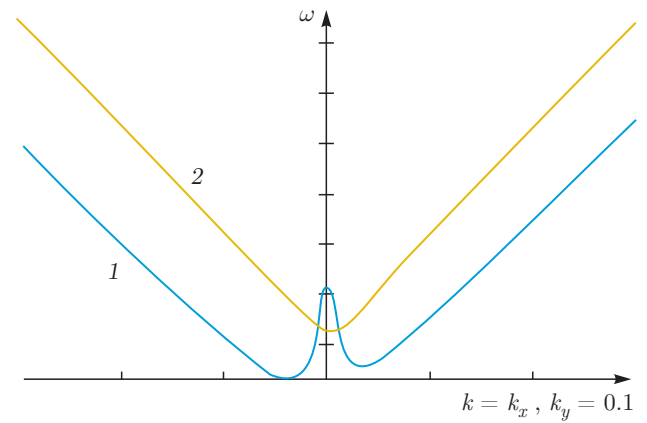


Рис. 9. Условие синхронизма для двух магнитных инерционно-гравитационных волн с частотами  $\omega_{mig'}$  и одной магнитострофической волны с частотой  $\omega_{mstr'}$  при  $f_H \gg 1$ : 1 —  $\omega = \omega_{mig'(k_x)}$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mstr'(k_x - k_{xc})} + \omega_{mig'(k_{xc})}$

нестандартном приближении  $f$ -плоскости, существенно влияют на трехволновые взаимодействия, что будет показано ниже.

### 3.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной  $f$ -плоскости. Так же как в разд. 2, проверим выполнение условия синхронизма для полученных в разд. 3.1 волн. Поскольку для нестандартной  $f$ -плоскости в частном случае распространения магнитных волн вдоль  $k_z$  получены решения, аналогичные решениям на стандартной  $f$ -плоскости, для них будут существовать аналогичные трехволновые взаимодействия, а именно, взаимодействие двух магнитных волн с частотой  $\omega_{z1}$  (8) и магнитной волны с частотой  $\omega_{z2}$  (11), взаимодействие трех магнитных волн с частотой  $\omega_{z2}$  (11).

Перейдем далее к анализу дисперсионных кривых для волн в плоскости  $(k_x, k_y)$ . При малой горизонтальной составляющей  $f_H$  силы Кориолиса существует один тип трехволновых взаимодействий как при  $k_y = \text{const}$ , так и при  $k_x = \text{const}$  — возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой  $\omega_{mig'}$  (33) при взаимодействии двух магнитострофических волн с частотой  $\omega_{mstr'}$  (36). Существование данного типа трехволновых взаимодей-

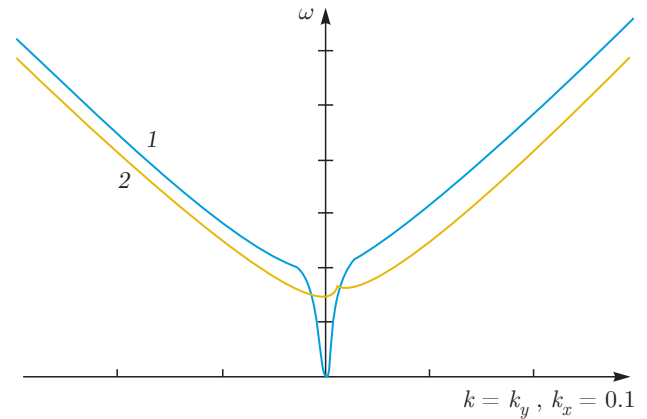


Рис. 10. Условие синхронизма для двух магнитных инерционно-гравитационных волн с частотами  $\omega_{mig'}$  и одной магнитострофической волны с частотой  $\omega_{mstr'}$  при  $f_H \gg 1$ : 1 —  $\omega = \omega_{mig'(k_y)}$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mstr'(k_y - k_{yc})} + \omega_{mig'(k_{yc})}$

ствий отображено на рис. 8 при  $k = k_x$  (аналогичный вид будет иметь условие синхронизма при  $k = k_y$ ).

Однако при достаточно большом значении  $f_H$  вид дисперсионных кривых сильно изменяется, что допускает возникновение еще одного типа трехволновых взаимодействий помимо найденного выше — возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой  $\omega_{mig'}$  при взаимодействии магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой  $\omega_{mig'}$  и магнитострофической волны с частотой  $\omega_{mstr'}$ . Выполнение условия синхронизма для этих трех взаимодействующих волн показано на рис. 9 для  $k = k_x$  и на рис. 10 для  $k = k_y$ .

Используя метод многомасштабных разложений, описанный в разд. 2, получим систему уравнений для амплитуд взаимодействующих волн на нестандартной  $f$ -плоскости:

$$\begin{aligned} s'_1\phi &= f'_1\psi^*\chi, \\ s'_2\psi &= f'_2\phi^*\chi, \\ s'_3\chi &= f'_3\phi\psi. \end{aligned} \tag{37}$$

Отметим, что коэффициенты  $f'_j$  и дифференциальные операторы  $s'_j$  в полученной системе имеют такой же вид, как и коэффициенты  $f_j$  (22) и операторы  $s_j$  (17) на стандартной  $f$ -плоскости и отличаются только собственным вектором  $\mathbf{z}$  линейного оператора системы (3).

Таким образом, в нестандартном приближении  $f$ -плоскости возникает магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой  $\omega_{mig'}$  при взаимодействии двух магнитострофических волн с частотами  $\omega_{mstr'}$ . Кроме того, может возникать магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой  $\omega_{mig'}$  при взаимодействии магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой  $\omega_{mig'}$  и магнитострофической волны с частотой  $\omega_{mstr'}$  при большом значении  $k_H$ . В первом случае индекс  $j = 1$  соответствует магнитной инерционно-гравитационной волне с частотой  $\omega_{mig'}$ , а индексы  $j = 2, j = 3$  соответствуют магнитострофическим волнам с частотами  $\omega_{mstr'}$ . Во втором случае индексы  $j = 1, j = 2$  соответствуют магнитным инерционно-гравитационным волнам с частотами  $\omega_{mig'}$ , а индекс  $j = 3$  соответствует магнитострофической волне с частотой  $\omega_{mstr'}$ .

В силу универсальности системы уравнений (16) в ней реализуются два типа параметрических неустойчивостей — распад магнитной инерционно-гравитационной волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  на две волны (либо магнитострофические, либо магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую) с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и инкрементом неустойчивости  $\Gamma = \sqrt{|f'_2 f'_3|/|r'_2 r'_3|}|\phi_0| > 0$ ; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  двумя волнами (либо магнитострофическими либо магнитной инерционно-гравитационной и магнитострофической) с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и коэффициентом усиления  $\Gamma = (|f'_1|/|r'_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$ .

Таким образом, в приближении нестандартной  $f$ -плоскости показано влияние горизонтальной компоненты вектора силы Кориолиса на общий вид

дисперсионных кривых для магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн. Кроме того, помимо описанного трехволнового взаимодействия двух магнитострофических волн и одной магнитной инерционно-гравитационной волны при достаточно большой горизонтальной составляющей силы Кориолиса обнаружено и исследовано трехволновое взаимодействие двух магнитных инерционно-гравитационных волн и одной магнитострофической волны.

#### 4. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА $\beta$ -ПЛОСКОСТИ

##### 4.1. Волны магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Исследуем магнитогидродинамические течения стратифицированной вращающейся плазмы с учетом эффектов сферичности в приближении  $\beta$ -плоскости. Считая, что параметр Кориолиса  $f$  слабо меняется при малых изменениях широты, разложим его в ряд:

$$\begin{aligned} f &= 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega(\theta - \vartheta_0) \cos \theta_0 \approx \\ &\approx f_0 + \beta y, \end{aligned} \tag{38}$$

где  $f_0 = 2\Omega \sin \vartheta_0$  ( $f_0 \equiv f_V$ ),  $\beta = \partial f / \partial y$ . Приближение  $\beta$ -плоскости, в отличие от приближения  $f$ -плоскости, сохраняет первый порядок малости в разложении параметра Кориолиса.

Система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы с линейным профилем плотности в приближении Буссинеска на  $\beta$ -плоскости имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial t} + \frac{\partial[(\mathbf{u} \cdot \nabla)u_x]}{\partial y} - f_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \beta u_y + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + B_z \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_y}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_y + f_0 u_x + \frac{\partial P}{\partial y} + \\
 & + B_z \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + B_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z \frac{\partial P}{\partial z} + \rho' + B_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \\
 & + B_y \left( \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial B_x}{\partial t} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_x = 0, \\
 & \frac{\partial B_y}{\partial t} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_y = 0, \\
 & \frac{\partial B_z}{\partial t} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_z = 0, \\
 & \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)_h \rho' + N^2 u_z = 0, \\
 & \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Стационарное решение, удовлетворяющее системе (39), имеет вид (2).

Запишем линеаризованную систему (39) на фоне стационарного решения (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y \partial t} - f_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial y} - \beta u_{y1} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left( B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - \right. \\
 & \left. - B_{y0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial u_{y1}}{\partial t} + f_0 u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial y} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - \\
 & - B_{z0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} + \rho'_1 + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - \\
 & - B_{x0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial B_{x1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{x1} = 0, \\
 & \frac{\partial B_{y1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{y1} = 0, \\
 & \frac{\partial B_{z1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{z1} = 0, \\
 & \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0, \\
 & \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (40) получаем следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме на  $\beta$ -плоскости в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned}
 & k^2 \omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 [f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2] - \\
 & - \beta k_x \omega [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \\
 & - N^2 k_h^2] = 0, \tag{41}
 \end{aligned}$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,  $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Рассмотрим распространение волн в плоскости  $(k_x, k_y)$  при условии  $k_z \ll k$ . Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 - N^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}_h)^2) \times \\
 & \times \left( \omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}_h)^2 \right) = 0 \tag{42}
 \end{aligned}$$

и описывает три типа волн. Первый тип волн — магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на  $f$ -плоскости (12). Второй тип волн — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mr1} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}, \tag{43}$$

которое в случае отсутствия магнитного поля переходит в дисперсионное соотношение для стандартной гидродинамической волны Россби:

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_h^2}. \tag{44}$$

Третий тип волн — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mr2} = -\frac{\beta k_x}{2k^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}, \tag{45}$$

которое обращается в нуль в отсутствие магнитного поля в системе.

Динамика волн магнито-Россби определяется силой Кориолиса и силой Лоренца. Оба типа волн магнито-Россби, (43) и (45), при распространении строго по  $k_y$  вырождаются в альфвеновские волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{0y} k_y, \tag{46}$$

аналогичные волнам Альфвена на  $f$ -плоскости при  $k = k_y$  (9).

Отметим, что в низкочастотном пределе уравнение (41) имеет решение в виде волны магнито-Россби, динамику которой определяют не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести:

$$\omega \approx \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2)}{\beta k_x ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2)}. \tag{47}$$



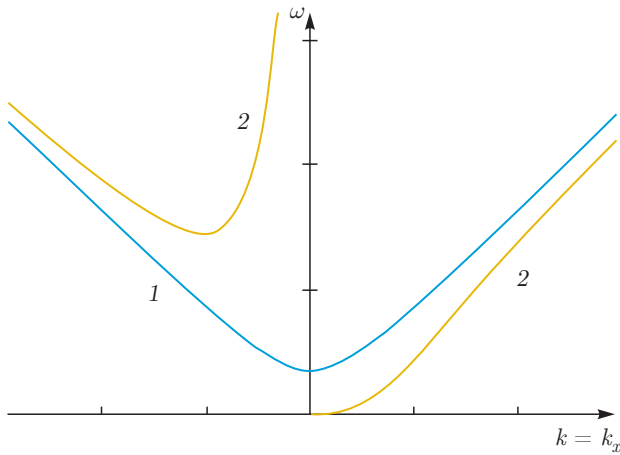


Рис. 11. Дисперсионные кривые: 1 — магнитогравитационная мода; 2 — мода магнито-Россби

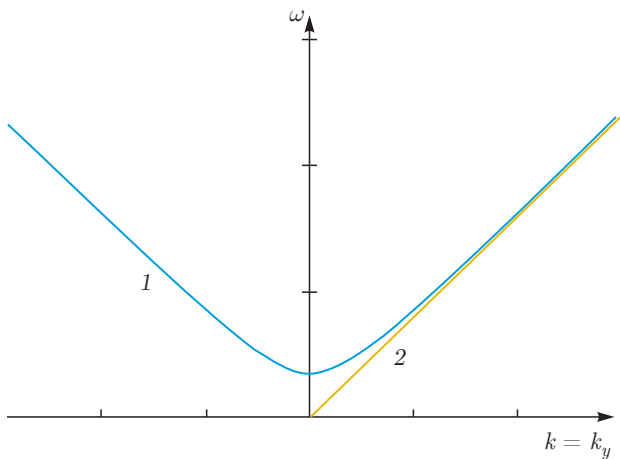


Рис. 12. Дисперсионные кривые: 1 — магнитогравитационная мода; 2 — мода Альфвена

Дисперсионное соотношение (47) переходит в дисперсионное соотношение для волны магнито-Россби, аналогичное полученному в работах по исследованию магнитогиродинамических течений вращающейся плазмы на  $\beta$ -плоскости в приближении мелкой воды [13, 39] при  $k_z \ll k$ :

$$\omega = \frac{k_h^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}{\beta k_x}. \tag{48}$$

При распространении волн строго по  $k_z$  мы получаем два типа магнитных волн, аналогичных волнам на  $f$ -плоскости (8), (11).

Общий вид дисперсионных кривых для случая  $\omega > 0$  для  $k = k_x$  представлен на рис. 11, а для  $k = k_y$  на рис. 12.

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (41) к случаю гидродинамики нейтральной вра-

щающейся жидкости. В отсутствие магнитного поля ( $B_0 = 0$ ) уравнение (41) принимает вид

$$\omega^3 + \beta \frac{k_x}{k^2} \omega^2 - \omega \left( f_0^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) + N^2 \beta \frac{k_x}{k^2} = 0. \tag{49}$$

Заметим, что для решения в низкочастотном пределе можно получить выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска

$$\omega = \frac{N^2 \beta k_x}{f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2}, \tag{50}$$

которое при условии  $k_z \ll k$  переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби (44). Динамика трехмерной волны Россби (50) определяется не только силой Кориолиса, но и силой плавучести.

Для двумерных течений в плоскости  $(k_x, k_y)$  при условии  $k_z \ll k$  происходит переход к волнам во вращающейся нейтральной жидкости. Дисперсионное соотношение магнитогравитационных волн (12) переходит в соотношение для гравитационных волн с частотой  $\omega = \pm \sqrt{-N^2}$ , а дисперсионное соотношение для волн магнито-Россби (43), как было сказано выше, переходит в дисперсионное соотношение для гидродинамической волны Россби (44).

#### 4.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Ниже будем исследовать слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на  $\beta$ -плоскости. Качественный анализ дисперсионных соотношений для волн вдоль  $k_x$  показывает наличие следующих трехволновых взаимодействий: три волны магнито-Россби с частотами  $\omega_{mr1}$  взаимодействуют между собой (рис. 13), две магнитогравитационные волны с частотами (12) взаимодействуют с волной магнито-Россби с частотой (43) (рис. 14); две волны магнито-Россби с частотами (43) взаимодействуют с магнитогравитационной волной с частотой (12) (рис. 15).

Для волн вдоль  $k_y$ , аналогично волнам на  $f$ -плоскости, реализуется взаимодействие двух магнитогравитационных волн с частотами (12) и одной волны Альфвена с частотой (46). Для волн вдоль  $k_z$  существуют два типа взаимодействий: три магнитные волны с частотами  $\omega_{z2}$  (11), взаимодействующие между собой; две магнитные волны с

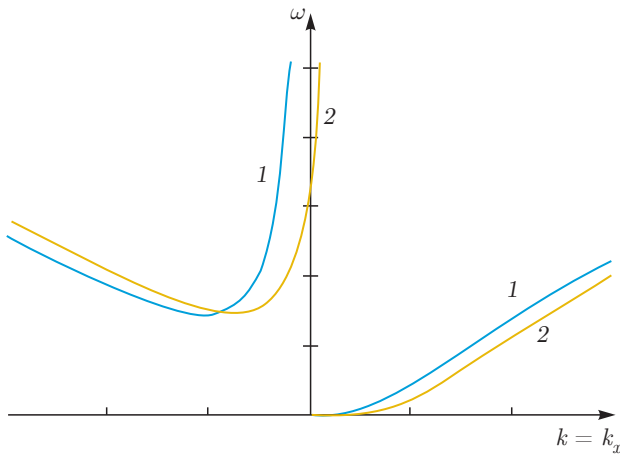


Рис. 13. Условие синхронизма для трех волн магнито-Росси: 1 —  $\omega = \omega_{mr1}(k_x)$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mr1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mr1}(k_{xc})$

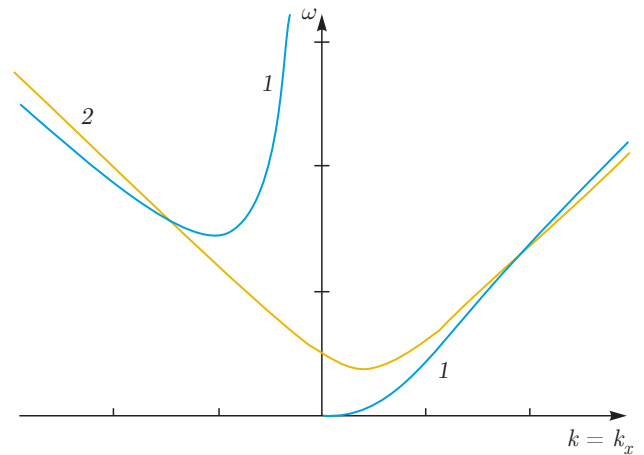


Рис. 15. Условие синхронизма для двух волн магнито-Росси и одной магнитогравиационной волны: 1 —  $\omega = \omega_{mr1}(k_x)$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mg}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mr1}(k_{xc})$

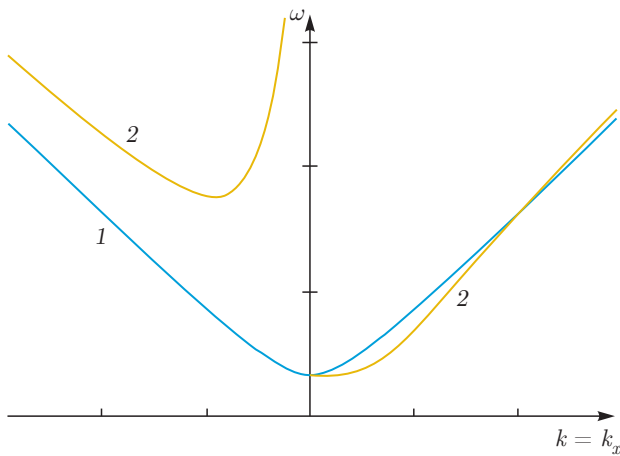


Рис. 14. Условие синхронизма для двух магнитогравиационных волн и одной волны магнито-Росси: 1 —  $\omega = \omega_{mgr}(k_x)$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mr1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$

частотами  $\omega_{z1}$  (8), взаимодействующие с магнитной волной с частотой  $\omega_{z2}$  (11).

Методом многомасштабных разложений получаем систему уравнений для амплитуды трех взаимодействующих волн на  $\beta$ -плоскости, удовлетворяющих условию синхронизма (13):

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1\phi &= \tilde{f}_1\psi^*\chi, \\ \tilde{s}_2\psi &= \tilde{f}_2\phi^*\chi, \\ \tilde{s}_3\chi &= \tilde{f}_3\phi\psi, \end{aligned} \tag{51}$$

где  $\tilde{s}_j$  — дифференциальный оператор по медленным переменным, аналогичный оператору  $s_j$  (17), а коэффициенты  $\tilde{f}_j$ , как и  $f_j$  (22), зависят только от начальных условий и параметров взаимодействующих волн.

Коэффициент  $\tilde{r}_j$  при производной по медленному времени  $T_1$  имеет вид

$$\tilde{r}_j = -iz_1k_{yj}a_1 + \sum_{i=2}^3 z_ia_i + z_4a_8 + \sum_{i=5}^7 z_ia_{i-1}. \tag{52}$$

Коэффициент  $\tilde{p}_j$  при производной по медленной координате  $X_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j &= -iz_1k_{yj}(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) - \\ &- B_{x0} \left( \sum_{i=2}^3 z_ia_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_ia_{i-4} \right) + z_8a_1. \end{aligned} \tag{53}$$

Коэффициент  $\tilde{q}_j$  при производной по медленной координате  $Y_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j &= z_1 [i\omega a_1 - f_0a_2 - ik_{xj}(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) + \\ &+ (2ik_{yj}B_{y0} + ik_{zj}B_{z0})a_4] + z_2(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{z0}a_6) - \\ &- B_{y0} \left( z_3a_6 + \sum_{i=5}^7 z_ia_{i-4} \right) + z_8a_2. \end{aligned} \tag{54}$$

Коэффициент  $\tilde{w}_j$  при производной по медленной координате  $Z_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}_j &= z_3(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{y0}a_5) + \rho_0z_4a_3 - \\ &- B_{z0} \left( ik_{yj}z_1a_4 + z_2a_5 + \sum_{i=5}^7 z_ia_{i-4} \right) + z_8a_3. \end{aligned} \tag{55}$$

Коэффициенты  $\tilde{f}_j$  аналогично коэффициентам  $f_j$  (22) представимы в виде суммы:

$$\tilde{f}_j = \sum_{s=1}^7 z_s \tilde{\mathcal{H}}_{sj}. \tag{56}$$

Первое слагаемое в сумме (56) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{1j} = & \gamma(k_{yl}k_{xm} + k_{ym}k_{xl})(a_{1lm}^2 + a_{5lm}^2 + a_{6lm}^2) + \\ & + \gamma k_{ym}k_{yl}(a_{21lm} - a_{54lm}) + \\ & + \gamma k_{ym}k_{zl}(a'_{3km} a_{1k_l} - a'_{6km} a_{4k_l}) + \\ & + \gamma k_{yl}k_{zm}(a_{3k_l} a'_{1km} - a_{6k_l} a'_{4km}). \end{aligned} \quad (57)$$

Остальные слагаемые в сумме (56) не отличаются от слагаемых в сумме (22).

На  $\beta$ -плоскости при  $k = k_y$  взаимодействуют волна Альфвена (46) и две магнитогравитационные волны (12). При этом индекс  $j = 1$  соответствует волне Альфвена (46), а индексы  $j = 2, j = 3$  соответствуют магнитогравитационным волнам (12).

Для волн, распространяющихся вдоль  $k_x$ , существуют три типа трехволновых взаимодействий. Первый тип определяет возникновение магнитогравитационной волны (12) при взаимодействии волны магнито-Россби (43) и магнитогравитационной волны (12). В этом случае индекс  $j = 1$  соответствует волне магнито-Россби (43), а индексы  $j = 2, j = 3$  соответствуют магнитогравитационным волнам (12). Второй тип описывает возникновение волны магнито-Россби (43) при взаимодействии магнитогравитационной волны (12) и волны магнито-Россби (43). В этом случае индекс  $j = 1$  соответствует магнитогравитационной волне (12), а индексы  $j = 2, j = 3$  соответствуют волнам магнито-Россби (43). Третий тип определяет взаимодействие трех волн магнито-Россби (43). В этом случае, очевидно, индексы  $j = 1, j = 2, j = 3$  соответствуют волнам магнито-Россби (43).

Для волн, распространяющихся вдоль  $k_z$ , при взаимодействии трех магнитных волн  $\omega_{z2}$  (11) индексы  $j = 1, j = 2, j = 3$  соответствуют волнам (11); при взаимодействии двух магнитных волн с частотой  $\omega_{z1}$  и одной магнитной волны с частотой  $\omega_{z2}$  индекс  $j = 1$  соответствует магнитной волне (11), а индексы  $j = 2, j = 3$  соответствуют волнам (8).

В силу универсальности системы уравнений (16) можно говорить о реализации двух типов параметрических неустойчивостей: распад волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  на две волны с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и инкрементом неустойчивости  $\Gamma = \sqrt{|\tilde{f}_2 \tilde{f}_3| / |\tilde{r}_2 \tilde{r}_3| |\phi_0|} > 0$ ; усиление волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  двумя волнами с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и коэффициентом усиления  $\Gamma = (|\tilde{f}_1| / |\tilde{r}_1|) |\psi_0 \chi_0| > 0$ .

Таким образом, магнитогидродинамические течения устойчиво стратифицированного слоя враща-

ющейся плазмы с линейным профилем плотности в приближении Буссинеска на  $\beta$ -плоскости в низкочастотном пределе описывают волны магнито-Россби, восстанавливаемыми силами которых являются не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавленности. В приближении горизонтальных течений данный тип волн описывает волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением в виде, аналогичном полученному в работах [13, 39] по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на  $\beta$ -плоскости в приближении мелкой воды. Кроме того, горизонтальные магнитогидродинамические течения описывают два типа волн магнито-Россби и магнитогравитационные волны. Для найденных типов волн описаны следующие трехволновые взаимодействия: три волны магнито-Россби, две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби, две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна.

## 5. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА НЕСТАНДАРТНОЙ $\beta$ -ПЛОСКОСТИ

### 5.1. Волны магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Исследуем сферические течения в нестандартном приближении  $\beta$ -плоскости [49]. По аналогии с нестандартным приближением  $f$ -плоскости предполагается наличие горизонтальной компоненты, которая, как и вертикальная компонента, раскладывается в ряд. Таким образом, в приближении нестандартной  $\beta$ -плоскости параметр Кориолиса выглядит следующим образом:

$$\mathbf{f} = (0, f_H + \gamma y, f_V + \beta y), \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} f_V = 2\Omega \sin \theta, \quad \beta = \frac{2\Omega \cos \theta}{R}, \quad f_H = 2\Omega \cos \theta, \\ \gamma = -\frac{2\Omega \sin \theta}{R}. \end{aligned}$$

Разложение горизонтальной составляющей компоненты силы Кориолиса добавляет слагаемые  $f_H \partial_y u_z + \gamma u_z$  в уравнение для  $x$ -компоненты импульса и слагаемое  $-f_H u_x$  в уравнение для  $z$ -компоненты импульса в системе магнитогидродинамических уравнений на  $\beta$ -плоскости (39).

Стационарное решение (2) удовлетворяет полученной системе. Линеаризованная система на нестандартной  $\beta$ -плоскости имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y \partial t} - f_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial y} - \beta u_{y1} + f_H \frac{\partial u_{z1}}{\partial y} + \\ & + \gamma u_{z1} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - \right. \\ & \quad \left. - B_{y0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} \right) = 0, \\ & \frac{\partial u_{y1}}{\partial t} + f_0 u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial y} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - \\ & \quad - B_{z0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} = 0, \\ & \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} - f_H u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial z} + \rho'_1 + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + \\ & \quad + B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial B_{x1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{x1} = 0, \\ & \frac{\partial B_{y1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{y1} = 0, \\ & \frac{\partial B_{z1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{z1} = 0, \\ & \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0, \\ & \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (59) получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме на нестандартной  $\beta$ -плоскости в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} & k^2 \omega^4 + k_x \omega^3 \left( \beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \omega^2 \left[ (f_V k_z + f_H k_y)^2 - \right. \\ & \quad \left. - N^2 k_h^2 + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right] - \\ & \quad - k_x \omega \left[ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left( \beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right] + \\ & \quad + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[ k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,  $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Рассмотрим распространение волн в плоскости  $(k_x, k_y)$  при условии  $k_z \ll k$ . Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} & \omega^4 + \omega^3 \frac{\beta k_x}{k_h^2} - \omega^2 \left[ \frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right] - \\ & \quad - \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} \left[ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \times \\ & \quad \times \left[ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Точное аналитическое решение (61) мы можем найти при  $k = k_x$  или  $k = k_y$ . При  $k = k_x$  уравнение (60) описывает три типа волн, аналогичных волнам на стандартной  $\beta$ -плоскости: магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на  $f$ -плоскости (12) и волны магнито-Россби с дисперсионными соотношениями (43) и (45). При  $k = k_y$  получаем два типа волн, аналогичных волнам на нестандартной  $f$ -плоскости: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\begin{aligned} \omega_{migy} = \pm & \left\{ \frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (62)$$

и одномерные магнито-строфические волны

$$\begin{aligned} \omega_{mstry} = \pm & \left\{ \frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 - \right. \\ & \left. - \left[ \left( \frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Важное отличие, связанное с нестандартным приближением  $\beta$ -плоскости, которые мы можем получить аналитически, — низкочастотный предел в уравнении (60), который дает новое выражение для волны магнито-Россби:

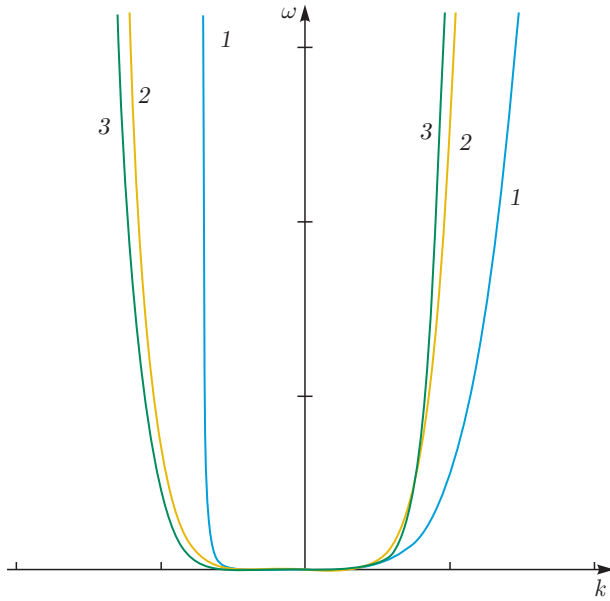
$$\omega_{mr'} \approx \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[ k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2 \right]}{k_x \left[ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left( \beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right]}. \quad (64)$$

Выражение (64), так же как и выражение (47), описывает волны магнито-Россби, динамика которых определяется не только силами Кориолиса и Лоренца, но и силой плавучести, а при  $k_z \ll k$  сводится к выражению, аналогичному полученному в работах по исследованию магнито-гидродинамических течений вращающейся плазмы на  $\beta$ -плоскости в приближении мелкой воды [13, 39]:

$$\omega = \frac{k_h^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}{\beta k_x}. \quad (65)$$

Общий вид дисперсионных кривых волны магнито-Россби (64) для различных направлений ( $k = k_x$ ,  $k = k_y$ ,  $k = k_z$ ) при  $\omega > 0$ ,  $\gamma < \beta$  приведен на рис. 16.

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (60) к случаю вращающейся нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля ( $B_0 = 0$ ) уравнение (60) принимает вид



**Рис. 16.** Дисперсионные кривые для волны магнито-Россби с частотой  $\omega_{mr'}$ : 1 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_x)$ ,  $k_y = k_z = 0.1$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_y)$ ,  $k_x = k_z = 0.1$ ; 3 —  $\omega_{mr'}(k_z)$ ,  $k_x = k_y = 0.1$

$$k^2\omega^3 + k_x\omega^2 \left( \beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \omega [(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2] + N^2 \beta k_x = 0. \quad (66)$$

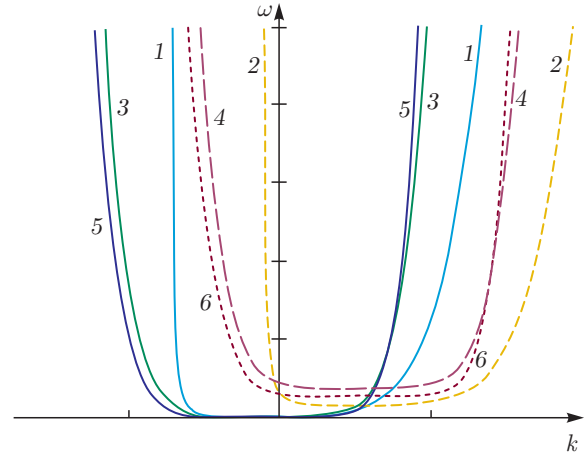
В низкочастотном пределе получаем выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска:

$$\omega = \frac{N^2 \beta k_x}{(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2}, \quad (67)$$

которое при условии  $k_z \ll k$  переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби (44).

### 5.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Ниже исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной  $\beta$ -плоскости. Качественный анализ дисперсионных кривых для волн, распространяющихся вдоль  $k_x$ , показывает существование следующих трехволновых взаимодействий: три волны магнито-Россби с частотами  $\omega_{mr1}$  взаимодействуют между собой; две магнитогравитационные волны с частотами (12) взаимодействуют с волной магни-



**Рис. 17.** Условие синхронизма для трех магнито-Россби волн: 1 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_x)$ ; 2 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mr'}(k_{xc})$ ; 3 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_y)$ ; 4 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mr'}(k_{yc})$ ; 5 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_z)$ ; 6 —  $\omega = \omega_{mr'}(k_z - k_{zc}) + \omega_{mr'}(k_{zc})$

то-Россби с частотой (43); две волны магнито-Россби с частотами (43) взаимодействуют с магнитогравитационной волной с частотой (12). Для волн, распространяющихся вдоль  $k_y$ , реализуются взаимодействие двух магнитострофических волн с частотами (36) и одной магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой (33) при малом значении  $f_H$  и взаимодействие двух магнитных инерционно-гравитационных волн с частотами (33) и одной магнитострофической волны с частотой (36) при большом значении  $f_H$ . Кроме того, реализуется взаимодействие трех волн магнито-Россби с частотами  $\omega_{mr'}$  (64), полученных в низкочастотном пределе, что показано на рис. 17.

Методом многомасштабных разложений получим систему уравнений для амплитуд трех взаимодействующих волн на нестандартной  $\beta$ -плоскости, удовлетворяющих условию синхронизма (13):

$$\begin{aligned} \tilde{s}'_1 \phi &= \tilde{f}'_1 \psi^* \chi, \\ \tilde{s}'_2 \psi &= \tilde{f}'_2 \phi^* \chi, \\ \tilde{s}'_3 \chi &= \tilde{f}'_3 \phi \psi, \end{aligned} \quad (68)$$

где  $\tilde{s}'_j$  — дифференциальный оператор по медленным переменным, аналогичный оператору  $s_j$  (17), а коэффициенты  $\tilde{f}'_j$ , как и  $f_j$  (22), зависят только от начальных условий и параметров взаимодействующих волн.

Коэффициенты  $\tilde{r}'_j$ ,  $\tilde{p}'_j$  и  $\tilde{w}'_j$  не отличаются от аналогичных коэффициентов на стандартной  $\beta$ -плоскости, а коэффициент  $\tilde{q}'_j$  имеет вид



$$\begin{aligned} \tilde{q}'_j &= z_1 [i\omega a_1 - f_V a_2 + f_H a_3 - \\ &- ik_{xj}(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) + (2ik_{yj}B_{y0} + ik_{zj}B_{z0})a_4] + \\ &+ z_2(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{z0}a_6) - B_{y0} \left( z_3 a_6 + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + \\ &+ z_8 a_2. \end{aligned} \quad (69)$$

Коэффициенты  $\tilde{f}'_j$  аналогично коэффициентам  $f_j$  (22) представимы в виде суммы:

$$\tilde{f}'_j = \sum_{s=1}^7 z_s \tilde{\mathcal{Z}}_{sj}. \quad (70)$$

Слагаемые в сумме (70) не отличаются от слагаемых в сумме (56).

На нестандартной  $\beta$ -плоскости в низкочастотном пределе найден новый тип взаимодействия помимо описанных в предыдущих разделах: трехволновое взаимодействие волн магнито-Россби с частотами  $\omega_{m_r'}$ . При этом, очевидно, индексы  $j = 1, j = 2, j = 3$  соответствуют волнам магнито-Россби (64).

В силу универсальности системы уравнений (68) можно говорить о реализации двух типов параметрических неустойчивостей: распад волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  на две волны с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и инкрементом неустойчивости  $\Gamma = \sqrt{|\tilde{f}'_2 \tilde{f}'_3| / |\tilde{r}'_2 \tilde{r}'_3|} |\phi_0| > 0$ ; усиление волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$  двумя волнами с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega(\mathbf{k}_2)$  и  $\omega(\mathbf{k}_3)$  и коэффициентом усиления  $\Gamma = (|\tilde{f}'_1| / |\tilde{r}'_1|) |\psi_0 \chi_0| > 0$ .

Таким образом, в нестандартном приближении  $\beta$ -плоскости найден новый тип волн магнито-Россби, восстанавливаемыми силами которых являются не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести, а дисперсионное соотношение включает в себя как параметр  $\beta$ , так и параметр  $\gamma$ . Для найденного типа волн магнито-Россби исследовано трехволновое взаимодействие при  $\mathbf{k} = (k_x, \text{const}, \text{const})$ ,  $\mathbf{k} = (\text{const}, k_y, \text{const})$  и  $\mathbf{k} = (\text{const}, \text{const}, k_z)$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска (в устойчиво стратифицированном слое с линейным профилем плотности). Для плоских течений на  $f$ -плоскости и на нестандартной  $f$ -плоскости получены дисперсионные уравнения и най-

дены решения, описывающие трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (6), которые в отсутствие магнитного поля переходят в трехмерные инерционно-гравитационные волны в приближении Буссинеска в нейтральной жидкости (7), и трехмерные магнитострофические волны (10), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости. Найдено, что наличие магнитного поля нарушает условие перпендикулярности групповой скорости инерционно-гравитационных волн волновому вектору. В частном случае распространения трехмерных волн в горизонтальной плоскости ( $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ ) магнитные инерционно-гравитационные волны на  $f$ -плоскости превращаются в волны Альфвена (9), магнитострофические волны на  $f$ -плоскости — в магнитогравитационные волны (12), магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной  $f$ -плоскости — в двумерные магнитные инерционно-гравитационные волны (33), а магнитострофические волны на нестандартной  $f$ -плоскости — в двумерные магнитострофические волны (36). При распространении волн на  $f$ -плоскости и на нестандартной  $f$ -плоскости только вдоль вертикальной составляющей волнового вектора ( $k = k_z$ ) магнитные инерционно-гравитационные волны превращаются в магнитные волны с частотой  $\omega_{z1}$  (8), а магнитострофические волны — в волны с частотой  $\omega_{z2}$  (11), динамика которых определяется только силой Лоренца и силой Кориолиса.

Для сферических течений на  $\beta$ -плоскости и на нестандартной  $\beta$ -плоскости также получены дисперсионные уравнения и найдены решения в виде магнитогравитационных волн (12), одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн (62) и одномерных магнитострофических волн (63), аналогичных волнам в плоских течениях, волн магнито-Россби (43), которые в отсутствие магнитного поля превращаются в гидродинамические волны Россби (44), и волн магнито-Россби (45), исчезающих в отсутствие магнитного поля. Отметим, что в низкочастотном пределе найдены дисперсионные соотношения для трехмерных волн магнито-Россби на  $\beta$ -плоскости (47) и трехмерных волн магнито-Россби на нестандартной  $\beta$ -плоскости (64), которые в приближении двумерных потоков ( $k_z \ll k$ ) описывают волны магнито-Россби (65), аналогичные полученным в работах [13, 39] по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Кроме того, в приближении вертикальных течений ( $k = k_z$ ) дисперсионные соотношения как на  $\beta$ -плоскости (41), так и на нестандартной  $\beta$ -плоскости (60) описывают магнит-

ные волны, распространяющиеся вдоль вертикальной составляющей волнового вектора, аналогичные магнитным волнам на  $f$ -плоскости и на нестандартной  $f$ -плоскости (8), (11).

Качественный анализ полученных дисперсионных соотношений показывает условие синхронизма для следующих типов трехволновых взаимодействий. Для плоских течений на  $f$ -плоскости реализуются три типа трехволновых взаимодействий: возникновение магнитогравитационной волны с частотой  $\omega_{mgr}$  (12) при взаимодействии альфвеновской волны с частотой  $\omega_A$  (9) и магнитогравитационной волны с частотой  $\omega_{mgr}$  (12); возникновение магнитной волны с частотой  $\omega_{z1}$  (8) при взаимодействии магнитных волн с частотами  $\omega_{z2}$  (11) и  $\omega_{z1}$  (8); возникновение магнитной волны с частотой  $\omega_{z2}$  (11) при взаимодействии двух магнитных волн с частотами  $\omega_{z2}$  (11).

На нестандартной  $f$ -плоскости при малой горизонтальной компоненте параметра Кориолиса ( $k_H < 1$ ) при взаимодействии двух магнитострофических волн с частотами  $\omega_{mstr'}$  (36) возникает магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой  $\omega_{mig'}$  (33). Кроме того, при исследовании влияния горизонтальной составляющей параметра Кориолиса на общий вид дисперсионных кривых на нестандартной  $f$ -плоскости обнаружено, что помимо описанного выше трехволнового взаимодействия, возможно возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой  $\omega_{mig'}$  (33) при взаимодействии магнитострофической волны с частотой  $\omega_{mstr'}$  (36) и магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой  $\omega_{mig'}$  (33) при  $f_H \gg 1$ .

Для сферических течений на  $\beta$ -плоскости реализуются следующие типы трехволновых взаимодействий: два типа взаимодействий магнитных волн, распространяющихся вдоль вертикальной составляющей волнового вектора, а также возникновение магнитогравитационной волны (12) при взаимодействии волны Альфвена (46) с магнитогравитационной волной (12), аналогичные взаимодействиям на  $f$ -плоскости; возникновение магнитогравитационной волны с частотой  $\omega_{mgr}$  (12) при взаимодействии волны магнито-Россби с частотой  $\omega_{mr1}$  (43) и магнитогравитационной волны с частотой  $\omega_{mgr}$  (12); возникновение волны магнито-Россби с частотой  $\omega_{mr1}$  (43) при взаимодействии магнитогравитационной волны с частотой  $\omega_{mgr}$  (12) и волны магнито-Россби с частотой  $\omega_{mr1}$  (43); возникновение волны магнито-Россби с частотой  $\omega_{mr1}$  (43) при взаимодействии двух волн магнито-Россби с частотой  $\omega_{mr1}$  (43).

На нестандартной  $\beta$ -плоскости существуют следующие типы трехволновых взаимодействий: взаимодействия волн магнито-Россби (43) и магнитогравитационных волн (12), аналогичные взаимодействиям на  $\beta$ -плоскости; взаимодействия одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн (62) и одномерных магнитострофических волн (63), аналогичные взаимодействиям на нестандартной  $f$ -плоскости; взаимодействие трех волн магнито-Россби с частотами  $\omega_{mr'}$  (64).

Методом многомасштабных разложений получены амплитудные уравнения для взаимодействующих волн и инкременты двух типов неустойчивостей, имеющих место в системе, — распад и усиление. Для каждого из найденных типов трехволновых взаимодействий показано различие в коэффициентах и дифференциальных операторах в системе трехволновых взаимодействий.

**Благодарности.** Авторы признательны Д. А. Климачкову за полезные обсуждения.

**Финансирование.** Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «Базис» и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 19-02-00016). Работа выполнена по проекту КП19-270 «Вопросы происхождения и эволюции Вселенной с применением методов наземных наблюдений и космических исследований» Программы крупных проектов по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. W. Hughes, R. Rosner, and N. O. Weiss, *The Solar Tachocline*, Cambridge Univ. Press (2007).
2. P. A. Gilman, *Astrophys. J. Lett.* **544**, L79 (2000).
3. M. S. Miesch and P. A. Gilman, *Solar Phys.* **220**, 287 (2004).
4. M. Dikpati and P. A. Gilman, *Astrophys. J.* **551**, 536 (2001).
5. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, *Письма в Астрон. ж.* **36**, 896 (2010).
6. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, arXiv:astro-ph/9904333 (1999).
7. A. Spitkovsky, Y. Levin, and G. Ushomirsky, *Astrophys. J.* **566**, 1018 (2002).

8. J. Y. K. Cho, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **366**, 4477 (2008).
9. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, *ЖЭТФ* **140**, 606 (2011).
10. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, *Phys. Scripta* **155**, 014024 (2013).
11. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, *ЖЭТФ* **146**, 352 (2014).
12. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **149**, 965 (2016).
13. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **152**, 705 (2017).
14. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **150**, 602 (2016).
15. D. A. Klimachkov and A. S. Petrosyan, *Phys. Lett. A* **381**, 106 (2017).
16. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J. Lett.* **691**, L41 (2009).
17. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
18. M. Dikpati, S. W. McIntosh, and G. Bothunet, *Astrophys. J.* **853**, 144 (2018).
19. X. Márquez-Artavia, C. A. Jones, and S. M. Tobias, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **111**, 282 (2017).
20. T. V. Zaqarashvili, *Astrophys. J.* **856**, 32 (2018).
21. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, and B. M. Shergelashvili, *Astron. Astrophys.* **470**, 815 (2007).
22. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester et al., *Astron. Astrophys.* **532**, A139 (2011).
23. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
24. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press (2006).
25. V. Zeitlin, *Geophysical Fluid Dynamics*, Oxford Univ. Press (2018).
26. S. W. McIntosh et al., *Nature Astron.* **1**(4), 0086 (2017).
27. T. D. Kaladze, W. Horton, L. Z. Kahlon et al., *Phys. Scripta* **88**, 065501 (2013).
28. О. Г. Онищенко, О. А. Похотелов, Н. М. Астафьева, *УФН* **178**, 605 (2008).
29. T. V. Zaqarashvili and E. Gurgenashvili, *Front. Astron. Space Sci.* **6**, 7 (2018).
30. Z.-C. Liang, L. Gizon, A. C. Birch, and T. L. Duvall Jr., *Astron. Astrophys.* **626**, A3 (2019).
31. J. Braithwaite and H. C. Spruit, *Roy. Soc. Open Sci.* **4**, 160271 (2017).
32. J. Philidet, C. Gissinger, F. Lignièrès, and L. Petitdemange, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* DOI: 10.1080/03091929.2019.1670827.
33. V. G. A. Böning, H. Hu, and L. Gizon, *Astron. Astrophys.* **629**, A26 (2019).
34. B. Loeptien, L. Gizon, A. C. Birch et al., *Nature Astron.* **2**, 568 (2018).
35. M. Dikpati, P. S. Cally, S. W. McIntosh, and E. Heifetz, *Sci. Rep.* **7**, 14750 (2017).
36. M. Dikpati, B. Belucz, P. A. Gilman, and S. W. McIntosh, *Astrophys. J.* **862**, 159 (2018).
37. J. M. Stone, J. F. Hawley, C. F. Gammie, and S. A. Balbus, *Astrophys. J.* **463**, 656 (1996).
38. K. Batygin, S. Stanley, and D. J. Stevenson, *Astrophys. J.* **776**, 53 (2013).
39. М. А. Федотова, Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *Физика плазмы* **46**, 57 (2020).
40. B. Dintrans, M. Rieutord, and L. Valdettaro, *J. Fluid Mech.* **398**, 271 (1999).
41. P. Billant and J. M. Chomaz, *Phys. Fluids* **13**, 1645 (2001).
42. J. I. Yano, *J. Fluid Mech.* **810**, 475 (2017).
43. S. Lee and R. Takada, *Indiana Univ. Math. J.* **66**, 2037 (2017).
44. S. Takehiro, *Phys. Earth Planet. Inter.* **241**, 37 (2015).
45. S. Takehiro and Y. Sasaki, *Phys. Earth Planet. Inter.* **276**, 258 (2018).
46. T. Nakagawa, *Phys. Earth Planet. Inter.* **187**, 342 (2011).
47. D. J. Raymond, <http://kestrel.nmt.edu/~raymond/classes/ph589/notes/ssmodes/ssmodes.pdf>.
48. G. Falkovich, *Fluid Mechanics: a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).
49. P. J. Dellar, *J. Fluid Mech.* **674**, 174 (2011).