

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЗБУЖДЕНИЙ С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ НА ФОРМИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ

*С. Е. Савотченко**

*Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
308012, Белгород, Россия*

Поступила в редакцию 7 августа 2019 г.,
после переработки 21 марта 2020 г.
Принята к публикации 26 марта 2020 г.

Рассмотрены модели контактирующих сред со ступенчатой нелинейностью при наличии взаимодействия возбуждений с границей раздела сред как плоским дефектом. В таких средах происходит мгновенное переключение от одного уровня к другому при достижении амплитуды поля определенного порогового значения. Найдены новые типы локализованных состояний со специфической структурой и свойствами. Структура таких состояний обуславливается формированием доменов в приграничных областях, внутри которых значения определенных параметров среды отличаются от таких в остальных частях. Показано, что при наличии взаимодействия возбуждений с границей раздела могут проявляться новые эффекты, связанные с особенностями структуры поля локализованных состояний. Меняются условия существования локализованных состояний. Поле можно сделать максимальным не только внутри приграничного домена, но и на самой границе раздела среды со ступенчатой нелинейностью и линейной средой. В среде со ступенчатой нелинейностью, содержащей плоский дефект, взаимодействие с ним возбуждений приводит к снижению амплитуды в плоскости дефекта. С ростом интенсивности взаимодействия с дефектом при фиксированной энергии локализации происходит увеличение ширины домена. Показано, что пороговое значение полного потока энергии, начиная с которого будут существовать локализованные состояния и формироваться домен, может контролироваться интенсивностью взаимодействия возбуждений с границей раздела.

DOI: 10.31857/S0044451020090126

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные кристаллы обладают рядом специфическим свойством, в связи с чем находят широкое применение в различных технических приложениях [1–4]. Особенности локализации потоков энергии вдоль границ раздела таких кристаллов и возможности управления ими обуславливают неутраченный интерес к исследованиям закономерностей распространения различных видов нелинейных поверхностных волн [5–11]. Важное место в таких работах занимает изучение влияния взаимодействия волн с границами раздела кристаллов, играющих роль плоских дефектов [12–23].

Отмечалось, что распространяющийся вдоль поверхности раздела поток может менять свойства кристалла в прилегающих слоях [24, 25]. На примере простой модели нелинейной среды с диэлектрической проницаемостью, скачкообразно зависящей от напряженности электрического поля [26–29], было показано образование приповерхностного оптического домена вследствие распространения локализованного светового потока, обладающего особой структурой [30]. В работах [30–33], посвященных изучению поверхностных волн в средах со скачкообразной нелинейностью, не учитывалось взаимодействие волны с границей раздела. Компоненты напряженности электрического поля и их нормальные производные на поверхности кристалла удовлетворяли условиям непрерывности, что означало отсутствие взаимодействия волны с границей раздела сред как с плоским дефектом.

* E-mail: savotchenkose@mail.ru

С другой стороны, влияние взаимодействия нелинейных возбуждений с границами раздела в средах с керровской нелинейностью (когда диэлектрическая проницаемость зависит от квадрата амплитуды напряженности электрического поля) изучалось неоднократно в различных формах [14–23]. Влияние на особенности локализации энергии возбуждений различных внешних параметров, таких как интенсивность взаимодействия возбуждений с границей раздела контактирующих сред с некерровской нелинейностью, недостаточно изучено. В связи с этим в данной работе предлагается теоретическое описание новых эффектов, обусловленных исключительно взаимодействием возбуждений с границей раздела сред с некерровской нелинейностью на примере двух моделей. Будут рассмотрены контакт нелинейного кристалла, в котором диэлектрическая функция скачкообразно меняется при достижении амплитуды поля определенного значения, с линейной средой, а также плоский дефект внутри такого нелинейного кристалла.

2. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Обе модели основаны на использовании стационарного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с различающимися нелинейными членами. Физические модели, приводящие к такому уравнению, для нелинейной среды с переключением можно найти в работе [30], а для нелинейной среды с плоским дефектом — в работе [17]. Поэтому будем использовать НУШ в форме

$$Eu = -\frac{1}{2m}u''_{xx} + \Omega(x, |u|)u + U(x)u, \quad (1)$$

где m — «эффективная масса» возбуждения, $U(x) = U_0\delta(x)$ — «точечный» потенциал, моделирующий короткодействующее взаимодействие границы раздела и возбуждения с интенсивностью U_0 , $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\Omega(x, |u|)$ — функция, описывающая свойства контактирующих сред. При $U_0 > 0$ возбуждения отталкиваются от границы (отталкивающий дефект), а при $U_0 < 0$ — притягиваются (притягивающий дефект). Физическую интерпретацию данных параметров уравнения (1) для случая поверхностных волн электромагнитной природы можно найти в работах [34–37].

Рассмотрим плоскопараллельные немагнитные широкие слои нелинейных оптических кристаллов, разделенные ультратонкой прослойкой, толщина которой много меньше характерного масштаба локализации создаваемых ею возмущений параметров

среды. В пределе бесконечно малой толщины такого слоя его можно рассматривать как плоскую границу раздела кристаллов. Пусть ось x направлена перпендикулярно плоской границе раздела слоев, а плоскость yz параллельно ей.

Показатель преломления $n(x, |\mathbf{E}|)$ будем считать меняющимся в перпендикулярном по отношению к границам раздела направлении и зависящим от модуля вектора напряженности электрического поля. Вдоль слоев показатель преломления будем считать неменяющимся. Возмущение оптических параметров кристалла и плотность энергии волны считаются малыми. Будем рассматривать ТЕ-поляризованные монохроматические электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль границы раздела (плоскости yz). Также будем считать, что можно разделить переменные и представить y -компоненту напряженности электрического поля поле в виде $u(x, z)w(y)$. Тогда распределение поля $u(x, z)$ будет описываться уравнением

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + n(x, |u|)u = 0, \quad (2)$$

где D — коэффициент дифракции (всюду постоянный). Для распределения $u(x, z) = u(x)\exp(-iEz)$, где величина E представляет собой константу распространения, из (2) можно поучить (1). Сравнив (1) и (2), получаем, что «эффективная масса» возбуждения обратно пропорциональна коэффициенту дифракции: $m = 1/2D$.

Будем считать, что значение показателя преломления в широких слоях резко отличаются от его значения в ультратонкой прослойке, разделяющей широкие слои (полупространства). В силу того, что толщина прослойки существенно меньше толщины широких слоев и характерной длины локализации возмущений поля, модуляцию показателя преломления в ней можно аппроксимировать дельта-функцией Дирака в пределе ее бесконечно малой толщины. Поэтому для показателя преломления будем использовать выражение

$$n(x, |u|) = -\Omega(x, |u|) - U_0\delta(x),$$

где первое слагаемое описывает модуляцию показателя преломления в широких слоях, а второе — в ультратонкой прослойке. Параметр U_0 пропорционален показателю преломления в границе раздела слоев n_b : $U_0 \propto hn_b$, где h — толщина прослойки (малая величина).

Далее будем, следуя [30, 31, 33], предполагать, что показатель преломления может скачком меняться в зависимости от амплитуды поля $|u|$: в первоначаль-

ный момент кристалл характеризуется одним значением показателя преломления, а при достижении порогового значения поля переключения u_s он мгновенно принимает другое значение.

Практически скачкообразное изменение диэлектрической проницаемости (показателя преломления) наблюдается во многих случаях. Диэлектрическая проницаемость имеет почти ступенчатую зависимость от амплитуды электрического поля в полупроводниках в экситонной области спектра на высоких уровнях интенсивности с экситон-экситонными взаимодействиями (приводящими к образованию биэкситонов при прохождении света). Модель ступенчатой нелинейности может быть использована для кристаллов CuCl , CuBr , в которых энергия связи биэкситонов велика [38].

Оптически нелинейные эффекты в полупроводниковых кристаллах особенно интенсивно проявляются в экситонной области спектра, причем характерные времена релаксации экситонов и биэкситонов очень малы (порядка 10^{-11} – 10^{-12} с). В этих условиях особенно ярко проявляется нелинейное взаимодействие света с веществом при частотах в экситонной области спектра. Малость времен релаксации позволяет говорить о практически мгновенном переключении значений определенных оптических параметров среды, например, восприимчивости, диэлектрической проницаемости или показателя преломления, что является одним из важнейших условий при проектировании оптоэлектронных переключателей на сверхбыстрых процессах.

В таких кристаллах, как CdS , CdSe , в которых энергия связи биэкситонов мала, можно использовать один импульс, фотоны которого возбуждают экситоны из основного состояния и превращают их в биэкситоны. Проходя через тонкую полупроводниковую пленку, когерентные фотоны возбуждают когерентные экситоны с одинаковыми волновыми векторами и фазами и взаимодействуют с ними, превращая их в биэкситоны. Оптическая конверсия экситон-биэкситон характеризуется гигантской силой осциллятора, поэтому нелинейные оптические эффекты могут возникать даже при сравнительно низких уровнях интенсивности возбуждающего излучения. Таким образом, фотоны одного и того же импульса генерируют ступенчатые переходы из основного состояния кристалла в экситонное. Затем индуцируются переходы из экситонного состояния в биэкситонное, проводящее к образованию поляризованности среды и плотности квазичастиц, определяющей оптические свойства пленки [38–40].

В работе [38] было получено достаточно сложное выражение для восприимчивости полупроводникового кристалла в экситонной области спектра, определяемое амплитудой прошедшего через пленку импульса, и демонстрирующее эффект насыщения и резкое изменение при определенных условиях. Указывалось, что физической причиной возникновения особенностей поведения восприимчивости в зависимости от амплитуды импульса излучения является то, что уровень энергии, соответствующий половине энергии образования биэкситона, и экситонный уровень совпадают в резонансных условиях для кристаллов типа CdS , CdSe , Cu_2O , в которых энергия связи биэкситонов пренебрежительно мала (порядка 0.5–3 мэВ). Под действием сильного поля этот дважды вырожденный по энергии уровень расщепляется на два уровня, которые симметрично расходятся в длинноволновую и коротковолновую стороны относительно исходного экситонного уровня с ростом амплитуды поля в среде. В связи с этим дисперсионные и абсорбционные функции в области частот экситонного спектра изменяются в соответствии с индуцированными сильным полем изменениями положений квазиэнергетических уровней экситон-биэкситонной системы. Таким образом, мощный импульс излучения приводит к существенной перенормировке энергетического спектра системы, обуславливающей поведение восприимчивости полупроводникового кристалла.

Следует отметить, что модель ступенчатой нелинейности впервые использовалась Капланом и соавторами, чтобы теоретически продемонстрировать мультистабильность распространения света и солитонных импульсов [26–29]. Кроме того, они проанализировали случай «гладкой» ступенчатой нелинейности, также называемой насыщаемой нелинейностью [41]. При малых интенсивностях насыщаемая нелинейность совпадает с нелинейностью типа Керра. Такой тип нелинейности описывает плавное изменение показателя преломления между двумя его значениями в зависимости от напряженности электрического поля. Известно, что многие материалы обладают таким насыщением, обусловленным изменением их дисперсионных свойств при интенсивном освещении [42]. В качестве примеров можно указать легированные полупроводниками стекла CdSSe и Schott OG 550 [43, 44], легированные ионами кристаллы $\text{GdAlO}_3:\text{Cr}^{3+}$ [45], биооптические среды [46, 47] и различные фоторефрактивные кристаллы (LiNbO_3 и SBN) [48, 49]. К примеру, для тонких пленок из фотохромного белка бактериородопсина при низких интенсивностях света возмущенный

показатель преломления меняется от $-1.25 \cdot 10^{-3}$ до $1.25 \cdot 10^{-3}$, а интенсивность насыщения, которую можно принять в качестве значения переключения, оценивается величиной порядка $8 \cdot 10^3$ мВт/см² [46, 47].

Точные аналитические солитоны для одной модели насыщаемой нелинейности были получены в работе [42]. Эти решения не связаны с приближением медленноменяющейся огибающей и описывают оптическое распространение в обычных насыщаемых материалах. Ранее точное аналитическое решение для «светлых» солитонов, характеризующихся бистабильностью, было получено в работе [50]. Пары световых импульсов имеют одинаковую полную ширину на половине максимума, но разные пиковые интенсивности и, следовательно, разные суммарные мощности. Этот тип невырожденной бистабильности, полученный в работах [51, 52], отличается от вырожденной бистабильности световых импульсов с разными константами распространения, которые могут иметь одинаковую мощность [26, 53].

В данной работе предлагается использовать модель резкой ступенчатой нелинейности, чтобы продемонстрировать существование простых точных решений, соответствующих поверхностным волнам определенной формы, обусловленных резким изменением диэлектрической проницаемости от одного значения к другому. С этой точки зрения, мы можем рассматривать модель резкой ступенчатой нелинейности как сильный предел «плавной» ступенчатой нелинейности, который обеспечивает аналитическое описание распределения поля по границе раздела в средах, характеризующихся резким изменением между двумя уровнями показателя преломления. Приведенные выше примеры полупроводниковых кристаллов позволяют использовать данную модель как феноменологическую для аналитического описания эффектов, связанных с влиянием взаимодействия волн с границей раздела сред, на адекватном качественном уровне.

Нахождение решения НУШ (1) с «точечным» потенциалом эквивалентно решению стационарного УШ без потенциала:

$$u''(x) + 2m(E - \Omega(x, |u|))u(x) = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями в плоскости дефекта $x = 0$:

$$u(-0) = u(+0) = u_0, \quad (4)$$

$$u'(+0) - u'(-0) = 2mU_0u_0, \quad (5)$$

где u_0 — амплитуда поля на границе раздела сред.

В данной работе будут рассматриваться только локализованные в пространстве решения сформули-

рованной краевой задачи, которые удовлетворяют условию исчезновения на бесконечности $|u(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Такие решения описывают пространственные распределения полей в бегущих вдоль границы раздела сред волнах, и быстро убывающих при удалении от нее.

Как известно (см. [54], с. 46), на границе раздела линейных сред с постоянной и одинаковой всюду характеристикой $\Omega = \text{const}$ локализованное состояние существует только для случая $U_0 < 0$ и описывается функцией

$$u(x) = u_0 \exp(-q_L|x|),$$

являющейся решением уравнения (3) и удовлетворяющего граничным условиям (4) и (5) при

$$q_L = -mU_0. \quad (6)$$

Энергия данного локального уровня

$$E_L = \Omega - mU_0^2/2. \quad (7)$$

В случае контакта линейной среды с нелинейной средой, в которой характеристика Ω зависит от поля переключения, условие локализации меняется. В работе [30] рассматривалась нелинейная среда, в которой показатель преломления (диэлектрическая функция) меняется скачком от одного постоянного значения к другому при достижении амплитудой поля определенного порогового значения u_s . Было показано, что при вблизи поверхности такой нелинейной среды формируется приповерхностный слой (оптический домен) конечной ширины x_s , в которой значение диэлектрической константы отличается от ее значения в остальной среде. При этом $x = x_s$ представляет собой координату, при которой поле волны равно полю переключения: $|u(x_s)| = u_s$.

Тогда к граничным условиям в плоскости дефекта (4) и (5) добавляются условия непрерывности поля и его производной на границе домена:

$$u(x_s - 0) = u(x_s + 0) = u_s, \quad (8)$$

$$u'(x_s + 0) = u'(x_s - 0). \quad (9)$$

В работе [30] рассматривался случай, когда волна не взаимодействовала с границей раздела, что соответствует отсутствию потенциала в уравнении (1), т. е. значению $U_0 = 0$. Тогда условие (5) трактуется как условие непрерывности нормальной производной компоненты напряженности электрического поля.

Рассмотрим далее два случая: плоский контакт линейной среды с нелинейной средой с переключением и плоский дефект в нелинейной среде с переключением. Формальное различие математических

формулировок данных моделей будет заключаться в виде функции $\Omega(x, |u|)$, входящей в НУШ (3).

3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЙ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА СО СТУПЕНЧАТОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Сначала рассмотрим контакт линейной среды со средой с уровнем Ω_0 , в которой происходит мгновенное (ступенчатое) переключение от одного уровня Ω_1 к другому Ω_2 при достижении порогового значения поля переключения u_s .

В этом случае:

$$\Omega(x, |u|) = \begin{cases} \Omega_0, & x < 0, \\ \Omega_N, & x > 0, \end{cases}$$

где

$$\Omega_N(|u|) = \begin{cases} \Omega_1, & |u| < u_s, \\ \Omega_2, & |u| > u_s, \end{cases}$$

причем для определенности положим $\Omega_0 > \Omega_2$ и $\Omega_1 > \Omega_2$.

В области вблизи границы раздела, где $|u| > u_s$, происходит образование зоны конечной ширины (домена) с характеристикой Ω_2 , отличной от остальной нелинейной среды Ω_1 [30].

3.1. Структура локализованного состояния

Формирование домена обусловлено специфической структурой поля локализованного состояния при $\Omega_2 < E < \Omega_{0,1}$, которое состоит из трех составляющих:

1) в линейной среде при $x < 0$

$$u(x) = u_0 \exp(q_0 x); \tag{10}$$

2) в нелинейной среде, когда $|u| > u_s$, вблизи границы раздела формируется домен шириной x_s , поле описывается выражением

$$u(x) = u_m \cos(p_2 x - \phi); \tag{11}$$

3) в нелинейной среде, характеризующейся величиной Ω_1 , и где $|u| < u_s$, поле описывается выражением

$$u(x) = u_s \exp(-q_1(x - x_s)). \tag{12}$$

Все параметры составляющих такого локализованного состояния определяются из уравнения (2), условий непрерывности поля (4) и скачка его производной (5) на границе раздела сред $x = 0$ [15,17,18], а

также непрерывности поля (8) и его производной (9) на границе домена $x = x_s$:

$$q_{0,1}^2 = 2m(\Omega_{0,1} - E), \tag{13}$$

$$p_2^2 = 2m(E - \Omega_2). \tag{14}$$

Фаза ϕ определяется из соотношения

$$\text{tg } \phi = (q_0 + 2mU_0)/p_2. \tag{15}$$

Ширина домена

$$x_s = \{\phi + \text{arctg}(q_1/p_2)\}/p_2. \tag{16}$$

Амплитуда поля на границе раздела сред

$$u_0 = u_s \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_0 - \Omega_2 + 2U_0(mU_0 + 2\sqrt{2m(\Omega_0 - E)})} \right)^{1/2}. \tag{17}$$

Амплитуда поля в домене

$$u_m = u_s \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{E - \Omega_2} \right)^{1/2}. \tag{18}$$

Поскольку все параметры (13)–(18) данного локализованного состояния выражаются через его энергию, спектр его существования является непрерывным в рассматриваемом диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_{1,0}$.

3.2. Влияние взаимодействия с плоским дефектом на характеристики локализованного состояния

3.2.1. Модификация условий локализации

Основным требованием существования локализованного состояния со структурой (10)–(12) и параметрами (13)–(18) является условие $u_0 > u_s$. Данное условие можно трактовать двояко. С одной стороны, при фиксированном значении интенсивности взаимодействия с дефектом (причем $U_0 \neq 0$) оно означает сужение диапазона допустимых значений энергии (спектра локальных состояний) и, как следует из (17), $E < E_c$, где

$$E_c = \Omega_0 - \frac{1}{2m} \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_0 - 2mU_0^2}{U_0} \right)^2.$$

С другой стороны, при фиксированной энергии данное условие означает ограничения для значений интенсивности взаимодействия с дефектом: если $\Omega_0 < \Omega_1$, то $U_0^{(-)} < U_0 < U_0^{(+)}$, а если $\Omega_0 > \Omega_1$, то $U_0 < U_0^{(-)}$ и $U_0 > U_0^{(+)}$, где

$$U_0^{(\pm)} = \frac{q_0}{4m} \left(-1 \pm 2 \left(\frac{\Omega_0 - \Omega_1}{\Omega_0 - E} \right)^{1/2} \right).$$

Таким образом, наличие взаимодействия возбуждения с границей раздела приводит к существенной модификации условий существования локализованных состояний.

3.2.2. Регулировка амплитуды поля в плоскости дефекта

При отсутствии взаимодействия возбуждения с границей раздела, когда $U_0 = 0$, амплитуда поля на границе раздела сред принимает вид [30]

$$u_0 = u_s \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_0 - \Omega_2} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Заметим, что амплитуда на границе в этом случае не может быть максимальной, так как нарушается условие существования локализованного состояния в среде со ступенчатой нелинейностью, т.е., как видно из (18) и (19), $u_0 = u_m$ только при $E = \Omega_0$, причем должно быть $\Omega_0 < \Omega_1$.

Если же взаимодействие возбуждения с границей раздела присутствует, то амплитуда на границе в этом случае уже может быть максимальной. Тогда следует, что такое возможно при $q_0 = 2q_L$ для фиксированного уровня

$$E = E_0 = \Omega_0 - 2mU_0^2. \quad (20)$$

Дефект должен быть притягивающим. Глубина локализации поля в линейной среде в этом случае вдвое меньше, чем в линейной среде. Другими словами, существует такой локальный уровень E_0 , при котором амплитуда поля в плоскости дефекта максимальна.

На рис. 1 показано распределение поля локализованного состояния (10)–(12) с параметрами (13)–(18). Линия 3 соответствует распределению с энергией (20). Видно, что в этом случае максимум распределения приходится на границу раздела сред. При других значениях энергии из допустимого диапазона максимум поля смещается. На границе раздела сред при одинаковой энергии амплитуда для конечных значений U_0 (линия 1) всегда ниже, чем при $U_0 = 0$ (линия 2).

Зависимость амплитуды на границе раздела сред (17) от интенсивности взаимодействия с дефектом приведена на рис. 2, а от энергии — на рис. 3. Зависимость $u_0(U_0)$ не является монотонной и имеет максимум $u_0 = u_m$ при $U_0 = -q_0/2m$. С увеличением энергии высота максимума уменьшается, а его положение смещается вправо до нулевого значения. Зависимость $u_0(E)$ монотонная, причем для притягивающего дефекта она убывающая (рис. 3, линии 1,

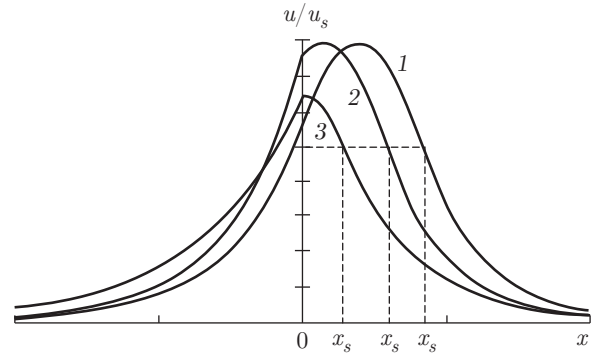


Рис. 1. Профили распределения поля u/u_s локализованного состояния (10)–(12) в зависимости от расстояния x от границы раздела сред при фиксированных параметрах: $m = 1$, $\Omega_0 = 5$, $\Omega_1 = 6$, $\Omega_2 = 1$ и различных значениях интенсивности взаимодействия и энергии: $U_0 = 0$, $E = 3$ — линия 1; $U_0 = -0.7$, $E = 3$ — линия 2; $U_0 = -0.7$, $E = E_0$ — линия 3

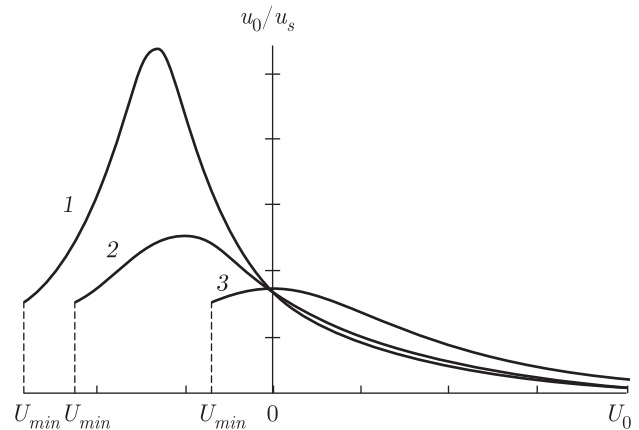


Рис. 2. Зависимости амплитуды поля u_0/u_s (17) на границе раздела сред от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях энергии E : 1.5 — линия 1, 3 — линия 2, 4.9 — линия 3

2), а для отталкивающего — возрастающая (рис. 3, линии 3, 4).

Таким образом, наличие взаимодействия возбуждения с границей раздела приводит к тому, что поле можно сделать максимальным не только внутри приграничного домена, но и на самой границе раздела среды со ступенчатой нелинейностью и линейной средой. Наличие такого взаимодействия позволяет управлять значением амплитуды в плоскости дефекта.

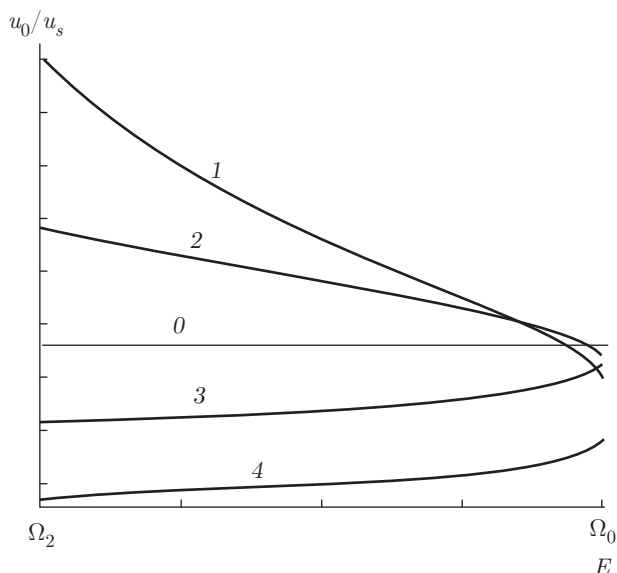


Рис. 3. Зависимости амплитуды поля u_0/u_s (17) на границе раздела сред от энергии при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : 0 — линия 0, -0.7 — линия 1, -0.4 — линия 2, 0.5 — линия 3, 1.5 — линия 4

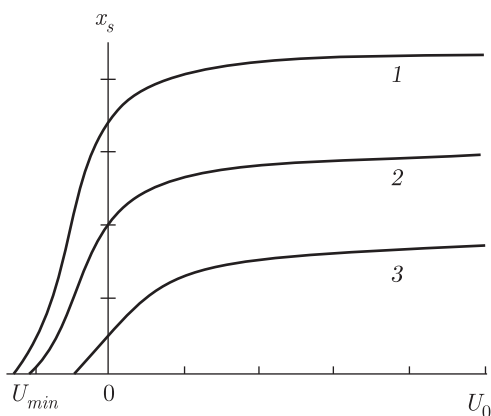


Рис. 4. Зависимости ширины домена x_s (16) с подстановкой фазы из (15) от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях энергии E : 2.1 — линия 1, 3 — линия 2, 4.9 — линия 3

3.2.3. Зависимость ширины домена

На рис. 4 показана зависимость ширины домена (16) от интенсивности взаимодействия с дефектом. Данная зависимость является монотонной. Увеличение интенсивности взаимодействия с дефектом приводит к увеличению толщины домена, достаточно быстро достигающей порогового значения насыщения

$$x_0^{(\infty)} = \{\pi/2 + \arctg(q_1/p_2)\}/p_2.$$

Ширина домена при отсутствии взаимодействия возбуждения с границей раздела определяется выражением

$$x_0^0 = \frac{1}{p_2} \arctg\left(p_2 \frac{q_0 + q_1}{p_2^2 - q_0 q_1}\right).$$

Наименьшее значение интенсивности взаимодействия с притягивающим дефектом, начиная с которого формируется домен конечной ширины, определяется выражением

$$U_{min} = -(q_0 + q_1)/2m.$$

Условие формирования домена $U_0 > U_{min}$ комбинируется с условиями локализации.

С увеличением энергии ширина домена уменьшается. Ширина домена при энергии максимума амплитуды в плоскости дефекта (16) определяется выражением

$$x_0^c = \arctg(q_1/p_2)/p_2.$$

Таким образом, наиболее широкие домены формируются при малых энергиях локализации, а более узкие — при больших энергиях из допустимого диапазона при фиксированной интенсивности взаимодействия с дефектом. С ростом интенсивности взаимодействия с дефектом при фиксированной энергии локализации происходит увеличение ширины домена до порогового значения $x_0^{(\infty)}$, что позволяет контролировать его формирование.

3.3. Поток энергии

Проанализируем сохраняющийся поток энергии, который представляет собой первый интеграл НУШ (3):

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx. \tag{21}$$

Поток (21) можно представить в виде суммы трех частей:

$$P = P_0 + P_1 + P_2, \tag{22}$$

где его компоненты вычисляются с использованием соответственно (10)–(12). Данные компоненты соответствуют долям потока в рассматриваемых областях.

Поток в линейной среде P_0 при $x < 0$ (рис. 5, 6) равен

$$P_0 = u_0^2/2q_0, \tag{23}$$

где амплитуда на границе определяется выражением (17).

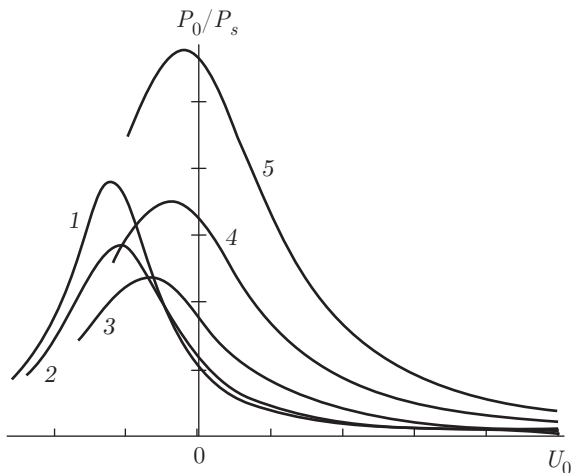


Рис. 5. Зависимости компоненты потока P_0/P_s (где $P_s = u_s^2/2\sqrt{2m}$) в линейной среде (23) от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях энергии E : 2.1 — линия 1, 2.6 — линия 2, $E = E_0$ — линия 3, 4.7 — линия 4, 4.9 — линия 5

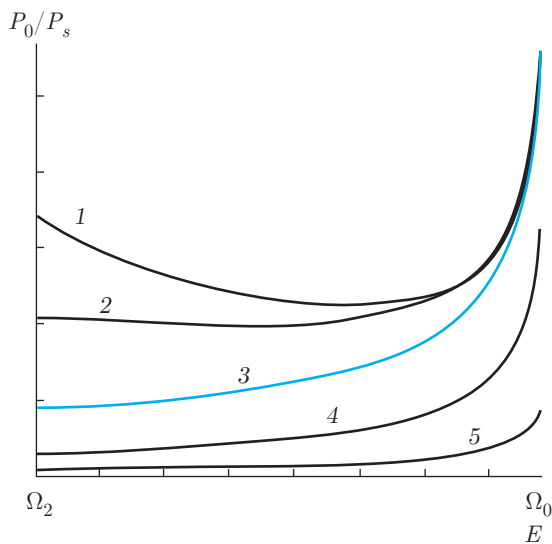


Рис. 6. Зависимости компоненты потока P_0/P_s в линейной среде (23) от энергии при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : -0.7 — линия 1, -0.5 — линия 2, 0 — линия 3, 1 — линия 4, 3 — линия 5

Поток в нелинейном кристалле за доменом P_1 при $x > x_s$ имеет вид

$$P_1 = u_s^2/2q_1. \tag{24}$$

Поток в домене P_2 при $0 < x < x_s$ (рис. 7, 8) равен

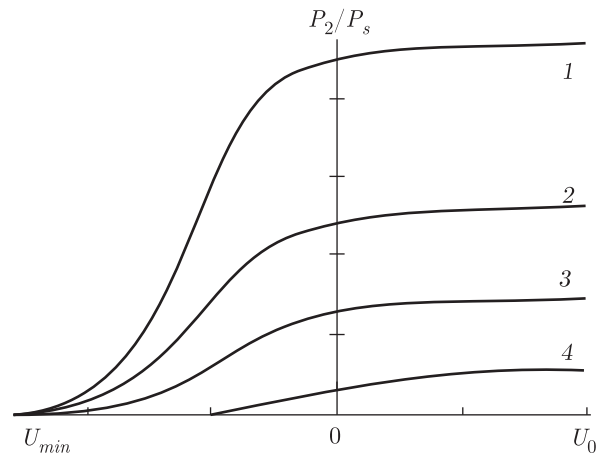


Рис. 7. Зависимости компоненты потока P_2/P_s в домене (25) от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях энергии E : 2.1 — линия 1, 2.6 — линия 2, 3.3 — линия 3, 4.9 — линия 4

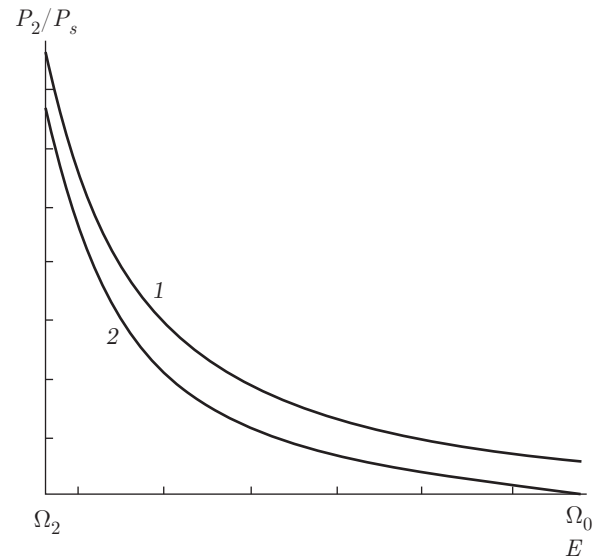


Рис. 8. Зависимости компоненты потока P_2/P_s в домене (25) от энергии при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : -0.7 — линия 1, 5 — линия 2

$$P_2 = \frac{u_m^2}{2} \times \left\{ x_s + \frac{q_1}{q_1^2 + p_2^2} + \frac{q_0 + 2mU_0}{p_2^2 + (q_0 + 2mU_0)^2} \right\}, \tag{25}$$

где амплитуда в домене определяется выражением (19) а ширина домена — (20).

На рис. 5 показана зависимость компоненты потока в линейной среде (23) от интенсивности взаимодействия с дефектом. Данная зависимость не

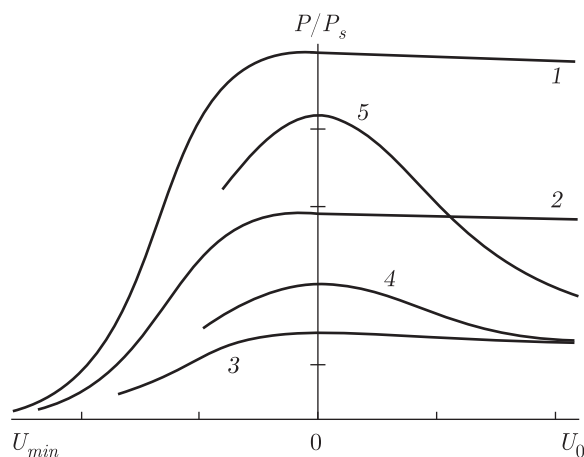


Рис. 9. Зависимости полного потока P/P_s (21) от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях энергии E : 2.1 — линия 1, 2.6 — линия 2, $E = E_0$ — линия 3, 4.9 — линия 4, 4.985 — линия 5

является монотонной и, как и зависимость амплитуды (17), имеет максимум при тех же условиях. Зависимость компоненты потока в линейной среде (23) от энергии также не является монотонной (рис. 6). Для притягивающего дефекта наблюдается минимум, смещающийся с ростом интенсивности взаимодействия в сторону левой границы спектра (рис. 6, линии 1, 2). Начиная с нулевой интенсивности (рис. 6, линия 4) и с дальнейшим ее ростом, зависимость становится монотонно возрастающей (рис. 6, линии 5, 6).

Зависимость компоненты потока в домене (25) от интенсивности взаимодействия с дефектом приведена на рис. 7, а от энергии — на рис. 8. Зависимость $P_2(U_0)$ является монотонно возрастающей. Данная компонента потока отлична от нуля, начиная с наименьшего значения U_{min} , при котором будет происходить формирование домена. Увеличение интенсивности взаимодействия с дефектом приводит к росту доли потока в домене, который достигает порогового значения насыщения (рис. 7). С увеличением энергии доля потока в домене уменьшается (рис. 8).

Зависимость полного потока (21) от интенсивности взаимодействия с дефектом приведена на рис. 9, а от энергии — на рис. 10. При малых энергиях зависимость $P(U_0)$ является монотонно возрастающей, а при более высоких значениях энергии из допустимого диапазона наблюдается максимум потока (рис. 9).

Форма зависимости потока от энергии является типичной (рис. 10). Если рассматривать ее как обратную зависимость, т. е. функцию $E(P)$, то можно

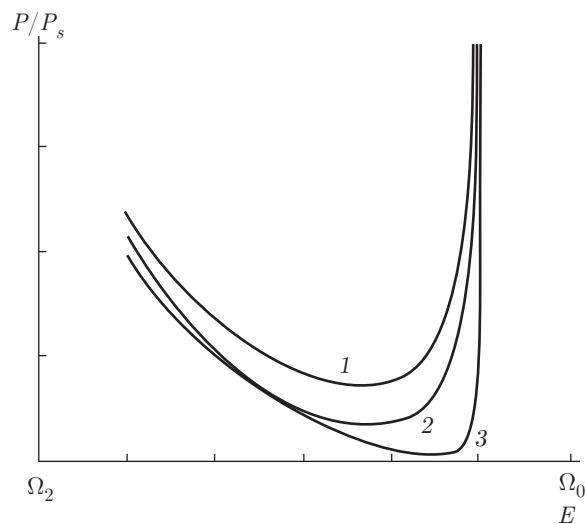


Рис. 10. Зависимости полного потока P/P_s (21) от энергии при фиксированных параметрах, как и на рис. 1, и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : 0 — линия 1, -0.7 — линия 2, 3 — линия 3

говорить, что локализация будет происходить при значениях потока, начиная с определенного минимального значения P_{min} . Такая трактовка применяется обычно, когда поток (или полное число возбуждений) выбирается в качестве управляющего параметра. Значение P_{min} существенно зависит от интенсивности взаимодействия с дефектом. При отсутствии взаимодействия пороговое значение P_{min} наибольшее. При увеличении абсолютного значения интенсивности взаимодействия с дефектом пороговое значение потока, необходимого для локализации, снижается.

4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА КРИСТАЛЛОВ СО СТУПЕНЧАТОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Теперь рассмотрим плоский дефект в нелинейной среде, в которой симметрично по обе его стороны происходит мгновенное переключение от одного уровня Ω_1 к другому Ω_2 при достижении порогового значения поля переключения u_s . В этом случае в (1) Ω не зависит от координаты x , а зависит только от поля переключения:

$$\Omega(x, |u|) = \Omega_N(|u|),$$

причем для определенности положим $\Omega_1 > \Omega_2$.

4.1. Структура локализованного состояния

Вблизи границы раздела, когда $|u| > u_s$, происходит формирование симметричного домена с ха-

рактической Ω_2 , отличной от остальной нелинейной среды Ω_1 . Из (3) в этом случае следует, что структура поля локализованного состояния при $\Omega_2 < E < \Omega_1$ определяется следующими составляющими:

1) когда $|u| > u_s$, вблизи границы раздела формируется симметричный домен шириной $2x_s$ и поле описывается выражением

$$u(x) = u_m \cos(p_2 x \pm \phi); \tag{26}$$

2) когда $|u| < u_s$, среда характеризуется величиной Ω_1 и поле описывается выражением

$$u(x) = u_s \exp(\pm q_1(x \pm x_s)). \tag{27}$$

Здесь знак «+» соответствует области $x < 0$, а «-» — $x > 0$.

Все параметры составляющих такого локализованного состояния (26), (27) определяются из уравнения (3), условий непрерывности поля (4), скачка его производной (5) на границе раздела сред $x = 0$, а также непрерывности поля (8) и его производной (9) на границах домена $x = \pm x_s$.

Амплитуда поля (26) в домене определяется прежним выражением (18). Фаза поля (26) теперь определяется из соотношения

$$\text{tg } \phi = 2mU_0/p_2. \tag{28}$$

Полуширина ширина симметричного домена определяется выражением (16) с подстановкой новой фазы из (28). Амплитуда поля на границе раздела сред имеет вид

$$u_0 = u_s \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{E - E_L(\Omega_2)} \right)^{1/2}. \tag{29}$$

где $E_L(\Omega_2)$ — локальный уровень (7) при $\Omega = \Omega_2$.

4.2. Влияние взаимодействия с плоским дефектом на характеристики локализованного состояния

4.2.1. Регулировка амплитуды поля в плоскости дефекта

На рис. 11 показано распределение поля локализованного состояния (26), (27). Включение взаимодействия с дефектом приводит к снижению амплитуды поля на границе. В случае отталкивающего дефекта поле локализованного состояния имеет два максимума, расположенных в домене, высота которых превышает амплитуду поля на границе ($u_0 < u_m$, рис. 11, линия 1). Для притягивающего де-

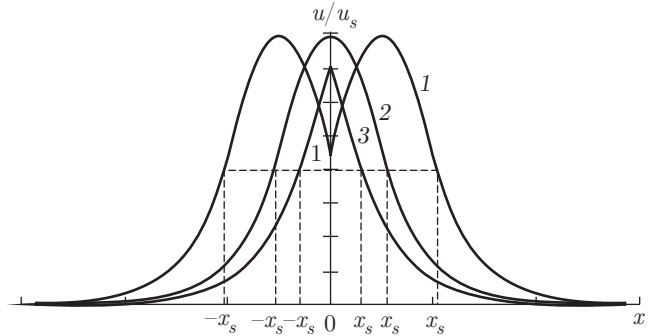


Рис. 11. Профили распределения поля u/u_s локализованного состояния (26), (27) в зависимости от расстояния от границы раздела сред x при фиксированных параметрах: $m = 1$, $\Omega_1 = 6$, $\Omega_2 = 1$, $E = 3$ и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : 2.4 — линия 1, 0 — линия 2, -1 — линия 3

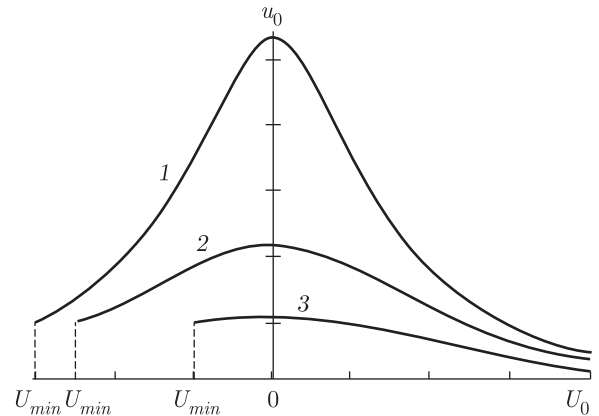


Рис. 12. Зависимости амплитуды поля u_0/u_s (29) на границе раздела сред от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 11, и различных значениях энергии E : 1.5 — линия 1, 3 — линия 2, 5.5 — линия 3

фекта максимум распределения приходится на границу раздела (рис. 11, линия 3), а его высота ниже, чем в отсутствие взаимодействия с дефектом (рис. 11, линия 3).

Из (29) видно, что при наличии взаимодействия возбуждения с границей раздела амплитуда поля на границе меньше, чем в домене (18). Следует отметить, что такого эффекта снижения амплитуды на границе не наблюдается при отсутствии взаимодействия, так как в этом случае, как следует из (19) и (29), $u_0 = u_m$. Следовательно, наличие взаимодействия возбуждения с границей раздела приводит к снижению амплитуды в плоскости дефекта в среде со ступенчатой нелинейностью.

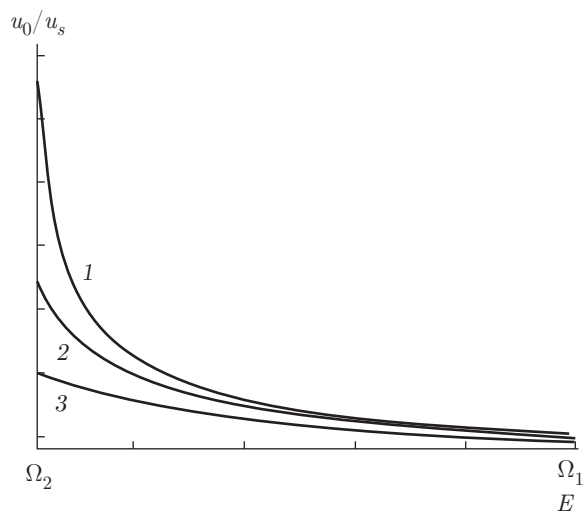


Рис. 13. Зависимости амплитуды поля u_0/u_s (29) на границе раздела сред от энергии при фиксированных параметрах, как и на рис. 11, и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : 0 — линия 1, 0.8 — линия 2, 1.5 — линия 3

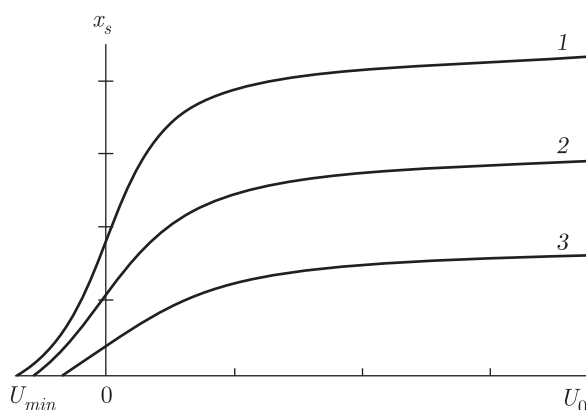


Рис. 14. Зависимости полуширины ширины домена x_s (16) с подстановкой фазы из (28) от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 11, и различных значениях энергии E : 2.1 — линия 1, 3 — линия 2, 5.9 — линия 3

Зависимость амплитуды на границе раздела сред (29) от интенсивности взаимодействия с дефектом приведена на рис. 12, а от энергии — на рис. 13. Зависимость $u_0(U_0)$ не является монотонной и имеет максимум $u_0 = u_m$ при $U_0 = 0$. С увеличением энергии высота максимума уменьшается, а его положение не меняется. С ростом энергии локализации амплитуда поля на границе монотонно уменьшается (рис. 13).

4.2.2. Зависимость ширины домена и условие локализации

На рис. 14 показана зависимость половины ширины домена (16) с подстановкой фазы из (28) от интенсивности взаимодействия с дефектом. Данная зависимость, так же как и в разд. 3.2.3, является монотонно возрастающей с ростом интенсивности взаимодействия с дефектом и достигает такого же порогового значения насыщения $x_0^{(\infty)}$. С увеличением энергии ширина домена уменьшается.

Ширина симметричного домена при отсутствии взаимодействия возбуждения с границей раздела определяется выражением

$$x_0^{(0)} = \frac{2}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{q_1}{p_2}.$$

Наименьшее значение интенсивности взаимодействия с притягивающим дефектом, начиная с которого формируется симметричный домен, определяется выражением $U_{min} = -q_1/m$.

Условие локализации, также как и в разд. 3.2.1, меняется. При наличии взаимодействия с дефектом происходит сужение диапазона существования локальных состояний рассматриваемого типа: $E < E_L(\Omega_1)$, где $E_L(\Omega_1)$ — локальный уровень (7) при $\Omega = (\Omega_1)$. При $E = E_L(\Omega_1)$ не происходит формирования домена, так как $x_s = 0$.

4.3. Поток энергии

В силу симметрии системы полный поток (21) можно представить в виде суммы двух частей:

$$P = 2(P_1 + P_2), \tag{30}$$

где его компоненты вычисляются с использованием соответственно (26) и (27).

Поток за доменом P_1 в нелинейном кристалле при $x > x_s$ определяется прежним выражением (24).

Поток в домене P_2 при $0 < x < x_s$ имеет вид

$$P_2 = \frac{u_s^2}{2} \left\{ x_s + \frac{q_1}{q_1^2 + p_2^2} + \frac{mU_0}{p_2^2 + (mU_0)^2} \right\}. \tag{31}$$

Данную компоненту потока можно представить в виде

$$P_2 = P_2^{(0)} + P_2^{(U)}, \tag{32}$$

где не зависящая от интенсивности взаимодействия с дефектом часть равна

$$P_2^{(0)} = \frac{u_s^2}{2p_2^2} \left\{ q_1 + \frac{q_1^2 + p_2^2}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{q_1}{p_2} \right\}, \tag{33}$$

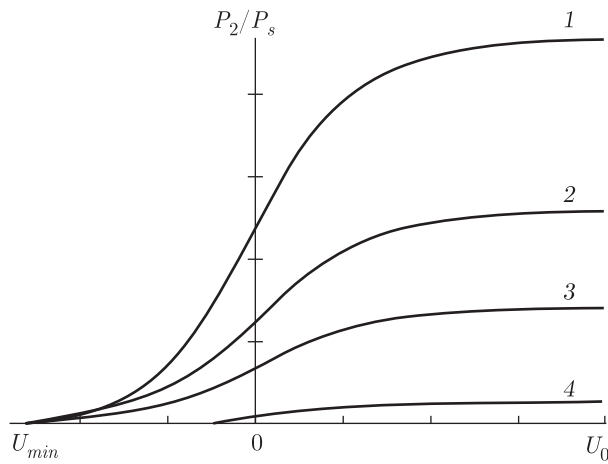


Рис. 15. Зависимости компоненты потока P_1/P_s в нелинейном кристалле за доменом (31) от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 11, и различных значениях энергии E : 2.1 — линия 1, 2.6 — линия 2, 3 — линия 3, 5.9 — линия 4

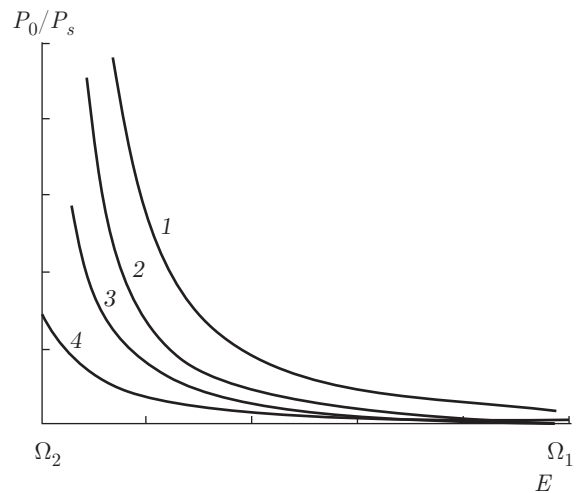


Рис. 16. Зависимости компоненты потока P_1/P_s в нелинейном кристалле за доменом (31) от энергии при фиксированных параметрах, как и на рис. 11, и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : 3 — линия 1, 0.5 — линия 2, 0 — линия 3, -0.5 — линия 4

а зависящая от интенсивности взаимодействия с дефектом часть записывается как

$$P_2^{(U)} = \frac{u_m^2}{2} \left\{ \frac{1}{p_2} \arctg \frac{mU_0}{p_2} + \frac{mU_0}{p_2^2 + (mU_0)^2} \right\}. \quad (34)$$

При отсутствии взаимодействия компонента потока (34) пропадает: $P_2^{(U)} = 0$ и $P_2 = P_2^{(0)}$.

Поскольку поток в нелинейном кристалле за доменом P_1 не зависит от интенсивности взаимодействия с дефектом, полный поток представим виде

$$P = P^{(0)} + 2P_2^{(U)}, \quad P^{(0)} = 2(P_1 + P_2^{(0)}).$$

При малой по модулю интенсивности взаимодействия с дефектом (когда $|U_0| \ll p_2/m$) полный поток линейно возрастает с увеличением U_0 по закону

$$P = P^{(0)} + 2mU_0u_m^2/p_2^2. \quad (35)$$

При сильной интенсивности взаимодействия с дефектом (когда $U_0 \gg p_2/m$) полный поток с увеличением U_0 достигает порога насыщения:

$$P = P^{(0)} + \pi u_m^2/2p_2. \quad (36)$$

Зависимость компоненты потока в домене (31) от интенсивности взаимодействия с дефектом приведена на рис. 15, а от энергии — на рис. 16. Данная компонента потока монотонно возрастает (рис. 15), начиная с наименьшего значения U_{min} , и затем достигает порогового значения насыщения (36). Рост энергии локализации приводит к снижению доли потока в домене (рис. 16).

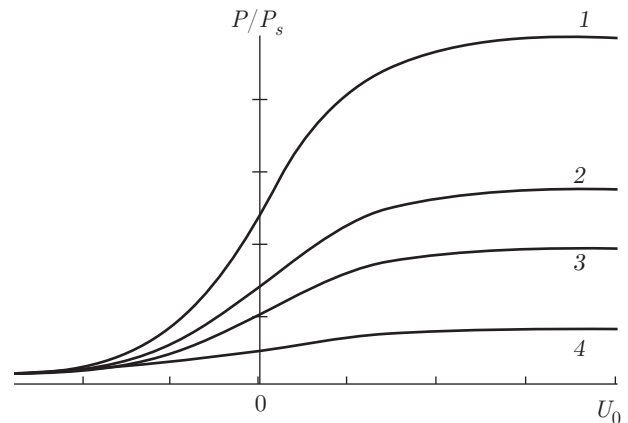


Рис. 17. Зависимости полного потока P/P_s (30) от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 11, и различных значениях энергии E : 2.1 — линия 1, 2.6 — линия 2, 3 — линия 3, 5.9 — линия 4

Зависимость полного потока (30) от интенсивности взаимодействия с дефектом приведена на рис. 17, а от энергии — на рис. 18. Зависимость $P(U_0)$ является монотонно возрастающей с ростом интенсивности взаимодействия (рис. 17).

Зависимости полного потока от энергии, как и в разд. 3.3, характеризуется наличием минимума (рис. 18). Значение минимума существенно зависит от интенсивности взаимодействия с дефектом. Энергия минимизации полного потока E_{min} монотонно возрастает от U_{min} в допустимом диапазоне (рис. 19). Минимальное значение полного потока

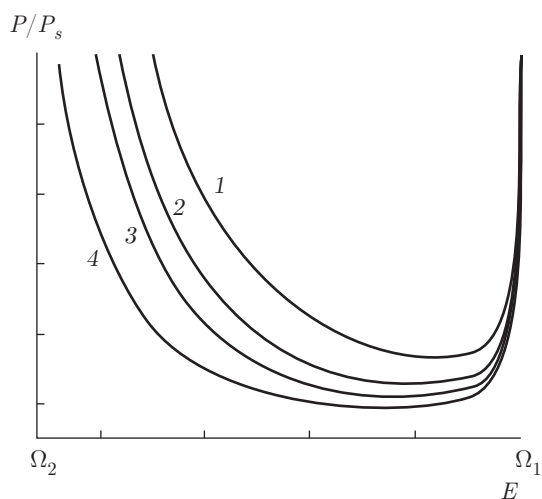


Рис. 18. Зависимости полного потока P/P_s (30) от энергии при фиксированных параметрах, как и на рис. 11, и различных значениях интенсивности взаимодействия U_0 : 3 — линия 1, 0.5 — линия 2, 0 — линия 3, -0.5 — линия 4

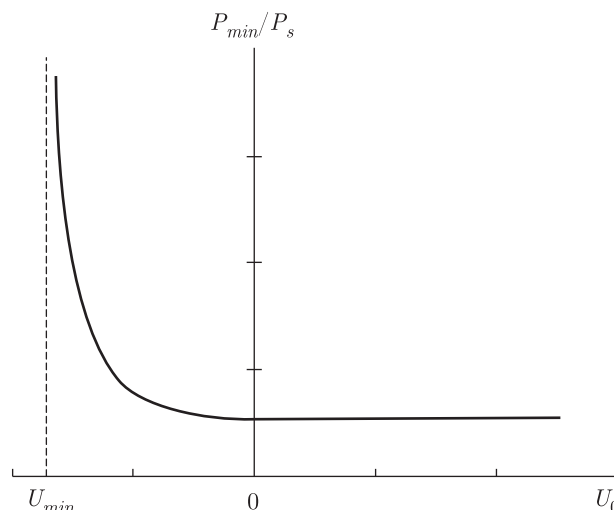


Рис. 20. Зависимость порогового (минимального) значения полного потока P_{min} от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 11

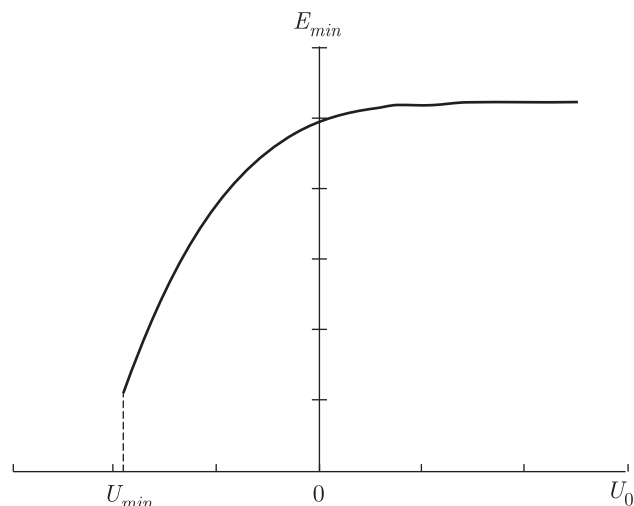


Рис. 19. Зависимость энергии минимизации полного потока E_{min} от интенсивности взаимодействия U_0 при фиксированных параметрах, как и на рис. 11

P_{min} убывает с ростом интенсивности взаимодействия с дефектом и для отталкивающего дефекта практически совпадает со случаем отсутствия взаимодействия (рис. 20).

Таким образом, пороговое значение полного потока, начиная с которого будет существовать локализованное состояние рассматриваемого типа и происходить формирование симметричного домена, может контролироваться интенсивности взаимодействия с дефектом.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере простой модели среды со ступенчатой нелинейностью показано, что взаимодействие возбуждений с плоским дефектом приводит к принципиально новым возможностям управления значением амплитуды поля локализованного состояния на границе. В модели контакта линейной среды с нелинейной средой, характеризующейся мгновенным переключением в зависимости от амплитуды поля, наличие взаимодействия возбуждения с границей приводит к тому, что амплитуда поля в плоскости дефекта может быть максимальной. Она может превышать амплитуду поля в приповерхностном домене, чего не наблюдалось в случае отсутствия такого взаимодействия.

При наличии взаимодействия возбуждений с плоским дефектом в нелинейной среде с переключением появляется возможность снижения амплитуды на границе по сравнению с амплитудой в домене. Показано, что для отталкивающего дефекта поле локализованного состояния имеет два максимума, симметрично расположенных в домене, высота которых превышает амплитуду поля на границе.

Проанализировано влияние интенсивности взаимодействия с дефектом на поток энергии и его распределение между структурными зонами контактирующих сред. При увеличении абсолютного значения интенсивности взаимодействия с дефектом наблюдается снижение порогового значения потока, начиная с которого происходит локализация поля вблизи плоского дефекта и формирование домена.

Регулировка уровня интенсивности поля на границе раздела сред и потока энергии может осуществляться путем изменения интенсивности взаимодействия волны с границей раздела. Поэтому полученные в работе результаты могут иметь значение при проектировании электрооптических элементов устройств, основанных на использовании волноводных свойств и локализации световых пучков вдоль поверхностей раздела контактирующих сред [55–58].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Гурзадян, В. Г. Дмитриев, Д. Н. Никогосян, *Нелинейно-оптические кристаллы: Свойства и применение в квантовой электронике*, Радио и связь, Москва (1991).
2. S. Leble, *Waveguide Propagation of Nonlinear Waves*, Springer (2019).
3. O. Takayama, A. A. Bogdanov, and A. V. Lavrinenko, *J. Phys.: Cond. Matt.* **29**, 463001 (2017).
4. Z. A. Munazza, *Phys. Lett. A*, **381**, 2643 (2017).
5. Д. Михалаке, Р. Г. Назмитдинов, В. К. Федянин, *Физика элементарных частиц и атомного ядра* **20**, 198 (1989).
6. И. Е. Дикштейн, С. А. Никитов, И. Е. Никитов, *ФТТ* **40**, 1885 (1998).
7. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, A. A. Zharov, A. D. Boardman, and P. Egan, *Phys. Rev. E* **69**, 016617 (2004).
8. M. S. Hamada, A. I. Assa'd, H. S. Ashour, and M. M. Shabat, *J. Micr. Opt.* **5**, 45 (2006).
9. О. В. Коровай, П. И. Хаджи, *ФТТ* **50**, 1116 (2008).
10. Y. V. Bludov, D. A. Smirnova, Y. S. Kivshar, N. M. R. Peres, and M. I. Vasilevsky, *Phys. Rev. B* **89**, 035406 (2014).
11. D. Valovik, *J. Nonlin. Opt. Phys. Mater.* **25**, 1650051 (2016).
12. I. S. Panyaev and D. G. Sannikov, *J. Opt. Soc. Amer. B* **33**, 220 (2016).
13. K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovskiy, and V. V. Papko, *JETP* **44**, 306 (1976).
14. U. S. Kivshar, A. M. Kosevich, and O. A. Chubykalo, *Phys. Lett. A* **125**, 35 (1987).
15. М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, *ФНТ* **23**, 197 (1997).
16. U. S. Kivshar, A. M. Kosevich, and O. A. Chubykalo, *Phys. Rev. A* **41**, 1677 (1990).
17. И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, *ФНТ* **26**, 799 (2000).
18. С. Е. Савотченко, *Изв. ВУЗов. Физика* **47**, 79 (2004).
19. H. Sakaguchi and B. A. Malomed, *New J. Phys.* **18**, 025020 (2016).
20. С. Е. Савотченко, *Изв. ВУЗов. Физика* **62**, 3 (2019).
21. С. Е. Савотченко, *ЖТФ* **89**, 163 (2019).
22. С. Е. Савотченко, *ФТТ* **61**, 626 (2019).
23. С. Е. Савотченко, *Опт. и спектр.* **126**, 556 (2019).
24. E. C. Jarque and V. A. Malyshev, *Opt. Commun.* **142**, 66 (1997).
25. A. Schuzgen, N. Peyghambarian, and S. Hughes, *Phys. Stat. Sol. (b)* **206**, 125 (1999).
26. А. Е. Каплан, *IEEE J. Quant. Electr.* **21**, 1538 (1985).
27. R. H. Enns, S. S. Rangnekar, and A. E. Kaplan, *Phys. Rev. A* **35**, 466 (1987).
28. R. H. Enns, S. S. Rangnekar, and A. E. Kaplan, *Phys. Rev. A* **36**, 1270 (1987).
29. R. H. Enns and S. S. Rangnekar, *Opt. Lett.* **12**, 108 (1987).
30. П. И. Хаджи, Л. В. Федоров, *ЖТФ* **61**, 110 (1991).
31. Н. Н. Белецкий, Е. А. Гасан, *ФТТ* **36**, 647 (1994).
32. К. Д. Ляхомская, П. И. Хаджи, *ЖТФ* **70**, 86 (2000).
33. S. E. Savotchenko, *Romanian J. Phys.* **65**, 202 (2020).
34. С. Е. Савотченко, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 481 (2018).
35. С. Е. Савотченко, *Опт. и спектр.* **126**, 556 (2019).
36. С. Е. Савотченко, *Опт. и спектр.* **127**, 159 (2019).
37. S. E. Savotchenko, *Mod. Phys. Lett. B* **33**, 1950385 (2019).
38. П. И. Хаджи, А. М. Русанов, С. Л. Гайван, *КЭ* **27**, 262 (1999).
39. А. В. Коровай, П. И. Хаджи, *КЭ* **31**, 937 (2001).
40. П. И. Хаджи, А. В. Коровай, *КЭ* **32**, 711 (2002).

41. V. E. Wood, E. D. Evans, and R. P. Kenan, *Opt. Commun.* **69**, 156 (1988).
42. J. M. Christian, G. S. McDonald, and P. Chamorro-Posada, *J. Opt. Soc. Amer. B* **26**, 2323 (2009).
43. P. Roussignol, D. Ricard, J. Lukasik, and C. Flytzanis, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 5 (1987).
44. J.-L. Coutaz and M. Kull, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 95 (1991).
45. T. Catunda and L. A. Cury, *J. Opt. Soc. Amer. B* **7**, 1445 (1990).
46. Q. Wang Song, C. Zhang, R. B. Gross, and R. R. Birde, *Opt. Commun.* **112**, 296 (1994).
47. Q. Wang Song, X. Wang, R. R. Birge, J. D. Downie, D. Timucin, and C. Gary, *J. Opt. Soc. Amer. B* **15**, 1602 (1998).
48. S. Bian, J. Frejlich, K. H. Ringhofer, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4035 (1997).
49. D. N. Christodoulides and M. I. Carvalho, *J. Opt. Soc. Amer. B* **12**, 1628 (1995).
50. W. Krolikowski and B. Luther-Davies, *Opt. Lett.* **17**, 1414 (1992).
51. J. Herrmann, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 1507 (1991).
52. S. Gatz and J. Herrmann, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 2296 (1991).
53. A. E. Kaplan, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1291 (1985).
54. П. В. Елютин, В. Д. Кривченков, *Квантовая механика (с задачами)*, Физматлит, Москва (2001).
55. R. Menzel, *Photonics: Linear and Nonlinear Interactions of Laser Light and Matter*, Springer Science & Business Media, Berlin–Heidelberg–New York (2007).
56. M. Liu, D. A. Powell, Y. Zarate, and I. V. Shadrivov, *Phys. Rev. X* **8**, 031077 (2018).
57. *Surface Waves: New Trends and Developments*, ed. by F. Ebrahimi, IntechOpen (2018).
58. Y. Jia, Y. Liao, L. Wu, Y. Shan, X. Dai, H. Cai, Y. Xiang, and D. Fan, *Nanoscale* **7**, 4515 (2019).