

ПЕРЕНОРМИРУЕМАЯ $B-L$ -МОДЕЛЬ МАСС И СМЕШИВАНИЙ ЛЕПТОНОВ С ДИСКРЕТНОЙ D_5 -СИММЕТРИЕЙ

*V. V. Vien**

*Theoretical Particle Physics and Cosmology Research Group,
Advanced Institute of Materials Science, Ton Duc Thang University,
Ho Chi Minh City, Vietnam,
Faculty of Applied Sciences,
Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam*

Поступила в редакцию 22 февраля 2020 г.,
после переработки 8 апреля 2020 г.
Принята к публикации 20 апреля 2020 г.

(Перевод с английского)

THE RENORMALIZABLE $B-L$ -MODEL WITH D_5 DISCRETE SYMMETRY FOR LEPTON MASSES AND MIXINGS

V. V. Vien

Предложена перенормируемая $B-L$ -стандартная модель (СМ), расширенная D_5 -симметрией, в рамках которой с использованием подхода с качелью типа I в главном порядке получены массы нейтрино и массы самых легких нейтрино для различных иерархий. Полученные физические параметры хорошо согласуются с результатами по осцилляциям нейтрино, приведенными в работе [1]. Модель предсказывает значения эффективной массы нейтрино $\langle m_{ee} \rangle = 3.731 \cdot 10^{-3}$ эВ для нормальной иерархии (НИ) и $\langle m_{ee} \rangle = 4.848 \cdot 10^{-2}$ эВ для обратной иерархии (ОИ), что хорошо согласуется с недавно полученными экспериментальными результатами для ограничений безнейтринного двойного бета-распада.

DOI: 10.31857/S0044451020110085

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди всевозможных расширений СМ, расширение с дополнительной калибровочной $U(1)_{B-L}$ -симметрией [2–21] является одним из наиболее многообещающих. В рамках этой модели при нарушении калибровочной $B-L$ -симметрии возникают массы нового бозона Z' и трех правосторонних нейтрино [7, 8]. Несмотря на то, что данная модель объясняет и другие явления, а именно, темную материю [9–14], аномальный магнитный момент мюона [15], инфляцию [16], происхождение лептонов [17, 18], излучение гравитационных волн [19] и т. д., в ее рамках невозможно получить матрицы смешивания лептонов.

Значения параметров осцилляций для уровня достоверности 1σ , соответствующие данным, полученным на детекторе атмосферных нейтрино Супер-Камиоканде (wSK-atm), приведены в работе [1]:

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= (7.39_{-0.2}^{+0.21}) 10^{-5} \text{ эВ}^2, \\ \Delta m_{31}^2 &= (2.525_{-0.031}^{+0.033}) 10^{-3} \text{ эВ}^2, \\ \Delta m_{32}^2 &= - (2.512_{-0.031}^{+0.034}) 10^{-3} \text{ эВ}^2, \\ \sin^2 \theta_{12} &= 0.310_{-0.012}^{+0.013}, \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0.582_{-0.019(8)}^{+0.015}, \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.02240_{-0.00066}^{+0.00065} \quad (\text{НИ}) \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.02263_{-0.00066}^{+0.00065} \quad (\text{ОИ}) \\ \delta(^{\circ}) &= 217_{-28}^{+40} \quad (\text{НИ}), \\ \delta(^{\circ}) &= 280_{-28}^{+25} \quad (\text{ОИ}). \end{aligned} \tag{1}$$

Для уровня достоверности 3σ значения элементов матрицы смешивания лептонов изменяются в следующих диапазонах [1]:

* E-mail: vovanvien@tdtu.edu.vn

$$|U_{\text{wSK-atm}}^{3\sigma}| = \begin{pmatrix} 0.797 \rightarrow 0.842 & 0.518 \rightarrow 0.585 & 0.143 \rightarrow 0.156 \\ 0.235 \rightarrow 0.484 & 0.458 \rightarrow 0.671 & 0.647 \rightarrow 0.781 \\ 0.304 \rightarrow 0.531 & 0.497 \rightarrow 0.699 & 0.607 \rightarrow 0.747 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Это мотивировало нас обратиться к дискретным симметриям, поскольку они успешно описывают наблюдаемые массы лептонов и их смешивания (см., например, работы [22–27]). D_5 -симметрия [28] привлекает внимание исследователей, поскольку с ее помощью можно эффективно описывать и предсказывать наблюдаемые массы лептонов и углы смешивания [29, 30], однако в работе [29] обсуждалось только нормальное упорядочение масс нейтрино, а в работе [30] было предложено расширение $U(1)_X$ СМ D_5 -симметрией с неминимальным скалярным сектором, куда входят четыре D_5 -дублета, и лептонным сектором с двумя D_5 -синглетами. Поэтому было бы полезно предложить более простую D_5 -модель с несколькими хиггсовскими полями и хиггсовским потенциалом. В настоящей работе для получения масс лептонов и их смешиваний мы предлагаем использовать расширение $B-L$ -стандартной модели D_5 -симметрией с тремя D_5 -дублетами и двумя D_5 -синглетами.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 представлена $B-L$ -стандартная модель, расширенная D_5 -симметрией, и введены необходимые хиггсовские поля. Раздел 4 представляет собой Заключение.

2. МОДЕЛЬ

В предложенной модели калибровочная группа СМ дополнена калибровочной симметрией $U(1)_{B-L}$ и дискретной D_5 -симметрией. Кроме предписаний СМ, в лептонном секторе дополнительно вводятся три правосторонних нейтрино (ν_{iR}), четыре¹⁾ $SU(2)_L$ -дублета (φ, ϕ) с $B-L=0$, соответственно, в $\underline{2}_1$ - и $\underline{2}_2$ -представлениях D_5 -симметрии и три $SU(2)_L$ -синглета (χ, η) с $B-L=2$, соответственно, в $\underline{1}_1$ - и $\underline{2}_1$ -представлениях D_5 -симметрии. Соответствующие значения, приписываемые лептонам и скалярным полям в рамках

¹⁾ φ и ϕ находятся, соответственно, в $\underline{2}_1$ - и $\underline{2}_2$ -представлениях D_5 -симметрии, так что каждый из них содержит два $SU(2)_L$ -дублета; η находится в $\underline{2}_1$ -представлении D_5 -симметрии и содержит два $SU(2)_L$ -синглета.

$SU(2)_L \times U(1)_{B-L} \times D_5$ -симметрии²⁾, приведены в табл. 1.

Для приведенных в табл. 1 значений, приписываемых лептонам и скалярным полям, с учетом тензорного произведения группы D_5 , можно получить массы заряженных лептонов, рассматривая взаимодействие $\bar{\psi}_{(1,\alpha)L} l_{(1,\alpha)R}$ со скалярными полями, где в рамках $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L} \times D_5$ -симметрии $\bar{\psi}_{1L} l_{1R}$ преобразуется как $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2, 0, \underline{1}_1)$, а $\bar{\psi}_{\alpha L} l_{\alpha R}$ — как $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2, 0, \underline{1}_1 + \underline{2}_1 + \underline{2}_1)$. Таким образом, чтобы получить диагональную массовую матрицу заряженных лептонов, мы вводим один D_5 -синглет $\underline{1}_1$ и один D_5 -дублет $\underline{2}_1$, см. табл. 1. Аналогично, массовую матрицу нейтрино можно получить, рассматривая взаимодействие $\bar{\psi}_{iL} \nu_{jR}$ ($i, j = 1, 2, 3$) со скалярными полями. Для известных скалярных полей (H, φ) доступными являются взаимодействия $(\bar{\psi}_{\alpha L} \nu_{\alpha R})_{\underline{1}_1} \tilde{H}$ и $(\bar{\psi}_{\alpha L} \nu_{\alpha R})_{\underline{2}_1} \tilde{\varphi}$, однако они порождают только четыре элемента (22), (33), (23), (32) дираковского массового члена. Вообще говоря, нейтрино могут иметь как дираковские, так и майорановские массовые члены, поэтому мы введем один новый D_5 -дублет $\underline{2}_2$ с $B-L=0$, один D_5 -синглет $\underline{1}_1$ с $B-L=2$ и один D_5 -дублет $\underline{2}_1$ с $B-L=2$, см. табл. 1, взаимодействующие с $\bar{\psi}_{1L} \nu_{\alpha R}$, $\bar{\psi}_{\alpha L} \nu_{1R}$, $\bar{\nu}_{1R}^c \nu_{1R}$, $\bar{\nu}_{\alpha R}^c \nu_{\alpha R}$, которые определяют реальные массы нейтрино и их смешивания.

Поскольку в потенциале Хиггса имеется много юкавских взаимодействий, можно выбрать подходящий потенциал Хиггса (см., например, работы [31, 32]). В рамках D_5 -симметрии для каждого D_5 -дублета $\Phi = \varphi/\phi/\eta$ может реализоваться четыре следующих варианта:

- (1) $\langle \Phi_1 \rangle \neq \langle \Phi_2 \rangle \neq 0$, D_5 нарушается до {единицы};
- (2) $\langle \Phi_1 \rangle = \langle \Phi_2 \rangle \neq 0$, D_5 нарушается до {единицы};
- (3) $0 = \langle \Phi_1 \rangle \neq \langle \Phi_2 \rangle$, D_5 нарушается до {единицы};
- (4) $\langle \Phi_1 \rangle \neq \langle \Phi_2 \rangle = 0$, D_5 нарушается до Z_2 , состоящей из двух элементов $\{a, b\}$, где a соответствует $\frac{2\pi}{5}$ -вращению, а b — отражению.

Каждый вариант дает различную структуру для массовых матриц лептонов и нейтрино ($M_l; M_D, M_R$). Более того, как показано в Приложении В, в нашей модели в скалярном потенциале

²⁾ Величины, приписываемые в рамках $SU(3)_c \times U(1)_Y$ -симметрии, соответствуют величинам из работы [30].

Таблица 1. Значения, приписываемые лептонам и скалярным полям, в рамках $SU(2)_L \times U(1)_{B-L} \times D_5$ -симметрии, $\alpha = 2, 3$

	$\bar{\psi}_{1L}$	$\bar{\psi}_{\alpha L}$	l_{1R}	$l_{\alpha R}$	ν_{1R}	$\nu_{\alpha R}$	H	φ	ϕ	χ	η
$SU(2)_L$	2	2	1	1	1	1	2	2	2	1	1
$U(1)_{B-L}$	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	2	2
D_5	<u>1</u> ₁	<u>2</u> ₂	<u>1</u> ₁	<u>2</u> ₂	<u>1</u> ₂	<u>2</u> ₂	<u>1</u> ₁	<u>2</u> ₁	<u>2</u> ₂	<u>1</u> ₁	<u>2</u> ₁

имеется много свободных параметров, что позволяет делать произвольный выбор для вакуума, при этом удовлетворяя условию минимизации потенциала Хиггса. Таким образом, в настоящей работе мы считаем, что для вакуумного среднего (VEV) в секторе заряженных лептонов реализуется первый вариант, причем это можно получить с помощью $SU(2)_L$ -дублета φ с вакуумными средними как в (3). Далее, в нейтринном секторе мы выбираем три первых варианта. Первый можно реализовать с помощью φ , а второй и третий — соответственно с помощью $SU(2)_L$ -дублета ϕ и $SU(2)_L$ -синглета η с вакуумными средними как в (3).

Чтобы из условия минимизации потенциала получить искомое смешивание лептонов (см. Приложение В), выберем вакуумные средние скалярных полей следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= (0 v)^T, & \langle \varphi \rangle &= (\langle \varphi_1 \rangle, \langle \varphi_2 \rangle), \\ \langle \varphi_i \rangle &= (0 v_i)^T, & i &= 1, 2, \\ \langle \phi \rangle &= (\langle \phi_1 \rangle, \langle \phi_1 \rangle), & \langle \phi_1 \rangle &= (0 v_\phi)^T, & \langle \chi \rangle &= v_\chi, \\ \langle \eta \rangle &= (0, \langle \eta_2 \rangle), & \langle \eta_2 \rangle &= v_\eta. \end{aligned} \quad (3)$$

3. МАССЫ И СМЕШИВАНИЯ ЛЕПТОНОВ

Взаимодействие Юкавы для заряженных лептонов имеет вид³⁾

$$-\mathcal{L}_l = h_1 \bar{\psi}_{1L} H l_{1R} + h_2 (\bar{\psi}_{\alpha L} H)_{\underline{2}_2} l_{\alpha R} + h_3 (\bar{\psi}_{\alpha L} \varphi)_{\underline{2}_2} l_{\alpha R} + \text{H.c.} \quad (4)$$

С помощью уравнения (3) можно переписать массовый член в лагранжиане для заряженных лептонов в виде

$$-\mathcal{L}_l^{\text{mass}} = (\bar{l}_{1L} \bar{l}_{2L} \bar{l}_{3L}) M_l (l_{1R} l_{2R} l_{3R})^T + \text{H.c.}, \quad (5)$$

где

³⁾ Два взаимодействия $\bar{\psi}_{1L} \varphi l_{\alpha R}$ и $\bar{\psi}_{\alpha L} \varphi l_{1R}$ запрещены D_5 -симметрией.

$$M_l = \begin{pmatrix} h_1 v & 0 & 0 \\ 0 & h_3 v_1 & h_2 v \\ 0 & h_2 v & h_3 v_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b \\ 0 & b & a_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда параметры a и b вещественные, а $a_{1,2}$ — комплексные, т. е.

$$a_{1,2} = |a_{1,2}| e^{i\alpha_{1,2}}.$$

Сначала определим эрмитову матрицу m_l :

$$m_l = M_l^+ M_l = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & |a_1|^2 + b^2 & m_{23} \\ 0 & m_{23}^* & |a_2|^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$m_{23} = b(a_1^* + a_2).$$

Матрицу m_l можно диагонализировать с помощью матрицы $U_{lL,R}$, которая удовлетворяет соотношению

$$U_{lL}^+ m_l U_{lR} = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2),$$

где

$$U_{lL} = U_{lR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-i\alpha} \\ 0 & -\sin \theta e^{i\alpha} & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\alpha = -\frac{i}{2} \log \left(\frac{m_{23}^*}{m_{23}} \right), \quad (9)$$

$$\theta = \arctan \left(\left| \frac{\mathbb{A} + \mathbb{B} - |a_2|^2 - b^2}{m_{23}^*} \right| \right),$$

$$m_e^2 = a^2, \quad m_{\mu,\tau}^2 = \mathbb{B}_1 \mp \mathbb{B}_2, \quad (10)$$

$$\mathbb{B}_1 = \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2b^2}{2}, \quad (11)$$

$$\mathbb{B}_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(|a_1|^2 - |a_2|^2)^2 + 4|m_{23}|^2}.$$

Используя уравнение (10) и экспериментальные значения масс заряженных лептонов из работы [33], $m_e = 0.51099$ МэВ, $m_\mu = 105.65837$ МэВ, $m_\tau = 1776.86$ МэВ, получаем

$$a = 0.511 \cdot 10^6 \text{ эВ}, \quad \mathbb{B}_1 = 1.584 \cdot 10^{18} \text{ эВ}^2, \quad (12)$$

$$\mathbb{B}_2 = 1.573 \cdot 10^{18} \text{ эВ}^2.$$

Лагранжиан Юкавы в нейтринном секторе имеет вид

$$-\mathcal{L}_\nu = \frac{x_1}{2} (\bar{\psi}_{\alpha L} \nu_{\alpha R})_{\underline{1}_1} \tilde{H} + \frac{x_2}{2} (\bar{\psi}_{\alpha L} \nu_{\alpha R})_{\underline{2}_1} \tilde{\varphi} +$$

$$+ \frac{x_3}{2} (\bar{\psi}_{1L} \nu_{\alpha R})_{\underline{2}_2} \tilde{\varphi} + \frac{x_4}{2} (\bar{\psi}_{\alpha L} \nu_{1R})_{\underline{2}_2} \tilde{\varphi} + \frac{y_1}{2} \bar{\nu}_{1R}^c \nu_{1R} \chi +$$

$$+ \frac{y_2}{2} (\bar{\nu}_{\alpha R}^c \nu_{\alpha R})_{\underline{1}_1} \chi + \frac{y_3}{2} (\bar{\nu}_{\alpha R}^c \nu_{\alpha R})_{\underline{2}_1} \eta + \text{H.c.} \quad (13)$$

Комбинируя уравнения (3) и (13), получаем лагранжиан с массами нейтрино:

$$-\mathcal{L}_\nu^{mass} = \frac{x_1 v}{2} \bar{\psi}_{2L} \nu_{3R} + \frac{x_1 v}{2} \bar{\psi}_{3L} \nu_{2R} + \frac{x_2 v_\varphi^*}{2} \bar{\psi}_{2L} \nu_{2R} +$$

$$+ \frac{x_2 v_\varphi^*}{2} \bar{\psi}_{3L} \nu_{3R} + \frac{x_3 v_\phi^*}{2} \bar{\nu}_{1L} \nu_{2R} + \frac{x_3 v_\phi^*}{2} \bar{\nu}_{1L} \nu_{3R} +$$

$$+ \frac{x_4 v_\phi^*}{2} \bar{\nu}_{2L} \nu_{1R} - \frac{x_4 v_\phi^*}{2} \bar{\nu}_{3L} \nu_{1R} + \frac{y_1 v_\chi}{2} \bar{\nu}_{1R}^c \nu_{1R} +$$

$$+ \frac{y_2 v_\chi}{2} (\bar{\nu}_{2R}^c \nu_{3R} + \bar{\nu}_{3R}^c \nu_{2R}) + \frac{y_3 v_\eta}{2} \bar{\nu}_{3R}^c \nu_{3R} + \text{H.c.} \quad (14)$$

Массовая матрица дираковского нейтрино и массовая матрица майорановского правостороннего нейтрино имеют вид

$$\mathbb{M}_D = \begin{pmatrix} 0 & a_D & a_D \\ b_D & c_D & d_D \\ -b_D & d_D & c_D \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbb{M}_R = \begin{pmatrix} a_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_R \\ 0 & b_R & c_R \end{pmatrix},$$

где

$$a_D = x_3 v_\phi^*, \quad b_D = x_4 v_\phi^*, \quad c_D = x_2 v_\varphi^*,$$

$$d_D = x_1 v, \quad a_R = y_1 v_\chi, \quad b_R = y_2 v_\chi, \quad (16)$$

$$c_R = y_3 v_\eta.$$

Эффективную массовую матрицу нейтрино можно получить, используя подход с качелью типа I:

$$\mathbb{M}_{eff} = \mathbb{M}_D^T \mathbb{M}_R^{-1} \mathbb{M}_D = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu & c_\nu \\ b_\nu & d_\nu & h_\nu \\ c_\nu & h_\nu & g_\nu \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$a_\nu = -\frac{b_D^2(2b_R + c_R)}{b_R^2},$$

$$b_\nu = \frac{b_D b_R d_D - b_D c_D (b_R + c_R)}{b_R^2},$$

$$c_\nu = \frac{b_D b_R c_D - b_D (b_R + c_R) d_D}{b_R^2}, \quad (18)$$

$$h_\nu = \frac{a_D^2}{a_R} + \frac{b_R(c_D^2 + d_D^2) - c_D c_R d_D}{b_R^2},$$

$$d_\nu = \frac{a_D^2}{a_R} + \frac{c_D(2b_R d_D - c_D c_R)}{b_R^2},$$

$$g_\nu = \frac{a_D^2}{a_R} + \frac{d_D(2b_R c_D - c_R d_D)}{b_R^2}.$$

Массовая матрица \mathbb{M}_{eff} из (17) имеет три собственных значения:

$$m_1 = 0, \quad m_{2,3} = \mathbb{A} \mp \mathbb{B}, \quad (19)$$

где

$$\mathbb{A} = \frac{a_D^2}{a_R} -$$

$$- \frac{c_D^2 c_R + b_D^2(2b_R + c_R) - 4b_R c_D d_D + c_R d_D^2}{2b_R^2},$$

$$\mathbb{B} = \sqrt{\Gamma} / (2a_R b_R^2), \quad \Gamma = 4a_D^4 b_R^4 +$$

$$+ 4a_D^2 a_R b_R^2 [b_D^2(2b_R + c_R) - 2c_D c_R d_D +$$

$$+ 2b_R(c_D^2 + d_D^2)] + a_R^2(b_D^2 + c_D^2 + d_D^2) \times$$

$$\times [b_D^2(2b_R + c_R)^2 - 8b_R c_D c_R d_D +$$

$$+ (4b_R^2 + c_R^2)(c_D^2 + d_D^2)].$$

Соответствующая матрица смешивания имеет вид

$$\mathbb{R}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{\mathbb{K}_1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\mathbb{K}_2}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где введены новые параметры $\mathbb{K}, \mathbb{K}_{1,2}$ и $\mathbb{N}_{1,2}$ (явные выражения для них приведены в Приложении А), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\mathbb{K}_1 - \mathbb{N}_1 + 1 &= 0, & \mathbb{K}\mathbb{K}_2 - \mathbb{N}_2 + 1 &= 0, \\ \mathbb{K}_1\mathbb{K}_2 + \mathbb{N}_1\mathbb{N}_2 + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Имеет ли спектр масс нейтрино нормальную или обратную иерархию, зависит от знака Δm_{31}^2

[33]. В случае нормальной иерархии (НИ) имеем $m_1 \ll m_2 \sim m_3$, поэтому масса самого легкого нейтрино равна $m_1 = 0$, в то время как при обратной иерархии (ОИ) $m_3 \ll m_1 \sim m_2$, поэтому масса самого легкого нейтрино равна $m_3 = 0$. Массовая матрица нейтрино M_{eff} в уравнении (17) диагонализуется:

$$U_\nu^T M_{eff} U_\nu = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, & U_\nu = \begin{pmatrix} \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{\mathbb{K}_1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\mathbb{K}_2}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{\mathbb{N}_1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\mathbb{N}_2}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \end{pmatrix} & \text{для НИ,} \\ \begin{pmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & U_\nu = \begin{pmatrix} \frac{\mathbb{K}_2}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} & \frac{\mathbb{K}_1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} \\ \frac{\mathbb{N}_2}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} & \frac{\mathbb{N}_1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & -\frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} \end{pmatrix} & \text{для ОИ,} \end{cases} \quad (23)$$

где $m_{2,3}, \mathbb{K}, \mathbb{K}_{1,2}$ и $\mathbb{N}_{1,2}$ определяются равенствами (19), (20) и (А.1), соответственно.

Соответствующая матрица смешивания лептонов имеет вид

$$U_{lep} = U_L^\dagger U_\nu = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{\mathbb{K}_1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\mathbb{K}_2}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \\ -\frac{\cos \theta + \sin \theta e^{-i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{\mathbb{N}_1 \cos \theta - \sin \theta e^{-i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\mathbb{N}_2 \cos \theta - \sin \theta e^{-i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \\ \frac{\cos \theta - \sin \theta e^{i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} & \frac{\cos \theta + \mathbb{N}_1 \sin \theta e^{i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\cos \theta + \mathbb{N}_2 \sin \theta e^{i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} \end{pmatrix} & \text{для НИ,} \\ \begin{pmatrix} \frac{\mathbb{K}_2}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} & \frac{\mathbb{K}_1}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} \\ \frac{\mathbb{N}_2 \cos \theta - \sin \theta e^{-i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} & \frac{\mathbb{N}_1 \cos \theta - \sin \theta e^{-i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & -\frac{\cos \theta + \sin \theta e^{-i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} \\ \frac{\cos \theta + \mathbb{N}_2 \sin \theta e^{i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1}} & \frac{\cos \theta + \mathbb{N}_1 \sin \theta e^{i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1}} & \frac{\cos \theta - \sin \theta e^{i\alpha}}{\sqrt{\mathbb{K}^2 + 2}} \end{pmatrix} & \text{для ОИ.} \end{cases} \quad (24)$$

Инвариант Ярлского J_{CP} определяется из (24) [34–36]:

$$J_{CP} = \text{Im}(U_{23}U_{13}^*U_{12}U_{22}^*) = \begin{cases} \frac{(\mathbb{N}_2 - \mathbb{N}_1)\mathbb{K}_1\mathbb{K}_2 \cos \theta \sin \theta \sin \alpha}{(\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1)(\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1)} & \text{для НИ,} \\ \frac{(\mathbb{N}_1 + 1)\mathbb{K}\mathbb{K}_1 \cos \theta \sin \theta \sin \alpha}{(\mathbb{K}^2 + 2)(\mathbb{K}_1^2 + \mathbb{N}_1^2 + 1)} & \text{для ОИ.} \end{cases} \quad (25)$$

3.1. Спектр для случая нормальной иерархии

В стандартной параметризации матрицы смешивания лептонов [37–40] инвариант Ярлского имеет вид

$$J_{CP} = \text{Im}(U_{23}U_{13}^*U_{12}U_{22}^*) = s_{13}c_{13}^2s_{12}c_{12}s_{23}c_{23} \sin \delta. \quad (26)$$

Из (22) и (24) получаем

$$\begin{aligned} s_{13}^2 &= |\mathbb{U}_{13}|^2 = \left| \frac{\mathbb{K}_2^2}{\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1} \right|, \\ t_{12}^2 &= \left| \frac{\mathbb{U}_{12}}{\mathbb{U}_{11}} \right|^2 = \left| \frac{\mathbb{K}_2^2 (\mathbb{N}_2 + 1)^2}{(\mathbb{N}_2 - 1)^2 (\mathbb{K}_2^2 + \mathbb{N}_2^2 + 1)} \right|, \\ t_{23}^2 &= \left| \frac{\mathbb{U}_{23}}{\mathbb{U}_{33}} \right|^2 = \left| \frac{\mathbb{N}_2^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \mathbb{N}_2 \sin 2\theta \cos \alpha}{\mathbb{N}_2^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \mathbb{N}_2 \sin 2\theta \cos \alpha} \right|. \end{aligned} \tag{27}$$

Решая систему уравнений (27), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_2 &= -\frac{\sqrt{2}s_{13}\sqrt{s_{13}^2 + t_{12}^2}}{(t_{12} + s_{13})\sqrt{1 - s_{13}^2}}, \quad \mathbb{N}_2 = 1 - \frac{2s_{13}}{t_{12} - s_{13}}, \\ \alpha &= -\operatorname{arccsc} \left(\frac{(s_{13}^2 - t_{12}^2)(1 + t_{23}^2) \sin 2\theta}{\sin^2 \theta [(s_{13} - t_{12})^2 t_{23}^2 - (s_{13} + t_{12})^2] + \cos^2 \theta [(s_{13} + t_{12})^2 t_{23}^2 - (s_{13} - t_{12})^2]} \right). \end{aligned} \tag{28}$$

Затем, комбинируя уравнения (22), (25), (26) и (28), получаем

$$\sin \delta = \frac{t_{12} \sin \theta \cos \theta \sin \alpha}{s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} (1 + t_{12}^2)}, \tag{29}$$

$$\cos \alpha = \frac{(s_{13}^2 + t_{12}^2)(1 - t_{23}^2) - 2(1 - 2 \sin^2 \theta)(1 + t_{23}^2) s_{13} t_{12}}{(t_{12}^2 - s_{13}^2)(1 + t_{23}^2) \sin 2\theta}. \tag{30}$$

В случае НИ для уровня 1σ имеем следующие значения параметров осцилляций (данные wSK-atm) [1]:

$$\begin{aligned} 0.298 &\leq \sin^2 \theta_{12} \leq 0.322, \\ 0.02174 &\leq \sin^2 \theta_{13} \leq 0.02305, \\ 0.563 &\leq \sin^2 \theta_{23} \leq 0.597, \quad 189^\circ \leq \delta \leq 257^\circ. \end{aligned} \tag{31}$$

Используя оптимальные значения параметров θ_{12} и θ_{13} [1] (см. (31)), а именно, $\sin^2 \theta_{12} = s_{12}^2 = 0.310$, $\sin^2 \theta_{13} = s_{13}^2 = 0.02240$, получаем

$$U_{11} = 0.8213, \quad U_{12} = -0.5505, \quad U_{13} = -0.1497,$$

а также

$$\sin \theta = -0.5 \sqrt{1.149 + (1.701 + 1.835 \cdot 10^{-16} s_{23}^2) s_{23}^2 - 2s_{23} \sqrt{\beta_N}}, \tag{32}$$

$$\beta_N = 3.276 c_{23}^2 \cos^2 \delta + (1.561 + 8.418 \cdot 10^{-17}) 10^{-16} s_{23}^4. \tag{33}$$

На рис. 1 приведены зависимости $\sin \theta$, $\cos \alpha$ от $\sin \delta$ и s_{23} при $\delta \in (189^\circ, 257^\circ)$ и $\sin^2 \theta_{23} \in (0.563, 0.597)$. В случае оптимального значения параметра $\sin^2 \theta_{23} = 0.582$ [1] другие элементы матрицы смешивания лептонов U_{ij}^N ($i = 2, 3; j = 1, 2, 3$), а именно, $\sin \theta$ и $\cos \alpha$, зависят только от δ , что, соответственно, показано на рис. 2 и 3 при $\delta \in (189^\circ, 257^\circ)$. При $\delta = 217^\circ$ [1] получаем $\sin \theta = -0.436$ ($\theta = 335.02^\circ$), $\sin \alpha = -0.7754$ ($\alpha = 309.2^\circ$), другие параметры модели приведены в табл. 2. Тогда матрица смешивания лептонов из уравнения (24) принимает вид

$$U^N = \begin{pmatrix} 0.8213 & -0.5505 & -0.1497 \\ -0.2581 + 0.1321i & -0.5761 + 0.1228i & 0.703 + 0.2733i \\ 0.4732 - 0.1321i & 0.5388 - 0.2443i & 0.6152 + 0.1736i \end{pmatrix}. \tag{34}$$

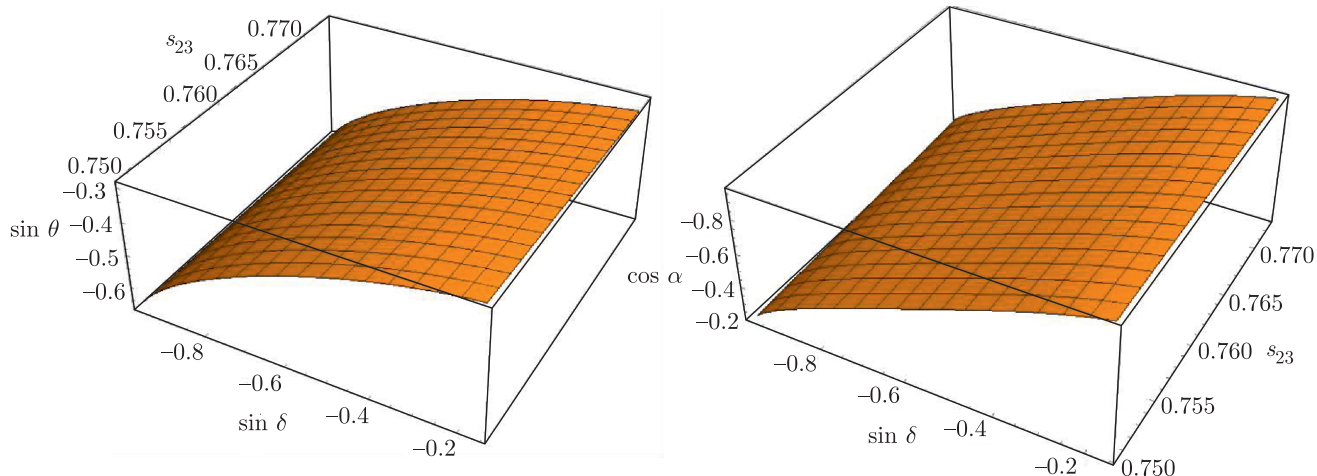


Рис. 1. Зависимости $\sin \theta$ и $\cos \alpha$ от $\sin \delta$ и $\sin^2 \theta_{23}$ при $\delta \in (189^\circ, 257^\circ)$ и $\sin^2 \theta_{23} \in (0.563, 0.597)$ для случая НИ

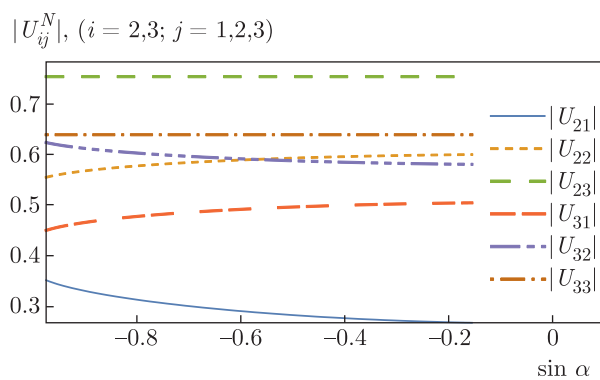


Рис. 2. Зависимости U_{ij}^I ($i = 2, 3; j = 1, 2, 3$) от $\sin \delta$ при $\delta \in (189^\circ, 257^\circ)$ для случая НИ

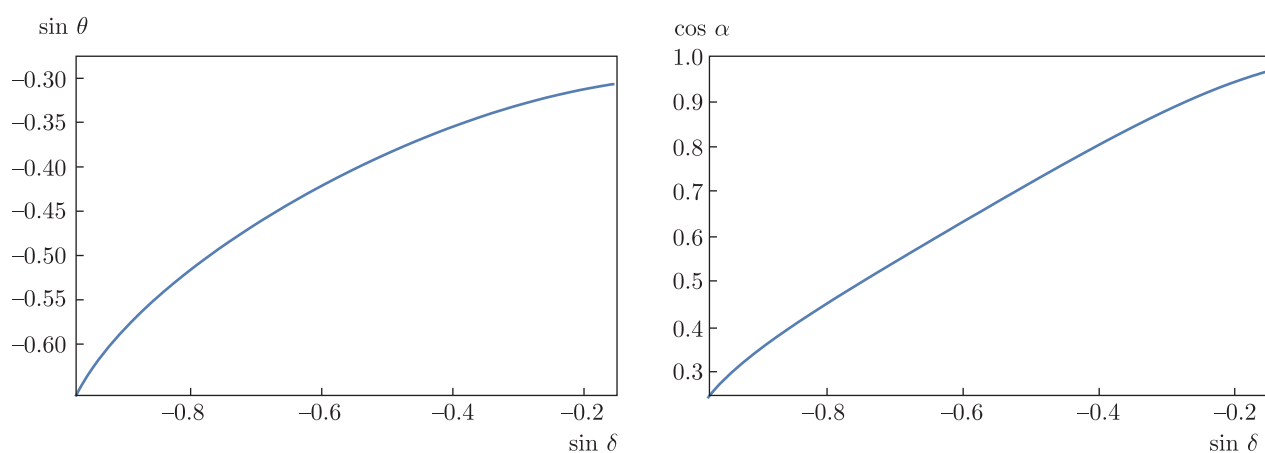


Рис. 3. Зависимости $\sin \theta$ и $\cos \alpha$ от $\sin \delta$ при $\delta \in (189^\circ, 257^\circ)$ для случая НИ

Она является унитарной, что не противоречит приведенным в работе [1] ограничениям, которые накладываются на абсолютные значения элементов матрицы смешивания лептонов.

Далее, используя данные для случая НИ [1],

$$\Delta m_{21}^2 = 7.37 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2, \quad \Delta m_{31}^2 = 2.525 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2,$$

получаем

$$\mathbb{A} = 2.942 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}, \quad \mathbb{B} = 2.083 \cdot 10^{-2} \text{ эВ},$$

а также явные значения для двух других масс нейтрино:

$$m_2 = 8.597 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}, \quad m_3 = 5.025 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

3.2. Спектр для случая обратной иерархии

В случае обратной иерархии из соотношений

$$t_{12}^2 = \left| \frac{U_{12}}{U_{11}} \right|^2, \quad s_{13}^2 = |U_{13}|^2, \quad t_{23}^2 = \left| \frac{U_{23}}{U_{33}} \right|^2$$

получаем решение

$$\mathbb{K}_2 = \frac{\sqrt{2}c_{13}}{t_{12} - s_{13}}, \quad \mathbb{N}_2 = 1 + \frac{2s_{13}}{t_{12} - s_{13}}, \quad (35)$$

$$\alpha = \text{arcsec} \left(\frac{(t_{23}^2 + 1) \sin 2\theta}{t_{23}^2 - 1} \right).$$

Комбинируя соотношения (26), (22), (25) и (35), получаем

$$U^I = \begin{pmatrix} 0.8212 & -0.5504 & -0.1504 \\ 0.3362 + 0.1938i & 0.3349 + 0.4104i & -0.6099 + 0.4437i \\ 0.2853 + 0.306i & 0.5514 + 0.3352i & 0.4601 - 0.4437i \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Эта матрица является унитарной, что не противоречит приведенным в работе [1] ограничениям.

Далее, используя данные для случая ОИ [1],

$$\Delta m_{21}^2 = 7.39 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2, \quad \Delta m_{32}^2 = -2.512 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2,$$

получаем

$$\mathbb{A} = 4975 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}, \quad \mathbb{B} = -3.714 \cdot 10^{-4} \text{ эВ},$$

а также явные значения для двух других масс нейтрино:

$$m_1^I = 4.938 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}, \quad m_2^I = 5.012 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

$$\sin \delta = -\frac{t_{12} \sin \theta \cos \theta \sin \alpha}{s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} (1 + t_{12}^2)}, \quad (36)$$

$$\cos \alpha = \frac{t_{23}^2 - 1}{(t_{23}^2 + 1) \sin 2\theta}.$$

В случае ОИ для уровня 1σ имеем следующие значения параметров осцилляций (данные wSK-atm) [1]:

$$0.298 \leq \sin^2 \theta_{12} \leq 0.322,$$

$$0.02197 \leq \sin^2 \theta_{13} \leq 0.02328, \quad (37)$$

$$0.564 \leq \sin^2 \theta_{23} \leq 0.597, \quad 252^\circ \leq \delta \leq 305^\circ.$$

Используя оптимальные значения параметров θ_{12} и θ_{13} [1], а именно, $s_{12}^2 = 0.310$, $s_{13}^2 = 0.02263$, получаем $U_{11} = 0.8212$, $U_{12} = -0.5504$, $U_{13} = -0.1504$, а также

$$\sin \theta = 0.5 \sqrt{2(1 - \cos \delta \sin 2\theta_{23})}. \quad (38)$$

На рис. 4 приведены зависимости $\sin \theta$ и $\cos \alpha$ от δ и $\sin \theta_{23}$ при $\delta \in (252^\circ, 305^\circ)$ и $\sin^2 \theta_{23} \in (0.564, 0.597)$. В случае оптимального значения параметра $\sin^2 \theta_{23} = 0.582$ [1] другие элементы матрицы смешивания лептонов U_{ij}^N ($i = 2, 3; j = 1, 2, 3$), а именно, $\sin \theta$ и $\cos \alpha$, зависят только от δ , что показано на рис. 5 и 6 при $\delta \in (252^\circ, 305^\circ)$. При $\delta = 280^\circ$ [1] получаем $\sin \theta = 0.6437$ ($\theta = 40.07^\circ$), $\alpha = 1.404$ ($\alpha = 80.42^\circ$), другие параметры модели приведены в табл. 3. Тогда матрица смешивания лептонов в уравнении (24) принимает вид

3.3. Эффективные массовые параметры нейтрино

Эффективные массовые параметры нейтрино имеют вид [41–45]

$$\langle m_{ee} \rangle = \left| \sum_{i=1}^3 U_{ei}^2 m_i \right|, \quad m_\beta = \left(\sum_{i=1}^3 |U_{ei}|^2 m_i^2 \right)^{1/2}, \quad (40)$$

где U_{ei} ($i = 1, 2, 3$) — элементы ПМНС-матрицы (матрицы Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты) смешивания лептонов, а m_i — массы трех легких нейтрино. Используя параметры модели из разд. 3.1 и 3.2, получаем следующие значения эффективной массы нейтрино $\langle m_{ee} \rangle$ и m_β для случаев нормальной и обратной иерархии:

Таблица 2. Параметры модели при $\delta = 217^\circ$ для случая НИ

Параметры	Полученные значения
\mathbb{K}	2.036
\mathbb{K}_1	-1.468
\mathbb{K}_2	-0.1793
\mathbb{N}_1	-1.99
\mathbb{N}_2	0.6349

Таблица 3. Параметры модели при $\delta = 280^\circ$ для случая ОИ

Параметры	Полученные значения
\mathbb{K}	0.2152
\mathbb{K}_1	-0.8513
\mathbb{K}_2	2.689
\mathbb{N}_1	0.8168
\mathbb{N}_2	1.579

$$\langle m_{ee} \rangle = \begin{cases} 3.731 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} & \text{для НИ,} \\ 4.848 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} & \text{для ОИ,} \end{cases} \quad (41)$$

и

$$m_\beta = \begin{cases} 8.886 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} & \text{для НИ,} \\ 4.904 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} & \text{для ОИ.} \end{cases} \quad (42)$$

Тогда сумма масс трех активных нейтрино равна

$$\Sigma = \begin{cases} 5.885 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} & \text{для НИ,} \\ 9.950 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} & \text{для ОИ.} \end{cases} \quad (43)$$

Этот результат хорошо согласуется с результатами для пределов значений сумм масс нейтрино, полученными в различных космологических моделях [46]:

- в минимальной $\Lambda\text{CDM} + \sum m_\nu$ -модели имеем $\sum m_\nu < 0.152$ эВ,
- в минимальной $\Lambda\text{CDM} + \sum m_\nu$ -модели с учетом данных высокого разрешения (high- l) имеем $\sum m_\nu < 0.118$ эВ,
- в DDE-модели с TT + BAO + PAN + $\tau 0p055$ имеем $\sum m_\nu < 0.305$ эВ,
- в DDE-модели с TT + BAO + PAN + $\tau 0p055$ имеем $\sum m_\nu < 0.305$ эВ,

- в DDE-модели с TTTEEE + BAO + PAN + R16 + $\tau 0p055$ имеем $\sum m_\nu < 0.247$ эВ,

- в NPDDE-модели с TTTEEE + BAO + PAN + $\tau 0p055$ имеем $\sum m_\nu < 0.101$ эВ.

Более того, значения эффективной массы нейтрино, полученные в уравнении (41), как для нормальной, так и для обратной иерархии лежат ниже всех верхних пределов соответствующих значений, полученных в экспериментах по $0\nu\beta\beta$ -распаду:

- KamLAND-Zen [47] имеем $\langle m_{ee} \rangle < 0.05 \div 0.16$ эВ,
- GERDA [48] имеем $\langle m_{ee} \rangle < 0.12 \div 0.26$ эВ,
- MAJORANA [49] имеем $\langle m_{ee} \rangle < 0.24 \div 0.53$ эВ,
- EXO [50–52] имеем $\langle m_{ee} \rangle < 0.17 \div 0.49$ эВ,
- CUORE [53] имеем $\langle m_{ee} \rangle < 0.11 \div 0.55$ эВ.

Кроме того, полученные результаты очень хорошо согласуются с возможными пределами (МэВ) значений эффективных масс нейтрино, которые могут быть достигнуты в запланированных на будущее экспериментах [54, 55].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе предложена перенормируемая B - L -стандартная модель, расширенная D_5 -симметрией, в которой иерархия масс нейтрино и масса самого легкого нейтрино получены в главном порядке с использованием подхода с качелью типа I. Полученные физические параметры хорошо согласуются с результатами для осцилляций нейтрино, приведенными в работе [1]. Модель предсказывает следующие значения эффективных масс нейтрино: $\langle m_{ee} \rangle = 3.731 \cdot 10^{-3}$ эВ для нормальной иерархии и $\langle m_{ee} \rangle = 4.848 \cdot 10^{-2}$ эВ для обратной иерархии, что хорошо согласуется с недавно полученными экспериментальными результатами для ограничений безнейтринного двойного бета-распада.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED), грант № 103.01-2017.341.

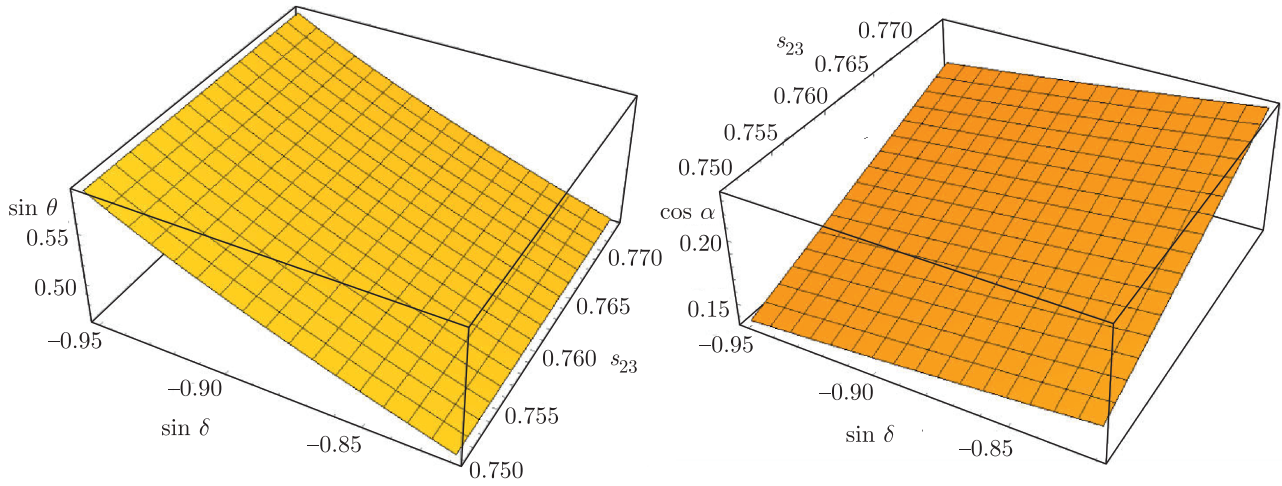


Рис. 4. Зависимости $\sin \theta$ и $\cos \alpha$ от $\sin \delta$ и $\sin^2 \theta_{23}$ при $\delta \in (252^\circ, 305^\circ)$ и $\sin^2 \theta_{23} \in (0.564, 0.597)$ для случая ОИ

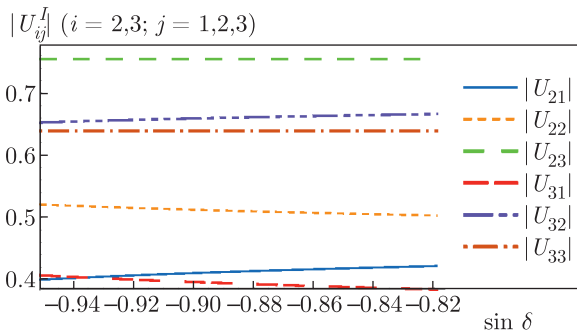


Рис. 5. Зависимости U_{ij}^I ($i = 2, 3; j = 1, 2, 3$) от $\sin \delta$ при $\delta \in (252^\circ, 305^\circ)$ для случая ОИ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Явные выражения для $\mathbb{K}, \mathbb{K}_{1,2}, \mathbb{N}_{1,2}$

$$\mathbb{K} = \frac{c_D - d_D}{b_D}, \quad \frac{\mathbb{K}_{1,2}}{b_D} = \frac{-\alpha_1 \mp \sqrt{\alpha_2}}{2\alpha_0}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbb{N}_{1,2} = \frac{-\alpha_3 \mp (c_D - d_D)\sqrt{\alpha_2}}{2\alpha_0},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_D^2 b_R^2 (c_D - d_D) + a_R \{ b_D^2 [b_{RC} - (b_R + c_R)d_D] + (c_D - d_D) \times \\ &\times [b_R(c_D^2 + d_D^2) - c_D c_R d_D] \}, \\ \alpha_1 &= 2a_D^2 b_R^2 + a_R [(b_D^2 + c_D^2)(2b_R + c_R) - \\ &- 2c_D c_R d_D + (2b_R - c_R)d_D^2], \\ \alpha_2 &= 4a_D^4 b_R^4 + 4a_D^2 a_R b_R^2 [b_D^2(2b_R + c_R) - \\ &- 2c_D c_R d_D + 2b_R(c_D^2 + d_D^2)] + \\ &+ a_R^2 (b_D^2 + c_D^2 + d_D^2) [b_D^2(2b_R + c_R)^2 - \\ &- 8b_{RC} c_R d_D + 4b_R^2(c_D^2 + d_D^2) + c_R^2(c_D^2 + d_D^2)], \\ \alpha_3 &= a_R c_R [b_D^2 + (c_D - d_D)^2] (c_D + d_D). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

5. ПРИЛОЖЕНИЕ В

Потенциал Хиггса

Перенормируемый инвариантный потенциал с учетом всех симметрий $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)_{B-L} \otimes \underline{D}_5$ имеет вид⁴⁾

$$\begin{aligned} V_{total} &= V(H) + V(\varphi) + V(\phi) + V(\chi) + V(\eta) + V(H, \varphi) + \\ &+ V(H, \phi) + V(H, \chi) + V(H, \eta) + V(\varphi, \phi) + V(\varphi, \chi) + \\ &+ V(\varphi, \eta) + V(\phi, \chi) + V(\phi, \eta) + V(\chi, \eta), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

где

$$V(H) = \mu_H^2 H^\dagger H + \lambda^H (H^\dagger H)^2, \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \mu_\varphi^2 \varphi^\dagger \varphi + \lambda_1^\varphi (\varphi^\dagger \varphi)_{\underline{1}_1} (\varphi^\dagger \varphi)_{\underline{1}_1} + \\ &+ \lambda_2^\varphi (\varphi^\dagger \varphi)_{\underline{1}_2} (\varphi^\dagger \varphi)_{\underline{1}_2} + \lambda_3^\varphi (\varphi^\dagger \varphi)_{\underline{2}_2} (\varphi^\dagger \varphi)_{\underline{2}_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \mu_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \lambda_1^\phi (\phi^\dagger \phi)_{\underline{1}_1} (\phi^\dagger \phi)_{\underline{1}_1} + \\ &+ \lambda_2^\phi (\phi^\dagger \phi)_{\underline{1}_2} (\phi^\dagger \phi)_{\underline{1}_2} + \lambda_3^\phi (\phi^\dagger \phi)_{\underline{2}_1} (\phi^\dagger \phi)_{\underline{2}_1}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$V(\chi) = V(H \rightarrow \chi), \quad V(\eta) = V(\varphi \rightarrow \eta), \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} V(H, \varphi) &= \lambda_1^{H\varphi} (H^\dagger H)_{\underline{1}_1} (\varphi^\dagger \varphi)_{\underline{1}_1} + \\ &+ \lambda_2^{H\varphi} (H^\dagger \varphi)_{\underline{2}_1} (\varphi^\dagger H)_{\underline{2}_1}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} V(H, \phi) &= \lambda_1^{H\phi} (H^\dagger H)_{\underline{1}_1} (\phi^\dagger \phi)_{\underline{1}_1} + \\ &+ \lambda_2^{H\phi} (H^\dagger \phi)_{\underline{2}_2} (\phi^\dagger H)_{\underline{2}_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

⁴⁾ Здесь обозначено $V(X \rightarrow X_1, Y \rightarrow Y_1, \dots) \equiv V(X, Y, \dots)_{\{X=X_1, Y=Y_1, \dots\}}$

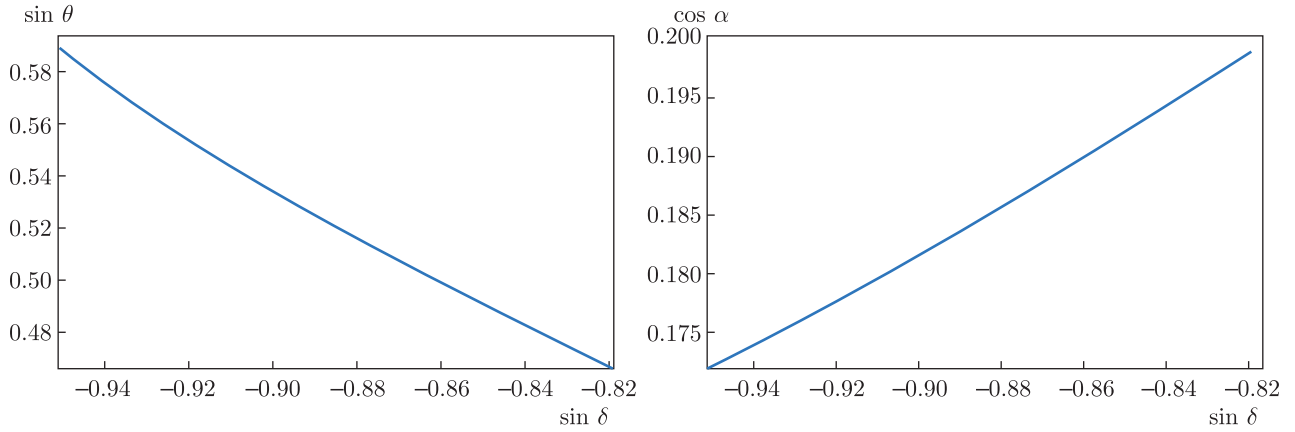


Рис. 6. Зависимости $\sin \theta$ и $\cos \alpha$ от $\sin \delta$ при $\delta \in (252^\circ, 305^\circ)$ для случая ОИ

$$V(H, \chi) = \lambda_1^{H\chi} (H^\dagger H)_{\perp 1} (\chi^\dagger \chi)_{\perp 1} + \lambda_2^{H\chi} (H^\dagger \chi)_{\perp 1} (\chi^\dagger H)_{\perp 1}, \quad (B.8)$$

$$V(H, \eta) = V(H, \varphi \rightarrow \eta), \quad (B.9)$$

$$V(\varphi, \phi) = \lambda_1^{\varphi\phi} (\varphi^\dagger \varphi)_{\perp 1} (\phi^\dagger \phi)_{\perp 1} + \lambda_2^{\varphi\phi} (\varphi^\dagger \varphi)_{\perp 2} (\phi^\dagger \phi)_{\perp 2} + \lambda_3^{\varphi\phi} (\varphi^\dagger \phi)_{\perp 2} (\phi^\dagger \varphi)_{\perp 2} + \lambda_4^{\varphi\phi} (\varphi^\dagger \phi)_{\perp 2} (\phi^\dagger \varphi)_{\perp 2}, \quad (B.10)$$

$$V(\varphi, \chi) = \lambda_1^{\varphi\chi} (\varphi^\dagger \varphi)_{\perp 1} (\chi^\dagger \chi)_{\perp 1} + \lambda_2^{\varphi\chi} (\varphi^\dagger \chi)_{\perp 2} (\chi^\dagger \varphi)_{\perp 2}, \quad (B.11)$$

$$V(\varphi, \eta) = \lambda_1^{\varphi\eta} (\varphi^\dagger \varphi)_{\perp 1} (\eta^\dagger \eta)_{\perp 1} + \lambda_2^{\varphi\eta} (\varphi^\dagger \varphi)_{\perp 2} (\eta^\dagger \eta)_{\perp 2} + \lambda_3^{\varphi\eta} (\varphi^\dagger \varphi)_{\perp 2} (\eta^\dagger \eta)_{\perp 2} + \lambda_4^{\varphi\eta} (\varphi^\dagger \eta)_{\perp 1} (\eta^\dagger \varphi)_{\perp 1} + \lambda_5^{\varphi\eta} (\varphi^\dagger \eta)_{\perp 2} (\eta^\dagger \varphi)_{\perp 2} + \lambda_6^{\varphi\eta} (\varphi^\dagger \eta)_{\perp 2} (\eta^\dagger \varphi)_{\perp 2}, \quad (B.12)$$

$$V(\phi, \chi) = \lambda_1^{\phi\chi} (\phi^\dagger \phi)_{\perp 1} (\chi^\dagger \chi)_{\perp 1} + \lambda_2^{\phi\chi} (\phi^\dagger \chi)_{\perp 2} (\chi^\dagger \phi)_{\perp 2}, \quad (B.13)$$

$$V(\phi, \eta) = \lambda_1^{\phi\eta} (\phi^\dagger \phi)_{\perp 1} (\eta^\dagger \eta)_{\perp 1} + \lambda_2^{\phi\eta} (\phi^\dagger \phi)_{\perp 2} (\eta^\dagger \eta)_{\perp 2} + \lambda_3^{\phi\eta} (\phi^\dagger \eta)_{\perp 2} (\eta^\dagger \phi)_{\perp 2} + \lambda_4^{\phi\eta} (\phi^\dagger \eta)_{\perp 2} (\eta^\dagger \phi)_{\perp 2}, \quad (B.14)$$

$$V(\chi, \eta) = V(H \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow \eta).$$

Из условия минимизации потенциала V_{total} следует, что скалярные поля H, φ, ϕ, χ и η с соответствующими вакуумными средними (уравнение (3)) являются решениями. Чтобы это показать, в системе уравнений минимизации положим

$$v_{\phi_1} = v_{\phi_2} = v_\phi, \quad v_{\eta_1} = 0, \quad v_{\eta_2} = v_\eta$$

и

$$v^* = v, \quad v_\phi^* = v_\phi, \quad v_\chi^* = v_\chi, \quad v_\eta^* = v_\eta.$$

Отсюда следует

$$\mu_H^2 + (\lambda_1^{H\varphi} + \lambda_2^{H\varphi})(v_1^* v_2 + v_2^* v_1) + (\lambda_1^{H\chi} + \lambda_2^{H\chi})v_\chi^2 + 2[(\lambda_1^{H\eta} + \lambda_2^{H\eta})v_\eta^2 + \lambda^H v^2 + (\lambda_1^{H\phi} + \lambda_2^{H\phi})v_\phi^2] = 0, \quad (B.15)$$

$$\mu_\varphi^2 v_2^* + 2\lambda_3^\varphi v_1^* v_2 v_2^* + 2\lambda_2^\varphi v_2^* (v_1 v_2^* - v_1^* v_2) + 2\lambda_1^\varphi v_2^* (v_1 v_2^* + v_1^* v_2) + [(\lambda_3^{\varphi\eta} + \lambda_4^{\varphi\eta} - \lambda_5^{\varphi\eta})v_1^* + (2\lambda_1^{\varphi\eta} + \lambda_4^{\varphi\eta} + \lambda_5^{\varphi\eta} + \lambda_6^{\varphi\eta})v_2^*] v_\eta^2 + (\lambda_1^\varphi + \lambda_2^\varphi)v_2^* v_\chi^2 + (\lambda_1^{H\eta} + \lambda_2^{H\eta})v_2^* v^2 + [\lambda_3^{\varphi\phi} v_1^* + (2\lambda_1^{\varphi\phi} + \lambda_4^{\varphi\phi})v_2^*] v_\phi^2 = 0, \quad (B.16)$$

$$\mu_\phi^2 v_1^* + 2\lambda_3^\phi v_1 v_1^* v_2^* + 2\lambda_2^\phi v_1^* (v_1^* v_2 - v_1 v_2^*) + 2\lambda_1^\phi v_1^* (v_1^* v_2 + v_1 v_2^*) + [(\lambda_3^{\phi\eta} + \lambda_4^{\phi\eta} - \lambda_5^{\phi\eta})v_2^* + (2\lambda_1^{\phi\eta} + \lambda_4^{\phi\eta} + \lambda_5^{\phi\eta} + \lambda_6^{\phi\eta})v_1^*] v_\eta^2 + (\lambda_1^\phi + \lambda_2^\phi)v_1^* v_\chi^2 + (\lambda_1^{H\eta} + \lambda_2^{H\eta})v_1^* v^2 + [\lambda_3^{\phi\phi} v_2^* + (2\lambda_1^{\phi\phi} + \lambda_4^{\phi\phi})v_1^*] v_\phi^2 = 0, \quad (B.17)$$

$$2[(\lambda_1^{\phi\chi} + \lambda_2^{\phi\chi})v_\chi^2 + (2\lambda_3^{\phi\eta} + \lambda_3^{\phi\eta} + \lambda_4^{\phi\eta})v_\eta^2 + (\lambda_1^{H\phi} + \lambda_2^{H\phi})v^2 + (4\lambda_1^\phi + 2\lambda_3^\phi)v_\phi^2] + 2\mu_\phi^2 + (2\lambda_1^\varphi + \lambda_4^\varphi)(v_1^* v_2 + v_2^* v_1) + \lambda_3^\varphi (|v_1|^2 + |v_2|^2) = 0, \quad (B.18)$$

$$\mu_\chi^2 + (\lambda_1^{\varphi\chi} + \lambda_2^{\varphi\chi})(v_1^* v_2 + v_2^* v_1) + 2\lambda^{\chi\eta} v_\chi^2 + 2(\lambda_1^{\chi\eta} + \lambda_2^{\chi\eta})v_\eta^2 + (\lambda_1^{H\chi} + \lambda_2^{H\chi})v^2 + 2(\lambda_1^{\phi\chi} + \lambda_2^{\phi\chi})v_\phi^2 = 0, \quad (B.19)$$

$$\begin{aligned}
& 2\mu_\eta^2 + (\lambda_3^{\varphi\eta} + \lambda_4^{\varphi\eta} - \lambda_5^{\varphi\eta})|v_1|^2 + (2\lambda_1^{\varphi\eta} + \lambda_4^{\varphi\eta} + \\
& + \lambda_5^{\varphi\eta} + \lambda_6^{\varphi\eta})v_1^*v_2 + 2[(\lambda_1^{\chi\eta} + \lambda_2^{\chi\eta})v_\chi^2 + 2(2\lambda_1^\eta + \lambda_3^\eta)v_\eta^2 + \\
& + (\lambda_1^{H\eta} + \lambda_2^{H\eta})v^2 + (2\lambda_1^{\phi\eta} + \lambda_3^{\phi\eta} + \lambda_4^{\phi\eta})v_\phi^2] + \\
& + (2\lambda_1^{\varphi\eta} + \lambda_4^{\varphi\eta} + \lambda_5^{\varphi\eta} + \lambda_6^{\varphi\eta})v_2^*v_1 + (\lambda_3^{\varphi\eta} + \\
& + \lambda_4^{\varphi\eta} - \lambda_5^{\varphi\eta})|v_2|^2 = 0. \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

Поскольку число уравнений в системе минимизации потенциала Хиггса (B.15)–(B.20) меньше, чем число параметров, данная система всегда имеет решение $(v, v_1, v_2, v_\phi, v_\chi, v_\eta)$, см. соотношения (3). Заметим, что в соответствии с выбором, сделанным в (3), имеется только одно решение, которое дает требуемый результат. Есть и другие решения, но они соответствуют другим физическим результатам. Например, решение, для которого $\langle \eta \rangle = (\langle \eta_1 \rangle, \langle \eta_2 \rangle)$ (а вакуумные средние для других скаляров определяются соотношениями (3)) дает дополнительный вклад в матричный элемент (22) матрицы \mathbb{M}_R в (15), поэтому модель содержит еще один параметр; решение, для которого $\langle \eta_1 \rangle = \langle \eta_2 \rangle \neq 0$, дает аналитические выражения для масс нейтрино более простого вида, однако не описывает смешивания нейтрино, задаваемые уравнением (1), и т. д. Поэтому в настоящей работе мы выбрали решение уравнения (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Esteban et al., J. High Energy Phys. **01**, 106 (2019), arXiv:1811.05487 [hep-ph].
2. R. N. Mohapatra and R. E. Marshak, Phys. Rev. Lett. **44**, 1316 (1980).
3. R. E. Marshak and R. N. Mohapatra, Phys. Lett. B **91**, 222 (1980).
4. C. Wetterich, Nucl. Phys. B **187**, 343 (1981).
5. A. Masiero, J. F. Nieves, and T. Yanagida, Phys. Lett. B **116**, 11 (1982).
6. W. Buchmuller, C. Greub, and P. Minkowski, Phys. Lett. B **267**, 395 (1991).
7. S. Iso, N. Okada, and Y. Orikasa, Phys. Lett. B **676**, 81 (2009), arXiv:0902.4050 [hep-ph].
8. S. Iso, N. Okada, and Y. Orikasa, Phys. Rev. D **80**, 115007 (2009), arXiv:0909.0128 [hep-ph].
9. N. Sahu and U. A. Yajnik, Phys. Lett. B **635**, 1116 (2006), arXiv:hep-ph/0509285.
10. W. Emam and S. Khalil, Eur. Phys. J. C **55**, 625 (2007), arXiv:0704.1395 [hep-ph].
11. T. Basak and T. Mondal, Phys. Rev. D **89**, 063527 (2014), arXiv:1308.0023 [hep-ph].
12. W. Rodejohann and C. E. Yaguna, JCAP **1512**, 032 (2015), arXiv:1509.04036 [hep-ph].
13. J. Guo, Z. Kang, P. Ko, and Y. Orikasa, Phys. Rev. D **91**, 115017 (2015), arXiv:1502.0050 [hep-ph].
14. A. El-Zant, S. Khalil, and A. Sil, Phys. Rev. D **91**, 035030 (2015), arXiv:1308.0836 [hep-ph].
15. S. Khalil, J. Phys. G **35**, 055001 (2008), arXiv:hep-ph/0611205.
16. T. Higaki, R. Kitano, and R. Sato, J. High Energy Phys. **07**, 044 (2014), arXiv:1405.0013 [hep-ph].
17. F. F. Deppisch, W. Liu, and M. Mitra, J. High Energy Phys. **1808**, 181 (2018), arXiv:1804.04075 [hep-ph].
18. P. S. B. Dev, R. N. Mohapatra, and Y. Zhang, J. High Energy Phys. **03**, 122 (2018), arXiv:1711.07634 [hep-ph].
19. T. Hasegawa, N. Okada, and O. Seto, Phys. Rev. D **99**, 095039 (2019), arXiv:1904.03020 [hep-ph].
20. M. Abbas and S. Khalil, J. High Energy Phys. **04**, 056 (2008), arXiv:0707.0841 [hep-ph].
21. S. Khalil and H. Okada, Phys. Rev. D **79**, 083510 (2009), arXiv:0810.4573 [hep-ph].
22. G. Altarelli and F. Feruglio, Rev. Mod. Phys. **82**, 2701 (2010), arXiv:1002.0211 [hep-ph].
23. S. F. King and C. Luhn, Rep. Prog. Phys. **76**, 056201 (2013), arXiv:1301.1340 [hep-ph].
24. S. F. King, A. Merle, S. Morisi, Y. Shimizu, and M. Tanimoto, New J. Phys. **16**, 045018 (2014), arXiv:1402.4271 [hep-ph].
25. S. T. Petcov, Eur. Phys. J. C **78**, 709 (2018), arXiv:1711.10806 [hep-ph].
26. V. V. Vien and H. N. Long, J. Korean Phys. Soc. **66**, 1809 (2015), arXiv:1408.4333 [hep-ph].
27. V. V. Vien and H. N. Long, Adv. High Energy Phys. **2014**, 192536 (2014).
28. H. Ishimori et. al., Prog. Theor. Phys. Suppl. **183**, 1 (2010), arXiv:1003.3552 [hep-th].
29. C. Hagedorn, M. Lindner, and F. Plentinger, Phys. Rev. D **74**, 025007 (2006), arXiv:hep-ph/0604265.
30. V. V. Vien and N. V. Soi, Mod. Phys. Lett. A **35**, 2050003 (2020).

31. V. V. Vien and H. N. Long, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350159 (2013), arXiv: 1312.5034 [hep-ph].
32. P. V. Dong, H. N. Long, C. H. Nam, and V. V. Vien, *Phys. Rev. D* **85**, 053001 (2012), arXiv:1111.6360 [hep-ph].
33. M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018) and (2019) update.
34. C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985).
35. D.-D. Wu, *Phys. Rev. D* **33**, 860 (1986).
36. O. W. Greenberg, *Phys. Rev. D* **32**, 1841 (1985).
37. B. Pontecorvo, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 549 (1957).
38. B. Pontecorvo, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 247 (1958).
39. Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
40. W. Rodejohann, *Phys. Rev. D* **69**, 033005, (2004), arXiv:hep-ph/0309249.
41. W. Rodejohann, *Int. J. Mod. Phys. E* **20**, 1833 (2011), arXiv:1106.1334 [hep-ph].
42. M. Mitra, G. Senjanovic, and F. Vissani, *Nucl. Phys. B* **856**, 26 (2012), arXiv: 1108.0004 [hep-ph].
43. S. M. Bilenky and C. Giunti, *Mod. Phys. Lett. A* **27**, 1230015 (2012), arXiv:1203.5250 [hep-ph].
44. W. Rodejohann, *J. Phys. G* **39**, 124008 (2012), arXiv:1206.2560 [hep-ph].
45. J. D. Vergados, H. Ejiri, and F. Simkovic, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 106301 (2012), arXiv:1205.0649 [hep-ph].
46. S. Roy Choudhury and S. Choubey, *JCAP* **1809**, 017 (2018), arXiv:1806.10832 [astro-ph.CO].
47. KamLAND-Zen Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 082503 (2016), arXiv:1605.02889[hep-ph].
48. M. Agostini et al. (GERDA Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **120**, 132503 (2018), arXiv:1803.11100 [nucl-ex].
49. C. E. Aalseth et al. (Majorana Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **120**, 132502 (2018), arXiv: 1710.11608 [nucl-ex].
50. M. Auger et al. (EXO-200 Collaboration), *JINST* **7**, P05010 (2012).
51. J. B. Albert et al. (EXO-200 Collaboration), *Nature* **510**, 229 (2014).
52. J. B. Albert et al. (EXO-200 Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **120**, 072701 (2018), arXiv:1707.08707 [hep-ex].
53. C. Alduino et al. (CUORE Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **120**, 132501 (2018), arXiv:1710.07988 [nucl-ex].
54. Guo-yuan Huang, Werner Rodejohann, and Shun Zhou, *Phys. Rev. D* **101**, 016003 (2020), arXiv:1910.08332 [hep-ph].
55. J. Penedo and S. Petcov, *Phys. Lett. B* **786**, 410 (2018), arXiv:1806.03203 [hep-ph].