

ПЕРЕСТРОЙКИ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ГЕОМЕТРИЯ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФЕРМИ

А. Я. Мальцев*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 29 июня 2020 г.,
после переработки 29 июня 2020 г.
Принята к публикации 3 июля 2020 г.

Рассматривается квазиклассическая динамика электронов на сложных поверхностях Ферми в присутствии сильных магнитных полей. Перестройки общей топологической структуры такой динамики сопровождаются появлением замкнутых экстремальных траекторий специальной формы, тесно связанной с геометрией и топологией поверхности Ферми. Исследование осцилляционных явлений на таких траекториях позволяет, в частности, предложить сравнительно простой метод уточнения параметров дисперсионного соотношения в металлах со сложными поверхностями Ферми.

DOI: 10.31857/S0044451020120147

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы хотим рассмотреть ряд вопросов, связанных с топологической структурой динамической системы

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}], \quad (1.1)$$

определяющей квазиклассическую динамику электронов на поверхности Ферми в присутствии внешнего магнитного поля. Более точно, нас будут интересовать перестройки топологической структуры системы (1.1), происходящие при изменении направления магнитного поля, а также связь общей картины таких перестроек с геометрией поверхности Ферми.

Ниже мы более подробно поясним, что мы понимаем под перестройкой топологической структуры системы (1.1), а также приведем описание типичной картины рассматриваемых нами перестроек для достаточно сложных поверхностей Ферми. Нас будет более всего интересовать возможность экспериментального определения картины перестроек (1.1) на угловой диаграмме, а также возможность ее использования для уточнения геометрии поверхности Ферми (особенно в случае сложных поверхностей).

Как мы увидим ниже, обе возможности могут быть связаны с появлением особых экстремальных (замкнутых) траекторий на поверхности Ферми вблизи границ перестроек (1.1). Более того, сами границы перестроек структуры системы (1.1) могут быть определены как границы, на которых исчезают и появляются траектории такого типа, а положения таких траекторий на поверхности Ферми может быть эффективно использовано для уточнения ее геометрии. Важную роль для определения картины перестроек и для восстановления геометрии поверхности Ферми будут играть особенности осцилляционных явлений, в частности, явления циклотронно-резонанса на траекториях такого типа.

Одной из особенностей траекторий, которые мы будем рассматривать, является наличие на них (двух или более) специальных точек, в которых скорость пробегания электрона по траектории очень мала. Это свойство обусловлено близостью таких точек к особым точкам динамической системы (1.1), что обусловлено связью рассматриваемых нами траекторий с изменением структуры динамической системы на поверхности Ферми при изменении направления \mathbf{B} . Вторая важная особенность интересующих нас траекторий заключается в том, что они представляют собой «экстремальные» орбиты, т. е. траектории, период обращения по которым или площадь которых имеет экстремальную величину по сравнению с близкими к ним траекториями. Такие

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

свойства специальных траекторий делают исследование связанных с ними осцилляционных явлений удобным инструментом их изучения.

Мы здесь не будем подробно рассматривать теорию осцилляционных явлений в металлах (см., например, [1–3]). Отметим лишь, что главным для нас в соответствующей картине осцилляций, имеющих чисто классическое (классический циклотронный резонанс) или квантовое происхождение (эффект де Гааза–Ван Альфена, эффект Шубникова–де Гааза), будет то, что она задается суммой конечного числа осцилляционных членов (с разными периодами), соответствующих экстремальным траекториям на поверхности Ферми. Изменениям топологической структуры системы (1.1) должно соответствовать резкое изменение общей картины осцилляций, заключающееся в исчезновении осцилляционных членов в общей картине и замене их новыми. Таким образом, мы ожидаем наблюдение резких изменений описанного типа на некоторой сети одномерных кривых (на угловой диаграмме), соответствующих перестройкам топологической структуры системы (1.1).

Что касается специального положения рассматриваемых нами траекторий на поверхности Ферми, то оно обусловлено близостью таких траекторий к весьма специальным сингулярным траекториям динамической системы (1.1). Траектории последнего типа могут возникать лишь при специальных направлениях \mathbf{V} (определяемых картиной перестроек (1.1) на угловой диаграмме) и связаны с точными геометрическими параметрами поверхности Ферми. Ниже мы более подробно рассмотрим возникающую ситуацию.

Как хорошо известно, геометрия траекторий системы (1.1) играет важнейшую роль в теории гальваномагнитных явлений в металлах в присутствии сильных магнитных полей. В частности, как было впервые показано в работе [4], поведение проводимости в сильных магнитных полях должно существенно различаться в случаях, когда на поверхности Ферми присутствуют лишь замкнутые траектории (1.1) и когда на ней появляются также открытые траектории системы (1.1). Дальнейшие исследования поведения траекторий системы (1.1) на различных поверхностях Ферми и эффектов, связанных с их геометрией, проводились весьма активно, начиная с середины прошлого века, в частности, огромную роль в становлении и развитии данной области сыграли исследования, проводимые в школе И. М. Лифшица в этот период (см. [2, 5–11]). Надо отметить также, что исследования, связанные с гео-

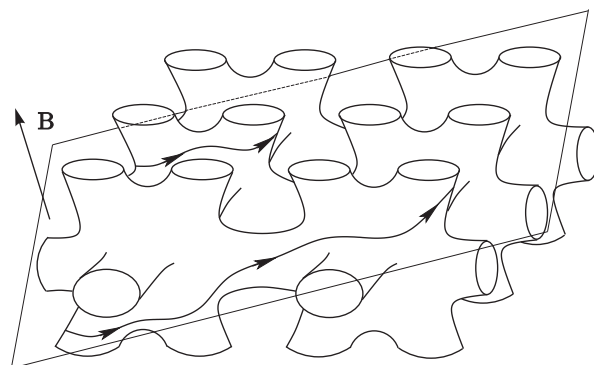


Рис. 1. Пересечение достаточно сложной периодической поверхности в пространстве квазиимпульсов семейством плоскостей, ортогональных магнитному полю

метрией траекторий (1.1), стали источником целого ряда подходов и методов исследования электронных спектров в металлах, которые не потеряли своей актуальности и в настоящее время.

Задача о полном описании всех типов траекторий системы (1.1) для произвольного периодического соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$ была впервые поставлена Новиковым в работе [12] и интенсивно исследовалась в его топологической школе [12–20]. При исследовании задачи Новикова, в частности, были найдены новые типы открытых траекторий [15, 19], неизвестные ранее для систем (1.1). Заметим, что поскольку система (1.1) сохраняет энергию электрона $\epsilon(\mathbf{p})$ и проекцию квазиимпульса \mathbf{p} на направление магнитного поля, задача Новикова может быть поставлена и как задача описания геометрии всех возможных сечений произвольной периодической поверхности семейством параллельных плоскостей в \mathbf{p} -пространстве (рис. 1). В настоящее время получена полная классификация различных типов траекторий для произвольных дисперсионных соотношений $\epsilon(\mathbf{p})$ (см. [18–20]), среди которых наиболее важную роль играют устойчивые открытые траектории (1.1).

При описании гальваномагнитных явлений в сильных магнитных полях обычно используются угловые диаграммы для магнитопроводимости, отражающие появление различных типов траекторий (прежде всего, открытых) на поверхности Ферми при различных направлениях \mathbf{V} . Поскольку появление различных типов траекторий при этом непосредственно связано с изменением структуры системы (1.1), такие диаграммы, в действительности, тесно связаны с угловыми диаграммами, отражающими изменение топологической структуры (1.1), которые мы будем рассматривать ниже. В частности, по-

явление траекторий интересующего нас типа связано также и с появлением открытых траекторий, так что они всегда возникают при направлениях магнитного поля, близких к направлениям появления открытых траекторий на поверхности Ферми. Появление рассматриваемых траекторий связано в этом случае с (бесконечной) последовательностью перестроек траекторий системы (1.1) при появлении открытых траекторий. Как следствие этого, наиболее богатые структуры на угловой диаграмме, описывающей перестройку топологической структуры системы (1.1), связаны, в действительности, с открытыми траекториями (1.1), а сами такие диаграммы в некотором смысле «привязаны» к угловым диаграммам для магнитопродовимости в случае достаточно сложных поверхностей Ферми.

В самом общем случае, однако, появление траекторий интересующего нас типа может быть и не связано с появлением или исчезновением открытых траекторий, однако, оно всегда отвечает перестройке «топологической структуры», порождаемой траекториями (1.1) на поверхности Ферми. Более того, для описания перестроек топологической структуры (1.1) достаточно, в действительности, следить за изменениями замкнутых траекторий, что и объясняет тесную связь интересующих нас траекторий с такими изменениями. В некотором смысле, можно сказать даже больше, а именно, для достаточно исчерпывающего описания топологической структуры системы (1.1) на двумерной периодической поверхности достаточно, в действительности, информации о структуре замкнутых траекторий, возникающих на ней. Сформулированное утверждение можно пояснить следующим образом. Указание полного множества M замкнутых траекторий системы (1.1) однозначно определяет также его дополнение на поверхности Ферми, состоящее из конечного числа (неэквивалентных) связных компонент, несущих открытые траектории системы (1.1). Как вытекает из довольно глубоких топологических исследований (см. [13–21]), главные особенности геометрии открытых траекторий (1.1) полностью определяются топологией несущих их компонент (точнее, родом соответствующих компактных многообразий, получаемых после факторизации по векторам обратной решетки). Таким образом, указание полного множества неэквивалентных замкнутых траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми определяет, в действительности, полную структуру системы (1.1) на ней, т. е. позволяет эффективно описать все возникающие на ней траектории (1.1). Ниже мы обсудим сделанные утверждения более подробно.

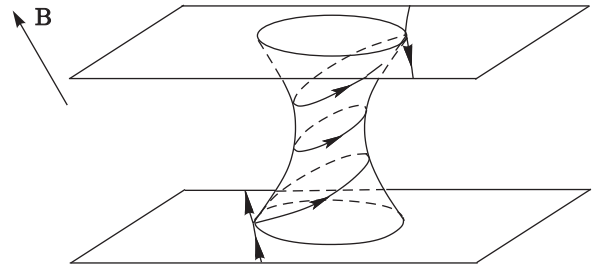


Рис. 2. Цилиндр замкнутых траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми, ограниченный сингулярными траекториями на своих основаниях

Все неособые замкнутые траектории системы (1.1) на поверхности Ферми объединены в конечное число (неэквивалентных) цилиндров таких траекторий, имеющих сингулярные точки системы (1.1) на своих основаниях (рис. 2). Для структур общего положения можно считать, что на каждом из оснований цилиндров замкнутых траекторий находится ровно одна особая точка (1.1). Изменение структуры траекторий системы (1.1) при этом всегда связано с изменением множества цилиндров замкнутых траекторий (например, при вращениях направления \mathbf{B} или изменении уровня Ферми), т. е. исчезновением части (или всех) таких цилиндров и появлением новых (или полным исчезновением замкнутых траекторий на поверхности Ферми). Как нетрудно видеть, само исчезновение (или появление) какого-либо цилиндра замкнутых траекторий должно быть связано с появлением специальных сингулярных траекторий системы (1.1) (или цилиндров нулевой высоты), соединяющих более одной особой точки (1.1).

Как мы уже сказали, нас, в первую очередь, будет интересовать изменение структуры траекторий системы (1.1) при вращениях направления магнитного поля. Согласно сказанному выше, все пространство направлений \mathbf{B} (т. е. единичная сфера \mathbb{S}^2) может быть разделено на области (а также предельные множества таких областей), в каждой из которых топологическая структура системы (1.1) на поверхности Ферми остается неизменной. Границы этих областей определяются исчезновением (или появлением) хотя бы одного из цилиндров замкнутых траекторий, т. е. присутствием хотя бы одного цилиндра нулевой высоты при соответствующих направлениях \mathbf{B} . Нетрудно видеть, что вблизи границ перестроек структуры (1.1) мы должны ожидать появления цилиндров замкнутых траекторий очень малой высоты, дающих в пределе цилиндры нулевой высоты на поверхности Ферми. Особенностью замкнутых траекторий на цилиндрах малой высо-

ты является их близость к сингулярным траекториям и, в особенности, к предельной специальной сингулярной траектории, возникающей в момент перестройки структуры (1.1). Как и на всяком цилиндре замкнутых траекторий, на цилиндрах малой высоты вплоть до момента перестройки сохраняются экстремальные замкнутые траектории с минимальным периодом обращения среди всех траекторий цилиндра. Именно такие траектории мы и будем, главным образом, рассматривать в данной работе.

Перестройки системы (1.1) могут обладать различной топологией, а соответствующие специальные экстремальные траектории — различной геометрией. Мы перечислим топологические типы перестроек (1.1) и приведем соответствующие им геометрические типы специальных траекторий. Наиболее подробно мы рассмотрим один из наиболее простых типов, который встречается в подавляющем числе случаев для реальных поверхностей Ферми. В качестве примера использования специальных траекторий мы приведем один из возможных способов частичного восстановления формы поверхности Ферми с использованием траекторий такого типа. В общем случае, однако, приведенный способ не является единственно возможным.

Таким образом, мы хотели бы описать типичные картины перестроек структуры системы (1.1) на угловой диаграмме для всех направлений \mathbf{B} , обсудить топологические типы таких перестроек и геометрию соответствующих специальных экстремальных траекторий, обсудить особенности осцилляционных явлений при перестройках структуры (1.1), а также возможности использования информации о таких перестройках для восстановления формы поверхности Ферми.

В разд. 2 и 3 мы приведем краткое описание топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми при наличии на ней устойчивых открытых траекторий этой системы. В этой ситуации нас будет, главным образом, интересовать процедура пересечения границы области, отвечающей существованию устойчивых открытых траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми, а также структура замкнутых траекторий вблизи ее границ. Как мы увидим, помимо указанных выше особенностей (существования участков с очень низкой скоростью пробегания по траектории), возникающие здесь замкнутые траектории могут обладать многими дополнительными интересными свойствами, вытекающими из их геометрии. Отметим, что такие области могут возникать лишь для поверхностей Ферми достаточно сложной формы (открытых поверхностей Фер-

ми). В разд. 3 мы также рассмотрим общую структуру диаграмм, описывающих перестройки структуры системы (1.1) и их связь с угловыми диаграммами для магнитопроводимости, а также обсудим классы сложности таких диаграмм.

В разд. 4 мы более подробно изучим схемы «элементарных» перестроек структуры системы (1.1) и обсудим вероятность появления перестроек различных типов на реальных поверхностях Ферми.

В разд. 5 мы рассмотрим связь этих явлений с общей геометрией поверхности Ферми и, в частности, обсудим возможности использования наблюдения таких явлений для изучения особенностей электронного спектра.

В разд. 6 мы обсудим особенности осцилляционных явлений, связанных с траекториями интересующего нас типа, где особенно детально рассмотрим явление циклотронного резонанса на таких траекториях.

2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА СИСТЕМЫ (1.1) ПРИ НАЛИЧИИ УСТОЙЧИВЫХ ОТКРЫТЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

Для целей данной работы нам понадобится, в частности, описание топологической структуры системы (1.1) при наличии устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми. Траектории такого типа являются устойчивыми по отношению к малым вращениям направления \mathbf{B} , и их наличие означает, в действительности, что соответствующее направление \mathbf{B} принадлежит некоторой «зоне устойчивости» в пространстве направлений \mathbf{B} (т. е. на единичной сфере S^2).

При описании топологической структуры динамической системы (1.1) важнейшую роль играет структура множества замкнутых траекторий, возникающих на поверхности Ферми. Проиллюстрируем связь этой структуры с полной структурой системы при наличии устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми.

Пользуясь информацией о множестве M цилиндров замкнутых траекторий, определим следующую процедуру упрощения (редукции) поверхности Ферми (см. [20]) при заданном направлении магнитного поля.

1) Удалим из поверхности Ферми все цилиндры замкнутых траекторий (рис. 3). (Оставшаяся часть поверхности Ферми содержит лишь сингулярные и

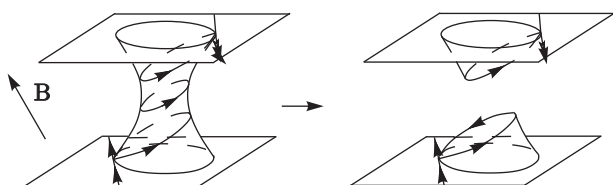


Рис. 3. Удаление цилиндра замкнутых траекторий из поверхности Ферми с последующей заклейкой отверстий дисками, ортогональными магнитному полю

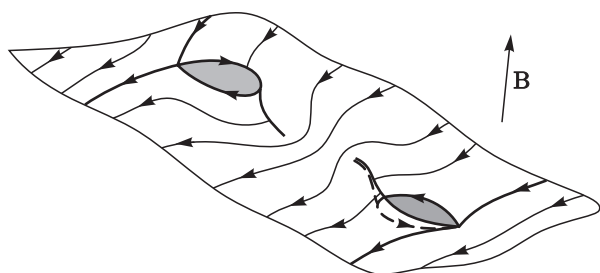


Рис. 4. Связная компонента редуцированной поверхности Ферми, несущая устойчивые открытые траектории системы (1.1)

открытые траектории системы (1.1), так что ее связные компоненты могут быть названы носителями открытых траекторий.)

2) Заклеим образовавшиеся отверстия плоскими дисками в \mathbf{p} -пространстве, ортогональными \mathbf{B} . Результатом перестройки будет снова являться периодическая двумерная поверхность в \mathbf{p} -пространстве, несущая теперь только открытые траектории системы (1.1).

Важнейшим свойством (см. [13, 16]) редуцированной поверхности Ферми при наличии на ней устойчивых открытых траекторий системы (1.1) является то, что все ее связные компоненты в этом случае представляют собой периодически деформированные плоскости, имеющие одно и то же целочисленное направление в \mathbf{p} -пространстве (рис. 4). Таким образом, все носители открытых траекторий образуют набор параллельных периодически деформированных плоскостей с общим (двумерным) направлением, порожденным двумя произвольными векторами обратной решетки. Количество таких неэквивалентных плоскостей представляет четное число и для поверхностей Ферми не очень большого рода не может в действительности превышать двух.

Структура исходной поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории системы (1.1), может быть схематически представлена кар-

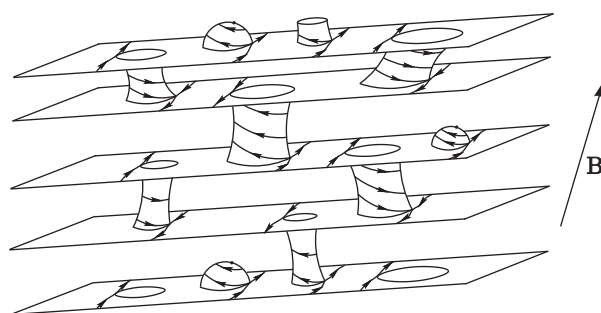


Рис. 5. Схематичное представление сложной поверхности Ферми, несущей устойчивые открытые траектории системы (1.1)

тиной, изображенной на рис. 5. Можно видеть, что эта структура остается той же самой при вращениях направления \mathbf{B} до тех пор, пока не будет разрушен хотя бы один из цилиндров замкнутых траекторий, соединяющих носители открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве. Неизменность топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми означает, в частности, неизменность гомологических циклов, задаваемых окружностями цилиндров множества \mathcal{M} , разрезающих поверхность Ферми на носители открытых траекторий, неизменность топологии носителей открытых траекторий, а также топологического класса вложения носителей в \mathbf{p} -пространство (точнее, гомологического класса вложений двумерных торов \mathbb{T}^2 , т.е. носителей, профакторизованных по векторам обратной решетки, в трехмерный тор \mathbb{T}^3 , т.е. компактифицированную зону Бриллюэна, определяемого целочисленным двумерным направлением вложения носителей в \mathbf{p} -пространство). Рисунок 5, конечно, представляет собой лишь схематическое изображение топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми, и реальная картина может выглядеть гораздо сложнее с визуальной точки зрения. В частности, цилиндры замкнутых траекторий могут иметь довольно малую высоту и проходить через большое число зон Бриллюэна для структур с большими гомологическими классами вложения $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^3$.

Как можно также видеть на рис. 5, среди цилиндров замкнутых траекторий на поверхности Ферми могут возникать, в том числе, «простые» цилиндры замкнутых траекторий, одно из оснований которого стягивается в одну особую точку (рис. 6).

Появление и исчезновение цилиндров такого типа, вообще говоря, изменяет общую топологическую структуру системы (1.1) на поверхности Фер-

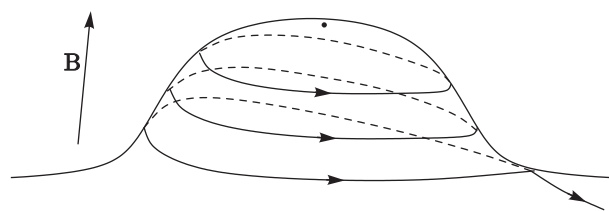


Рис. 6. Простой цилиндр замкнутых траекторий, имеющий особую точку системы (1.1) в качестве одного из своих оснований

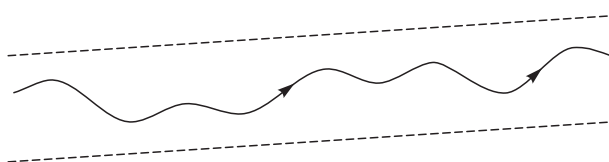


Рис. 7. Вид устойчивой открытой траектории системы (1.1) в плоскости, ортогональной \mathbf{V}

ми. Обычно, однако, наличие или отсутствие таких цилиндров не играет большой роли при описании сложных геометрических свойств траекторий системы (1.1). Нам здесь также, главным образом, будут интересны лишь перестройки структуры (1.1) с исчезновением или появлением нетривиальных цилиндров замкнутых траекторий (рис. 2).

Открытые траектории системы (1.1) задаются пересечениями носителей открытых траекторий с плоскостями, ортогональными \mathbf{V} . Описанная структура поверхности Ферми позволяет при этом указать важнейшие свойства устойчивых открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве.

1) Каждая устойчивая открытая траектория системы (1.1) в \mathbf{p} -пространстве лежит в прямой полосе конечной ширины в некоторой плоскости, ортогональной \mathbf{V} (рис. 7), проходя ее насквозь (см. [13, 14]).

2) Все устойчивые открытые траектории при заданном направлении \mathbf{V} имеют одно и то же среднее направление, задаваемое пересечением плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и некоторой (неизменной для данной зоны устойчивости Ω) целочисленной (т. е. порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскости Γ .

Указанные свойства устойчивых открытых траекторий играют важнейшую роль в поведении проводимости нормальных металлов в достаточно сильных магнитных полях. В частности, направления целочисленных плоскостей Γ_α , определенные для различных зон устойчивости Ω_α , играют роль целочисленных топологических инвариантов, наблюдаемых в проводимости в сильном магнитном поле

[22, 23]. Соответствующие направления могут быть заданы в действительности несократимыми тройками целых чисел $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$, которые можно назвать топологическими числами, наблюдаемыми в проводимости нормальных металлов.

Топологическое представление поверхности Ферми в виде, приведенном на рис. 5, не является единственным, в частности, такие представления различны для различных зон устойчивости Ω_α . Нетрудно видеть, что конкретная форма представления поверхности Ферми в этом виде (а также числа $(M_\alpha^1, M_\alpha^2, M_\alpha^3)$) определяется заданием цилиндров замкнутых траекторий на поверхности Ферми.

Таким образом, можно видеть, что задание множества \mathcal{M} цилиндров замкнутых траекторий полностью определяет в описываемой ситуации топологию системы (1.1) на поверхности Ферми. Строго говоря, полное описание траекторий (1.1) включает в себя также число вращения на двумерных торах \mathbb{T}^2 (или среднее направление открытых траекторий в \mathbf{p} -пространстве), которые не задаются лишь топологией разбиения поверхности Ферми на описанные компоненты, однако легко вычисляются в описываемой ситуации для любого заданного направления \mathbf{V} ($\mathbf{V}/V \in \Omega_\alpha$). Как мы покажем в следующем разделе, появление устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми влечет за собой в действительности также существование большого множества направлений \mathbf{V} , при которых возникают интересные нам специальные экстремальные замкнутые траектории.

Отметим сразу, что устойчивые открытые траектории не являются единственным типом открытых траекторий, могущих возникать на достаточно сложных поверхностях Ферми (см. [15, 18, 19]). Можно, однако, отметить, что и в этом случае изменение структуры траекторий системы (1.1) всегда связано с появлением или исчезновением цилиндров замкнутых траекторий и, в некотором смысле, наличие множества \mathcal{M} (или его отсутствие), а также его структура определяют полную топологическую структуру системы (1.1) на поверхности Ферми. Различные вопросы, связанные с классификацией открытых траекторий системы (1.1), включая их физические приложения, а также исследования структуры неустойчивых открытых траекторий различных типов, могут быть найдены в работах [24–42]. Естественно также отметить, что множество \mathcal{M} определяет структуру системы (1.1) на поверхности Ферми также и в том случае, если на ней возникают лишь замкнутые траектории, поскольку содержит в этом случае информацию о всех траекториях

системы (1.1). В любом случае, любое изменение топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми всегда связано с перестройкой множества M и, в частности, с исчезновением или появлением отдельных цилиндров замкнутых траекторий.

3. ПЕРЕСТРОЙКИ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ (1.1) И ПОЯВЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

Как мы уже сказали выше, изменение структуры системы (1.1) всегда связано с исчезновением или появлением цилиндров замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Схема исчезновения (или появления) одного из таких цилиндров приведена на рис. 8. Можно видеть, что при правильно подобранном вращении направления \mathbf{B} высота цилиндра замкнутых траекторий уменьшается, затем обращается в нуль и затем появляется узкая полоса, в которой становятся возможными перескоки траекторий между бывшими основаниями цилиндра.

Таким образом, можно видеть, что изменению топологической структуры системы (1.1) всегда сопутствует появление цилиндра замкнутых траекторий очень малой высоты, ограниченного сингулярными траекториями на своих основаниях (рис. 9). Период обращения по замкнутым траекториям стремится к бесконечности при приближении к основаниям цилиндра (сингулярным траекториям) и, таким образом, должен иметь минимум на некоторой траектории внутри цилиндра. Соответствующая траектория является экстремальной, в частности, при рассмотрении явления циклотронного резонанса, поскольку главные осциллирующие члены в интенсивности поглощения микроволнового излучения происходят именно от таких траекторий. В данной работе нам будут интересны именно такие траектории. Для удобства мы будем называть их специальными экстремальными траекториями. Чаще всего (например, при перестройках вблизи границ областей появления устойчивых открытых траекторий для поверхностей Ферми не слишком большого рода) такие цилиндры являются центрально-симметричными и тогда, если экстремальная траектория единственна (только этот простейший случай мы и будем рассматривать), она также обладает центральной симметрией. В особых случаях, однако, цилиндры замкнутых траекторий могут также появляться парами и переходить друг в друга при преобразованиях центральной симметрии. В этом случае, как цилиндры замкнутых траекторий, так и экстре-

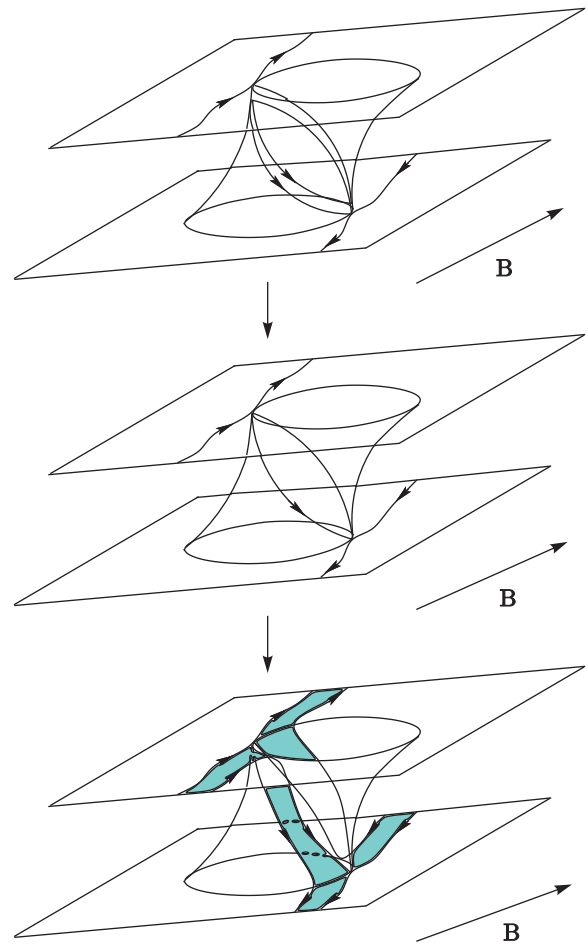


Рис. 8. Исчезновение цилиндра замкнутых траекторий на поверхности Ферми при вращении направления \mathbf{B}

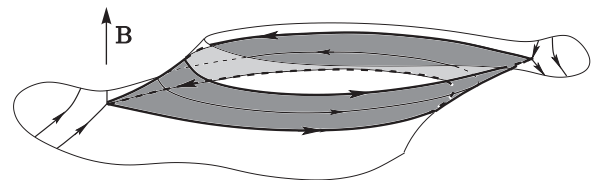


Рис. 9. Цилиндр замкнутых траекторий малой высоты, сопутствующий изменению топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми

мальные траектории на них не обязаны обладать центральной симметрией. Как мы увидим ниже, наличие центральной симметрии экстремальных траекторий дает особенно удобный инструмент исследования поверхности Ферми в рассматриваемой ситуации.

Период обращения T по экстремальной траектории также стремится к бесконечности (по логарифмическому закону) при стремлении высоты h

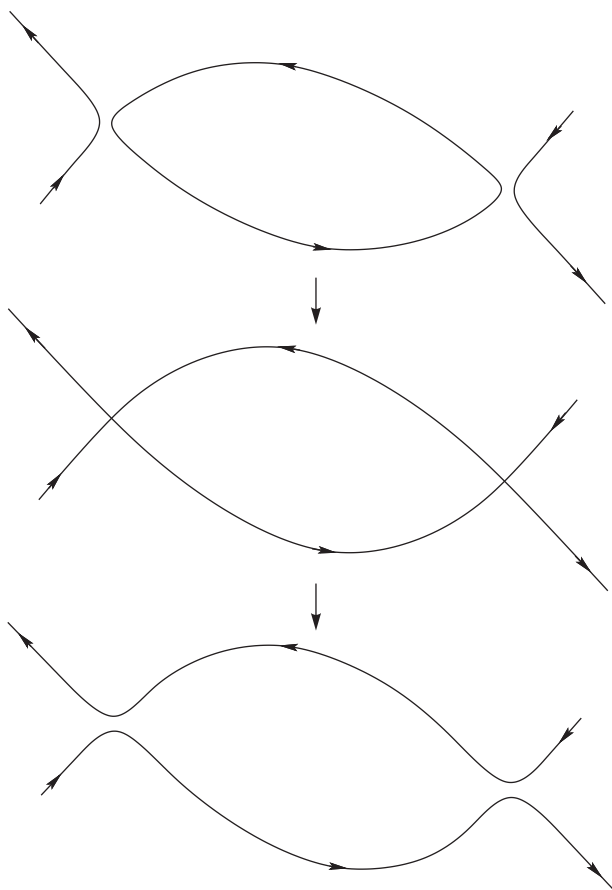


Рис. 10. Перестройка экстремальной траектории при изменении топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми

цилиндра замкнутых траекторий к нулю. Сравнительно медленный рост T , однако, позволяет сохранять условие $T/\tau \ll 1$ и, таким образом, наблюдать осцилляционные явления на таких траекториях вплоть до очень малых отклонений \mathbf{V} от границы перестройки топологической структуры системы (1.1). Таким образом, исследование осцилляционных явлений может служить очень хорошим инструментом для определения границ перестройки топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми. Точное исследование границ перестройки системы (1.1) (на угловой диаграмме), в свою очередь, может служить хорошим инструментом уточнения формы поверхности Ферми и других параметров дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$ для металлов со сложными поверхностями Ферми.

Причиной увеличения периода T при стремлении высоты h к нулю является наличие точек на экстремальной траектории, очень близких к седловым особым точкам в \mathbf{p} -пространстве, связан-

ных с перестройкой этой траектории при изменении структуры системы (1.1) (рис. 10). Именно вблизи этих точек электрон задерживается надолго, пробегая достаточно быстро оставшиеся участки траектории. При наблюдении явления циклотронного резонанса нам, в частности, будет интересна ситуация, когда именно эти точки соответствуют участкам траектории, лежащим вблизи поверхности (внутри скин-слоя) исследуемого образца, что, как мы увидим, приводит к определенным особенностям в поведении осцилляций поглощения падающего излучения.

Экстремальная траектория существует лишь до момента исчезновения соответствующего цилиндра замкнутых траекторий и распадается на другие траектории после его исчезновения. Получающиеся после перестройки траектории (рис. 10) могли бы априори быть как открытыми, так и замкнутыми. Однако, как мы увидим ниже, всякий раз, когда изменение топологической структуры системы (1.1) связано с появлением открытых траекторий, оно носит более сложный характер и требует, как правило, бесконечного числа перестроек, описанных выше.

Как мы уже отмечали, указанное обстоятельство делает естественным проведение связи между угловыми диаграммами, описывающими перестройки топологической структуры (1.1), с угловыми диаграммами, описывающими поведение магнитопроводимости в металлах в сильных магнитных полях. Традиционно, угловые диаграммы для магнитопроводимости в проводниках описывают разное поведение проводимости при различных направлениях \mathbf{V} , что обусловлено возникновением различных типов траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми. Можно сказать, что основной целью угловой диаграммы магнитопроводимости является разделение направлений \mathbf{V} , отвечающих тривиальному поведению проводимости (наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми), и направлений, отвечающих «нетривиальному» поведению (появлению открытых траекторий). Главным в структуре угловой диаграммы для проводимости в сильных магнитных полях, является, таким образом, указание областей (на единичной сфере) направлений \mathbf{V} , отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, а также описание множества направлений \mathbf{V} , отвечающих появлению открытых траекторий различных типов. Так, угловая диаграмма для магнитопроводимости содержит в общем случае области (зоны устойчивости), соответствующие появлению устойчивых открытых траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми, а так-

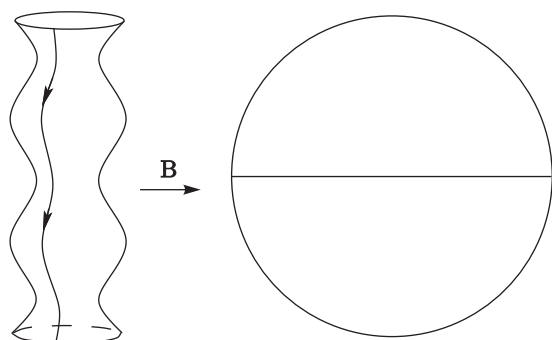


Рис. 11. Периодическая траектория и диаграмма проводимости для поверхности Ферми типа гофрированного цилиндра

же дополнительные множества (одномерные кривые или точки), соответствующие появлению различных типов неустойчивых траекторий.

Угловая диаграмма, описывающая перестройки топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми, согласно введенному нами описанию, представляет структуру (сеть одномерных направлений) множества направлений \mathbf{B} , отвечающих перестройкам системы цилиндров замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Такая диаграмма должна включать в себя структуру диаграммы для магнитопроводимости как часть своей общей структуры. Причина этого, как мы уже отмечали, состоит в том, что при приближении к направлениям \mathbf{B} , отвечающим появлению открытых траекторий, должны происходить множественные перестройки замкнутых траекторий, обуславливающие в пределе появление открытых траекторий системы (1.1). В качестве примера можно рассмотреть простейшие диаграммы, возникающие для поверхности Ферми типа гофрированный цилиндр (рис. 11). Угловая диаграмма проводимости представляет здесь единичную сферу лишь с одним выделенным большим кругом (экватором), соответствующим появлению (неустойчивых) периодических траекторий системы (1.1). Угловая диаграмма, описывающая перестройки топологической структуры системы (1.1), является более сложной и содержит бесконечное число окружностей на сфере \mathbb{S}^2 , сгущающихся вблизи экватора (рис. 12).

В целом, сложность угловых диаграмм, описывающих перестройки топологической структуры системы (1.1), может быть весьма различной, при этом их сложность непосредственно связана со сложностью соответствующих диаграмм для магнитопроводимости.

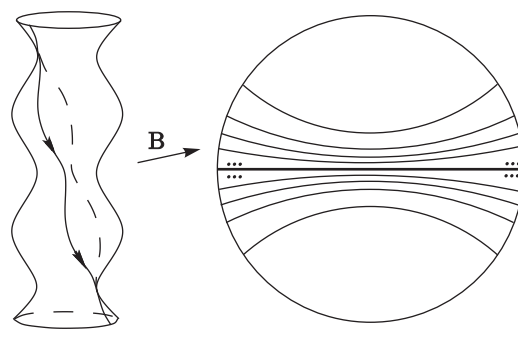


Рис. 12. Пример перестройки топологической структуры системы (1.1) и угловая диаграмма, описывающая перестройки структуры (1.1) для поверхности Ферми типа гофрированного цилиндра

Легко привести примеры, когда как вторые, так и первые диаграммы, являются просто тривиальными (не содержат никаких элементов) как, например, для поверхности Ферми, близкой к сфере. В общем случае, угловые диаграммы для магнитопроводимости можно разделить на несколько классов сложности (см., например, [43]). К самым простейшим естественно отнести тривиальные диаграммы, соответствующие поверхностям Ферми, не допускающим появления открытых траекторий ни при каких направлениях \mathbf{B} . Угловые диаграммы, описывающие перестройки топологической структуры системы (1.1), не обязаны быть тривиальными — так, легко построить примеры поверхностей Ферми, на которых происходят перестройки структуры (1.1), но не появляются открытые траектории. Диаграммы, описывающие перестройки топологической структуры системы (1.1), содержат в этом случае конечную сеть одномерных направлений \mathbf{B} (на сфере \mathbb{S}^2), соответствующих появлению цилиндров нулевой высоты, описанных выше.

Второй по сложности класс угловых диаграмм для магнитопроводимости представлен угловыми диаграммами, содержащими сеть одномерных кривых на сфере \mathbb{S}^2 , соответствующих появлению (неустойчивых) периодических открытых траекторий на поверхности Ферми. Как следует из примера, представленного выше, угловые диаграммы, описывающие перестройки топологической структуры системы (1.1), являются в этом случае более сложными и содержат бесконечное число одномерных кривых, отвечающих появлению цилиндров нулевой высоты, в случае общего положения.

К наиболее сложным диаграммам для магнитопроводимости можно отнести диаграммы, содержащие нетривиальные области существования от-

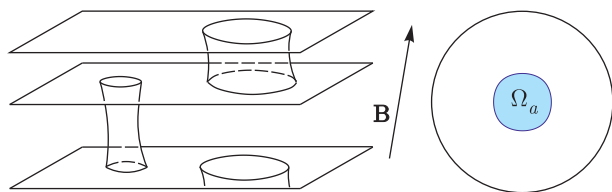


Рис. 13. Упрощенное представление структуры поверхности Ферми, имеющей область существования устойчивых открытых траекторий (зону устойчивости) в полном пространстве направлений \mathbf{V} (на сфере S^2)

крытых траекторий системы (1.1) (устойчивых открытых траекторий). В действительности (см. [43]), такие диаграммы можно также разделить на два класса, различающихся по уровню сложности. Как мы увидим ниже, угловые диаграммы, описывающие перестройки топологической структуры системы (1.1), являются в этом случае наиболее сложными и обладают весьма богатой структурой.

В данной работе нам хотелось бы, в частности, привести схематическое описание множества всех направлений \mathbf{V} , отвечающих перестройкам системы (1.1), на угловых диаграммах самого общего и, в частности, достаточно сложного вида (содержащих хотя бы одну зону устойчивости). Нам необходимо будет, кроме прочего, дать схематическое описание структуры этого множества вблизи границы одной фиксированной зоны устойчивости Ω_α .

Рассмотрим при этом не слишком сложный случай, когда поверхность Ферми имеет род 3 и простирается во всех трех направлениях в \mathbf{p} -пространстве. Упрощая максимально визуальное представление структуры такой поверхности при направлении \mathbf{V} , лежащем в одной из зон устойчивости, можно представлять себе в качестве примера поверхность, изображенную на рис. 13. При направлениях \mathbf{V} , близких к вертикальному, на рис. 13 легко выделить визуально пару неэквивалентных носителей открытых траекторий (целочисленных плоскостей), а также два различных цилиндра замкнутых траекторий, разделяющих эти носители (толстый и тонкий цилиндры). Цилиндры замкнутых траекторий имеют различные типы (электронный и дырочный) и оба обладают центральной симметрией в описанной ситуации (зона устойчивости для поверхности рода 3, простирающейся в трех направлениях). Направление \mathbf{V} лежит в пределах зоны устойчивости до тех пор, пока оба цилиндра на рис. 13 содержат несингулярные замкнутые траектории системы (1.1). Граница зоны устойчивости Ω_α определяется при этом исчезновением несингулярных замкнутых траекто-

рий на одном из цилиндров (в данном случае на толстом цилиндре), показанном на рис. 8 (т. е. обращением в нуль высоты соответствующего цилиндра замкнутых траекторий).

Что можно сказать о траекториях системы (1.1) для направлений \mathbf{V} , лежащих вне зоны Ω_α в непосредственной близости от ее границы? В действительности, описанная структура поверхности Ферми позволяет дать описание траекторий (1.1) и для таких направлений. Причина заключается в том, что при пересечении границы Ω_α остаются несингулярные замкнутые траектории на втором (тонком) цилиндре, разделяющем носители открытых траекторий. В результате, поверхность Ферми может быть представлена теперь как объединение парно слившихся бывших носителей открытых траекторий, разделенных цилиндрами замкнутых траекторий, оставшихся на тонких цилиндрах. В такой ситуации система еще сохраняет память о целочисленной плоскости Γ_α , связанной с зоной Ω_α и продолжающей играть существенную роль в описании траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми.

Несингулярные траектории, возникающие для направлений \mathbf{V} , лежащих вблизи границы зоны Ω_α естественно разделить на траектории, лежащие на тонком цилиндре и траектории, лежащие на паре слившихся носителей открытых траекторий. Можно видеть, что последние являются либо замкнутыми (если плоскость, ортогональная \mathbf{V} , пересекает Γ_α по иррациональному направлению), либо могут быть периодическими (если плоскость, ортогональная \mathbf{V} , пересекает Γ_α по целочисленному направлению в \mathbf{p} -пространстве). Обе ситуации схематически изображены на рис. 14, где показано подразделение пары бывших носителей открытых траекторий на цилиндры образовавшихся замкнутых траекторий (верхний рисунок), либо на цилиндры замкнутых траекторий и слои периодических траекторий в \mathbf{p} -пространстве (нижний рисунок). В первом случае на паре бывших носителей возникают три неэквивалентных цилиндра замкнутых траекторий, а во втором — один цилиндр замкнутых траекторий (и два неэквивалентных слоя периодических траекторий — по одному на верхнем и на нижнем носителе). Таким образом, в рассматриваемой ситуации каждый из цилиндров замкнутых траекторий может перейти лишь в себя при преобразовании $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ и, следовательно, обладает центральной симметрией. Как мы уже говорили, экстремальные замкнутые траектории, обладающие такой симметрией, будут нам особенно интересны при исследовании поверхности Ферми.

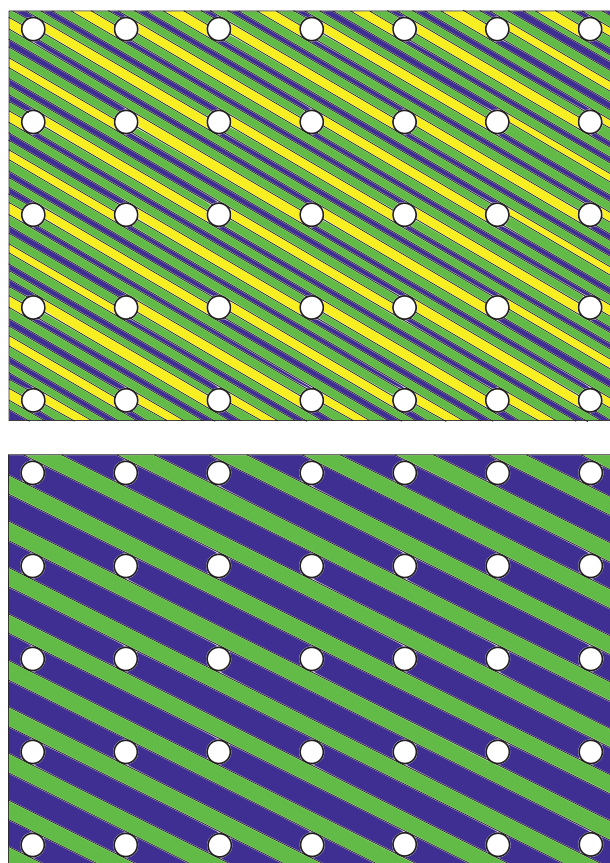


Рис. 14. Пара бывших носителей открытых траекторий (периодически деформированных целочисленных плоскостей), несущая либо замкнутые траектории, либо замкнутые и периодические траектории, после пересечения границы Ω_α . Кружками отмечены места, где происходит перескок траектории с верхнего носителя на нижний и обратно

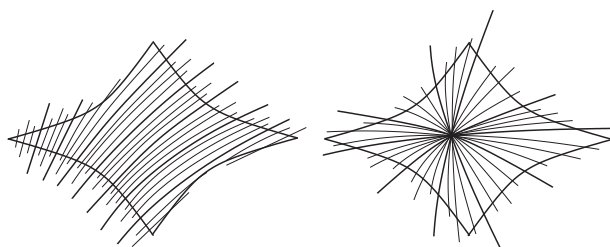


Рис. 15. Зоны устойчивости и специальные сегменты, отвечающие появлению периодических траекторий на поверхности Ферми

Возникновение периодических траекторий вблизи границы Ω_α происходит лишь для направлений \mathbf{B} необщего положения (пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{B} , и Γ_α представляет вектор обратной решетки). Нетрудно показать, что соответствующие направления \mathbf{B} образуют бесконечный набор сегмен-

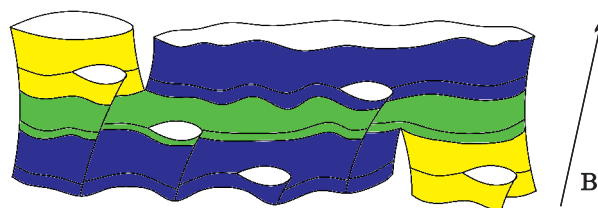


Рис. 16. Цилиндры замкнутых траекторий, возникающие на паре бывших носителей открытых траекторий после пересечения границы зоны устойчивости на угловой диаграмме

тов, примыкающих к границе Ω_α , длина которых быстро уменьшается с ростом модуля соответствующего целочисленного вектора в \mathbf{p} -пространстве. Для целочисленных векторов небольшого модуля соответствующие сегменты могут при этом достигать другой зоны устойчивости и не иметь конечных точек. Такие сегменты являются, в действительности, продолжениями сегментов, проходящих через всю зону устойчивости и соответствующих появлению периодических траекторий на поверхности Ферми (рис. 15). (Отметим здесь, что иногда в литературе можно встретить утверждение, что открытые траектории на поверхности Ферми становятся периодическими, если плоскость, ортогональная \mathbf{B} , содержит целочисленное (рациональное) направление. Такое утверждение, вообще говоря, неверно. Для формулировки более правильного утверждения надо отметить сначала, что если мы рассматриваем изменение устойчивых открытых траекторий, то направление \mathbf{B} принадлежит некоторой зоне устойчивости Ω_α , отвечающей определенной целочисленной плоскости Γ_α . Устойчивые открытые траектории становятся при этом периодическими в том и только в том случае, когда пересечение плоскости, ортогональной \mathbf{B} , и плоскости Γ_α имеет рациональное (целочисленное) направление, т. е. если плоскость, ортогональная \mathbf{B} , содержит целочисленное направление, принадлежащее также соответствующей плоскости Γ_α . Таким образом, появление периодических открытых траекторий среди устойчивых открытых траекторий непосредственно связано с описанной выше структурой системы (1.1) и, в действительности, имеет непосредственное отношение к топологическим числам $(M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha)$.)

Длина возникающих замкнутых траекторий обратно пропорциональна вероятности перескока траектории с одного носителя на другой и тем меньше, чем дальше направление \mathbf{B} от границы зоны Ω_α . В непосредственной близости от границы Ω_α для на-

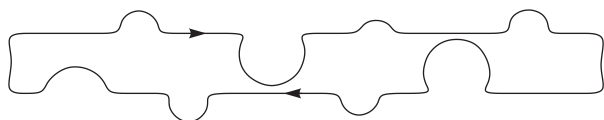


Рис. 17. Длинные замкнутые траектории, возникающие на паре бывших носителей открытых траекторий в непосредственной близости от границы зоны устойчивости

правлений \mathbf{B} общего положения длина соответствующих цилиндров замкнутых траекторий очень велика (см. рис. 16) и обращается в бесконечность на самой границе. Замкнутые траектории, возникающие на таких цилиндрах, также имеют при этом довольно большую длину и несколько специфическую форму (рис. 17) при приближении к границе Ω_α . В частности, в непосредственной близости к границе Ω_α должно нарушаться условие $T/\tau \ll 1$ и соответствующие длинные замкнутые траектории становятся неотличимы от открытых с экспериментальной точки зрения. Как одно из следствий — поведение проводимости в сильных магнитных полях при соответствующих направлениях \mathbf{B} также становится довольно сложным и может не описываться простыми асимптотическими формулами даже при довольно больших значениях B (см., например, [44]). Как было указано в работе [45], для определения точных математических границ зон устойчивости, возможно, лучше использовать наблюдения осцилляционных явлений в сильных магнитных полях, отслеживающие перестройку топологической структуры системы (1.1) на границах Ω_α (исчезновение цилиндра коротких замкнутых траекторий), рассматриваемую здесь. При экспериментальном наблюдении осцилляционных явлений в данной ситуации является специфичным исчезновение одного из осциллирующих членов при пересечении границы зоны устойчивости изнутри без немедленного появления других осциллирующих членов из-за большой длины новых замкнутых траекторий вблизи границы Ω_α . При удалении от границы Ω_α длины соответствующих траекторий, однако, довольно быстро уменьшаются, а сами траектории принимают нормальную форму. Как следствие этого, в осцилляционной картине при этом также появляется возможность наблюдать осцилляционные члены, соответствующие новым цилиндрам замкнутых траекторий.

Несколько иная ситуация наблюдается, в действительности, если мы приближаемся (или удаляемся) к границе зоны Ω_α по одному из примыкающих к ней сегментов, соответствующих появлению пе-

риодических траекторий. В этом случае, как можно видеть (рис. 14, нижний рисунок), длина цилиндра замкнутых траекторий остается неизменной при движении вдоль заданного сегмента. Его высота, однако, быстро увеличивается (а ширина слоев периодических траекторий — уменьшается) при удалении от границы Ω_α , что связано с ростом вероятности перескока между бывшими носителями открытых траекторий (диаметра кругов на рис. 14). Отметим, что в этом случае цилиндры замкнутых траекторий не являются цилиндрами общего положения, поскольку содержат по две особые точки на каждом из своих оснований. Соответствующая топологическая структура системы (1.1), таким образом, также не является структурой общего положения и возникает лишь для множества меры нуль на угловой диаграмме. В конечной точке сегмента ширина слоев периодических траекторий обращается в нуль и бывшие носители открытых траекторий полностью распадаются на цилиндры замкнутых траекторий (рис. 14, верхний рисунок). Соответствующая перестройка топологической структуры (1.1) должна быть при этом также отнесена к перестройкам необщего положения, наблюдаемым лишь в изолированных точках (а не вдоль одномерных направлений) на угловой диаграмме.

Надо отметить, что границы зон устойчивости Ω_α (и примыкающие к ним особые сегменты) представляют собой совершенно особые множества с точки зрения нашего определения изменения структуры системы (1.1) на поверхности Ферми. С одной стороны, как мы уже видели, сама граница зоны Ω_α определяется описанной нами перестройкой с исчезновением цилиндра замкнутых траекторий. При этом при приближении к границе Ω_α изнутри топологическая структура системы (1.1) не меняется. При приближении же к границе Ω_α с внешней стороны, однако, происходит бесконечное число перестроек системы (1.1) на поверхности Ферми, так что нельзя говорить о том, какой структурой обладает (1.1) вблизи границы Ω_α . Аналогичная картина наблюдается также при приближении к специальным сегментам (вне зоны Ω_α), соответствующим появлению периодических траекторий на поверхности Ферми.

Описанные выше перестройки цилиндров замкнутых траекторий на бывших носителях открытых траекторий являются изменениями топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми и всегда сопровождаются исчезновением (и появлением новых) цилиндров замкнутых траекторий. Такие перестройки происходят на определенных ли-

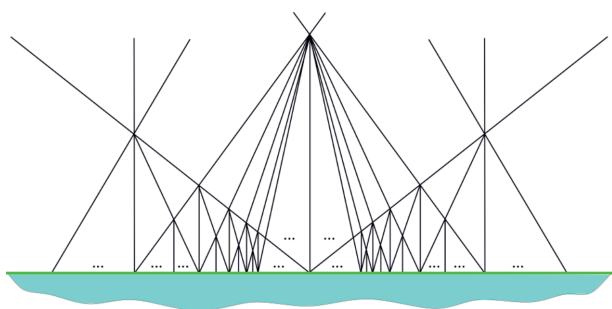


Рис. 18. Сеть направлений \mathbf{V} , соответствующая перестройкам структуры системы (1.1) вблизи границы зоны устойчивости Ω_α

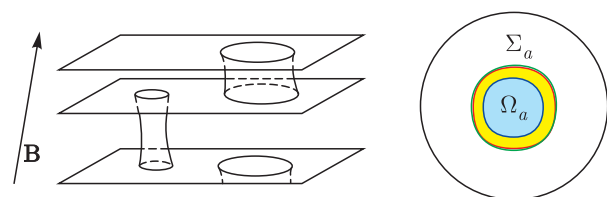


Рис. 19. Первая и вторая границы зоны устойчивости на угловой диаграмме

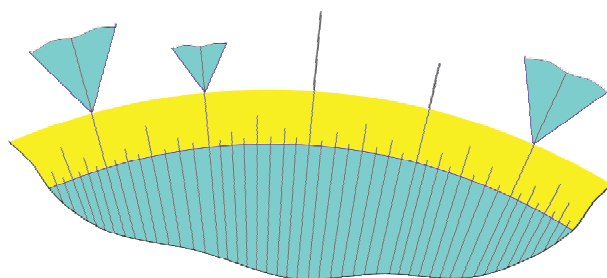


Рис. 20. Типичная структура участка второй границы зоны устойчивости Ω_α на угловой диаграмме

ниях на угловой диаграмме (см. [46]), плотность которых стремится к бесконечности при приближении к границе зоны Ω_α , а также описанным выше специальным сегментам, соответствующим появлению периодических траекторий. При удалении от границы зоны Ω_α , а также описанных выше специальных сегментов, плотность сетки направлений \mathbf{V} , соответствующей перестройкам структуры (1.1), уменьшается. Сеть направлений \mathbf{V} , соответствующая перестройкам структуры (1.1) вблизи границы Ω_α , весьма схематично может быть представлена рис. 18.

Приведенная ситуация (возможность описать траектории системы (1.1)) сохраняется до тех пор, пока не исчезнут замкнутые траектории на втором (тонком) цилиндре, соединяющем пары бывших носителей открытых траекторий (рис. 13). Таким об-

разом, наряду с первой границей зоны устойчивости Ω_α естественно ввести также ее вторую границу (см. [46]), определяющую область влияния Σ_α зоны Ω_α на угловой диаграмме (рис. 19). Область $\Omega'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \Omega_\alpha$ естественно называть производной зоны Ω_α , поскольку структура системы (1.1) для соответствующих направлений \mathbf{V} непосредственно связана со структурой этой системы в зоне Ω_α . В отличие от самих зон устойчивости Ω_α , производные различных зон устойчивости $\Omega'_\alpha, \Omega'_\beta$ могут пересекаться друг с другом. Кроме того, в отличие от первых границ зон устойчивости, вторые границы не представляют собой столь сложного множества с точки зрения перестройки структуры системы (1.1) и везде, за исключением лишь конечного числа точек, описываются простой (элементарной) перестройкой этой структуры. Исключение при этом могут составлять лишь некоторые точки второй границы (рис. 20), где ее могут пересекать описанные выше сегменты, соответствующие появлению периодических траекторий, а также примыкать другие зоны устойчивости (см. [43]).

Таким образом, можно видеть, что множество направлений \mathbf{V} , соответствующее перестройкам топологической структуры системы (1.1), является довольно обширным для достаточно сложных поверхностей Ферми. Так, наличие лишь одной зоны устойчивости на угловой диаграмме влечет за собой в действительности существование довольно сложной сети одномерных кривых на сфере S^2 , для которых имеет место перестройка множества \mathcal{M} с обращением в нуль высоты одного из цилиндров замкнутых траекторий. В первую очередь, здесь представляет интерес изучение осцилляционных явлений на первой и второй границах зоны Ω_α , помогающих в действительности определить их точное расположение. Не меньший интерес для изучения поверхности Ферми, однако, представляет собой также описанная выше сеть направлений \mathbf{V} между первой и второй границами зоны устойчивости, связанная с перестройками структуры системы (1.1) на бывших носителях открытых траекторий. Как уже было указано, для изучения интересных нам особенностей осцилляционных явлений соответствующие направления \mathbf{V} не должны приближаться слишком близко к первой границе зоны Ω_α или примыкающим к ней сегментам, соответствующим появлению периодических траекторий на поверхности Ферми. С точки зрения современных экспериментальных возможностей (получения сильных магнитных полей и материалов с большой длиной свободного пробега электронов), однако, данные ограничения не

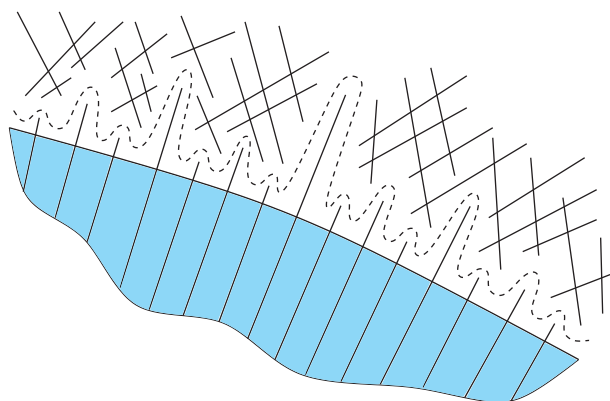


Рис. 21. Множество (сеть) экспериментально наблюдаемых направлений \mathbf{V} вблизи границы зоны устойчивости, соответствующих перестройкам структуры системы (1.1) на поверхности Ферми

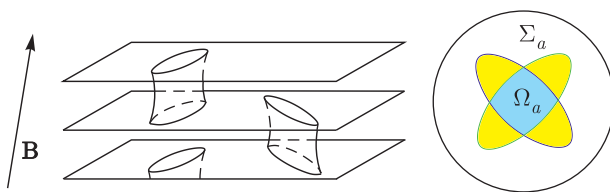


Рис. 22. Пример модельной поверхности Ферми, имеющей зону устойчивости с составными первой и второй границами

являются в действительности слишком жесткими и оставляют значительную часть данной структуры доступной для изучения (рис. 21).

Можно здесь отметить также, что описанная структура областей Ω_α и Σ_α является в некотором смысле наиболее простой. Например, возможны случаи, когда первая и вторая границы зоны Ω_α являются составными, а соответствующая область Ω'_α — несвязной (см., например, рис. 22). Кроме того, поверхности большого рода могут иметь большее количество цилиндров, разделяющих носители открытых траекторий (и даже большее количество пар носителей открытых траекторий). Тем не менее все приведенные выше замечания, относящиеся к топологической структуре траекторий вблизи зон устойчивости, сохраняются и для более сложных случаев (см., например, [46]) и, в частности, увеличение количества зон устойчивости на угловой диаграмме ведет в общем случае к быстрому увеличению множества направлений \mathbf{V} , отвечающих перестройкам топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми.

Таким образом, для диаграмм проводимости, сложность которых ограничивается наличием зон устойчивости (и сегментов, отвечающих появлению периодических траекторий), множество направлений \mathbf{V} , отвечающих перестройкам топологической структуры (1.1), всегда включает в себя границы зон устойчивости, а также довольно богатую сеть одномерных направлений \mathbf{V} в пространстве между зонами. Указанная сеть одномерных направлений \mathbf{V} на сфере \mathbb{S}^2 неограниченно сгущается вблизи границ зон устойчивости, а также примыкающих к ним сегментам, соответствующих появлению периодических траекторий на поверхности Ферми. Наблюдение осцилляционных явлений, соответствующих перестройкам структуры (1.1), возможно на указанной сети направлений при не слишком сильном приближении к границам зон устойчивости или примыкающим к ним сегментам, а также на границах зон Ω_α при приближении к ним с внутренней стороны.

Описанные выше множества интересующих нас направлений \mathbf{V} имеют непосредственное отношение к зонам устойчивости и, в частности, связаны с перестройками структуры (1.1) на бывших носителях открытых траекторий. Вместе с тем, на поверхностях Ферми достаточно большого рода вместе с этими перестройками могут происходить дополнительные перестройки структуры системы (1.1), не связанные с носителями открытых траекторий (происходящие на других участках поверхности Ферми) и не относящиеся к специальной структуре, связанной с зонами Ω_α . Соответствующие сетки направлений \mathbf{V} при этом накладываются на описанные выше множества направлений, в частности, они могут лежать внутри зон Ω_α и пересекаться с их границами.

Как следует из рассмотрения общих классов сложности угловых диаграмм магнитопроводимости в металлах (см. [43]), угловые диаграммы, соответствующие появлению лишь устойчивых и периодических траекторий на поверхности Ферми (сложные диаграммы типа А), представляют отдельный класс сложных угловых диаграмм. Как следует из общих рассуждений, появление сложных диаграмм типа А является, видимо, значительно более вероятным, чем появление сложных диаграмм другого класса (сложных диаграмм типа В) даже для проводников с очень сложными поверхностями Ферми. Диаграммы типа А содержат в случае общего положения конечное число зон устойчивости, и описанная выше структура множества направлений \mathbf{V} , соответствующих интересующим нас перестройкам структуры системы (1.1) на поверхности Ферми, является общей для диаграмм этого типа.

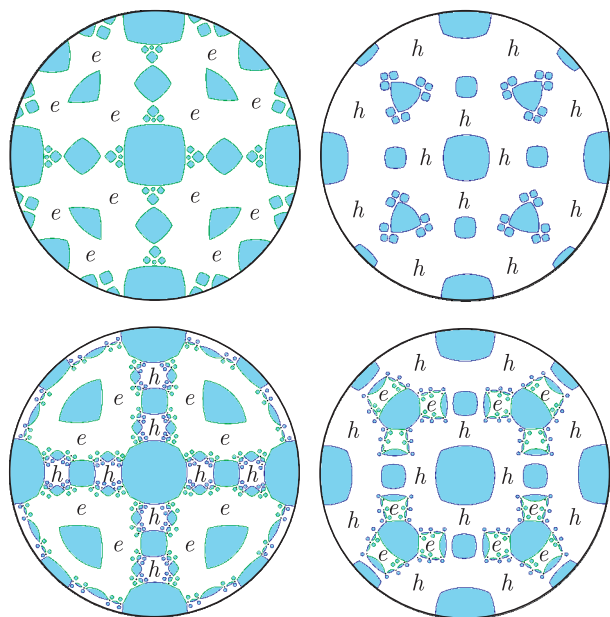


Рис. 23. Диаграммы типа А (вверху) и В (внизу). Буквами *e* и *h* обозначены области электронной и дырочной холловской проводимости при отсутствии открытых траекторий на поверхности Ферми (показаны лишь зоны устойчивости и направления **V**, соответствующие появлению хаотических траекторий на поверхности Ферми)

Сложные диаграммы второго типа (типа В) можно определить как диаграммы, содержащие направления **V**, соответствующие появлению более сложных (хаотических) неустойчивых траекторий на поверхности Ферми. В действительности, как следует из общего рассмотрения (см. [43, 46]), диаграммы этого типа содержат, кроме этого, бесконечное число зон устойчивости в случае общего положения, а также отличаются от диаграмм типа А особым поведением холловской проводимости (чередованием областей электронной и дырочной проводимостей) в областях, соответствующих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми (рис. 23).

Таким образом, для наиболее сложных поверхностей Ферми (а именно, поверхностей, на которых могут появляться траектории, более сложные, чем устойчивые и периодические открытые траектории) структура множества направлений **V**, отвечающих перестройкам топологической структуры системы (1.1), будет особенно богатой. В частности, угловые диаграммы проводимости для таких поверхностей Ферми содержат в случае общего положения бесконечное число зон устойчивости, имеющих точки сгущения на угловой диаграмме, соответствующие

специальным направлениям **V**, отвечающим появлению особо сложных (хаотических) траекторий на поверхности Ферми. Вблизи таких направлений **V** структура указанного множества (как и структура системы (1.1) на поверхности Ферми) становится особенно сложной. Как и в случае приближения к границам зон устойчивости Ω_α , приближение к особым направлениям **V**, отвечающим появлению хаотических траекторий, требует бесконечного числа элементарных актов перестройки структуры системы (1.1). В остальном, что касается общих особенностей множества направлений **V**, соответствующих изменению топологической структуры (1.1), то их описание содержит здесь те же основные детали, что и для диаграмм типа А.

4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПЕРЕСТРОЙКИ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ (1.1) И ПОЯВЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

Исходя из представленной выше картины, мы можем видеть, что кроме границ зон устойчивости Ω_α доступные экспериментально исследованию перестройки структуры системы (1.1) происходят либо в областях, отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, либо внутри зон устойчивости, не будучи связанными при этом с появлением или исчезновением открытых траекторий. Такие перестройки могут быть названы элементарными и соответствуют исчезновению (появлению) цилиндров замкнутых траекторий по обе стороны от кривой (на сфере S^2), разделяющей различные структуры системы (1.1). Осцилляционные явления, указывающие на соответствующую перестройку структуры (1.1), должны при этом наблюдаться по обе стороны от такой кривой, так что мы должны фиксировать смену одних осцилляционных членов другими при ее пересечении. В этом разделе мы более подробно рассмотрим типы элементарных перестроек структуры системы (1.1) и обсудим вероятность их возникновения на реальных поверхностях Ферми.

Как мы уже упоминали выше, основания рассматриваемых нами цилиндров замкнутых траекторий содержат одну седловую точку системы (1.1) и могут принимать одну из форм, представленных на рис. 24. В момент перестройки топологической структуры системы (1.1) мы должны наблюдать появление цилиндра нулевой высоты, представляюще-

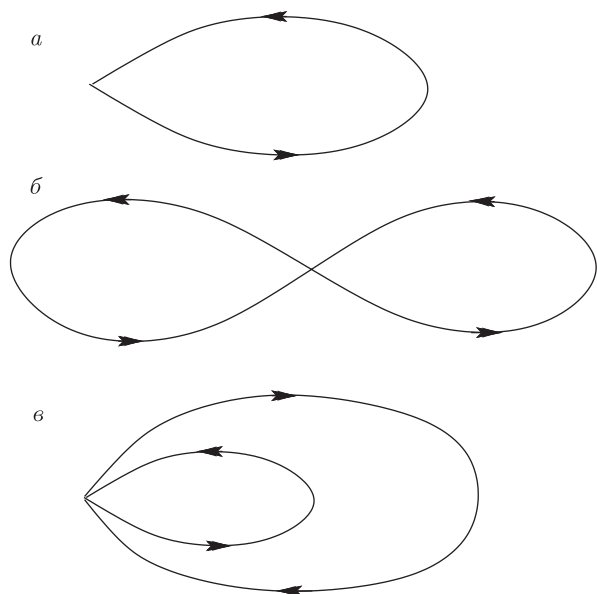


Рис. 24. Возможные формы оснований нетривиальных цилиндров замкнутых траекторий (в плоскости, ортогональной B)

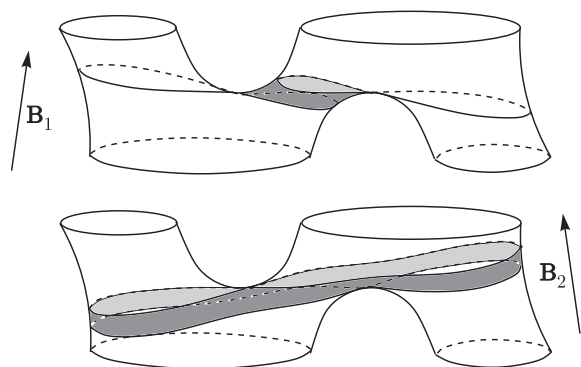


Рис. 25. Основной тип элементарной перестройки структуры (1.1) (показана лишь часть поверхности Ферми, на которой происходит перестройка)

го собой в действительности две особые точки, соединенные набором сингулярных траекторий.

По всей видимости, наиболее частым типом перестройки структуры (1.1) является перестройка, представленная на рис. 25. На рис. 26 приведены главные составляющие исчезающего и появляющегося цилиндров замкнутых траекторий (а именно, их верхние и нижние основания, а также возникающие на них экстремальные траектории), а также структура цилиндра нулевой высоты, возникающего в момент перестройки. Нетрудно видеть, что перестройка, представленная на рис. 25, приводит к исчезновению одного цилиндра замкнутых траекторий и появлению одного нового цилиндра.

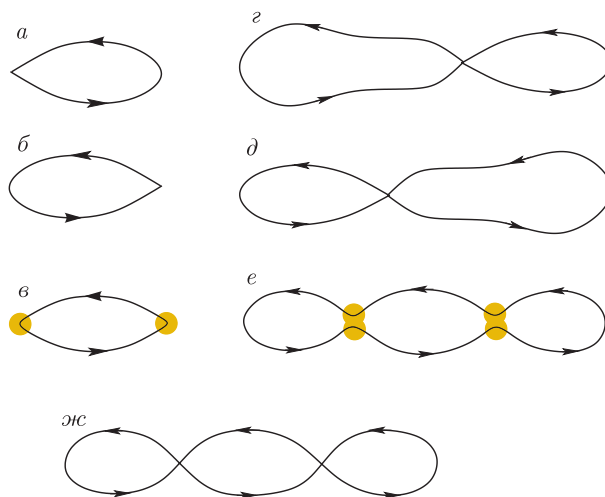


Рис. 26. Главные элементы, участвующие в перестройке структуры системы (1.1), изображенной на рис. 25. Нижнее и верхнее основания исчезающего цилиндра замкнутых траекторий и возникающая на нем экстремальная траектория (а-в). Нижнее и верхнее основания появляющегося цилиндра замкнутых траекторий и возникающая на нем экстремальная траектория (г-е). Цилиндр нулевой высоты, возникающий в момент перестройки (жс)

В общем случае, для перестроек общего положения соответствующий цилиндр нулевой высоты содержит две особые точки системы (1.1), соединенные сингулярными траекториями (мы не будем рассматривать здесь специальные вырожденные случаи с большим числом особых точек). Обе особые точки на цилиндре нулевой высоты мы будем считать невырожденными (что соответствует ненулевому значению гауссовой кривизны в соответствующих точках поверхности Ферми), в частности, это означает, что в каждую такую точку входит и выходит по две сингулярных траектории системы (1.1). Для элементарных перестроек структуры (1.1) все выходящие из пары таких точек сингулярные траектории должны также заканчиваться в этих точках.

Для поверхностей Ферми умеренной сложности все элементы, участвующие в перестройке, приведенной на рис. 25, обладают центральной симметрией. В частности, ею обладают экстремальные траектории, присутствующие на исчезающем и появляющемся цилиндрах замкнутых траекторий. Как показывает рассмотрение поверхностей Ферми самых различных типов, тип элементарной перестройки, приведенный на рис. 25, 26, имеет место в подавляющем числе случаев для реальных поверхностей Ферми.

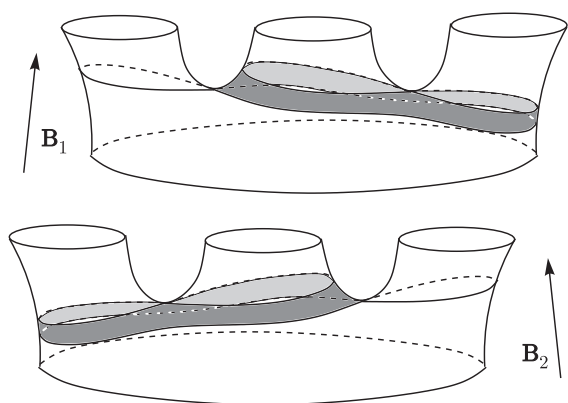


Рис. 27. Пример перестройки структуры системы (1.1) на части поверхности Ферми

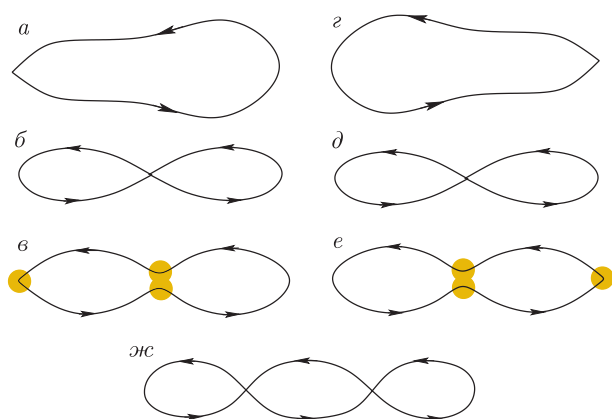


Рис. 28. Главные элементы, участвующие в перестройке структуры системы (1.1), изображенной на рис. 27. Нижнее и верхнее основания исчезающего цилиндра замкнутых траекторий и возникающая на нем экстремальная траектория (а-е). Нижнее и верхнее основания появляющегося цилиндра замкнутых траекторий и возникающая на нем экстремальная траектория (г-е). Цилиндр нулевой высоты, возникающий в момент перестройки (жс)

Топологический тип перестройки, приведенной на рис. 25, 26, не является единственно возможным. На рис. 27 и 28 показан другой тип перестройки, отличающийся от приведенного на рис. 25, 26.

Здесь сразу можно отметить одну важную разницу между типами перестройки, показанными на рис. 25-28. А именно, перестройка, показанная на рис. 25, 26, может обладать центральной симметрией и происходить, таким образом, лишь на одном участке поверхности Ферми. Что касается перестройки, показанной на рис. 27, 28, она, очевидно, не может обладать центральной симметрией и может, таким образом, возникать лишь вместе с аналогичной перестройкой на другом участке поверхно-

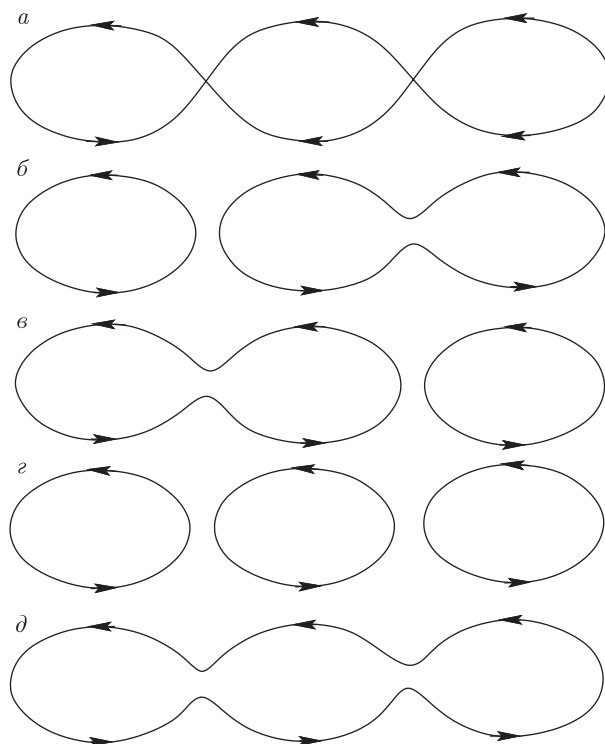


Рис. 29. Цилиндр нулевой высоты, соответствующий примерам, приведенным на рис. 25-28, а также возможные варианты расщепления особых точек при параллельном смещении соответствующей плоскости, ортогональной \mathbf{B} , по направлению магнитного поля

сти Ферми, переходящем в данный при преобразовании центральной симметрии. Таким образом, для возникновения перестроек, показанных на рис. 27, 28, соответствующая поверхность Ферми должна обладать весьма существенной сложностью (иметь достаточно большой род) даже среди традиционно сложных примеров поверхностей Ферми.

Таким образом, для перечисления различных топологических типов элементарных перестроек структуры системы (1.1) на поверхности Ферми достаточно зафиксировать топологическую структуру цилиндра нулевой высоты в плоскости, ортогональной \mathbf{B} , а также указать способы расщепления обеих седловых особых точек при параллельном смещении этой плоскости, например, вверх (вдоль направления магнитного поля). На рис. 29 приведены возможные схемы такого описания для цилиндра нулевой высоты, соответствующего примерам, приведенным на рис. 25-28.

Отметим здесь, что направление стрелок на рис. 29 является до некоторой степени условным и должно быть изменено на противоположное при замене $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$. Если мы интересуемся лишь изме-

нением топологии носителей траекторий на указанном участке поверхности Ферми, мы можем, в действительности, не указывать эти направления. Каждая из схем (а-г), приведенных на рис. 29, фиксирует структуру приклейки к цилиндру нулевой высоты других цилиндров замкнутых траекторий сверху. При параллельном смещении плоскости, ортогональной \mathbf{V} , вниз (против направления \mathbf{V}), способ расщепления каждой из особых точек меняется на противоположный ($a \leftrightarrow б, в \leftrightarrow г$), что фиксирует также структуру приклейки к цилиндру нулевой высоты других цилиндров замкнутых траекторий снизу.

Кроме того, что заданная схема расщепления особых точек фиксирует структуру приклейки к цилиндру нулевой высоты других цилиндров замкнутых траекторий в момент перестройки, она, в действительности, также определяет структуры системы (1.1) до и после нее. Действительно, перестройка структуры (1.1) происходит при малых вращениях направления магнитного поля, влекущих соответствующие вращения плоскости, ортогональной \mathbf{V} . Те вращения \mathbf{V} , при которых особые точки остаются в этой плоскости, соответствуют движению вдоль кривой перестройки структуры (1.1), а вращения, при которых особые точки не могут одновременно оставаться в одной и той же плоскости, ортогональной \mathbf{V} , соответствуют пересечению этой кривой на угловой диаграмме. Для наблюдения за перестройкой структуры (1.1) можно наблюдать за вращением плоскости, ортогональной \mathbf{V} и содержащей некоторую фиксированную точку на отрезке между двумя особыми точками. При вращениях, соответствующих перестройке структуры (1.1), такая плоскость уходит вверх вблизи одной из особых точек и вниз — вблизи другой, при этом правила расщепления особых точек во вращающейся плоскости должны соответствовать правилам, указанным первоначально. Смещая затем повернутую плоскость параллельно самой себе и используя те же фиксированные правила перестройки траекторий при ее прохождении через особые точки, нетрудно восстановить форму появляющихся (или исчезающих) цилиндров замкнутых траекторий малой высоты, а также структуру приклейки к ним других цилиндров замкнутых траекторий до или после перестройки.

Отметим, что термины исчезающая и появляющаяся структуры являются тоже до некоторой степени условными и зависят от направления вращения магнитного поля. Правильнее, в действительности, говорить о двух разных структурах системы (1.1), примыкающих друг к другу вдоль линий перестройки на угловой диаграмме. С этой точки зрения, в

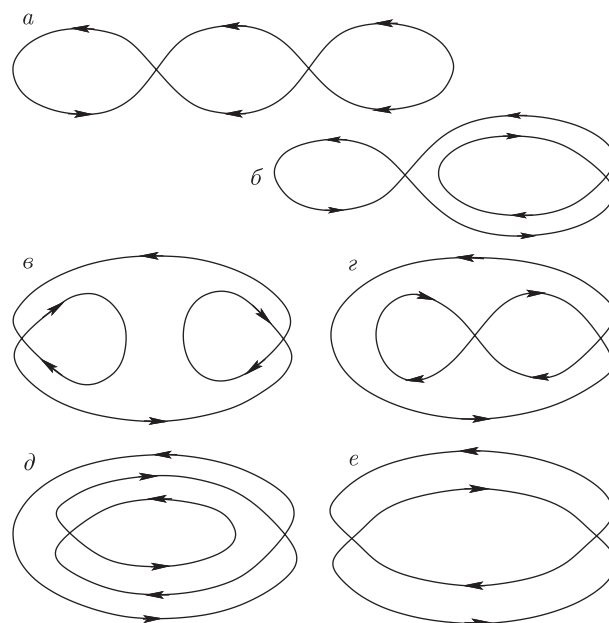


Рис. 30. Различные типы цилиндров нулевой высоты, возникающих в момент элементарной перестройки топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми

частности, замена способа расщепления сразу у обеих особых точек на описанной выше схеме не меняет по существу топологического типа перестройки, происходящей на фиксированной кривой. Поэтому для описания топологических типов перестройки структуры системы (1.1) достаточно перечислить топологические структуры соответствующих цилиндров нулевой высоты в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , и указать для каждого цилиндра, являются ли направления групповой скорости в особых точках сонаправленными или направленными противоположно друг другу. С этой точки зрения, диаграммы а и б на рис. 29 соответствуют одному и тому же топологическому типу перестройки, представленному на рис. 25, 26, а диаграммы в и г — топологическому типу, представленному на рис. 27, 28. На рис. 30 представлены различные типы цилиндров нулевой высоты, могущие возникать при элементарных перестройках структуры системы (1.1) на поверхности Ферми. Рисунки 31–40 демонстрируют соответствующие изменения топологической структуры системы (1.1) при различных ориентациях групповой скорости в седловых особых точках для случаев, отличных от представленных на рис. 25–28.

Среди представленных топологических типов перестройки структуры системы (1.1) можно сразу выделить случаи возможного наличия центральной симметрии соответствующего участка поверхности

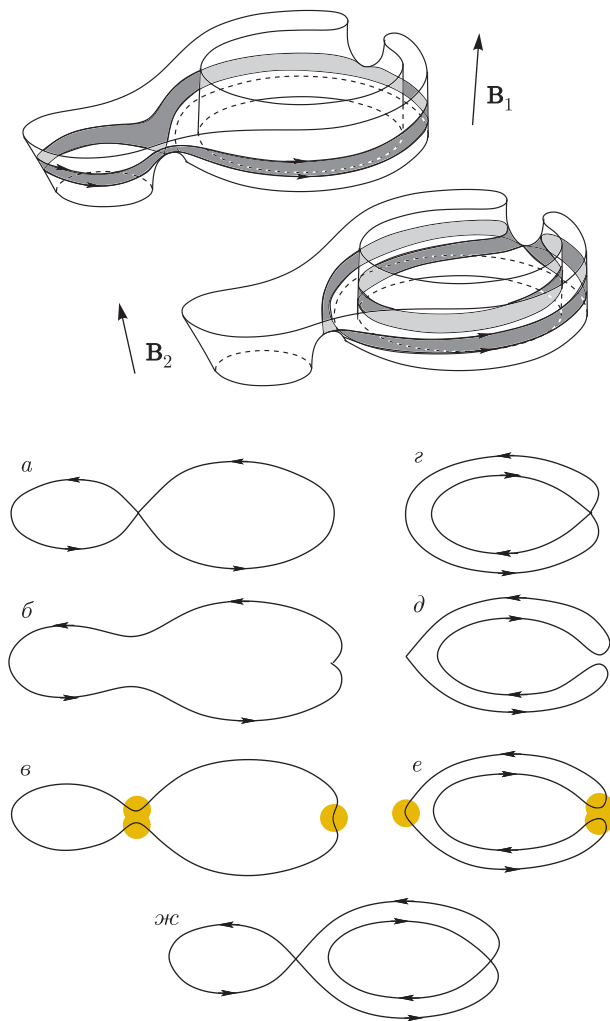


Рис. 31. Перестройка структуры системы (1.1) на части поверхности Ферми. Нижнее и верхнее основания исчезающего цилиндра замкнутых траекторий и возникающая на нем экстремальная траектория (а-е). Нижнее и верхнее основания появляющегося цилиндра замкнутых траекторий и возникающая на нем экстремальная траектория (з-е). Цилиндр нулевой высоты, возникающий в момент перестройки (жс)

Ферми. Так, представленные участки поверхности Ферми не могут обладать центральной симметрией, если ею не обладают соответствующие им цилиндры нулевой высоты. Кроме того, центральная симметрия не может наблюдаться также в тех случаях, когда групповые скорости в особых точках на цилиндре нулевой высоты сонаправлены друг другу. Все соответствующие типы перестройки структуры системы (1.1) могут, таким образом, возникать лишь парами на поверхности Ферми, что, в свою очередь, требует ее достаточной сложности.

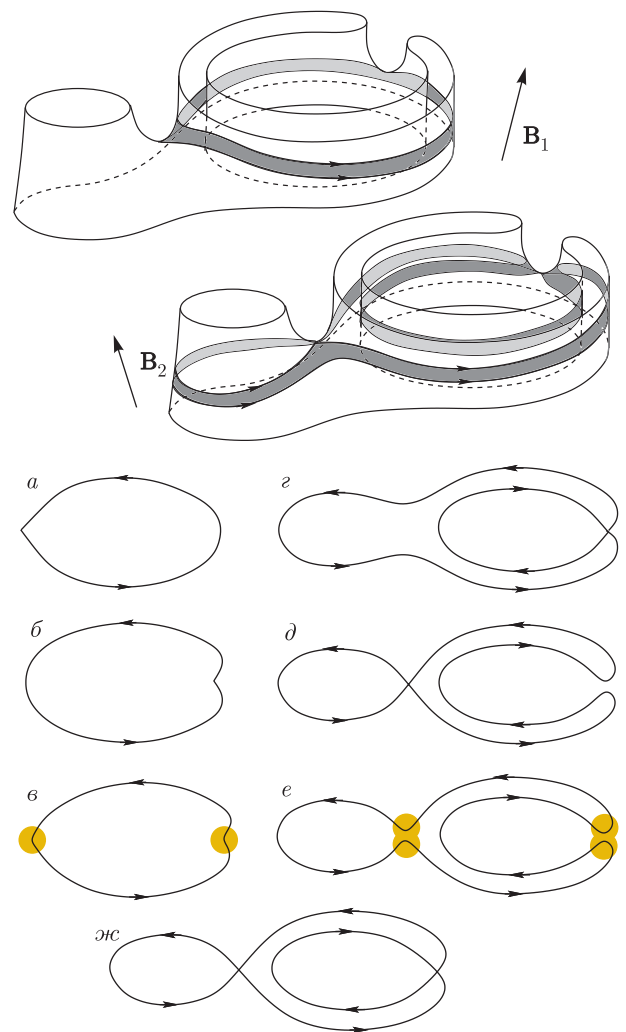


Рис. 32. См. подпись к рис. 31

Можно констатировать, что из представленных на рис. 31–40 типов перестройки структуры системы (1.1) центральной симметрией могут обладать лишь перестройки, представленные на рис. 33, 39. Однако перестройка, показанная на рис. 39, приводит к исчезновению пары цилиндров замкнутых траекторий и появлению пары новых цилиндров, что, в свою очередь, также требует достаточной сложности поверхности Ферми.

Добавим еще одно замечание о полной структуре множества направлений \mathbf{B} , соответствующих перестройкам структуры системы (1.1). А именно, рассмотрим некоторую структуру системы (1.1) на поверхности Ферми, содержащую определенное число цилиндров замкнутых траекторий. Тогда для каждого из цилиндров замкнутых траекторий можно определить область в пространстве направлений \mathbf{B} (на сфере S^2), соответствующую сохранению этого

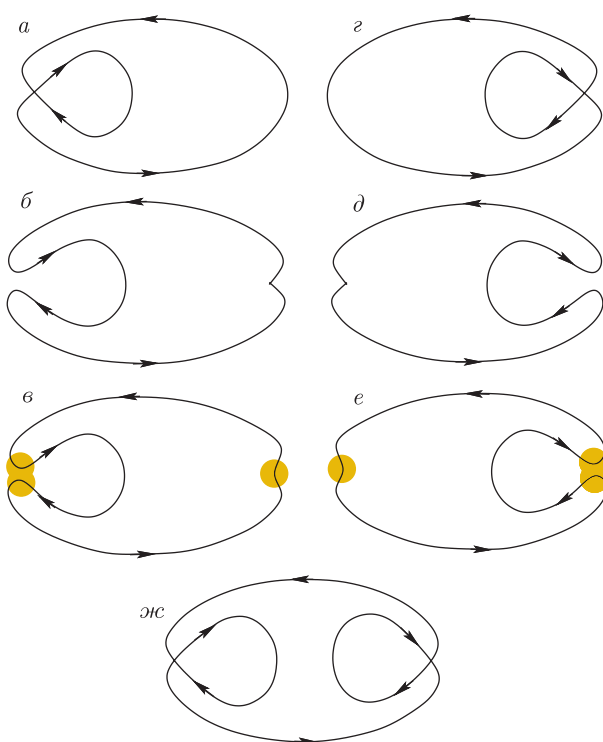
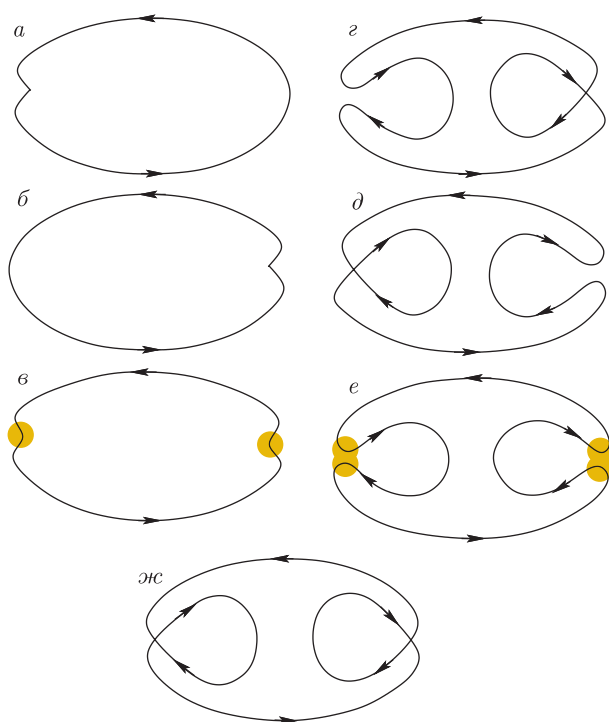
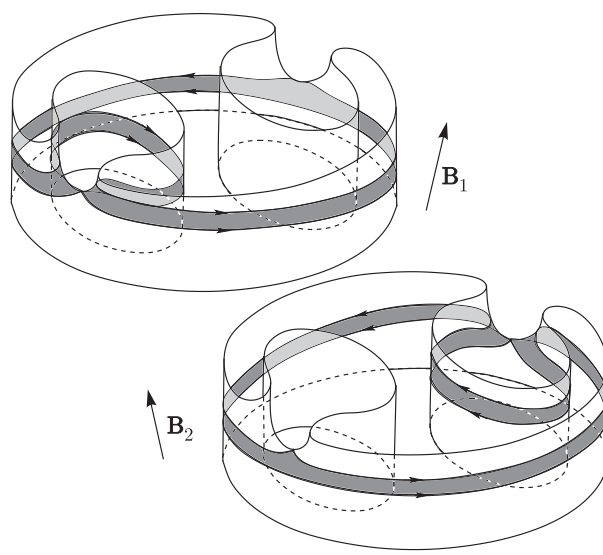
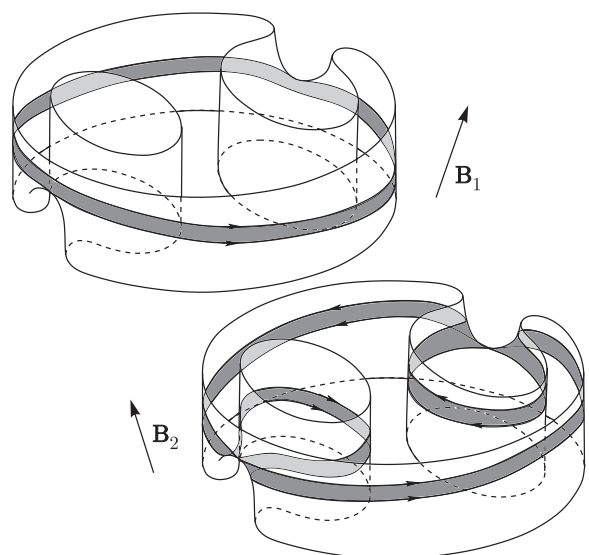


Рис. 33. См. подпись к рис. 31

Рис. 34. См. подпись к рис. 31

цилиндра (рис. 41). Граница этой области представляет собой (вообще говоря, кусочно-гладкую) кривую, при пересечении которой выбранный нами цилиндр исчезает. Рассматриваемая нами сеть направлений \mathbf{B} (включая границы зон устойчивости) представляет собой объединение всех границ введенных таким образом областей (для всех различных структур (1.1) на поверхности Ферми), пересекающихся друг с другом.

5. О СВЯЗИ ДИАГРАММЫ ПЕРЕСТРОЕК СТРУКТУРЫ (1.1) С ГЕОМЕТРИЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

Опишем кратко, каким образом картина перестроек структуры системы (1.1) на угловой диаграмме и наблюдение осцилляционных явлений на специальных экстремальных траекториях могут быть использованы для восстановления геометрии поверхности Ферми. Как мы уже говорили, главная особен-

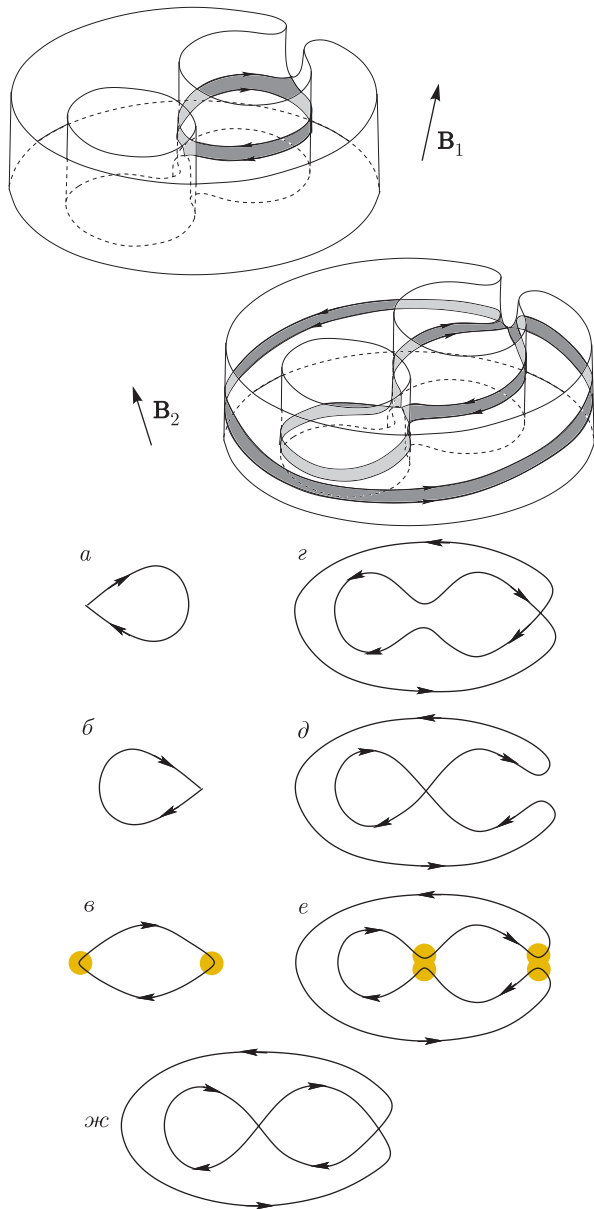


Рис. 35. См. подпись к рис. 31

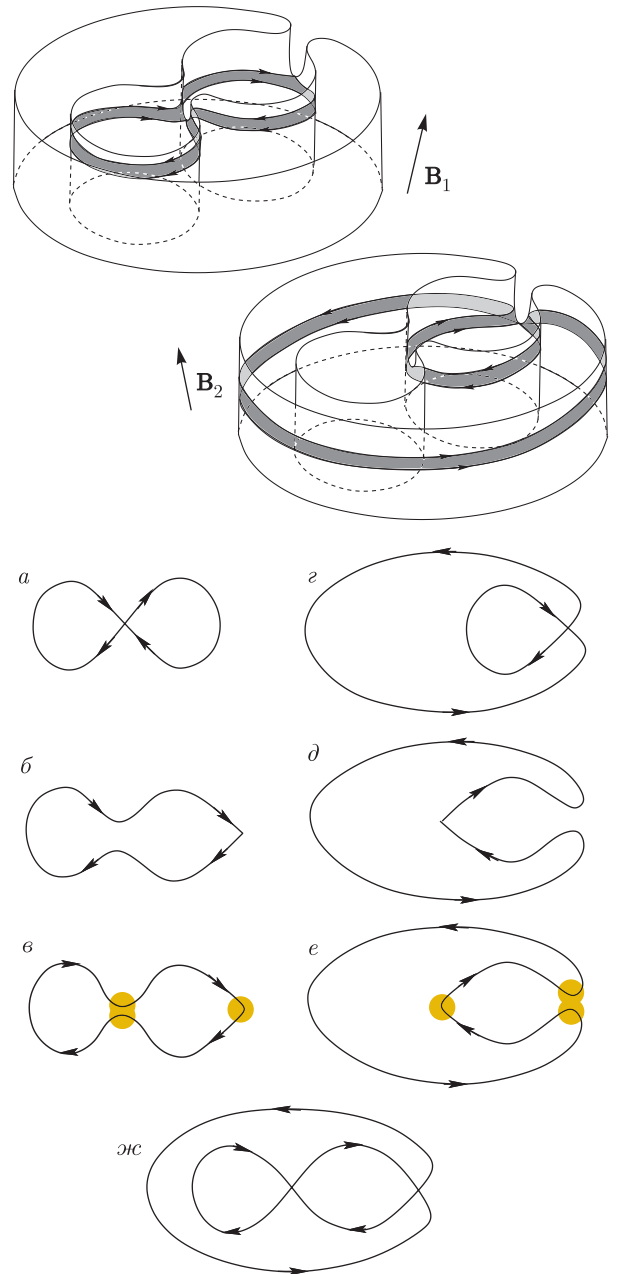


Рис. 36. См. подпись к рис. 31

ность специальных экстремальных траекторий состоит в их очень близком приближении к сингулярным траекториям при направлениях магнитного поля, близких к направлениям перестройки структуры (1.1). Пределом каждой из специальных экстремальных траекторий является при этом часть (или целый цилиндр) цилиндра замкнутых траекторий нулевой высоты, представляющего собой две особые точки, соединенные сингулярными траекториями. Соединим соответствующие особые точки (1.1) вектором (отрезком) ξ_p , лежащим в плоскости, ортогональной \mathbf{B} (см., например, рис. 42).

Как мы видели выше, множество направлений \mathbf{B} , соответствующих перестройкам структуры системы (1.1) на поверхности Ферми, представляет собой в общем случае объединение (вообще говоря, бесконечного числа) одномерных кривых на единичной сфере. При этом малые вращения \mathbf{B} вдоль направления ξ_p соответствуют линейным вариациям высоты соответствующего цилиндра замкнутых траекторий, в то время как вращения \mathbf{B} в направлении, ортогональном ξ_p , не меняют высоты цилиндра

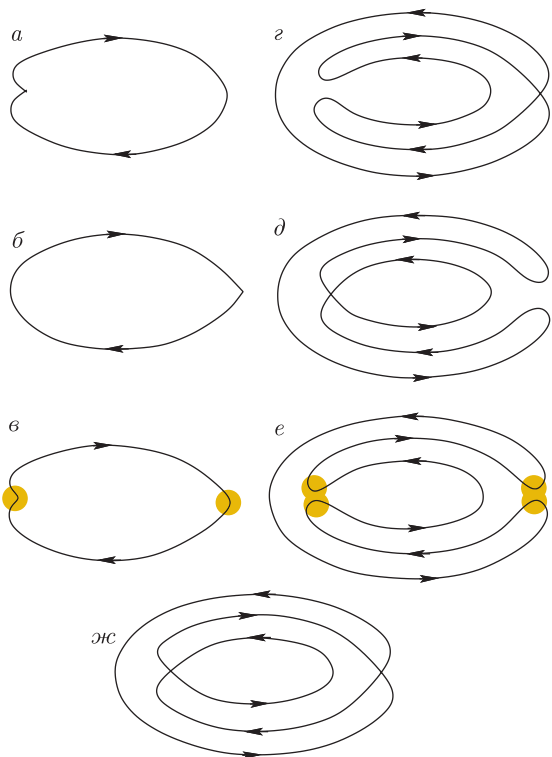
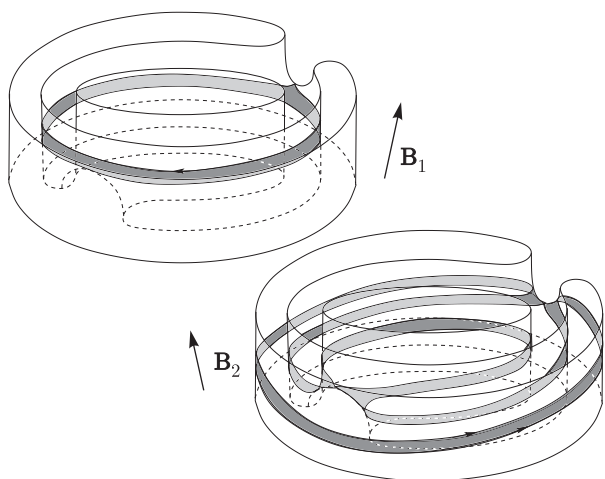


Рис. 37. См. подпись к рис. 31

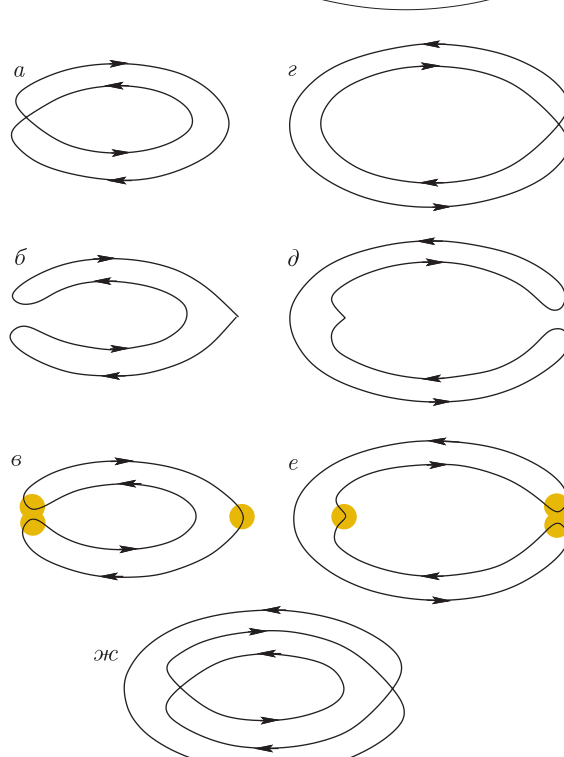
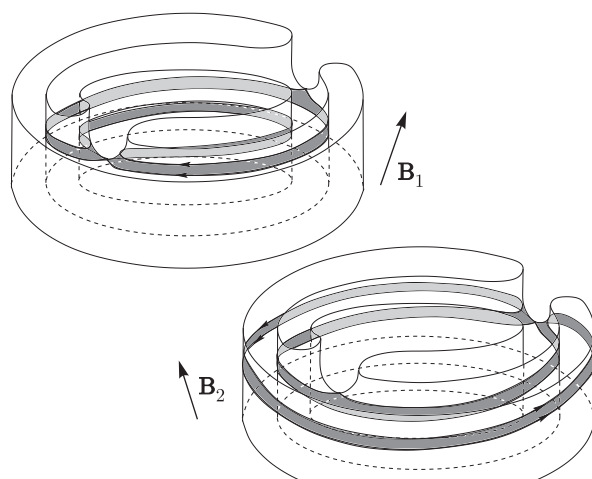


Рис. 38. См. подпись к рис. 31

дра в линейном приближении. Можно видеть, таким образом, что касательная к дуге на сфере \mathbb{S}^2 , отвечающей перестройке топологической структуры (1.1), всегда ортогональна соответствующему вектору $\xi_{\mathbf{p}}$, определенному выше. Другими словами, для направления \mathbf{V} , лежащего на дуге γ , отвечающей исчезновению определенного цилиндра замкнутых траекторий на поверхности Ферми, соответствующий вектор $\xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{V})$ в \mathbf{p} -пространстве параллелен вектору $\mathbf{V} \times \mathbf{s}(\mathbf{V})$, где $\mathbf{s}(\mathbf{V})$ — касательный вектор к дуге γ на сфере \mathbb{S}^2 (рис. 43).

При движении направления \mathbf{V} по кривой изменения структуры системы (1.1) начало и конец вектора $\xi_{\mathbf{p}}$ описывают одномерные кривые $\hat{\gamma}_{1,2}$ в \mathbf{p} -пространстве, при этом в каждой из точек этих кривых вектор $\xi_{\mathbf{p}}$ касается поверхности Ферми. Направление нормали к поверхности Ферми (т. е. $\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})$) совпадает в этих точках с соответствующим направлением \mathbf{V} и отображение Гаусса

$$S_F \rightarrow \mathbb{S}^2$$

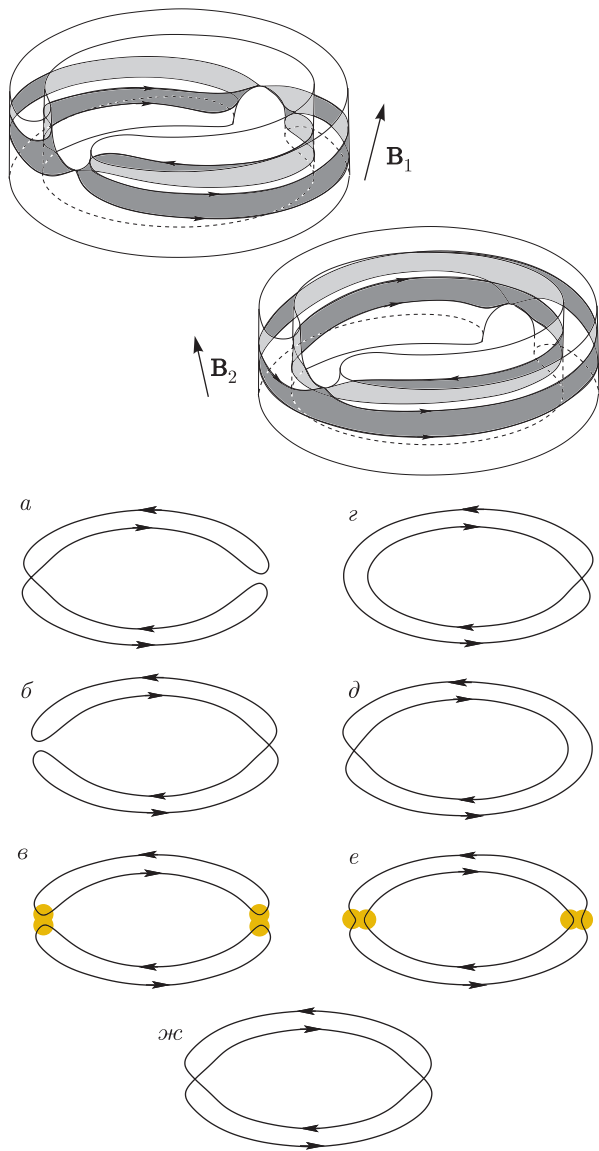


Рис. 39. Перестройка структуры системы (1.1) на части поверхности Ферми. Нижние и верхние основания пары исчезающих цилиндров замкнутых траекторий и пара возникающих на них экстремальных траекторий (а–в). Нижние и верхние основания пары появляющихся цилиндров замкнутых траекторий и пара возникающих на них экстремальных траекторий (г–е). Цилиндр нулевой высоты, возникающий в момент перестройки (жс)

отображает кривые $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$ в кривую γ и диаметрально противоположную ей кривую на сфере S^2 .

В отличие от траекторий системы (1.1), кривые $\hat{\gamma}_{1,2}$ не являются, вообще говоря, плоскими кривыми в \mathbf{p} -пространстве.

Если исчезающий цилиндр замкнутых траекторий, соответствующий дуге γ , обладает центральной симметрией, то центр отрезка ξ_p остается неподвиж-

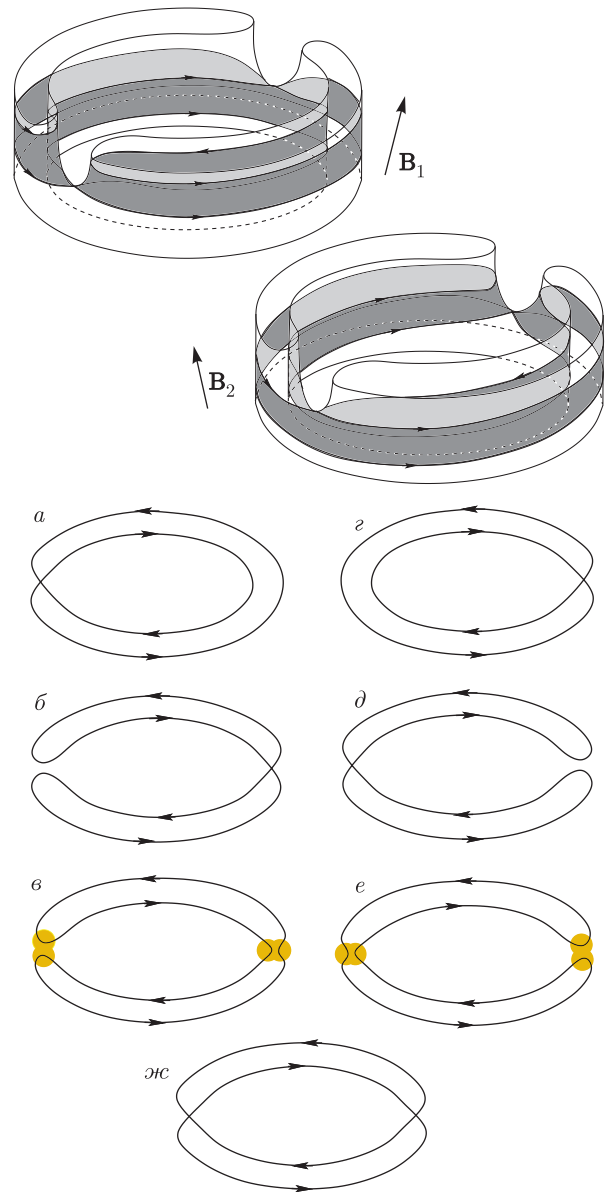


Рис. 40. См. подпись к рис. 31

ным при движении направления \mathbf{B} по γ и совпадает с одним из центров симметрии поверхности Ферми в \mathbf{p} -пространстве. В этом случае точное знание формы кривой γ (например, первой или второй границы зоны устойчивости), а также длины вектора ξ_p для каждой из точек γ , позволяет восстановить две бесконечно узкие ленты на поверхности Ферми, соответствующие движению концевых точек отрезка ξ_p (рис. 44). (Отметим, что внутренние точки ξ_p могут при этом пересекать поверхность Ферми.)

Таким образом, для дуг γ , соответствующих исчезновению центрально-симметричных цилиндров замкнутых траекторий, можно указать эффектив-

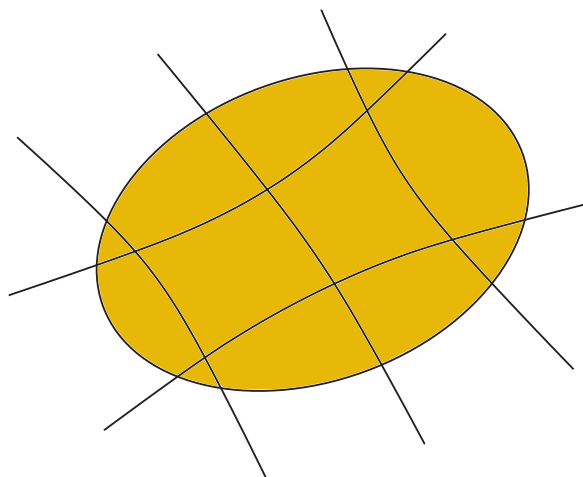


Рис. 41. Область на сфере S^2 , отвечающая существованию определенного цилиндра замкнутых траекторий на поверхности Ферми

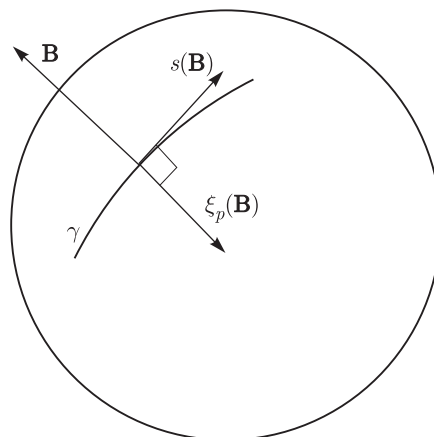


Рис. 43. Направление вектора ξ_p , отвечающего заданному направлению \mathbf{B} на кривой изменения структуры системы (1.1) на поверхности Ферми

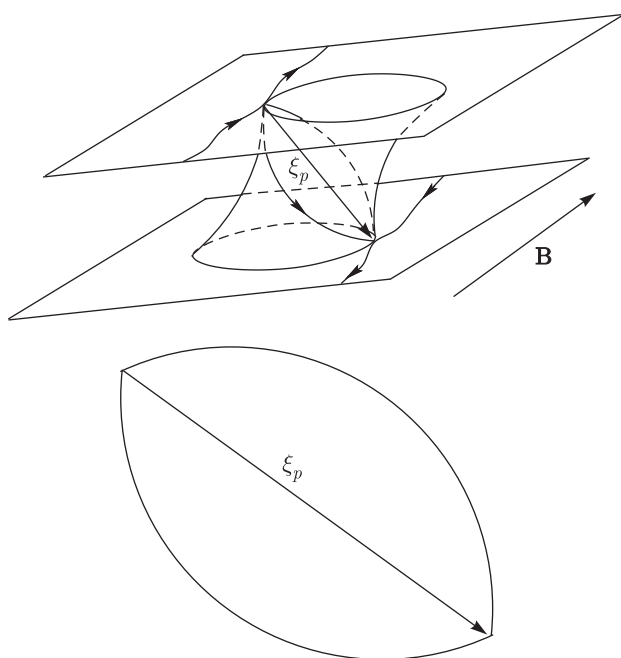


Рис. 42. Вектор ξ_p , соединяющий две особые точки на особой траектории в p -пространстве

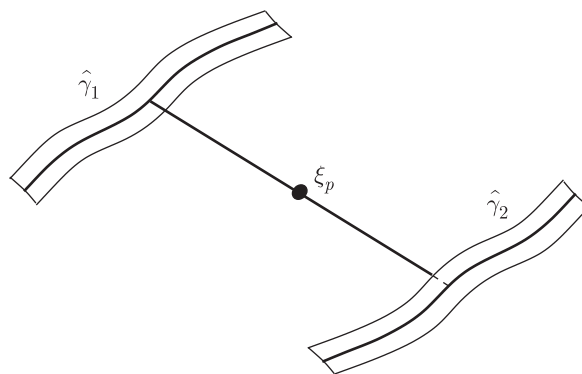


Рис. 44. Две бесконечно узкие ленты на поверхности Ферми, определяемые движением концов отрезка ξ_p при вращении направления \mathbf{B} вдоль кривой изменения структуры системы (1.1)

ную процедуру обращения отображения Гаусса и восстановления прообразов $\hat{\gamma}_{1,2}$ на поверхности Ферми вместе с направлением нормали к S_F . Так, для достаточно сложных поверхностей Ферми множества направлений \mathbf{B} отвечающие перестройкам структуры системы (1.1) образуют достаточно плотную сеть на угловой диаграмме, которая соответствует столь же плотной сети прообразов $\hat{\gamma}_{1,2}$ на поверхности Ферми. Кривые $\hat{\gamma}_{1,2}$ образованы седло-

выми особыми точками системы (1.1) и, таким образом, всегда лежат на части поверхности Ферми, имеющей отрицательную (гауссову) кривизну. Отметим, что и при более общем рассмотрении методы восстановления поверхности Ферми, основанные на изучении представленных специальных экстремальных траекторий, связаны, прежде всего, с той частью поверхности Ферми, где она имеет отрицательную гауссову кривизну.

В более общей ситуации, когда постановка эксперимента не предполагает отдельного измерения длины вектора ξ_p , каждая кривая γ , отвечающая исчезновению центрально-симметричного цилиндра замкнутых траекторий, дает нам (однопараметрическое) семейство прямых, проходящих через заданный центр симметрии и касающихся поверхности Ферми.

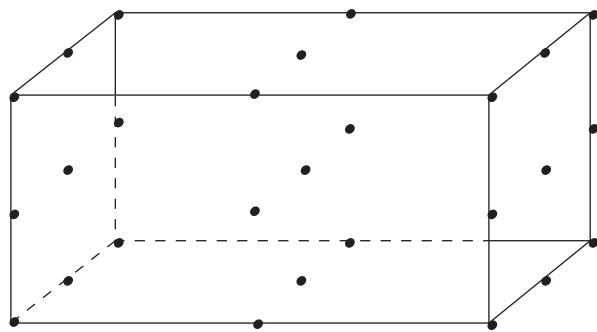


Рис. 45. Зона Бриллюэна и центры симметрии дисперсионного закона $\epsilon(\mathbf{p})$ в \mathbf{p} -пространстве

Каждое такое семейство дает важную информацию о поверхности Ферми (ее части, имеющей отрицательную кривизну), которую также удобно использовать для уточнения ее формы.

При рассмотрении образования и исчезновения центрально-симметричных цилиндров замкнутых траекторий мы должны обсудить еще следующий вопрос. Рассматривая центры симметрии периодического дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$, мы можем сказать, что в \mathbf{p} -пространстве всегда имеется несколько таких центров симметрии (неэквивалентных друг другу). В самом общем случае можно выбрать зону Бриллюэна (параллелепипед в \mathbf{p} -пространстве) так, чтобы центрами являлись центр параллелепипеда, центры его граней, центры его ребер и его вершины (рис. 45).

Центры противоположных граней параллелепипеда при этом попарно эквивалентны друг другу, центры ребер образуют 3 четверки эквивалентных центров, а все вершины параллелепипеда представляют собой один центр после факторизации по векторам обратной решетки. Таким образом, мы всегда имеем в общем случае 8 неэквивалентных центров симметрии в \mathbf{p} -пространстве. Другими словами, у нас имеется 8 неэквивалентных периодических семейств центров симметрии, переходящих друг в друга при сдвигах на полуцелые векторы обратной решетки.

Наличие центральной симметрии у цилиндра замкнутых траекторий означает, что при отражении относительно любого из центров симметрии такой цилиндр переходит в эквивалентный ему (сдвинутый на вектор обратной решетки) цилиндр в \mathbf{p} -пространстве. При этом для каждого такого цилиндра существует единственная точка в \mathbf{p} -пространстве, отражение относительно которой переводит цилиндр в себя. Нетрудно видеть, что для описанно-

го нами выше построения кривых $\hat{\gamma}_{1,2}$ необходимо знать, к какому из периодических семейств центров симметрии относится данная точка.

Соответствие между центрально-симметричными цилиндрами замкнутых траекторий и их собственными центрами симметрии в \mathbf{p} -пространстве остается неизменным вплоть до исчезновения любого из таких цилиндров и также относится к определению топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми. Кроме того, при любой элементарной перестройке структуры (1.1) исчезновение одного центрально-симметричного цилиндра замкнутых траекторий приводит к появлению центрально-симметричного цилиндра замкнутых траекторий с тем же собственным центром симметрии (совпадающим с собственным центром симметрии соответствующего цилиндра нулевой высоты). В частности, если для двух направлений \mathbf{V} возможен переход от одного направления к другому с конечным числом элементарных перестроек структуры (1.1) и при этом каждый из возникающих цилиндров нулевой высоты соответствует появлению и исчезновению лишь одного цилиндра замкнутых траекторий, то структура системы (1.1) для таких направлений содержит одинаковое число центрально-симметричных цилиндров замкнутых траекторий с теми же собственными центрами симметрии.

Таким образом, соединяя два направления, \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 , подходящей кривой на угловой диаграмме, мы можем установить соответствие между центрально-симметричными цилиндрами замкнутых траекторий, возникающих при обоих направлениях, соотнося исчезающий цилиндр с появляющимся при каждой перестройке. В частности, при таком соответствии мы можем указать, например, собственные центры симметрии таких цилиндров при направлении \mathbf{V}_2 , если они были известны при направлении \mathbf{V}_1 .

Данное обстоятельство удобно использовать при экспериментальном исследовании перестроек структуры системы (1.1), поскольку позволяет получить дополнительные данные о цилиндрах замкнутых траекторий при направлениях \mathbf{V} , для которых независимое исследование структуры (1.1) может вызывать затруднения. В частности, если для определения топологической структуры системы (1.1) при направлении \mathbf{V}_1 достаточно приближенной информации о геометрии поверхности Ферми, то наблюдая за перестройками вдоль пути, соединяющего \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 , мы можем получить необходимые данные также для направления \mathbf{V}_2 , где такой информации недостаточно. Такая ситуация является в дей-

ствительности достаточно общей, так, первый случай, как правило, имеет место в тех областях угловой диаграммы, где сеть направлений \mathbf{V} , отвечающая перестройкам структуры (1.1), не является плотной, а второй — в областях, где такая сеть является очень плотной. Каждый из цилиндров замкнутых траекторий может быть соотнесен с соответствующим осцилляционным вкладом в общей картине наблюдаемых осцилляций, при этом мы можем продолжить такое сопоставление от направления \mathbf{V}_1 до \mathbf{V}_2 , соотнося при перестройках появляющийся цилиндр с новым осцилляционным членом. Такое сопоставление позволяет, в частности, указать собственный центр симметрии соответствующего центрально-симметричного цилиндра для любого осцилляционного члена, наблюдающегося при направлении \mathbf{V}_2 .

Отметим, что общую картину осцилляций при наблюдении осцилляций различного типа мы представляем здесь как сумму конечного числа осцилляционных членов, соответствующих экстремальным траекториям на поверхности Ферми. Как мы уже отмечали, главной особенностью в поведении таких осцилляций для нас является резкое изменение общей картины при изменении топологической структуры (1.1), позволяющее наблюдать сеть направлений \mathbf{V} на сфере S^2 , соответствующих изменениям такой структуры. Более точно, как мы также уже говорили, изменение картины осцилляций при каждой элементарной перестройке системы (1.1) состоит в исчезновении одного из осцилляционных членов в общей сумме осцилляций и замене его другим (или просто исчезновением одного из осцилляционных членов на границе зоны устойчивости).

Заметим, что перестройки, содержащие цилиндры нулевой высоты, отвечающие исчезновению и появлению пар цилиндров замкнутых траекторий, могут появляться лишь в специальных случаях на достаточно сложных поверхностях Ферми. Для большого класса реальных поверхностей Ферми приведенные выше условия будут выполняться, в действительности, для любых двух направлений \mathbf{V} , которые можно соединить путем, не пересекающим границ зон устойчивости или сегментов появления периодических траекторий.

Возвращаясь теперь к перестройкам, отвечающим исчезновению и появлению цилиндров замкнутых траекторий, не обладающих центральной симметрией, можно сразу отметить, что количество таких перестроек на угловой диаграмме невелико даже для достаточно сложных поверхностей Ферми. Определение формы соответствующей кривой γ на

угловой диаграмме также задает направление вектора $\xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{V})$, соединяющего две седловые особые точки системы (1.1). В \mathbf{p} -пространстве теперь возникают два неэквивалентных отрезка с общим направлением $\xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{V})$, каждый из которых касается поверхности Ферми в двух точках. Мы можем в этом случае утверждать, что у поверхности Ферми существует отрезок заданного направления, касающийся ее в двух точках, не переходящих друг в друга при отражении (а также симметричный ему отрезок). Такие данные о поверхности Ферми выглядят несколько более сложными по сравнению с центрально-симметричным случаем, однако, можно проверить, что они обладают такой же информативностью с функциональной точки зрения.

Сделаем небольшое замечание относительно перестройки, в которой происходит исчезновение (и появление) пары цилиндров замкнутых траекторий (рис. 39). Если поверхность Ферми не является ультрасложной, естественно предполагать, что при перестройке происходит исчезновение пары цилиндров, обладающих центральной симметрией, и появление пары цилиндров, переходящих друг в друга при центральном отражении. С экспериментальной точки зрения такая перестройка отличается от остальных исчезновением двух осцилляционных членов в общей картине осцилляций и заменой их одним членом (в действительности, двумя совпадающими, приходящими от пары симметричных экстремальных траекторий). В этой ситуации, как и в случае исчезновения одного центрально-симметричного цилиндра, отрезок $\xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{V})$ является единственным и проходит через один из центров симметрии в \mathbf{p} -пространстве. Соответствующий центр симметрии совпадает с собственным центром симметрии исчезающих цилиндров и уточнение геометрии поверхности Ферми может проводиться так же, как и в случае исчезновения одного центрально-симметричного цилиндра.

Рассмотрим еще некоторые аспекты наблюдения явления циклотронного резонанса на описанных нами экстремальных траекториях, связанные с особенностями их геометрии.

Как хорошо известно, электронные траектории в \mathbf{x} -пространстве обладают геометрическими свойствами, до некоторой степени схожими с геометрическими свойствами траекторий системы (1.1) в пространстве квазиимпульсов. В частности, проекции траекторий в \mathbf{x} -пространстве на плоскость, ортогональную \mathbf{V} , подобны траекториям в \mathbf{p} -пространстве, повернутыми на 90° . Коэффициент подобия между траекториями в импульсном пространстве и их про-

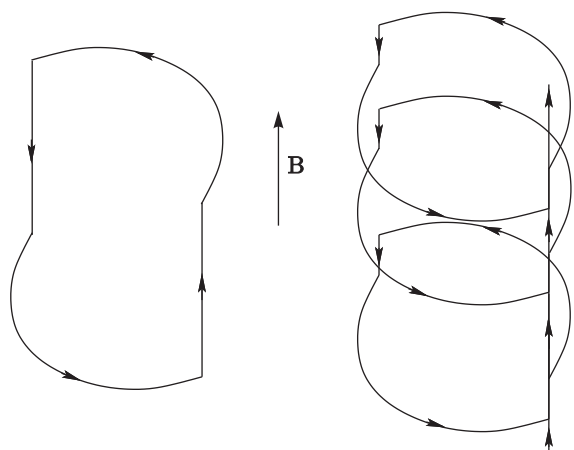


Рис. 46. Траектории в x -пространстве, соответствующие рассматриваемым нами специальным траекториям системы (1.1) в случае наличия (а) и отсутствия (б) центральной симметрии

екциями на плоскость, ортогональную \mathbf{V} , в координатном пространстве равен c/eB . В целом, все траектории в x -пространстве уменьшаются в размерах с ростом B , как B^{-1} , не меняя своей геометрической формы.

Рассматриваемым нами специальным траекториям в x -пространстве соответствуют либо замкнутые траектории (при наличии центральной симметрии), либо спиральные траектории специальной формы (при отсутствии центральной симметрии), описывающие постоянный дрейф вдоль магнитного поля (см., например, рис. 46). В обоих случаях можно отметить присутствие почти вертикальных (параллельных \mathbf{V}) участков из-за наличия на траектории в \mathbf{p} -пространстве участков, близких к особым точкам системы (1.1), на которых групповая скорость почти параллельна \mathbf{V} , а скорость пробегания по траектории очень мала. Если рассматривать циклотронный резонанс при \mathbf{V} , параллельном поверхности образца, можно видеть, что при попадании таких участков в скин-слой (см. ниже рис. 55) электроны могут проводить в нем довольно большое время, двигаясь при этом преимущественно вдоль направления \mathbf{V} . Отметим, что амплитуда осцилляций поглощения при циклотронном резонансе должна в такой ситуации быть максимальной при направлении электрического поля в падающей волне \mathbf{E}_w , параллельном \mathbf{V} . Это, в частности, может служить одним из признаков, отличающих рассматриваемую нами ситуацию от общей (попадания в скин-слой произвольного участка траектории), когда максимальное поглощение наблюдается при поляризации падающей

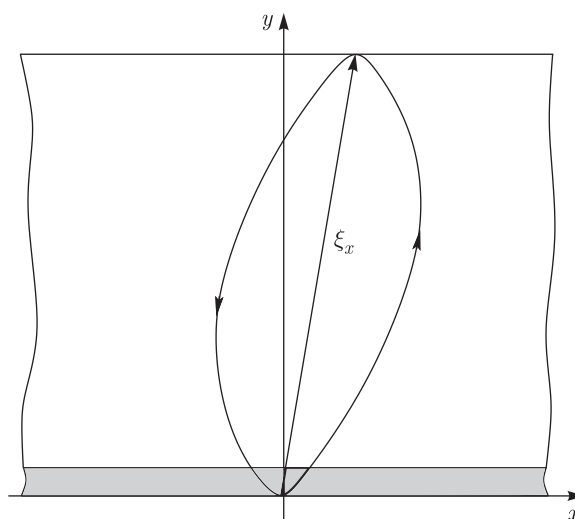


Рис. 47. Измерение величины $|\xi_x|$ при помощи отсечки циклотронных орбит для специальной экстремальной траектории наиболее часто встречающейся геометрии

щей волны $\mathbf{E}_w \parallel \mathbf{v}_{gr}$, где направление \mathbf{v}_{gr} на попадающем в скин-слой участке отлично от направления \mathbf{V} .

Ситуация попадания участка замедления в скин-слой может быть типичной, например, при измерении величины $|\xi_x|$ (а с ней и $|\xi_p|$) при помощи отсечки циклотронных орбит [47] или нерезонансного размерного эффекта [48] для наиболее часто встречающихся специальных экстремальных траекторий (рис. 47). Такой способ измерения величины $|\xi_p|$ является, возможно, наиболее удобным, поскольку направление ξ_x относительно кристаллической решетки является известным для любой точки на кривой перестройки структуры (1.1), так что толщина пластинки, на которой происходит отсечка экстремальных орбит, может быть легко соотнесена с величиной $|\xi_x|$.

Участки замедления на траекториях в \mathbf{p} -пространстве могут так же проявлять себя и в случае, когда в скин-слой попадает обычный участок траектории в ситуации циклотронного резонанса. А именно, такие участки могут создавать узкие токовые слои внутри образца с направлением тока вдоль магнитного поля. Такие токовые слои должны возникать вместе со слоями, отвечающими точкам траектории, на которых направление групповой скорости параллельно границе образца, отличаясь от них направлением и амплитудой возникающих токов. Каждая специальная экстремальная траектория порождает при этом два различных токовых слоя первого типа, соответствующих двум седловым особым точкам,

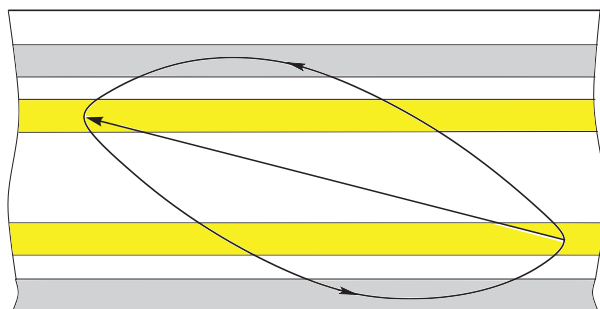


Рис. 48. Токовые слои первого и второго типа внутри образца, порождаемые специальными экстремальными траекториями

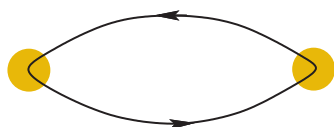


Рис. 49. Специальная экстремальная траектория наиболее часто встречающегося типа

присутствующим на соответствующем цилиндре нулевой высоты. Как и слои второго типа, слои, отвечающие участкам замедления, параллельны границе образца (рис. 48). Расстояние между двумя различными слоями, порожденными двумя участками замедления, равно длине проекции вектора ξ_x на нормаль к границе образца.

Отметим, что из приведенных в предыдущем разделе типов специальных экстремальных траекторий лишь часть допускает попадание участка замедления в скин-слой у границы образца, что обусловлено локальной геометрией таких траекторий вблизи особых точек на соответствующем цилиндре нулевой высоты. Перечислим здесь эти типы.

Начнем с самого основного типа, соответствующего траектории, возникающей при перестройке, приведенной на рис. 25, 26 (рис. 49). Траектории такого же типа возникают также при перестройках, представленных на рис. 12, на рис. 35 (траектория ϵ), на рис. 39 (одна из траекторий e), а также вблизи границ зон устойчивости Ω_α . Как при перестройке, представленной на рис. 25, 26, так и при перестройках, представленных на рис. 12, 35, 39, такие траектории возникают лишь с одной стороны от линии перестройки структуры (1.1) (а также лишь с внутренней стороны от границы зоны устойчивости). Любой из участков замедления на представленной траектории может попасть в скин-слой при подходящей ориентации кристаллической решетки образца. Групповые скорости на двух участках замед-

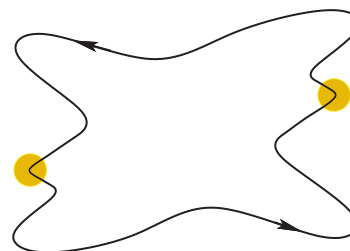


Рис. 50. Специальная экстремальная траектория сложной формы, не позволяющая попадания участков замедления в скин-слой образца

ления на таких траекториях направлены противоположно друг другу и в подавляющем числе случаев траектории такого типа обладают центральной симметрией. В редких случаях такие траектории могут возникать парами, переходя друг в друга при преобразовании центральной симметрии. В последнем случае групповые скорости на разных участках замедления могут отличаться друг от друга по абсолютной величине.

Отметим, что траектория, представленная на рис. 49, имеет, в действительности, идеальную форму и может быть в некоторых случаях существенно сложнее геометрически. В частности, несмотря на непротиворечие требуемой нами ситуации (попадания участка замедления в скин-слой) локальной геометрии траектории, такая ситуация может быть тем не менее запрещена глобальными свойствами траектории (см., например, рис. 50). В таких случаях форма данной траектории довольно быстро меняется при движении направления \mathbf{V} вдоль соответствующей кривой перестройки структуры системы (1.1) на угловой диаграмме. Требуемая нами ситуация, как правило, становится возможной не на всей кривой γ , а лишь на определенных ее участках. Отметим также, что сделанное замечание будет в равной степени относиться также к другим типам траекторий, рассматриваемым ниже.

Ко второму типу специальных экстремальных траекторий, допускающих попадание участка замедления в скин-слой образца, можно отнести траектории схожей формы, изображенные на рис. 32в, 37в (рис. 51). В обоих случаях траектории такой формы возникают лишь с одной стороны от соответствующей кривой перестройки γ на угловой диаграмме. Оба случая, представленные на рис. 32, 37, не обладают центральной симметрией, поэтому соответствующие перестройки могут возникать лишь парами и, в частности, каждая из траекторий, представленных на рис. 32в, 37в, всегда возникает в па-

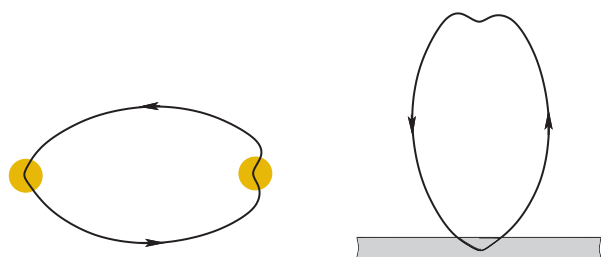


Рис. 51. Специальная экстремальная траектория второго типа, допускающая попадание участка замедления в скин-слой образца

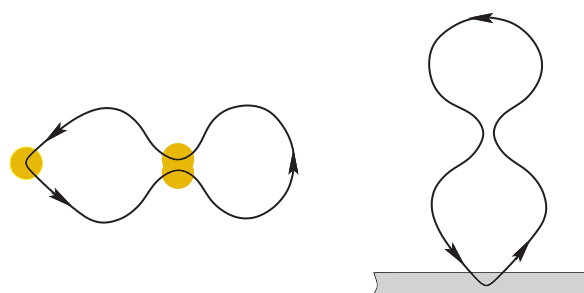


Рис. 53. Специальная экстремальная траектория четвертого типа, допускающая попадание участка замедления в скин-слой образца

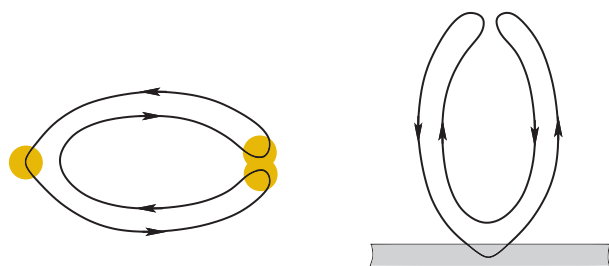


Рис. 52. Специальная экстремальная траектория третьего типа, допускающая попадание участка замедления в скин-слой образца

ре с симметричной ей траекторией (находящейся на участке поверхности Ферми, симметричном рассматриваемому). Между траекториями, представленными на рис. 32*в*, 37*в*, однако, имеется существенная разница. А именно, для траектории, изображенной на рис. 32*в*, групповые скорости $v_{gr}(\mathbf{p})$ на двух участках замедления являются сонаправленными, в то время как для траектории, изображенной на рис. 37*в*, они направлены противоположно друг другу. Последнее обстоятельство должно играть существенную роль при рассмотрении проникновения токовых слоев (параллельных границе образца) внутрь образца в данной ситуации.

К третьему типу специальных экстремальных траекторий, допускающих попадание участка замедления в скин-слой образца, можно отнести траектории схожей формы, изображенные на рис. 31*е*, 38*в* (рис. 52). В обоих случаях траектории такой формы возникают лишь с одной стороны от соответствующей кривой перестройки γ на угловой диаграмме. Оба случая, представленных на рис. 31, 38, не обладают центральной симметрией, поэтому соответствующие перестройки могут возникать лишь парами и, в частности, каждая из траекторий, представленных на рис. 31*е*, 38*в*, всегда возникает в паре с симметричной ей траекторией. Между траек-

ториями, представленными на рис. 31*е*, 38*в*, как и предыдущем случае, имеется разница, заключающаяся в направлении групповой скорости на участках замедления. Так, для траектории, изображенной на рис. 31*е*, групповая скорость на участке замедления, попадающем в скин-слой, противоположна по направлению групповой скорости на двух других участках замедления, в то время как для траектории, изображенной на рис. 38*в*, групповые скорости на всех участках замедления являются сонаправленными.

К следующему типу специальных экстремальных траекторий, допускающих попадание участка замедления в скин-слой образца, можно отнести траектории, изображенные на рис. 28*в,е*, 36*в* (рис. 53). В случае перестройки, изображенной на рис. 27, траектории такой формы возникают по обе стороны от кривой перестройки структуры (1.1). Однако траектории с одной стороны от кривой перестройки не идентичны траекториям с другой стороны от кривой перестройки, поэтому параметры соответствующих осциллирующих членов, вообще говоря, меняются при перестройке структуры (1.1). Для перестройки, приведенной на рис. 36*в*, траектории такой формы возникают лишь с одной стороны от соответствующей кривой перестройки γ на угловой диаграмме. Оба случая, представленные на рис. 27, 36, не обладают центральной симметрией, поэтому соответствующие перестройки могут возникать лишь парами и, в частности, каждая из траекторий, представленных на рис. 28*в,е*, 36*в*, всегда возникает в паре с симметричной ей траекторией. На всех представленных траекториях групповые скорости сонаправлены друг другу на всех трех участках замедления на траектории.

Наконец, к последнему типу специальных экстремальных траекторий, допускающих попадание участков замедления в скин-слой образца, мож-

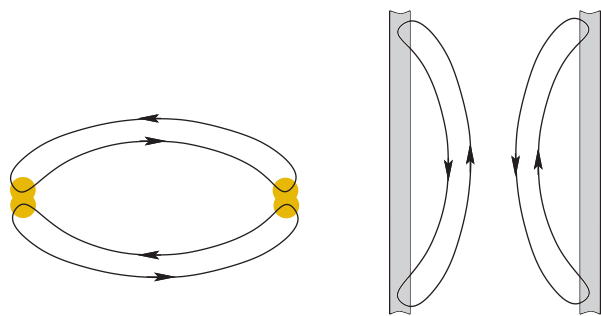


Рис. 54. Специальная экстремальная траектория пятого типа, допускающая попадание двух участков замедления в скин-слой образца

но отнести траектории, изображенные на рис. 39в (рис. 54). В случае перестройки, изображенной на рис. 39, траектории такой формы возникают лишь с одной стороны от соответствующей кривой перестройки γ на угловой диаграмме. Случай, представленный на рис. 39 обладает центральной симметрией и может возникать на единственном участке поверхности Ферми. Две траектории, представленные на рис. 39в, не связаны друг с другом в координатном пространстве и появляются независимо друг от друга. Главной особенностью траекторий, представленных на рис. 39в, является то, что для них возможно попадание сразу двух участков замедления в скин-слой у границы образца. Наблюдение циклотронного резонанса в такой ситуации является, конечно, гораздо более сложным из-за интерференции вкладов от двух приграничных точек. На каждой из траекторий, представленных на рис. 39в, групповые скорости на двух участках замедления противоположны друг другу.

Кроме представленных выше траекторий, остальные специальные экстремальные траектории, представленные на рис. 26, 28, 31–40, не допускают попадания участков замедления в скин-слой в силу особенностей их локальной геометрии вблизи таких участков.

6. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ

Данный раздел является, в некоторой степени, техническим и посвящен особенностям наблюдения осцилляционных явлений на описанных нами выше экстремальных траекториях. Большая его часть будет посвящена рассмотрению особенностей наблюдения циклотронного резонанса при попадании участка замедления в скин-слой у поверхности об-

разца. Кроме того, мы рассмотрим некоторые общие особенности и ограничения при наблюдении осцилляционных явлений при очень малых углах отклонения направления \mathbf{V} от границ перестройки структуры системы (1.1).

Эффекты влияния участков замедления на квазиклассических траекториях на осцилляционные явления и, в частности, на явление циклотронного резонанса, рассматривались и ранее с различных точек зрения. Отметим также, что участки замедления на траекториях могут возникать не только из-за наличия особых точек системы (1.1) на поверхности Ферми, но и из-за наличия перестройки поверхности постоянной энергии (особенности Ван Хоффа) вблизи энергии Ферми ϵ_F (см., например, [49]). Основная разница между двумя описанными ситуациями состоит, по-видимому, в сохранении конечной величины компоненты \mathbf{v}_{gr} вдоль направления \mathbf{V} в первом случае и близостью к нулю всех компонент \mathbf{v}_{gr} во втором.

Все рассматриваемые нами явления могут происходить лишь при довольно большой величине свободного пробега электрона в кристалле. В наиболее чистых монокристаллических образцах при низких температурах время свободного пробега электронов достигает 10^{-9} – 10^{-8} с, а соответствующая длина свободного пробега $l \approx 10^{-1}$ см. Значение глубины скин-слоя δ для типичной в ситуации наблюдения циклотронного резонанса частоты падающей волны $\nu \approx 10^{10}$ Гц может быть оценено по порядку величины как 10^{-5} – 10^{-4} см. В нашем случае резонансные частоты могут быть, в действительности, ниже приведенного здесь значения ν , поскольку период обращения по специальным экстремальным траекториям несколько больше периода обращения по обычным замкнутым траекториям. Значение δ , однако, довольно слабо зависит от частоты в ситуации аномального скин-эффекта ($\delta \sim \nu^{-1/3}$), поэтому мы также будем пользоваться оценкой $\delta \approx 10^{-5}$ – 10^{-4} см. Размеры специальной экстремальной траектории в \mathbf{x} -пространстве (ее проекции на плоскость, ортогональную \mathbf{V}) зависят от величины B . При значениях $B \approx 1$ Тл для электронов в разных металлах можно принять оценку $r_B \approx 10^{-3}$ – 10^{-2} см и $r_B \approx 10^{-4}$ – 10^{-3} см при $B \approx 10$ Тл.

Нас будет особенно интересовать случай, когда участок замедления на специальной экстремальной траектории попадает в скин-слой у границы образца. Для простоты, мы будем предполагать, что экстремальные траектории имеют наиболее часто встречающуюся центрально-симметричную форму, представленную на рис. 49.

Как хорошо известно [50, 51], в явлении классического циклотронного резонанса главную роль играет набор энергии электронами в скин-слое образца и синхронизация частоты падающего излучения с целым кратным частоты обращения электронов по экстремальным замкнутым траекториям на поверхности Ферми. Как правило, предполагается, что электрон проводит в скин-слое довольно малую часть времени и успевает возвратиться в него много раз между двумя актами рассеяния. В стандартной ситуации доля времени, проводимая электроном в скин-слое, может быть оценена как $\sqrt{\delta/r_B}$, где δ — глубина скин-слоя, а число возвратов электрона в скин-слой меняется от нескольких десятков до нескольких сотен. Обычно предполагается, что фаза падающей волны почти не меняется за время пребывания электрона в скин-слое для сравнительно небольших n в соотношении $\Omega = n\omega_B$, где Ω — частота падающего излучения. В самых чистых образцах циклотронный резонанс может наблюдаться при этом вплоть до достаточно больших значений n , достигающих нескольких десятков.

Условия наблюдения циклотронного резонанса при попадании в скин-слой участка замедления могут, в действительности, отличаться от приведенных выше, поэтому мы должны рассмотреть соответствующую ситуацию более подробно.

Для этого нам надо воспроизвести (стандартное) рассмотрение формы специальных экстремальных траекторий и движения по ним на участках замедления.

Мы будем полагать, что ось z направлена вдоль магнитного поля. Кроме того, выберем оси x и y параллельными направлениям главной кривизны в рассматриваемой в данный момент седловой особой точке, близкой к специальной траектории на исчезающем цилиндре замкнутых траекторий. Будем также полагать для простоты, что граница образца совпадает с плоскостью xz (рис. 55).

В общем виде форма траектории вблизи критической точки в \mathbf{p} -пространстве задается уравнением

$$\frac{1}{2} \left(K_1 (\Delta p_x)^2 - K_2 (\Delta p_y)^2 \right) = \Delta p_z, \quad (6.1)$$

где K_1 и K_2 — значения главной кривизны поверхности Ферми в критической точке. Значение Δp_z непосредственно связано с углом отклонения направления \mathbf{V} от границы перестройки структуры системы (1.1), поскольку

$$\Delta p_z = \alpha |\xi_{\mathbf{p}}|/2 \quad (0 < \alpha \ll 1).$$

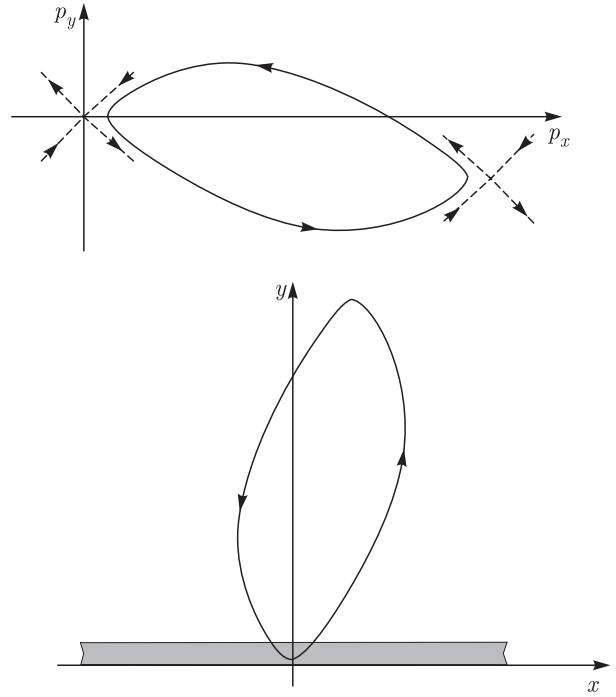


Рис. 55. Экстремальная траектория в \mathbf{p} -пространстве и соответствующая ей траектория в x -пространстве, проходящая через скин-слой у поверхности образца (проекция на плоскость, ортогональную \mathbf{B})

Таким образом, можно написать

$$K_1 (\Delta p_x)^2 - K_2 (\Delta p_y)^2 = \alpha |\xi_{\mathbf{p}}|. \quad (6.2)$$

В координатном пространстве непосредственно из уравнения (6.2) следует уравнение

$$K_1 (\Delta y)^2 - K_2 (\Delta x)^2 = \frac{c^2}{e^2 B^2} \alpha |\xi_{\mathbf{p}}| = \frac{c}{eB} \alpha |\xi_x|$$

для проекции специальной экстремальной траектории на плоскость, ортогональную \mathbf{B} . В частности, при $\Delta x = 0$ мы получаем

$$\Delta y = \frac{c}{eB} \sqrt{\frac{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|}{K_1}}$$

для расстояния от траектории до точки пересечения асимптот гиперболы.

Вводя обозначение $r_B = cp_F/eB$, условия $\Delta y \leq \delta$ и $\Delta y \geq \delta$ можно записать в виде

$$\frac{1}{p_F} \sqrt{\frac{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|}{K_1}} \leq \frac{\delta}{r_B}, \quad \frac{1}{p_F} \sqrt{\frac{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|}{K_1}} \geq \frac{\delta}{r_B}.$$

Полагая $|\xi_{\mathbf{p}}| \approx p_F$ и $K_1 \approx p_F^{-1}$, приведенные выше условия можно также записать в виде

$$\sqrt{\alpha} \leq \delta/r_B, \quad \sqrt{\alpha} \geq \delta/r_B.$$

Проекция групповой скорости вблизи особой точки на плоскость, ортогональную \mathbf{B} , может быть приближенно записана в виде

$$v_{\perp} \approx v_{gr}^0 \sqrt{K_1^2 (\Delta p_x)^2 + K_2^2 (\Delta p_y)^2},$$

где v_{gr}^0 — значение групповой скорости в особой точке системы (1.1). На рассматриваемой траектории мы можем, используя (6.1) и (6.2), записать вблизи особой точки

$$v_{\perp} \approx v_{gr}^0 \sqrt{(K_1 K_2 + K_2^2) (\Delta p_y)^2 + \alpha K_1 |\xi_{\mathbf{p}}|},$$

а скорость пробегания по траектории в \mathbf{p} -пространстве равна соответственно

$$\frac{eB}{c} v_{gr}^0 \sqrt{(K_1 K_2 + K_2^2) (\Delta p_y)^2 + \alpha K_1 |\xi_{\mathbf{p}}|}.$$

Элемент длины траектории в \mathbf{p} -пространстве может быть записан в виде

$$\begin{aligned} dl_{\mathbf{p}} &= \sqrt{(dp_x)^2 + (dp_y)^2} = \\ &= dp_y \sqrt{\left(\frac{K_2 \Delta p_y}{K_1 \Delta p_x}\right)^2 + 1} = \\ &= dp_y \frac{\sqrt{(K_1 K_2 + K_2^2) (\Delta p_y)^2 + \alpha K_1 |\xi_{\mathbf{p}}|}}{\sqrt{K_1 K_2 (\Delta p_y)^2 + \alpha K_1 |\xi_{\mathbf{p}}|}}. \end{aligned}$$

Таким образом, время пробегания участка $dl_{\mathbf{p}}$ равно

$$dt = \frac{c}{eBv_{gr}^0} \frac{dp_y}{\sqrt{K_1 K_2 (\Delta p_y)^2 + \alpha K_1 |\xi_{\mathbf{p}}|}}.$$

Общее время увеличения периода обращения по специальной экстремальной траектории из-за наличия участка замедления может быть (несколько формально) оценено как

$$\begin{aligned} T_1 &\approx \frac{c}{eBv_{gr}^0} \int_{\Delta p_y = -p_F}^{\Delta p_y = p_F} \frac{dp_y}{\sqrt{K_1 K_2 (\Delta p_y)^2 + \alpha K_1 |\xi_{\mathbf{p}}|}} = \\ &= \frac{c}{eBv_{gr}^0} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} \ln \left(\frac{\sqrt{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}| + K_2 p_F^2} + \sqrt{K_2} p_F}{\sqrt{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}| + K_2 p_F^2} - \sqrt{K_2} p_F} \right). \end{aligned}$$

В общем случае мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{c}{eBv_{gr}^0} \int_{\Delta p_y = -P}^{\Delta p_y = P} \frac{dp_y}{\sqrt{K_1 K_2 (\Delta p_y)^2 + \alpha K_1 |\xi_{\mathbf{p}}|}} &= \\ &= \frac{c}{eBv_{gr}^0} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} \times \\ &\times \ln \left(\frac{\sqrt{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}| + K_2 P^2} + \sqrt{K_2} P}{\sqrt{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}| + K_2 P^2} - \sqrt{K_2} P} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

В пределе

$$\frac{K_2 p_F^2}{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|} \gg 1$$

или просто

$$\alpha \ll 1$$

можно написать

$$T_1 \approx \frac{c}{eBv_{gr}^0} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} \ln \frac{4K_2 p_F^2}{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|}.$$

В рассматриваемом нами центрально-симметричном случае время T_1 должно быть в действительности удвоено из-за наличия двух идентичных участков замедления на экстремальной траектории, и при любом определении T_1 полный период обращения по рассматриваемой нами траектории растет линейно по $\ln 1/\alpha$ при уменьшении α с коэффициентом $2c/eBv_{gr}^0 \sqrt{K_1 K_2}$. Это обстоятельство может быть, в частности, использовано для определения величины $v_{gr} \sqrt{K_1 K_2}$ в соответствующих предельных особых точках (1.1), т. е. на кривых $\hat{\gamma}_{1,2}$.

Для главных значений кривизны здесь можно, как и выше, использовать оценки $K_1 \approx K_2 \approx p_F^{-1}$ и получить

$$T_1 \approx \frac{c p_F}{eB v_{gr}^0} \ln \frac{4 p_F}{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|}.$$

Что касается значения $|\xi_{\mathbf{p}}|$, оно может быть порядка p_F (для самых простых траекторий) или больше него в несколько раз (или на порядок). Для грубой оценки времени T_1 можно пользоваться соотношением

$$T_1 \approx \frac{r_B}{v_F} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

При очень малых значениях α удвоенное время T_1 можно считать приблизительно равным периоду обращения по специальной экстремальной траектории (если оно превышает время $T_0 \approx 2\pi r_B/v_F$ или сравнимо с ним).

Для оценки времени, проведенного электроном в скин-слое, заметим, что соответствующему участку траектории в \mathbf{p} -пространстве отвечают значения Δp_x , удовлетворяющие соотношению

$$\sqrt{\frac{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|}{K_1}} \leq \Delta p_x \leq \sqrt{\frac{\alpha |\xi_{\mathbf{p}}|}{K_1}} + \frac{\delta}{r_B} p_F.$$

Подставляя второе значение в уравнение (6.2), мы получаем соотношение для граничных значений Δp_y :

$$K_2 (\Delta p_y)^2 = 2 \sqrt{K_1 \alpha |\xi_{\mathbf{p}}|} \frac{\delta}{r_B} p_F + K_1 \frac{\delta^2}{r_B^2} p_F^2.$$

Подставляя найденные значения в интеграл (6.3), мы найдем, таким образом, время T_2 , проводимое электроном в скин-слое. Мы, однако, не будем приводить эти вычисления в общем виде, а рассмотрим лишь два предельных случая:

$$\sqrt{\frac{\alpha |\xi_p|}{K_1}} \ll \frac{\delta}{r_B} p_F \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\alpha |\xi_p|}{K_1}} \gg \frac{\delta}{r_B} p_F$$

или, в грубом приближении:

$$\sqrt{\alpha} \ll \delta/r_B, \quad \sqrt{\alpha} \gg \delta/r_B.$$

В первом случае мы можем написать

$$\Delta p_y = \pm \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \frac{\delta}{r_B} p_F$$

и записать соответствующее значение для T_2 в виде

$$T_2 \approx \frac{c}{eBv_{gr}^0} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} \times \ln \left(\frac{\sqrt{\alpha |\xi_p|} + K_1 \delta^2 p_F^2 / r_B^2 + \sqrt{K_1} \delta p_F / r_B}{\sqrt{\alpha |\xi_p|} + K_1 \delta^2 p_F^2 / r_B^2 - \sqrt{K_1} \delta p_F / r_B} \right).$$

Пользуясь тем же предположением, мы можем написать теперь так же

$$T_2 \approx \frac{c}{eBv_{gr}^0} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} \ln \frac{4K_1 p_F^2 \delta^2}{\alpha |\xi_p| r_B^2}.$$

Отношение T_2/T_1 в этом случае равно

$$\left(\ln \frac{4K_1 p_F^2}{\alpha |\xi_p|} - \ln \frac{r_B^2}{\delta^2} \right) / \ln \frac{4K_1 p_F^2}{\alpha |\xi_p|}$$

и при нашем предположении близко к единице. Это же соотношение в случае попадания в скин-слой обычного участка траектории порядка $\sqrt{\delta/r_B}$ и представляет собой малую величину. Как следствие этого, амплитуда осцилляций поглощения падающего излучения может быть здесь заметно выше по сравнению с обычным случаем. Надо отметить также, что условие

$$\frac{\alpha |\xi_p|}{4K_1 p_F^2} \ll \frac{\delta^2}{r_B^2}$$

является в действительности довольно сильным и может наблюдаться лишь в достаточно сильных магнитных полях и при очень малых углах α . Так, используя снова грубые оценки для K_1 и $|\xi_p|$, это условие можно записать в виде $\alpha \ll \delta^2/r_B^2$. Данное условие в реальности предполагает соотношения $\delta/r_B \approx 10^{-1}$ (сильные магнитные поля $B \approx 10$ Тл) и $\alpha \leq 10^{-3}$.

Что касается противоположного предела,

$$\sqrt{\frac{\alpha |\xi_p|}{K_1}} \gg \frac{\delta}{r_B} p_F$$

(но, как и прежде, $\alpha \ll 1$), то он, напротив, наблюдается при не очень сильных магнитных полях. Здесь, как и выше, можно записать для грубой оценки соотношение

$$\sqrt{\alpha} \gg \delta/r_B.$$

Например, для значений B порядка 1 Тл мы можем принять $\delta/r_B \approx 10^{-2}$ и требуемое условие выполняется при $\alpha \geq 10^{-3}$. При $B \approx 10$ Тл мы имеем соотношение $\delta/r_B \approx 10^{-1}$ и тогда мы должны полагать $\alpha \gg 10^{-2}$.

Воспользуемся здесь также грубой оценкой для значений Δp_y , ограничивающих участок, соответствующий пребыванию электрона в скин-слое

$$\Delta p_y = p_F \sqrt{\sqrt{\alpha} \delta / r_B}.$$

После подстановки этих значений в пределы интегрирования в (6.3), мы получаем

$$T_2 \approx \frac{c}{eBv_{gr}^0} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} \times \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \delta/(r_B \sqrt{\alpha})} + \sqrt{\delta/(r_B \sqrt{\alpha})}}{\sqrt{1 + \delta/(r_B \sqrt{\alpha})} - \sqrt{\delta/(r_B \sqrt{\alpha})}} \right) \approx \frac{2c}{eBv_{gr}^0} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} \sqrt{\frac{\delta}{r_B \sqrt{\alpha}}} \approx \frac{2r_B}{v_F} \sqrt{\frac{\delta}{r_B \sqrt{\alpha}}}.$$

Отношение времен T_2/T здесь формально больше $\sqrt{\delta/r_B}$ при условии $\alpha \ll 1$. Подставляя, однако, приведенные выше реальные значения α для данного предела, можно видеть, что $1/\sqrt[4]{\alpha}$, в действительности, не очень велико. Видно, что в рассматриваемом случае это отношение того же порядка, что и в случае попадания в скин-слой обычного участка экстремальной траектории. В этом нет противоречия, поскольку, хотя рассматриваемый нами участок и является участком замедления, кривизна траектории на нем значительно больше кривизны на обычных участках. Таким образом, в рассматриваемом пределе мы должны ожидать приблизительно той же амплитуды осцилляций поглощения падающего излучения, что и в стандартной ситуации.

При попадании участка замедления в скин-слой у поверхности образца поведение амплитуды осцилляций поглощения падающего излучения при циклотронном резонансе заметно отличается от ее поведения в обычной ситуации. В частности, амплитуда осцилляций поглощения может быть того же

порядка, что и в стандартном случае, при не слишком сильном приближении направления \mathbf{V} к границе перестройки структуры системы (1.1). При более точном приближении направления \mathbf{V} к границе перестройки структуры (1.1) амплитуда осцилляций растет и при очень малых α и достаточно сильных магнитных полях может заметно превышать амплитуду таких осцилляций в стандартном случае.

По тем же причинам интенсивность токовых слоев, соответствующих участкам замедления внутри образца при попадании обычного участка траектории в скин-слой (рис. 48), не должна быть слишком большой при не слишком сильном приближении направления \mathbf{V} к границе перестройки структуры системы (1.1) и должна заметно увеличиваться при более точном приближении направления \mathbf{V} к этой границе. В частности, их интенсивность должна быть сравнимой с интенсивностью токовых слоев, соответствующих участкам, на которых групповая скорость параллельна границе образца в пределе $\sqrt{\alpha} \gg \delta/r_B$ и может заметно превышать ее в пределе $\sqrt{\alpha} \ll \delta/r_B$.

Здесь, однако, надо сделать еще несколько замечаний по поводу амплитуды осцилляций при очень близком приближении направления \mathbf{V} к границе перестройки структуры системы (1.1).

Во-первых, при таком приближении высота соответствующего цилиндра замкнутых траекторий становится очень малой. Вследствие этого, мера траекторий вблизи специальной экстремальной траектории, вносящих вклад в соответствующий осцилляционный член, также может уменьшаться. Этот эффект, как мы видим, противоположен эффекту, описанному выше, так что, возможно, в результате амплитуда соответствующего осцилляционного члена может и не превышать значительно его амплитуду в стандартной ситуации. Точная картина поведения соответствующей амплитуды осцилляций зависит, в действительности, от особенностей геометрии поверхности Ферми вблизи специальной экстремальной траектории и от условий эксперимента.

Другой отличительной особенностью наблюдения циклотронного резонанса в случае попадания в скин-слой участка замедления является то, что при очень малых α убывание амплитуды наблюдаемых осцилляций с ростом числа $n = T\Omega/2\pi = T\nu$ должно происходить значительно быстрее по сравнению со случаем для обычных экстремальных замкнутых траекторий. Причина в том, что из-за большого времени нахождения электрона в скин-слое n не может быть слишком большим, в противном случае поле \mathbf{E}_w может стать осциллирующим уже на временах

нахождения электрона в скин-слое, что существенно снижает эффективность набора электроном энергии за это время. В пределе крайней близости особых точек системы (1.1) к рассматриваемым нами траекториям время нахождения электрона в скин-слое может стать сравнимым с периодом обращения T по всей траектории. В этой ситуации лишь несколько пиков осцилляций быстро убывающей амплитуды, по всей видимости, будут иметь сравнительно большую величину. (Для сравнения можно отметить, что для циклотронного резонанса на обычных траекториях число наблюдаемых пиков в аналогичных осциллирующих членах может достигать нескольких десятков.) Резкое уменьшение количества наблюдаемых пиков в амплитуде поглощения также может служить указанием на приближение направления \mathbf{V} к границе перестройки топологической структуры системы (1.1).

Наконец, сделаем здесь еще одно замечание. Согласно общей идее данной работы, очевидно, что мы хотели бы исследовать осцилляционные явления как можно ближе к сетке направлений \mathbf{V} , отвечающих перестройкам структуры (1.1). Что касается ограничений на приближение направления \mathbf{V} к кривой перестройки структуры (1.1) при сохранении условий наблюдения осцилляционных явлений на специальных экстремальных траекториях, то можно сразу выделить два таких ограничения. К первому можно отнести увеличение периода T обращения вдоль экстремальных траекторий, в то время как для наблюдения осцилляционных явлений необходимо соблюдение условия $\tau/T \gg 1$. Как мы уже отметили выше, данное условие не является в действительности слишком ограничительным, поскольку рост величины T является довольно медленным (логарифмическим) при приближении к границе перестройки.

Ко второму ограничению можно отнести явление магнитного пробоя между двумя близкими участками траекторий, близких к сингулярной, при приближении направления \mathbf{V} к границе перестройки системы (1.1) (рис. 56).

Мы не будем подробно рассматривать теорию магнитного пробоя, приводящего к множеству самых разнообразных эффектов при различной форме траекторий системы (1.1) (см., например, [1–3, 52–56]). Очевидно, что предполагаемая нами простая картина осцилляционных явлений на специальных экстремальных траекториях должна возникать в ситуации, когда вероятность магнитного пробоя близка к нулю. Мы имеем дело здесь с внутризонным магнитным пробоем, вероятность

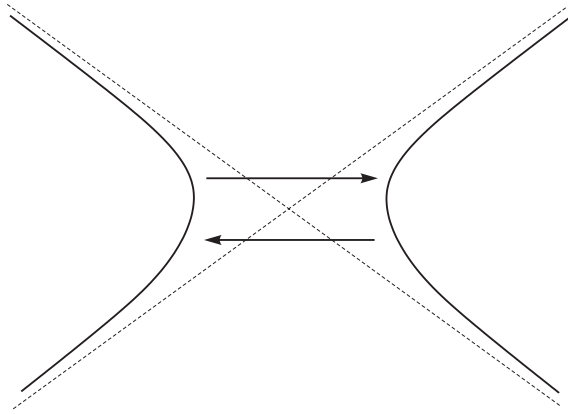


Рис. 56. Явление магнитного пробоя между двумя участками замедления на траекториях, приближающихся к сферическим

которого становится существенной при приближении высоты классического потенциального барьера между близкими участками траектории к величине $\mu_B B$. Высота классического потенциального барьера непосредственно связана с величиной угла α и может быть оценена как

$$\Delta\epsilon \approx v_{gr}^0 \frac{\alpha |\xi_p|}{2} \approx v_F \frac{\alpha |\xi_p|}{2} \approx \frac{\alpha \epsilon_F}{2} \frac{|\xi_p|}{p_F},$$

так что

$$\frac{\Delta\epsilon}{\mu_B B} \approx \frac{\epsilon_F}{\mu_B B} \frac{\alpha}{2} \frac{|\xi_p|}{p_F}.$$

В грубом приближении мы можем написать

$$\frac{\Delta\epsilon}{\mu_B B} \approx \frac{\epsilon_F}{\mu_B B} \alpha.$$

Принимая значения $\mu_B \approx 5.8 \cdot 10^{-5}$ эВ/Тл и $\epsilon_F \approx \approx 5$ эВ, можно видеть, что $\Delta\epsilon/\mu_B B \approx 10^5 \alpha$ при $B \approx \approx 1$ Тл и $\Delta\epsilon/\mu_B B \approx 10^4 \alpha$ при $B \approx 10$ Тл.

Таким образом, мы можем видеть, что простая картина осцилляционных явлений (классических или квантовых) ограничена значениями $\alpha \geq 10^{-5}$ при $B \approx 1$ Тл и $\alpha \geq 10^{-4}$ при $B \approx 10$ Тл. В частности, можно спросить о возможности наблюдения такой картины в рассматриваемом выше пределе $\sqrt{\alpha |\xi_p|/K_1} \ll \delta p_F/r_B$ или $\sqrt{\alpha} \ll \delta/r_B$ в случае циклотронного резонанса.

Возвращаясь к приведенным ранее оценкам $\delta/r_B \approx 10^{-1}$ ($B \approx 10$ Тл) и $\alpha \leq 10^{-3}$ для этой ситуации, можно видеть, что этот предел, в действительности, может иметь определенные ограничения из-за магнитного пробоя.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены вопросы, связанные с перестройками топологической структуры динамической системы, описывающей квазиклассическое движение электронов на сложных поверхностях Ферми в присутствии внешнего магнитного поля. В частности, перечислены все типы элементарных перестроек этой структуры и описаны специальные замкнутые экстремальные траектории, появление которых всегда сопутствует таким перестройкам. Показано, что осцилляционные явления, соответствующие появлению таких траекторий, могут обладать определенными особенностями. Исследование осцилляционных явлений, связанных со специальными экстремальными траекториями, могут при этом быть полезным инструментом для исследования электронных спектров в металлах.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00316).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
2. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
3. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
4. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *ЖЭТФ* **31**, 63 (1956).
5. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958).
6. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960).
7. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН* **69**, 419 (1959).
8. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН* **78**, 411 (1962).
9. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН* **87**, 389 (1965).
10. *Электроны проводимости*, под ред. М. И. Каганова, В. С. Эдельмана, Наука, Москва (1985).
11. М. И. Kaganov and V. G. Peschansky, *Phys. Rep.* **372**, 445 (2002).

12. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
13. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
14. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
15. С. П. Царев, *Частное сообщение* (1992-93).
16. И. А. Дынников, Матем. заметки **53**, 57 (1993).
17. A. V. Zorich, *Proceed. Geometric Study of Foliations*, Tokyo, November 1993, ed. by T. Mizutani et al. World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
18. I. A. Dynnikov, *Proceed. of ECM2*, BuDA (1996).
19. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
20. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
21. R. De Leo, Physica B: Cond. Matter **362**, 62 (2005).
22. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
23. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
24. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Bulletin of Braz. Math. Society, New Series **34**, 171 (2003).
25. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
26. A. V. Zorich, Annales de l'Institut Fourier **46**, 325 (1996).
27. A. V. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 173.
28. A. V. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 197, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
29. Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000).
30. Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003).
31. A. V. Zorich, in *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Vol. 1: On Random Matrices, Zeta Functions and Dynamical Systems*, Ecole de physique des Houches, France, March 9–21 (2003), ed. by P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove, Springer-Verlag, Berlin (2006), p. 439.
32. Р. Де Лео, И. А. Дынников, УМН **62**, 151 (2007).
33. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Sys. **32**, 643 (2012).
34. A. Skripchenko, Ann. Glob. Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
35. I. Dynnikov and A. Skripchenko, Novikov's Seminar 2012–2014, Adv. Math. Sci., Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. **234**, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI (2014), p. 173, arXiv:1309.4884
36. I. Dynnikov and A. Skripchenko, Trans. Moscow Math. Soc. **76**, 287 (2015).
37. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Invent. Math. **206**, 109 (2016).
38. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Bulletin de la Societe Mathematique de France **144**, 539 (2016).
39. R. De Leo, in *Advanced Mathematical Methods in Biosciences & Applications*, Springer, ed. by F. Be-rezovskaya and B. Toni (2019), p. 53; arXiv:1711.01716.
40. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **74**, 149 (2019).
41. R. Gutiérrez-Romo and C. Matheus, arXiv:1902.04516 [math.DS].
42. С. П. Новиков, Р. Де Лео, И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **156**, 761 (2019).
43. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **156**, 140 (2019).
44. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **151**, 944 (2017).
45. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **152**, 1053 (2017).
46. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **154**, 1183 (2018).
47. Э. А. Канер, ДАН **119**, 471 (1958).
48. В. Ф. Гантмахер, ЖЭТФ **43**, 345 (1962).
49. M. Orlita, P. Neugebauer, C. Faugeras, A.-L. Barra, M. Potemski, F. M. D. Pellegrino, and D. M. Basko, Phys. Rev. Lett. **108**, 017602 arXiv:1109.5014.
50. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ **30**, 811 (1956).
51. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ **32**, 896 (1957).
52. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **32**, 296 (1957).
53. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **33**, 387 (1958).
54. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **34**, 748 (1958).
55. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **39**, 1276 (1960).
56. A. Alexandradinata and L. Glazman, Phys. Rev. B **97**, 144422 (2018).