

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЯХ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ С УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ

М. А. Федотова ^{a*}, А. С. Петросян ^{a,b}

^a *Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

^b *Московский физико-технический институт
41700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 21 июня 2020 г.,
после переработки 21 июня 2020 г.
Принята к публикации 28 июня 2020 г.

Теоретически исследуются волновые процессы во вращающемся слое сжимаемой астрофизической плазмы с устойчивой стратификацией и линейным профилем энтропии. Учет сжимаемости осуществляется в неупругом приближении. В этом приближении акустические волны отфильтрованы, система содержит слагаемые с потенциальной температурой (энтропией), а уравнение непрерывности — исходный стратифицированный профиль плотности. Сила Кориолиса в магнитогидродинамических уравнениях сжимаемой астрофизической плазмы рассматривается в четырех различных приближениях: стандартной f -плоскости, нестандартной f -плоскости (с учетом горизонтальной компоненты силы Кориолиса), стандартной β -плоскости и нестандартной β -плоскости. Для каждого рассматриваемого приближения силы Кориолиса развиты линейная и нелинейная теории волновых процессов. Найдены новые типы волн, восстанавливаемыми механизмами которых служат вращение, магнитное поле, гравитация и сжимаемость. Эффекты сжимаемости представлены в новых дисперсионных уравнениях частотой Брента–Вайсяля для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. С помощью качественного анализа дисперсионных кривых выявлены все реализующиеся типы трехволновых взаимодействий. Методом многомасштабных разложений получена система уравнений для амплитуд взаимодействующих волн и инкременты параметрических неустойчивостей.

DOI: 10.31857/S0044451020120172

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена теоретическому исследованию волновых процессов во вращающейся сжимаемой астрофизической плазме с линейным профилем энтропии. Генерация, распространение и взаимодействие волн в астрофизике играют важную роль в понимании свойств и изменчивости множества астрофизических объектов и явлений, влияют на их динамику, формируют различные плазменные течения, являются частью нелинейных процессов.

Исследования эффектов стратификации в магнитогидродинамических моделях вращающейся астрофизической плазмы важны для анализа про-

цессов в солнечном тахоклине [1–6], устойчиво-стратифицированных областях в недрах звезд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра) [7], астрофизических дисках [8], экзопланетах [9], а также для анализа осцилляций вращающихся звезд и Солнца [10–12]. Учет стратификации позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце [11, 13–15]. Экспериментальное обнаружение волн магнито-Россби на Солнце инициировало развитие моделей для описания поведения волн магнито-Россби во вращающихся течениях астрофизической плазмы [16–18].

Отметим важные исследования влияния волн магнито-Россби на солнечные сезоны [12, 19] и, как следствие, их существенную роль в объяснении яв-

* E-mail: fedotova.maria.04@gmail.com

лений космической погоды [20]. Также отметим важные работы по исследованию крупномасштабных волн Россби в геофизической гидродинамике [21, 22]. Полная система уравнений магнитной гидродинамики вращающейся стратифицированной плазмы в поле силы тяжести представляет собой практически неразрешимую проблему как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Эффективной моделью для описания стратифицированной плазмы, опирающейся на магнито-гидродинамическую теорию мелкой воды [16, 23], является модель n слоев плазмы различной плотности, наложенных друг на друга.

Первым шагом в учете стратификации при исследовании волновых процессов во вращающейся плазме стал вывод магнито-гидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле, которые учитывают стратификацию в модели двух слоев плазмы различной, но постоянной плотности, выполненный в работе [17]. На основе данной модели получены линейные волны магнито-Россби, найдены поправки к ним, связанные с различием в плотностях слоев, показано влияние стратификации в данной модели на групповые и фазовые скорости полученных волн, развита слабонелинейная теория волн магнито-Россби и предсказаны параметрические неустойчивости на основе полученных амплитудных уравнений трех взаимодействующих волн. Подробный обзор результатов исследования волновых процессов в астрофизической плазме в приближении мелкой воды можно найти в работе [24].

Магнито-гидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, исключает вертикальные ускорения и учет вертикального изменения горизонтальных составляющих. Следующий существенный шаг, являющийся принципиальным для реальных астрофизических течений с непрерывной стратификацией, выполнен в работе [18], в которой изучены трехмерные волновые процессы в магнито-гидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска. В рассмотренном в работе [18] случае магнитных течений, в отличие от течений нейтральной жидкости, решения содержат новые типы волн вследствие присутствия дополнительной восстанавливающей силы, а именно силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести. В работе [18] получены законы дисперсии различных типов магнитных инерционно-гравитационных волн, магнито-астрофизических волн и волн магнито-Россби, динамика которых определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести. Показано, что в низкочастотном

пределе дисперсионное соотношение на стандартной и нестандартной β -плоскостях имеет решение в виде волны магнито-Россби, аналогичной полученной в приближении двуслойной мелкой воды. Дисперсионные кривые всех найденных типов волн качественно проанализированы для выявления выполнения условия синхронизма, обеспечивающего наличие трехволновых взаимодействий. Для всех найденных типов трехволновых взаимодействий получены амплитудные уравнения, описаны возможные параметрические неустойчивости и найдены их инкременты. Отметим, что приближение Буссинеска применимо, когда градиент плотности пропорционален только градиенту температуры, и описывает несжимаемые стратифицированные течения [25].

Важной принципиальной особенностью течений астрофизической плазмы является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. Именно исследованию фундаментальной роли сжимаемости в крупномасштабных течениях вращающейся астрофизической плазмы с устойчивой стратификацией посвящена данная работа. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астро-сейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнито-гидродинамической теории с учетом как сжимаемости, так и магнитных полей. Учет сжимаемости в магнито-гидродинамических моделях вращающейся плазмы существенно повышает возможность интерпретации астросейсмологических данных, например, данных о широтной зависимости собственных мод солнечных осцилляций [11]. Мы используем неупругое приближение (anelastic approximation) в полных уравнениях магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы для описания течений плазмы при наличии вращения. В таком приближении акустические волны отсутствуют, а градиент плотности зависит как от градиента давления, так и от градиента температуры [26]. Магнито-гидродинамическая система уравнений в неупругом приближении не содержит акустических волн и получается из полной системы сжимаемых уравнений магнитной гидродинамики в предположении малых возмущений плотности и описывает течения с малыми числами Маха.

Подробный качественный анализ эффектов малых чисел Маха в астрофизике приведен в работе [27], которая посвящена разработке нового численного алгоритма для описания объектов плазменной астрофизики. В этой работе приведено краткое,

но информативное сравнение различных типов приближений, используемых при численном моделировании течений с малым числом Маха. Наиболее простым является приближение несжимаемой жидкости, предполагающее постоянство фоновой плотности и давления по координате. В данном приближении при движении плотность жидкости можно считать постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения.

Следующим важным приближением при условии несжимаемого потока жидкости является приближение Буссинеска. В нем по-прежнему считается постоянным фоновое состояние, однако в уравнение для импульса при массовых силах включены эффекты плавучести. Как в несжимаемом приближении, так и в приближении Буссинеска уравнение непрерывности переходит в условие бездивергентности поля скоростей в силу отсутствия эффектов сжимаемости.

Следующие два приближения, неупругое и псевдонесжимаемое, основаны на стратифицированном фоновом состоянии (исходном состоянии равновесия). В обоих этих приближениях элемент жидкости может расширяться или сжиматься при движении по вертикали относительно фонового состояния в ответ на изменение давления окружающей среды. Уравнение непрерывности в неупругом приближении является условием бездивергентности произведения фоновой плотности и скорости. Уравнение непрерывности в псевдосжимаемом приближении имеет более сложный вид, а именно, ненулевую дивергенцию произведения скорости и фонового давления, возведенного в степень $1/\gamma$ ($\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты). При этом уравнения в псевдосжимаемом приближении сводятся к уравнениям в неупругом приближении в случае малых возмущений плотности и температуры, но сами по себе не предполагают малости таких изменений. Кроме того, псевдосжимаемые уравнения учитывают локальные эффекты нагрева.

Впервые неупругое приближение предложено в работе [28] для решения задач геофизической гидродинамики. В ней с использованием масштабного анализа приведен вывод уравнений на основе предположения о том, что распределение давления, плотности и потенциальной температуры газа всегда близки к модели адиабатически стратифицированной атмосферы, а временной масштаб определяется частотой Брента – Вайсяля. Такие предположения и приближения при выводе уравнений привели к отсутствию в них акустических волн, хотя это не было непосредственной целью исследования.

Задача о фильтрации акустических волн в крупномасштабных моделях геофизической гидродинамики была впервые сформулирована в работе [29] с целью упростить численное моделирование тепловой конвекции в геофизике, поскольку присутствие акустических волн в полной сжимаемой системе уравнений требует очень малого временного шага в численной схеме конечно-разностного интегрирования. Отметим работу [30], в которой показана возможность использования неупругого приближения для исследования внутренних гравитационных волн при малых числах Маха, а также работы [31–35], в которых исследуются математические свойства неупругого приближения для течений нейтральной жидкости.

Упомянем также работы по развитию теории неупругого приближения в рамках задач земной конвекции и геодинамо [36–39], которые инициировали применение неупругого приближения для изучения астрофизических течений. Говоря о развитии неупругого приближения в астрофизике и физике планет, отметим работы [40, 41], в которых используется неупругое приближение в нейтральной жидкости, и работы [42–48], в которых используются магнитогиродинамические уравнения в неупругом приближении для исследования конвекции и динамо на Солнце и в звездах.

Отметим важные для дальнейшего понимания работы [26, 49]. В работе [26] выполнен вывод уравнений для нейтрального газа в неупругом приближении с введением уменьшенного давления (reduced pressure), наиболее адекватный для астрофизических задач. Метод, предложенный в работе [26], применен в [49] для магнитогиродинамических течений без вращения. На основе данной методики вывода уравнений в настоящей работе выведены магнитогиродинамические уравнения вращающейся стратифицированной плазмы с линейным профилем энтропии в поле силы тяжести в неупругом приближении. Новые дисперсионные соотношения, полученные в данной работе, описывают различные типы волн, восстанавливаемыми механизмами которых являются магнитное поле, вращение, гравитация и сжимаемость.

В разд. 2 получена система магнитогиродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающихся сжимаемых стратифицированных течений астрофизической плазмы с линейным профилем энтропии и проведена ее линеаризация. В разд. 3.1 найдены дисперсионные соотношения для линейных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и сжимаемых магнитоастрофи-

ческих волн в неупругом приближении на f -плоскости. В разд. 3.2 получены дисперсионные соотношения для различных типов линейных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и линейных сжимаемых магнито-Росби в неупругом приближении на β -плоскости. В разд. 4.1 найдены дисперсионные соотношения для различных типов линейных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных и магнито-Росби в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости. В разд. 4.2 получены дисперсионные соотношения для различных типов линейных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных и магнито-Росби в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости. В разд. 5.1 описаны возможные для всех найденных в предыдущих разделах типов волн трехволновые взаимодействия, удовлетворяющие условию синхронизма. В разд. 5.2 выведена система уравнений для амплитуд взаимодействующих волн. Полученные дифференциальные операторы и коэффициенты для трехволновых взаимодействий на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости приведены в разд. 5.2.1, а в разд. 5.2.2 — на β -плоскости и на нестандартной β -плоскости. В разд. 5.2.3 получены инкременты параметрических неустойчивостей: распада и усиления.

2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ В НЕУПРУГОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Получим уравнения магнитной гидродинамики сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении. Неупругое приближение является одним из приближений, используемых при исследовании течений с малым числом Маха, в котором характерный временной масштаб изучаемых течений астрофизической плазмы значительно превышает время распространения акустических волн. В неупругом приближении для стратифицированной плазмы элемент жидкости при движении по вертикали меняет свой объем вследствие изменения давления окружающей среды. Таким образом, неупругое приближение учитывает эффекты сжимаемости во вращающейся астрофизической плазме. Кроме того, в неупругом приближении возмущение плотности полагается малым, что отличает его от псевдосжимаемого приближения. В силу разрозненности учета различных физических эффектов в системе уравнений в неупругом приближении и особенностей их вывода в различных ста-

тях, мы сочли полезным для читателей привести в данной работе подробный вывод системы магнито-гидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающейся стратифицированной плазмы. Таким образом, выведенная в данной работе система уравнений в неупругом приближении является новой относительно используемых ранее в различных работах уравнений в неупругом приближении, так как содержит одновременно силу Кориолиса и магнитное поле, а также предполагает постоянное ненулевое магнитное поле в исходном состоянии равновесия. Для вывода системы магнито-гидродинамических уравнений сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении воспользуемся методикой, предложенной в работе [26]. В качестве исходной используем полную систему магнито-гидродинамических уравнений сжимаемой плазмы при наличии вращения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + [\mathbf{f} \times \mathbf{v}] = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b} \times [\nabla \times \mathbf{b}]]}{4\pi\rho}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) S = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{b}]], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{b}) = 0, \quad (5)$$

$$\rho = \rho(p, S), \quad (6)$$

состоящую из уравнения Навье–Стокса (1), уравнения для энтропии (2), уравнения индукции для идеально проводящей плазмы (3), уравнения непрерывности (4), уравнения бездивергентности магнитного поля (5) и уравнения состояния (6). В системе (1)–(6) ρ — плотность плазмы, \mathbf{v} — вектор скорости, $\mathbf{f} = 2\boldsymbol{\Omega}$ — вектор силы Кориолиса, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор скорости вращения, p — давление, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — ускорение свободного падения, \mathbf{b} — вектор магнитного поля, S — энтропия. Для удобства дальнейшего анализа перейдем от энтропии к потенциальной температуре θ , используя их простую зависимость, заданную выражением $dS = c_p d \ln \theta$. Уравнение состояния (6) запишем в виде

$$d \ln \theta = \frac{1}{\gamma} d \ln p - d \ln \rho. \quad (7)$$

В качестве исходного рассмотрим состояние равновесия плазмы ($\mathbf{v}_0 = 0$) в постоянном магнитном поле ($\mathbf{b}_0 = \text{const}$) при наличии стратификации $\rho_0(z)$.

Тогда давление в равновесии удовлетворяет уравнению гидростатики

$$\frac{\nabla p_0}{\rho_0} = \mathbf{g}, \quad (8)$$

а уравнение состояния (7) для невозмущенных величин сводится к виду

$$\frac{\nabla \theta_0}{\theta_0} = \frac{\nabla p_0}{\gamma p_0} - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0}. \quad (9)$$

Для получения уравнений магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в неупругом приближении рассмотрим возмущение исходного состояния равновесия:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}', \quad p = p_0 + p', \quad (10)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \theta = \theta_0 + \theta',$$

полагая возмущение плотности малым ($\rho' \ll \rho_0$).

Линеаризуя уравнения (1), (4), (7) по ρ' и замыкая систему уравнениями (2), (3), (5), получим систему магнитогидродинамических уравнений для возмущенных переменных в неупругом приближении:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' + [\mathbf{f} \times \mathbf{v}'] = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi \rho_0} - \frac{[\mathbf{b}' \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi \rho_0}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \theta_0 + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \theta' = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{b}_0]] + [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{b}']], \quad (13)$$

$$\nabla(\rho_0 \cdot \mathbf{v}') = 0, \quad (14)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{b}') = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{p'}{\gamma p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}. \quad (16)$$

Ключевые отличия системы уравнений в неупругом приближении от уравнений в приближении Буссинеска [18] заключаются в уравнении энергии, записанном для потенциальной температуры, в уравнении непрерывности, включающем в себя исходный стратифицированный профиль плотности, и в уравнении состояния, определяющем функцию плотности как функцию не только давления, но и потенциальной температуры (энтропии). Таким образом, в неупругом приближении изменение давления и плотности жидкости связаны не только с силой плавлучести, как в приближении Буссинеска, но и с изменением потенциальной температуры (энтропии).

Запишем слагаемое ρ'/ρ_0 в уравнении Навье–Стокса (11), используя уравнение состояния для возмущенных величин (16) и уравнение состояния для невозмущенных величин (9), следующим образом:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{\gamma p_0} - \frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{p' \nabla p_0}{\gamma p_0 \rho_0 g} - \frac{\theta'}{\theta_0} = \bar{\omega} \frac{\nabla p_0}{\gamma p_0 g} - \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad (17)$$

где $\bar{\omega} = p'/\rho_0$ (reduced pressure) [26, 49].

Пренебрежем в уравнении (11) всеми слагаемыми, пропорциональными $\bar{\omega}$, за исключением слагаемых, содержащих градиент $\bar{\omega}$. Используемый метод обеспечивает выполнение условия сохранения энергии в системе. Получим магнитогидродинамическое уравнение Навье–Стокса при наличии вращения в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' + [\mathbf{f} \times \mathbf{v}'] = -\nabla \bar{\omega} - \frac{\theta'}{\theta_0} \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi \rho_0} - \frac{[\mathbf{b}' \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi \rho_0}. \quad (18)$$

Полученная таким образом система уравнений (12)–(14), (18) удобна для дальнейшего исследования, поскольку не включает в явном виде слагаемых, содержащих возмущение плотности. Система (12)–(14), (18) описывает течения вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении и используется в работе для развития линейной и слабонелинейной теорий волновых взаимодействий. Отметим, что система линейна относительно термодинамических переменных и сохраняет нелинейность для поля скорости и магнитного поля. Линеаризованная система магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающейся плазмы (12)–(14), (18) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + [\mathbf{f} \times \mathbf{v}'] = -\nabla \bar{\omega} - T' \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi \rho_0}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \theta_0 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{b}_0]], \quad (21)$$

$$\nabla(\rho_0 \cdot \mathbf{v}') = 0. \quad (22)$$

Полученные системы уравнений (12)–(14), (18) и (19)–(22) допускают аналитическое исследование для стратифицированного слоя плазмы с исходным устойчивым линейным профилем энтропии

$$\frac{\partial S_0}{\partial z} = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \text{const.} \quad (23)$$

В этом случае уравнение состояния для невозмущенных величин (9) определяет связь между плотностью и потенциальной температурой:

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 g}{\gamma p_0} - \frac{1}{g} \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (24)$$

Введем понятие частоты Брента–Вайсяля в сжимаемых течениях стратифицированной астрофизической плазмы:

$$N_\theta^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g \rho_0}{\gamma p_0} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \quad (25)$$

Учет сжимаемости в выражении (25) приводит к зависимости частоты Брента–Вайсяля не только от плотности, но и от давления. Первое слагаемое в частоте Брента–Вайсяля N_θ^2 для сжимаемых течений в неупругом приближении с линейным профилем энтропии (25) имеет вид, аналогичный частоте Брента–Вайсяля в приближении Буссинеска,

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z},$$

где $\bar{\rho}_0$ — постоянная фоновая плотность, а $\bar{\rho}$ — линейный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию. В случае сжимаемых течений в неупругом приближении предполагается стратификация исходного профиля плотности $\rho_0(z)$, обеспечивающая линейность и устойчивость профиля энтропии ($\partial_z \ln \rho_0 = \text{const}$). Для удобства дальнейшего анализа мы обозначим первое слагаемое в (25) следующим образом:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (26)$$

Кроме того, введем переобозначения для потенциальной температуры и магнитного поля:

$$T' = \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad \mathbf{b}_0 = \sqrt{4\pi\rho_0} \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{b}' = \sqrt{4\pi\rho_0} \mathbf{B}'.$$

Полученные в данном разделе магнитогиродинамические уравнения в неупругом приближении записаны для полной силы Кориолиса. Для дальнейшего исследования используем четыре различных приближения силы Кориолиса: приближение стандартной f -плоскости, когда вектор Кориолиса предполагается постоянным и направленным по вертикали, приближение нестандартной f -плоскости, когда вектор Кориолиса предполагается постоянным и учитывается его горизонтальная составляющая, приближение стандартной β -плоскости, когда

вектор Кориолиса направлен по вертикали и при малых изменениях широты слабо меняется, приближение нестандартной β -плоскости, когда учтена горизонтальная составляющая вектора Кориолиса, а он сам при малых изменениях широты меняется слабо.

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЖИМАЕМОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ПЛАЗМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ ЭНТРОПИИ

3.1. Приближение стандартной f -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на f -плоскости. Вектор Кориолиса \mathbf{f} в стандартном приближении f -плоскости полагается постоянным и направленным по вертикали: $\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$. В таком случае слагаемое $[\mathbf{f} \times \mathbf{v}']$ в уравнении (19) принимает вид $f_V v'_x \hat{\mathbf{y}} - f_V v'_y \hat{\mathbf{x}}$, где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы вдоль осей соответственно x и y . Преобразуем линейную систему магнитогиродинамических уравнений в неупругом приближении (19)–(22) для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении f -плоскости с линейным профилем энтропии (24) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} - f_V v'_y \hat{\mathbf{x}} + f_V v'_x \hat{\mathbf{y}} = \\ = -\nabla \bar{\omega} - T' \mathbf{g} - [\mathbf{B}_0 \times [\nabla \times \mathbf{B}']], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v'_z \frac{N_\theta^2}{g} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0]], \quad (29)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}') - v'_z \frac{N^2}{g} = 0. \quad (30)$$

Представим переменные возмущения исходного состояния равновесия в виде

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}_1 \exp [i(\omega t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))]. \quad (31)$$

Тогда получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на стандартной f -плоскости:

$$\omega^4 - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 - \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} [f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0, \quad (32)$$

где $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. При условии, когда в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикальной координаты z ($\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_{z_0})$), дисперсионное уравнение (32) принимает вид

$$\omega^4 - \left[2B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] \omega^2 + B_{z_0}^2 k_z^2 \left[B_{z_0}^2 k_z^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0 \quad (33)$$

и его решение включает два типа волн: трехмерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и трехмерные сжимаемые магнитострофические волны. Дисперсионное уравнение для трехмерных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет вид

$$\omega_{mig_{Bz}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2}{2k^2} N_\theta^2 + \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2}{2} N_\theta^2 \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}, \quad (34)$$

аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска ([18], формула (6)). Однако принципиальным отличием является присутствие в выражении (34) частоты Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений, N_θ^2 , которая зависит как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Таким образом, для волн, описываемых дисперсионным соотношением (34) восстанавливающими механизмами являются не только вращение, магнитное поле и гравитация, но и сжимаемость.

В частном случае отсутствия вертикального магнитного поля ($B_{z_0} = 0$) выражение (34) переходит в дисперсионное соотношение для трехмерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости [50]:

$$\omega_{ig3D} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2}. \quad (35)$$

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн в неупругом приближении имеет вид

$$\omega_{mstr_{Bz}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2}{2k^2} N_\theta^2 - \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2}{2} N_\theta^2 \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}. \quad (36)$$

Так же, как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн, трехмерные магнитострофические волны в неупругом приближении описываются дисперсионным уравнением, аналогичным дисперсионному уравнению в приближении Буссинеска ([18], формула (10)), с учетом эффектов сжимаемости в частоте Брента-Вяйсяля N_θ^2 .

В случае двумерных возмущений, действующих только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), дисперсионное уравнение (32) принимает вид

$$\omega^4 - [2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] \omega^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (37)$$

и допускает решение в виде двух типов волн. Первый тип — волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_A = \pm (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h. \quad (38)$$

Второй тип — двумерные магнито-гравитационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mg} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2}. \quad (39)$$

Выражение (39) в отсутствие магнитного поля описывает сжимаемые гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении с частотой $\omega_g = \pm \sqrt{-N_\theta^2}$.

В противоположном случае одномерных вертикальных возмущений ($k = k_z$) дисперсионное уравнение (32) имеет вид

$$\omega^4 - [2B_{z_0}^2 k_z^2 + f_V^2] \omega^2 + B_{z_0}^4 k_z^4 = 0 \quad (40)$$

и описывает два типа вертикальных магнитных волн. Первый тип удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$\omega_{z1} = \pm \sqrt{B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2}{2} + f_V \sqrt{B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2}{4}}}, \quad (41)$$

которое в случае нейтральной жидкости (при отсутствии магнитного поля) сводится к уравнению $\omega = \pm f_V$. Второй тип магнитных вертикальных волн удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$\omega_{z_2} = \pm \sqrt{B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2}{2}} - f_V \sqrt{B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2}{4}}. \quad (42)$$

Данный тип волн не имеет аналога в динамике нейтральной жидкости.

Выражения (41) и (42) совпадают с дисперсионными соотношениями для вертикальных магнитных волн, найденными в приближении Буссинеска ([18], формулы (8) и (11)).

Таким образом, в приближении f -плоскости найдены сжимаемые магнитогравитационные, сжимаемые магнитострофические и сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемым с частотой Брента–Вайсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Помимо новых типов волн найдены волны Альфвена и вертикальные магнитные волны, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

3.2. Приближение нестандартной f -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на нестандартной f -плоскости. В приближении нестандартной f -плоскости полагаем небольшое отклонение вектора Кориолиса \mathbf{f} от вертикали. Тогда вектор Кориолиса с учетом горизонтальной составляющей принимает вид $\mathbf{f} = (0, f_H, f_V)$, где $f_V = 2\Omega \sin \theta$, а $f_H = 2\Omega \cos \theta$. В таком случае слагаемое $[\mathbf{f} \times \mathbf{v}']$ в уравнении (19) принимает вид

$$(f_H v'_z - f_V v'_y) \hat{\mathbf{x}} + f_V v'_x \hat{\mathbf{y}} - f_H v'_x \hat{\mathbf{z}},$$

где $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы вдоль соответствующих осей. Учет горизонтальной составляющей в нестандартном приближении f -плоскости играет ключевую роль в описании экваториальных течений, для которых вертикальная компонента вектора Кориолиса на экваторе обращается в нуль [51].

Запишем линеаризованную систему магнитогиродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении нестандартной

f -плоскости с линейным профилем энтропии (24) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (f_H v'_z - f_V v'_y) \hat{\mathbf{x}} + f_V v'_x \hat{\mathbf{y}} - f_H v'_x \hat{\mathbf{z}} = -\nabla \bar{\omega} - T' \mathbf{g} - [\mathbf{B}_0 \times [\nabla \times \mathbf{B}']], \quad (43)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v'_z \frac{N_\theta^2}{g} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0]], \quad (45)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}') - v'_z \frac{N_\theta^2}{g} = 0. \quad (46)$$

Рассматривая возмущение в виде (31), получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на нестандартной f -плоскости:

$$\begin{aligned} \omega^4 - \frac{N^2 k_x f_H}{g k^2} \omega^3 - \\ - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 + \\ + \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} [f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_z k_x) - \\ - f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \times \\ \times \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] = 0, \quad (47) \end{aligned}$$

где $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим возмущение, направленное вдоль тороидальной компоненты магнитного поля B_{x_0} . Тогда дисперсионное уравнение (47) принимает вид

$$(\omega^2 - B_{x_0}^2 k_x^2) \times \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H}{g k_x} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0. \quad (48)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении для z -компоненты скорости содержит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом, в неупругом приближении дисперсионное уравнение (47) для волн на нестандартной f -плоскости имеет значительное различие в выражениях при первой и

третьей степенях частоты, что в частном случае распространения волн вдоль тороидального магнитного поля приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн.

Соотношение (47) описывает три типа волн. Первый тип — одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x. \quad (49)$$

Второй тип линейных волн — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (50)$$

Выражение (50) значительно отличается от дисперсионного соотношения (34) для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущем разделе, а также и от дисперсионного соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска [18]. Однако восстанавливающие механизмы для волн, описываемых выражениями (50) и (34), одинаковы. Тем не менее выражение (50) описывает физические эффекты, сопровождающие сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны в неупругом приближении с новым законом дисперсии, восстанавливаемыми механизмами которых являются вращение, гравитация, магнитное поле и сжимаемость. Отметим, что исходный профиль плотности связан непосредственно с горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компоненты вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль тороидального магнитного поля. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) вклад силы инерции в дисперсионное соотношение (50) исчезает и оно описывает одномерные сжимаемые магнитно-гравитационные волны в неупругом приближении с частотой

$$\omega_{mg_{x_1}} = \sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta'^2}, \quad (51)$$

где $N_\theta'^2 = -g^2 \rho_0 / \gamma p_0$.

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) дисперсионное соотношение (50) представимо в виде

$$\omega_{ig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2} \quad (52)$$

и описывает одномерные сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости.

Дисперсионное соотношение (52) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) описывает сжимаемые гравитационные волны в неупругом приближении с частотой $\omega = \sqrt{-N_\theta'^2}$.

Третий тип волн — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (53)$$

аналогичным полученному выше соотношению (50) с точностью до знака перед корнем. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) данный тип волн переходит в сжимаемые магнитно-гравитационные волны в неупругом приближении с частотой

$$\omega_{mg_{x_2}} = -\sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (54)$$

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) выражение (53) описывает сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости с частотой

$$\omega_{ig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2}. \quad (55)$$

В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0$, $N^2 = 0$) оба типа волн, (50) и (53), переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x$.

Рассмотри случай полоидального магнитного поля в состоянии покоя и одномерное возмущение, направленное вдоль магнитного поля. Тогда дисперсионное уравнение (47) принимает вид

$$\omega^4 - [2B_{y_0}^2 k_y^2 + f_H^2 - N_\theta^2] \omega^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (56)$$

и описывает два типа волн: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны и одномерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_y} = \pm \left(B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}. \quad (57)$$

Такой тип волн, так же как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн на стандартной f -плоскости (34), является сжимаемым аналогом одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска ([18], формула (33)).

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) выражение (57) переходит в дисперсионное соотношение для одномерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости:

$$\omega_{ig_y} = \pm \sqrt{f_H^2 - N_\theta^2}. \quad (58)$$

Дисперсионное соотношение для одномерных магнитострофических волн имеет вид

$$\omega_{mstr_y} = \pm \left(B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}, \quad (59)$$

аналогичный дисперсионному соотношению для одномерных магнитострофических волн в приближении Буссинеска ([18], формула (36)), с учетом эффектов сжимаемости, представленных частотой Брента – Вайсяля N_θ^2 .

Таким образом, в приближении нестандартной f -плоскости найдены новые сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с различными законами дисперсии и сжимаемые магнитострофические волны, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемыми с частотой Брента – Вайсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Помимо новых типов волн найдены волны Альфвена, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

4. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЖИМАЕМОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ПЛАЗМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ ЭНТРОПИИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ СФЕРИЧНОСТИ

4.1. Приближение стандартной β -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии с учетом эффектов сферичности в приближении β -плоскости. В таком приближении параметр Кориолиса

f слабо меняется при малых изменениях широты и раскладывается в ряд:

$$f = 2\Omega \sin \Theta \approx 2\Omega \sin \Theta_0 + 2\Omega(\Theta - \Theta_0) \cos \Theta_0 \approx f_0 + \beta y, \quad (60)$$

где Ω – угловая скорость вращения, Θ – широта, $f_0 = 2\Omega \sin \Theta_0$ ($f_0 \equiv f_V$), $\beta = \partial f / \partial y$. Приближение β -плоскости, в отличие от приближения f -плоскости, сохраняет первый порядок малости в разложении параметра Кориолиса. Запишем линеаризованную систему магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении β -плоскости с линейным профилем энтропии (24) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y \partial t} - f_V \frac{\partial v'_y}{\partial y} - \beta v'_y = -\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \times \left(B_{y_0} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right) + B_{z_0} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial z} \right) \right), \quad (61)$$

$$\frac{\partial v'_y}{\partial t} + f_V v'_x = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} - B_{0z} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right) + B_{0x} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right), \quad (62)$$

$$\frac{\partial v'_z}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} + T'g - B_{0x} \left(\frac{\partial B'_x}{\partial z} - \frac{\partial B'_z}{\partial x} \right) + B_{0y} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right), \quad (63)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v'_z \frac{N_\theta^2}{g} = 0, \quad (64)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0]], \quad (65)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}') - v'_z \frac{N^2}{g} = 0. \quad (66)$$

Рассматривая возмущение основного состояния в виде (31), получим дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на стандартной β -плоскости:

$$k^2 \omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 \left[f_V^2 k_z^2 + \frac{\beta N^2 f_V k_z}{g k_y} + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right] - \omega \left[k_x \beta ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2) + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y) \right] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2]. \quad (67)$$

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим двумерные возмущения только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$). Тогда дисперсионное уравнение (67) принимает вид

$$(\omega^2 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + N_\theta^2) \times \left(\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) = 0. \quad (68)$$

Выражение (68) описывает три типа волн. Первый тип — сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении, аналогичные волнам на f -плоскости (39). Второй тип — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mR1} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} - \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{4k_h^4} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}, \quad (69)$$

которое в отсутствие магнитного поля описывает стандартные гидродинамические волны Россби с частотой

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_h^2}. \quad (70)$$

Третий тип — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mR2} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} + \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{4k_h^4} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}. \quad (71)$$

Такой тип волн не имеет аналога в динамике нейтральной жидкости.

В случае одномерных возмущений, направленных только вдоль полойдальной составляющей магнитного поля, дисперсионное уравнение (67) принимает вид

$$\omega^4 - \omega^2(2B_{y0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) + B_{y0}^2 k_y^2 (B_{y0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) = 0. \quad (72)$$

Выражение (72) описывает два типа волн: одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{y0} k_y \quad (73)$$

и одномерные сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mg_y} = \pm \sqrt{B_{y0}^2 k_y^2 - N_\theta^2}. \quad (74)$$

В низкочастотном пределе уравнение (67) описывает сжимаемую трехмерную волну магнито-Россби

в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega \approx (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2] \times \left[k_x \beta ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2) + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y0} k_x - B_{x0} k_y) \right]^{-1}. \quad (75)$$

Выражение (75) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби вследствие зависимости частоты Брента–Вяйсяля для сжимаемых течений, N_θ^2 , не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (75) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска ([18], формула (47)). Однако в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (75) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связанное со стратификацией плотности, которое исчезает, если в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикали.

Таким образом, в приближении стандартной β -плоскости найдены сжимаемые магнитогравитационные волны и сжимаемые трехмерные низкочастотные волны магнито-Россби, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемыми с частотой Брента–Вяйсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Помимо новых типов волн найдены волны Альфвена и волны магнито-Россби, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

4.2. Приближение нестандартной β -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированной вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии с учетом эффектов сферичности на нестандартной β -плоскости. В приближении нестандартной β -плоскости предполагаем отклонение вектора Кориолиса \mathbf{f} от вертикали, а также его незначительное изменение при малых изменениях широты. Горизонтальная и вертикальная компоненты вектора Кориолиса раскладываются в ряд, и параметр Кориолиса выглядит следующим образом:

$$\mathbf{f} = (0, f_H + \gamma y, f_V + \beta y), \quad (76)$$

где

$$f_V = 2\Omega \sin \Theta, \quad \beta = \frac{2\Omega \cos \Theta}{R},$$

$$f_H = 2\Omega \cos \Theta, \quad \gamma = -\frac{2\Omega \sin \Theta}{R}.$$

Запишем линеаризованную систему магнитогиродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении нестандартной β -плоскости с линейным профилем энтропии (24) в виде

$$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y \partial t} - f_V \frac{\partial v'_y}{\partial y} - \beta v'_y + f_H \frac{\partial v'_z}{\partial y} + \gamma v'_z =$$

$$= -\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(B_{y_0} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right) + B_{z_0} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial z} \right) \right), \quad (77)$$

$$\frac{\partial v'_y}{\partial t} + f_V v'_x = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} - B_{0_z} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right) + B_{0_x} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right), \quad (78)$$

$$\frac{\partial v'_z}{\partial t} - f_H v'_x = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} + T' g - B_{0_x} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial z} - \frac{\partial B'_x}{\partial x} \right) + B_{0_y} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right), \quad (79)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v'_z \frac{N_\theta^2}{g} = 0, \quad (80)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0]], \quad (81)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}') - v'_z \frac{N^2}{g} = 0. \quad (82)$$

Рассматривая возмущение в виде (31), получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на нестандартной β -плоскости:

$$k^2 \omega^4 - k_x \omega^3 \left[\frac{N^2 f_H}{g} + \gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right] -$$

$$- \omega^2 \left[(f_H k_y + f_V k_z)^2 + \frac{\beta N^2}{g} \left(f_H + f_V \frac{k_z}{k_y} \right) + \right.$$

$$\left. + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right] +$$

$$+ \omega \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right) + \beta k_x N_\theta^2 + \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \times \right.$$

$$\times [f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_x k_z) + f_V k_z (B_{x_0} k_y - B_{y_0} k_x)] \left. \right\} +$$

$$+ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2]. \quad (83)$$

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим исходное состояние равновесия с тороидальным магнитным полем. Для двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), таких что $k_y \ll k_x$ и $k_y^2/k_h^2 \ll 1$, $k_x^2/k_h^2 \sim 1$, дисперсионное уравнение (83) принимает вид

$$\left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k_h^2} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 \right) \times$$

$$\times \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H k_x}{k_h^2 g} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0 \quad (84)$$

и допускает решение в виде четырех типов волн. Первый тип — волны магнито-Россби с частотой

$$\omega_{mR_1} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} + \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{4k_h^4} + B_{x_0}^2 k_x^2}. \quad (85)$$

Выражение (85) аналогично дисперсионному соотношению (69) для волн магнито-Россби на β -плоскости с учетом однокомпонентности магнитного поля ($\mathbf{B} = (B_{x_0}, 0, 0)$).

Второй тип — волны магнито-Россби с частотой

$$\omega_{mR_2} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} - \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{4k_h^4} + B_{x_0}^2 k_x^2}. \quad (86)$$

Выражение (86) аналогично дисперсионному соотношению (71) для волн магнито-Россби на β -плоскости с учетом однокомпонентности магнитного поля ($\mathbf{B} = (B_{x_0}, 0, 0)$).

Третий тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_1} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (87)$$

которое аналогично соотношению (50), полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости.

Четвертый тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig'_2} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (88)$$

которое аналогично соотношению (53), полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости.

Рассмотрим случай, когда в состоянии покоя магнитное поле полоидально. Для одномерных возмущений, направленных вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение (83) записывается в виде

$$\omega^4 - \omega^2 \left[f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{g k_y^2} + 2B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2 \right] + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0. \quad (89)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении для z -компоненты скорости содержит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом, в неупругом приближении дисперсионное уравнение для волн на нестандартной β -плоскости (83) имеет значительное различие в выражениях при первой, второй и третьей степенях частоты, что в частном случае распространения волн вдоль полоидального магнитного поля (89) приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных и сжимаемых магнитострофических волн.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн имеет вид

$$\omega_{mig_\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2g k_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 + \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2g k_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (90)$$

который аналогичен дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (90) имеет дополнительные слагаемые, включающие в себя пара-

метр β , характерный для волн магнито-Росби, которые непосредственно связаны с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компоненты вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль полоидального магнитного поля.

В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (90) описывает одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (57). В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) дисперсионное соотношение (90) описывает новый тип сжимаемых инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости с частотой

$$\omega = \sqrt{f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{g k_y^2} - N_\theta^2}. \quad (91)$$

Выражение (91) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) переходит в выражение (58), которое также описывает инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитострофических волн, являющееся решением дисперсионного уравнения (89), имеет вид

$$\omega_{mstr_\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2g k_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 - \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2g k_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (92)$$

Волны, описываемые дисперсионным соотношением (92), не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. Выражение (92) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитострофических волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (92) включает в себя параметр β , характерный для волн магнито-Росби, который, как и в случае со сжимаемыми магнитными инерционно-гравитационными волнами с частотой (90), неразрывно связан с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (92) описывает одномерные

сжимаемые магнитострофические волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (59).

В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0, N^2 = 0$) оба типа волн, (90) и (92), переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{Ay} = \pm B_{y0} k_y$.

В низкочастотном пределе дисперсионное уравнение (83) допускает решение в виде сжимаемой трехмерной волны магнито-Россби в неупругом приближении с частотой

$$\omega \approx \{ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2] \} \times \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta k_x N_\theta^2 - \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) [f_H (B_{x0} k_h^2 + B_{z0} k_x k_z) + f_V k_z (B_{x0} k_y - B_{y0} k_x)] \right\}^{-1}. \quad (93)$$

Выражение (93) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби вследствие зависимости частоты Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений, N_θ^2 , не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (93) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости ([18], формула (64)). Кроме того, в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (93) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связанное со стратификацией плотности, которое, однако, не исчезает при отсутствии горизонтальных компонент магнитного поля, как в случае стандартного приближения β -плоскости.

Таким образом, в приближении нестандартной β -плоскости найдены сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны с различными законами дисперсии и сжимаемые трехмерные низкочастотные волны магнито-Россби, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемыми с частотой Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Помимо новых типов волн найдены волны магнито-Россби, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

5. ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН В НЕУПРУГОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

5.1. Качественный анализ дисперсионных соотношений

Ниже проанализируем дисперсионные соотношения, полученные в предыдущих разделах, и найдем условия синхронизма, обеспечивающие трехволновые взаимодействия. Для существования взаимодействия между тремя волнами необходимо, чтобы их дисперсионные соотношения удовлетворяли условию синхронизма [52]

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \quad (94)$$

Чтобы проверить выполнение условия синхронизма (94), используем качественный анализ дисперсионных кривых. В таком случае пересечение двух дисперсионных кривых, одна из которых смещена относительно начала координат на некоторый волновой вектор k_c , обеспечивает выполнение условия синхронизма [53].

5.1.1. Условие синхронизма для волн на стандартной f -плоскости и нестандартной f -плоскости. Трехволновые взаимодействия

Проверим выполнение условия синхронизма (94) для волн на f -плоскости. Изобразим на рис. 1 дисперсионную кривую для волны Альфвена с частотой ω_A (38) и дисперсионную кривую для сжимаемой магнитогравитационной волны в неупругом приближении с частотой ω_{mg} (39), смещенную относительно начала координат. Пересечение двух дисперсионных кривых в некоторой точке $(\omega(k_3), k_3)$ означает выполнение условия синхронизма (94). На рис. 1 изображено пересечение двух дисперсионных кривых, определяющее трехволновое взаимодействие

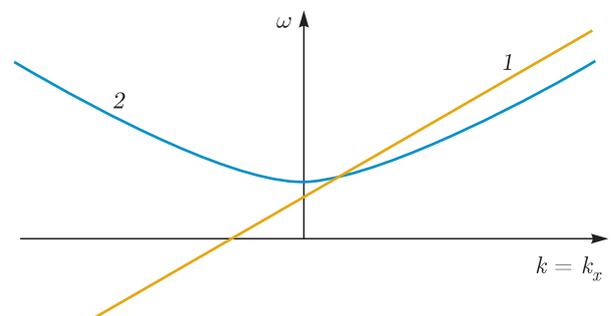


Рис. 1. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитогравитационных волн и волны Альфвена: 1 — $\omega = \omega_{mg}(k_x)$; 2 — $\omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mg}(k_{xc})$

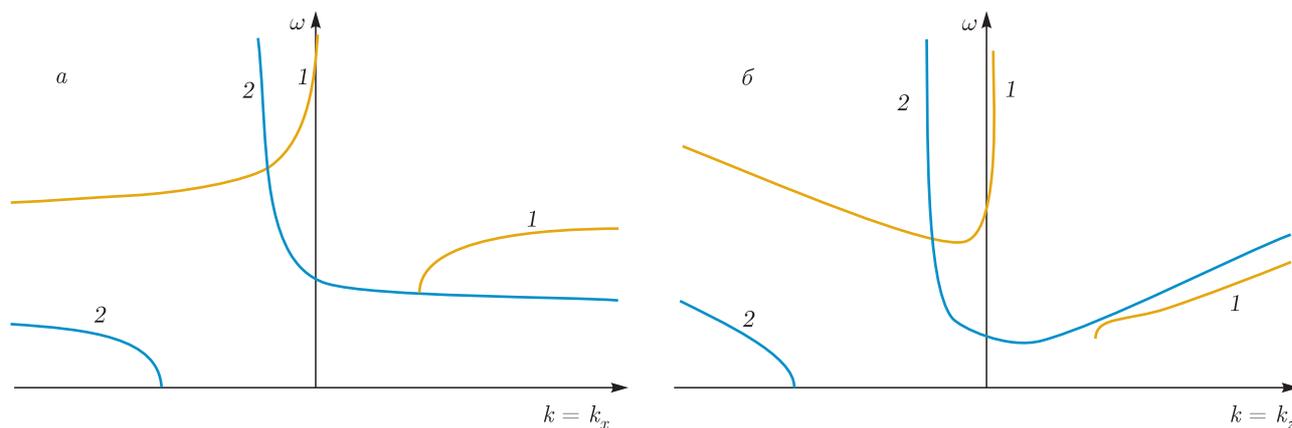


Рис. 2. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и сжимаемой магнитострофической волны при $k = k_x$ (а) и при $k = k_z$ (б): 1 — $\omega = \omega_{mig_{B_z}}(k)$; 2 — $\omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k - k_c) + \omega_{mig_{B_z}}(k_c)$

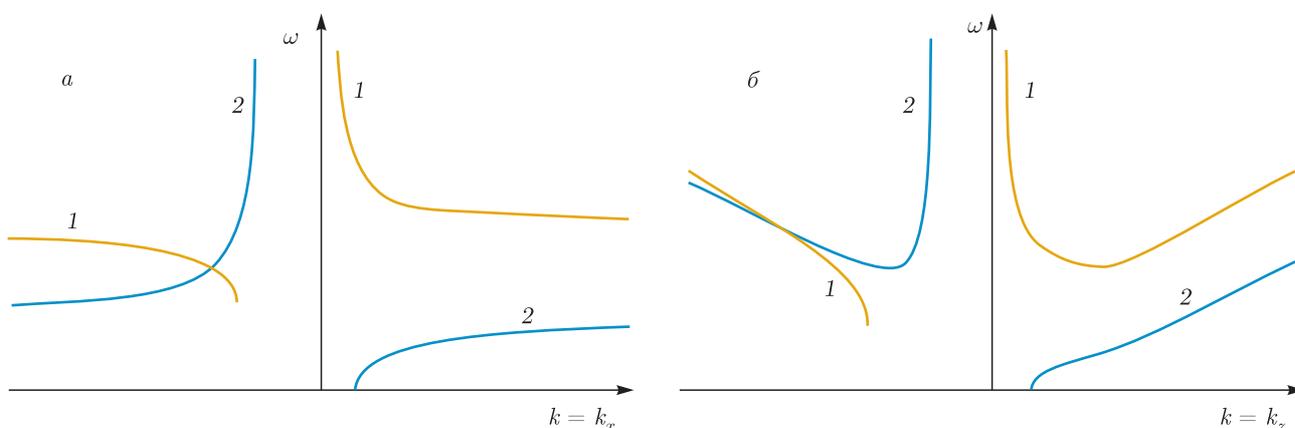


Рис. 3. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и сжимаемой магнитострофической волны при $k = k_x$ (а) и при $k = k_z$ (б): 1 — $\omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k)$; 2 — $\omega = \omega_{mig_{B_z}}(k - k_c) + \omega_{mig_{B_z}}(k_c)$

волны Альфвена и двух сжимаемых магнитогравитационных волн в неупругом приближении. Поскольку вертикальные магнитные волны с частотами ω_{z_1} (41) и ω_{z_2} (42) идентичны волнам на f -плоскости в приближении Буссинеска [18], для них будут существовать идентичные трехволновые взаимодействия, а именно, взаимодействие двух вертикальных магнитных волн с частотой ω_{z_1} и вертикальной магнитной волны с частотой ω_{z_2} ([18], рис. 4); взаимодействие трех вертикальных магнитных волн с частотой ω_{z_2} ([18], рис. 5).

Для сжимаемых трехмерных магнитных инерционно-гравитационных (34) и магнитострофических (36) волн проведен качественный анализ дисперсионных кривых при $\mathbf{k} = (k_x, 0, 1)$ и $\mathbf{k} = (1, 0, k_z)$. В обоих случаях найдены следующие трехволновые взаимодействия: возникновение сжи-

маемой магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии сжимаемых магнитострофической волны и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (рис. 2); возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн (рис. 3); возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны и сжимаемой магнитострофической волны (рис. 4); возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн (рис. 5); возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн (рис. 6).

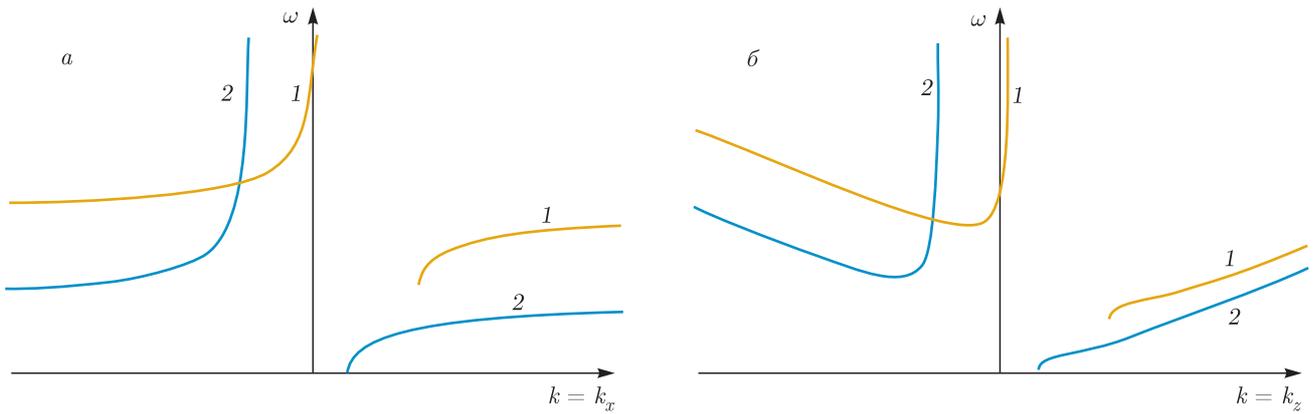


Рис. 4. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитострофических волн и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при $k = k_x$ (а) и при $k = k_z$ (б): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k)$; $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k - k_c) + \omega_{mig_{B_z}}(k_c)$

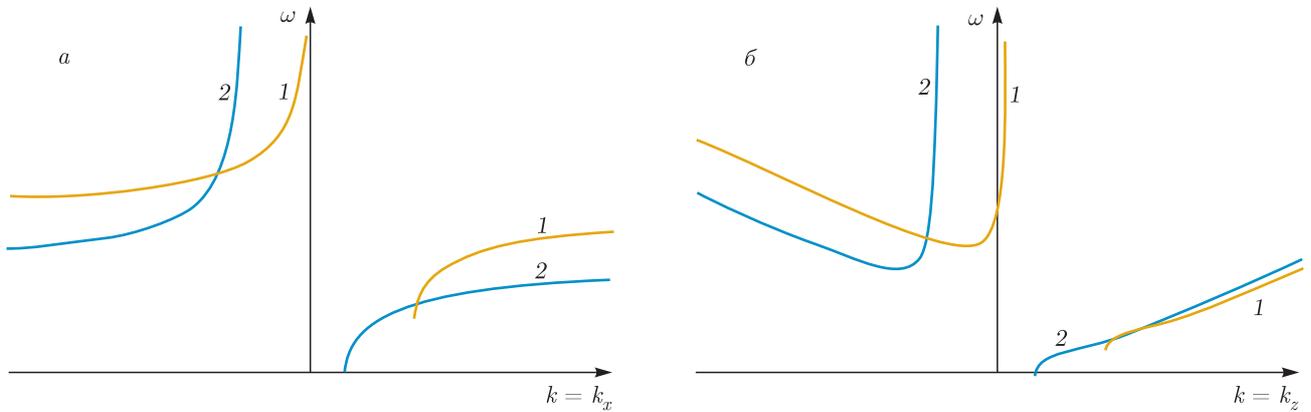


Рис. 5. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитострофических волн и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при $k = k_x$ (а) и при $k = k_z$ (б): $1 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k)$; $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k - k_c) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_c)$

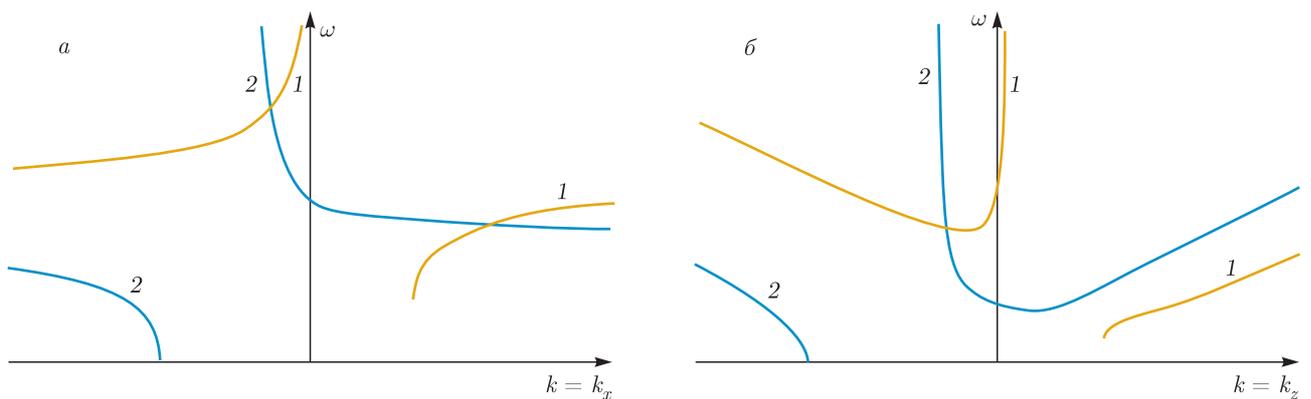


Рис. 6. Условие синхронизма для трех сжимаемых магнитострофических волн при $k = k_x$ (а) и при $k = k_z$ (б): $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k)$; $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k - k_c) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_c)$

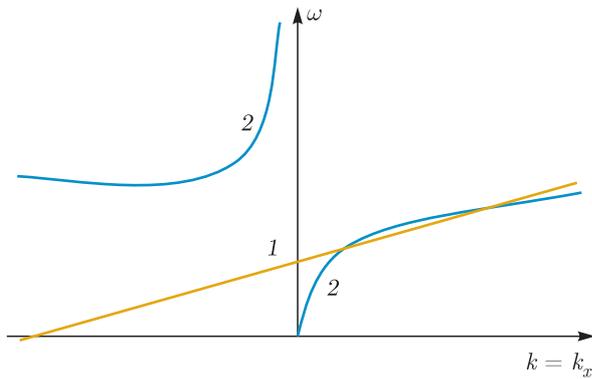


Рис. 7. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и волны Альфвена: $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$; $2 - \omega = \omega_{Ax}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_c})$

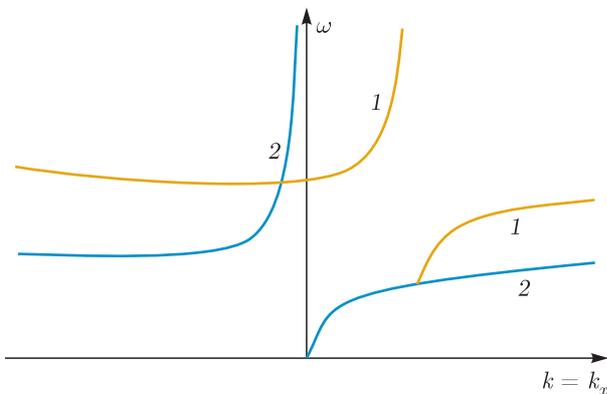


Рис. 8. Условие синхронизма для трех сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн: $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$; $2 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_c})$

Для волн на нестандартной f -плоскости изображено пересечение дисперсионных кривых, соответствующее выполнению условия синхронизма (рис. 7), которое определяет возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (50) при взаимодействии волны Альфвена (49) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (50). На рис. 8 изображено пересечение дисперсионных кривых, обеспечивающее выполнение условия синхронизма для трех сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн (50). Для волн (57), (59), имеющих дисперсионные соотношения, аналогичные полученным в работе по исследованию волн в приближении Буссинеска ([18], формулы (33), (34)) с учетом замены частоты Брента–Вяйсяля для несжимаемых течений на частоту Брента–Вяйсяля для сжимаемых течений, выполняются, соответственно, и найденные

в ней трехволновые взаимодействия, а именно: при малой горизонтальной составляющей силы Кориолиса ($f_H < 1$) возникает сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна (57) при взаимодействии двух сжимаемых магнито-строфических волн (59) ([18], рис. 8); при большой горизонтальной составляющей силы Кориолиса ($f_H \gg 1$) помимо предыдущего трехволнового взаимодействия возникает сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна (57) при взаимодействии сжимаемой магнито-строфической (59) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн (57) ([18], рис. 10).

5.1.2. Условие синхронизма для волн на стандартной β -плоскости и нестандартной β -плоскости. Трехволновые взаимодействия

Перейдем теперь к проверке выполнения условия синхронизма (94) для волн на стандартной и нестандартной β -плоскостях. Для найденных волн (73), (74) на β -плоскости картина пересечения дисперсионных кривых аналогична пересечению волн на f -плоскости (см. рис. 1). Условие синхронизма обеспечивает взаимодействие волны Альфвена (73) и двух сжимаемых магнито-гравитационных волн (74). Для волн на β -плоскости, аналогичных волнам, полученным в работе [18], существуют следующие трехволновые взаимодействия: возникновение волны магнито-Россби (69) при взаимодействии двух волн магнито-Россби (69) ([18], рис. 13); возникновение сжимаемой магнито-гравитационной волны (39) при взаимодействии волны магнито-Россби (69) и сжимаемой магнито-гравитационной (39) волны ([18], рис. 14); возникновение волны магнито-Россби (69) при взаимодействии сжимаемой магнито-гравитационной волны (39) и волны магнито-Россби (69) ([18], рис. 15).

Для сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (75) выполняется условие синхронизма, обеспечивающее взаимодействие трех сжимаемых волн магнито-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (рис. 9), при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (рис. 10) и при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (рис. 11).

Перейдем к анализу дисперсионных кривых на нестандартной β -плоскости. На рис. 12 изображено пересечение дисперсионных кривых, обеспечивающее условие синхронизма, которое определяет возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (87) и волны магнито-Россби (69), на рис. 13 — возникновение сжимаемой магнитной

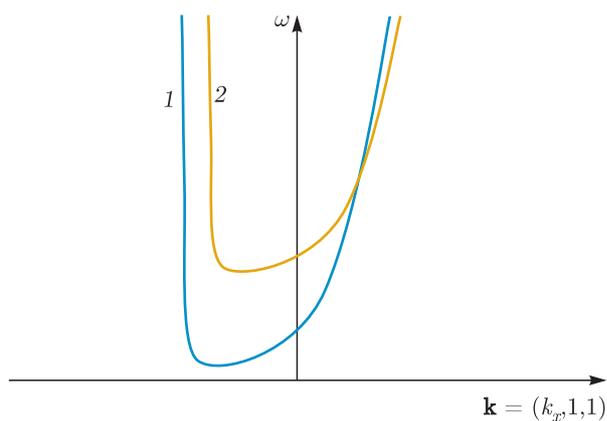


Рис. 9. Условие синхронизма для трех сжимаемых низкочастотных волн магнито-Росби: 1 – $\omega = \omega(k_x)$; 2 – $\omega = \omega(k_x - k_{xc}) + \omega(k_{xc})$

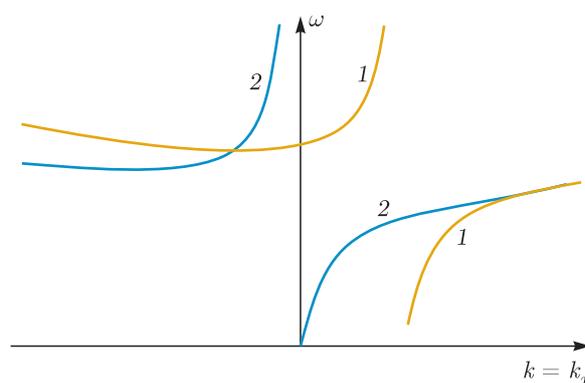


Рис. 12. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и волны магнито-Росби: 1 – $\omega = \omega_{mig'_1}(k_x)$; 2 – $\omega = \omega_{mig'_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mR_1}(k_{xc})$

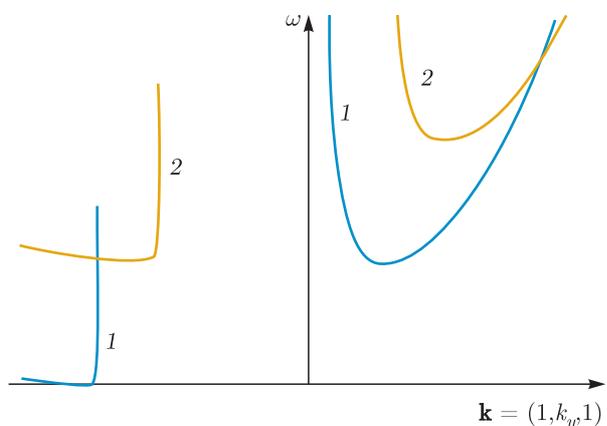


Рис. 10. Условие синхронизма для трех сжимаемых низкочастотных волн магнито-Росби: 1 – $\omega = \omega(k_y)$; 2 – $\omega = \omega(k_y - k_{yc}) + \omega(k_{yc})$

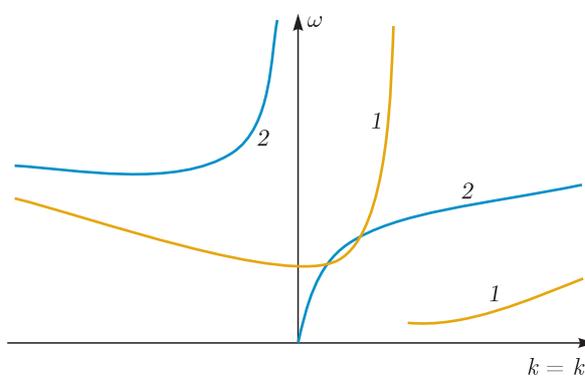


Рис. 13. Условие синхронизма для двух волн магнито-Росби и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны: 1 – $\omega = \omega_{mig'_1}(k_x)$; 2 – $\omega = \omega_{mR_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mR_1}(k_{xc})$

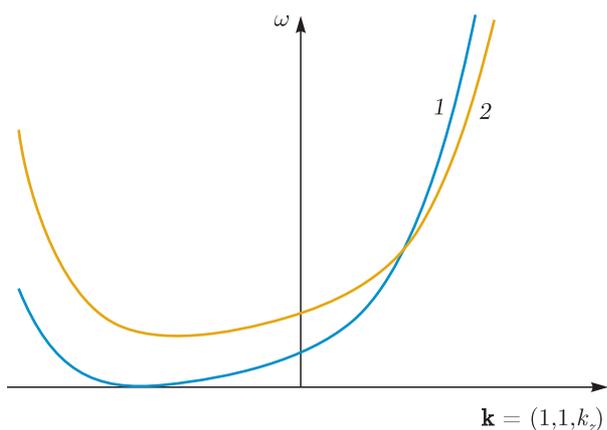


Рис. 11. Условие синхронизма для трех сжимаемых низкочастотных волн магнито-Росби: 1 – $\omega = \omega(k_z)$; 2 – $\omega = \omega(k_z - k_{zc}) + \omega(k_{zc})$

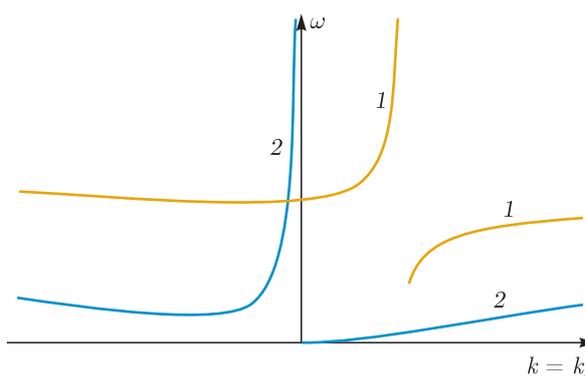


Рис. 14. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и волны магнито-Росби: 1 – $\omega = \omega_{mR_1}(k_x)$; 2 – $\omega = \omega_{mig'_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig'_1}(k_{xc})$

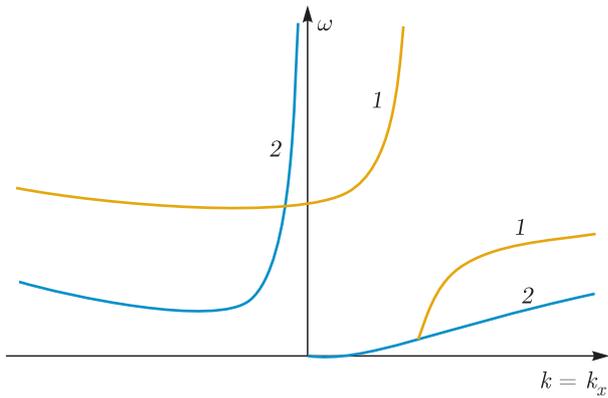


Рис. 15. Условие синхронизма для двух волн магнито-Россби и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны: 1 — $\omega = \omega_{mR1}(k_x)$; 2 — $\omega = \omega_{mig'_1}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mR1}(k_{xc})$

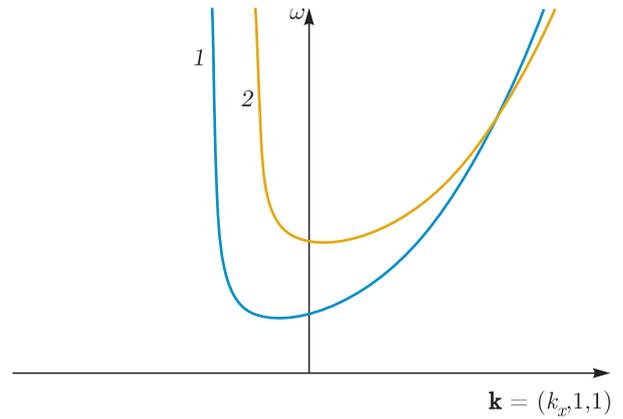


Рис. 17. Условие синхронизма для трех сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби: 1 — $\omega = \omega(k_x)$; 2 — $\omega = \omega(k_x - k_{xc}) + \omega(k_{xc})$

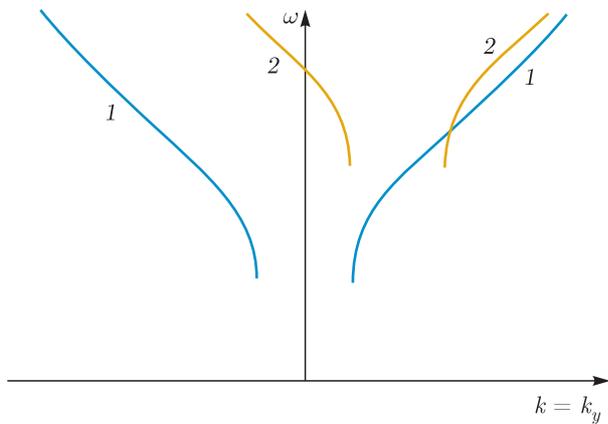


Рис. 16. Условие синхронизма для двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и сжимаемой магнитострофической волны: 1 — $\omega = \omega_{mig_\beta}(k_y)$; 2 — $\omega = \omega_{mig_\beta}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mstr_\beta}(k_{yc})$

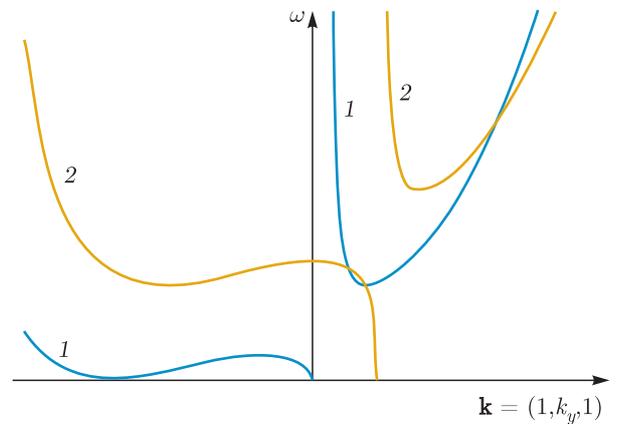


Рис. 18. Условие синхронизма для трех сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби: 1 — $\omega = \omega(k_y)$; 2 — $\omega = \omega(k_y - k_{yc}) + \omega(k_{yc})$

инерционно-гравитационной волны (87) при взаимодействии двух сжимаемых волн магнито-Россби (69), на рис. 14 — возникновение волны магнито-Россби (69) при взаимодействии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн (87), на рис. 15 — возникновение волны магнито-Россби (69) при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (87) и волны магнито-Россби (69), на рис. 16 — возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (90) при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (90) и сжимаемой магнитострофической волны (92). Для сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (93) выполняется условие синхронизма, обеспе-

чивающее взаимодействие трех сжимаемых волн магнито-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (рис. 17), при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (рис. 18) и при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (рис. 19).

5.2. Слабонелинейные взаимодействия волн в сжимаемой стратифицированной вращающейся плазме. Амплитудные уравнения и инкременты неустойчивостей

Для анализа слабонелинейных волновых взаимодействий во вращающейся сжимаемой стратифицированной плазме воспользуемся асимптотическим методом многомасштабных разложений. Для краткости ограничимся схематическим описанием метода и приведем лишь полученные амплитудные уравнения и коэффициенты взаимодействия волн. Детали метода многих масштабов в магнитогидро-

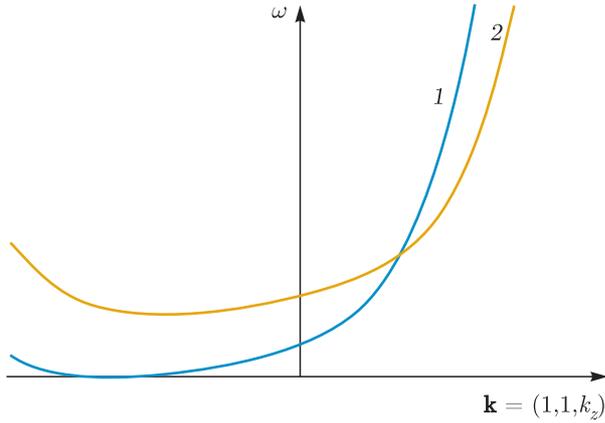


Рис. 19. Условие синхронизма для трех сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби: 1 — $\omega = \omega(k_z)$; 2 — $\omega = \omega(k_z - k_{zc}) + \omega(k_{zc})$

намических течениях вращающейся плазмы можно найти в работах [16, 23, 53].

В методе многомасштабных разложений решение исследуемой системы уравнений представляется в виде асимптотически сходящегося ряда по малому параметру ε , характеризующему слабую нелинейность:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \varepsilon \mathbf{q}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{q}_2 + \dots,$$

где \mathbf{q}_0 — исходное состояние равновесия, \mathbf{q}_1 — решение линейной системы (19)–(22), а \mathbf{q}_2 — слагаемое, описывающее эффекты квадратичной нелинейности. В таком представлении система во втором порядке малости по ε содержит резонансные слагаемые, нарушающие условия сходимости ряда. Исключение таких слагаемых осуществляется введением медленно меняющихся амплитуд и выполнением условия совместности. Представим решение исследуемой системы в виде суммы трех взаимодействующих волн с медленно меняющимися амплитудами ϕ , ψ , χ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}_1(T_1, X_1, Y_1, Z_1) \times \\ & \times \exp(i\omega T_0 - ik_x X_0 - ik_y Y_0 - ik_z Z_0) = \\ & = \phi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\vartheta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\vartheta_2) + \\ & + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\vartheta_3) + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (95)$$

где взаимосвязь «медленных» переменных (с индексом «1») и «быстрых» (с индексом «0») определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_t &= \partial_{T_0} + \varepsilon \partial_{T_1}, & \partial_x &= \partial_{X_0} + \varepsilon \partial_{X_1}, \\ \partial_y &= \partial_{Y_0} + \varepsilon \partial_{Y_1}, & \partial_z &= \partial_{Z_0} + \varepsilon \partial_{Z_1}. \end{aligned} \quad (96)$$

В системе уравнений во втором порядке малости по ε , полученной после представления решения в виде (95), можно избавиться от резонансных слагаемых. Запишем систему уравнений во втором порядке малости по ε в следующем виде:

$$A \mathbf{q}_2 = -NL_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) - NL_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1), \quad (97)$$

где A — линейный оператор системы (19)–(22), зависящий от $\mathbf{q}_0, T_0, X_0, Y_0, Z_0$, а правая часть системы содержит резонансные слагаемые. Воспользуемся условием совместности, а именно, свойством ортогональности правой части системы (97) ядру линейного оператора. Для этого домножим систему (97) слева и справа на собственный вектор \mathbf{z} линейного оператора A . Последовательно выписывая слагаемые правой части, пропорциональные $\exp(i\vartheta_1)$, $\exp(i\vartheta_2)$ и $\exp(i\vartheta_3)$, получим следующую систему уравнений для амплитуд трех взаимодействующих волн, удовлетворяющих условию синхронизма (94):

$$\begin{aligned} s_1 \phi &= f_1 \psi^* \chi, \\ s_2 \psi &= f_2 \phi^* \chi, \\ s_3 \chi &= f_3 \phi \psi, \end{aligned} \quad (98)$$

где s_i — дифференциальный оператор по медленным переменным, который имеет вид

$$s_i = r_i \partial_{T_1} + p_i \partial_{X_1} + q_i \partial_{Y_1} + w_i \partial_{Z_1}, \quad (99)$$

а коэффициенты f_i зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн.

Отметим, что именно в выражениях для операторов s_i и коэффициентов f_i состоит различие в амплитудных уравнениях (98) для всех типов взаимодействующих волн, найденных в предыдущих разделах. Приведем ниже полученные выражения для дифференциальных операторов и коэффициентов взаимодействия волн в магнитной гидродинамике сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении для каждого из приближений силы Кориолиса.

5.2.1. Дифференциальные операторы и коэффициенты амплитудных уравнений для трехволновых взаимодействий на стандартной и нестандартной f -плоскостях

Запишем полученные выражения для дифференциальных операторов s_{if} и коэффициентов взаимодействия f_{if} волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении на f -плоскости. Коэффициент r_{if} при

производной по медленному времени T_1 в (99) в приближении стандартной f -плоскости имеет вид

$$r_{i_f} = \sum_{j=1}^3 z_j a_j + z_4 a_8 + \sum_{j=5}^7 z_j a_{j-1}. \quad (100)$$

Выражение (100) совпадает с выражением, аналогичным полученному в работе [18] (формула (18)) с различием в слагаемых, содержащих эффекты сжимаемости, а именно в собственном векторе \mathbf{z} и компоненте a_8 .

Коэффициент p_{i_f} при производной по медленной координате X_1 в (99) в приближении стандартной f -плоскости имеет вид

$$p_{i_f} = z_1 (a_7 + B_{y_0} a_5 + B_{z_0} a_6) - B_{x_0} (z_2 a_5 + z_3 a_6 + z_6 a_2 + z_7 a_3) + a_1 (B_{y_0} z_6 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_1. \quad (101)$$

Коэффициент q_{i_f} при производной по медленной координате Y_1 в (99) в приближении стандартной f -плоскости имеет вид

$$q_{i_f} = z_2 (a_7 + B_{z_0} a_6 + B_{x_0} a_4) - B_{y_0} (z_1 a_4 + z_3 a_6 + z_5 a_1 + z_7 a_3) + a_2 (B_{x_0} z_5 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_2. \quad (102)$$

Коэффициент w_{i_f} при производной по медленной координате Z_1 в (99) в приближении стандартной f -плоскости имеет вид

$$w_{i_f} = z_3 (a_7 + B_{x_0} a_4 + B_{y_0} a_5) - B_{z_0} (z_1 a_4 + z_2 a_5 + z_5 a_1 + z_6 a_2) + a_3 (B_{x_0} z_5 + B_{y_0} z_6) + z_8 a_3. \quad (103)$$

Здесь и далее $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_i)$ — собственный волновой вектор, в котором $a_1 \equiv v_{x_1}$, $a_2 \equiv v_{y_1}$, $a_3 \equiv v_{z_1}$, $a_4 \equiv B_{x_1}$, $a_5 \equiv B_{y_1}$, $a_6 \equiv B_{z_1}$, $a_7 \equiv \bar{\omega}_1$, $a_8 \equiv \theta_1$.

Коэффициенты f_{i_f} , зависящие от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн на f -плоскости, запишем в виде суммы:

$$f_{i_f} = \sum_{s=1}^8 z_s \varkappa_{s i_f}, \quad (104)$$

где $\varkappa_{8 i_f} = 0$. Для слагаемых $\varkappa_{s i_f}$ в сумме (104) в случае волн на f -плоскости получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varkappa_{1 i_f} = & i\gamma [k_{y_m} (a_{2k_l} a_{1k_m}^* - a_{5k_l} a_{4k_m}^*) + \\ & + k_{z_m} (a_{3k_l} a_{1k_m}^* - a_{6k_l} a_{4k_m}^*)] - \\ & - i [k_{x_i} (a_{1l_m}^2 + a_{5l_m}^2 + a_{6l_m}^2) + \\ & + k_{y_l} (a_{2k_m}^* a_{1k_l} - a_{5k_m}^* a_{4k_l}) + \\ & + k_{z_l} (a_{3k_m}^* a_{1k_l} - a_{6k_m}^* a_{4k_l})], \quad (105) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{2 i_f} = & i\gamma [k_{x_m} (a_{1k_l} a_{2k_m}^* - a_{4k_l} a_{5k_m}^*) + \\ & + k_{z_m} (a_{3k_l} a_{2k_m}^* - a_{6k_l} a_{5k_m}^*)] - \\ & - i [k_{y_i} (a_{2l_m}^2 + a_{4l_m}^2 + a_{6l_m}^2) + \\ & + k_{x_l} (a_{1k_m}^* a_{2k_l} - a_{4k_m}^* a_{5k_l}) + \\ & + k_{z_l} (a_{3k_m}^* a_{2k_l} - a_{6k_m}^* a_{5k_l})], \quad (106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{3 i_f} = & i\gamma [k_{x_m} (a_{1k_l} a_{3k_m}^* - a_{4k_l} a_{6k_m}^*) + \\ & + k_{y_m} (a_{2k_l} a_{3k_m}^* - a_{5k_l} a_{6k_m}^*)] - \\ & - i [k_{z_i} (a_{3l_m}^2 + a_{4l_m}^2 + a_{5l_m}^2) + \\ & + k_{x_l} (a_{1k_m}^* a_{3k_l} - a_{4k_m}^* a_{6k_l}) + \\ & + k_{y_l} (a_{2k_m}^* a_{3k_l} - a_{5k_m}^* a_{6k_l})], \quad (107) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{4 i_f} = & i\gamma [a_{1k_l} k_{x_m} + a_{2k_l} k_{y_m} + a_{3k_l} k_{z_m}] a_{8k_m}^* - \\ & - i [a_{1k_m}^* k_{x_l} + a_{2k_m}^* k_{y_l} + a_{3k_m}^* k_{z_l}] a_{8k_l}, \quad (108) \end{aligned}$$

$$\varkappa_{5 i_f} = ik_{y_i} (\hat{a}_{15} - \hat{a}_{24}) + ik_{z_i} (\hat{a}_{16} - \hat{a}_{34}), \quad (109)$$

$$\varkappa_{6 i_f} = ik_{x_i} (\hat{a}_{24} - \hat{a}_{15}) + ik_{z_i} (\hat{a}_{26} - \hat{a}_{35}), \quad (110)$$

$$\varkappa_{7 i_f} = ik_{x_i} (\hat{a}_{34} - \hat{a}_{16}) + ik_{y_i} (\hat{a}_{35} - \hat{a}_{26}). \quad (111)$$

В выражениях (105)–(111) использованы обозначения

$$a_{n_1 m}^2 = a_{n k_l} a_{n k_m}^*, \quad \hat{a}_{n_1 n_2} = a_{n_1 k_l} a_{n_2 k_m}^* + a_{n_1 k_m}^* a_{n_2 k_l}.$$

Выражения (105)–(108) аналогичны полученным в работе [18] (формулы (23)–(29)) с отличием в собственном векторе \mathbf{z} и компоненте a_8 .

Полученные выражения для коэффициентов дифференциальных операторов s'_{i_f} и коэффициентов взаимодействия f'_{i_f} волн в приближении нестандартной f -плоскости имеют такой же вид, как и операторы s_{i_f} (100)–(103) и коэффициенты f_{i_f} (105)–(111) на стандартной f -плоскости и отличаются только собственным вектором \mathbf{z} линейного оператора системы (43)–(46).

Для всех найденных типов взаимодействий существует следующее соотношение между индексами в полученных коэффициентах: индексы « i », « m », « l » соответствуют одной из трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма. Следовательно, при взаимодействии трех волн с частотами $\omega_1(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ индексы $i, m, l = 1$ будут соответствовать первой волне, индексы $i, m, l = 2$ — второй, а индексы $i, m, l = 3$ — третьей. Индексы « m », « l », параметр γ и комплексное сопряжение вектора \mathbf{a} связаны с индексом « i » следующим образом: если $i = 1$, то $l = 3, m = 2, \gamma = 1$; если $i = 2$, то $l = 3,$

$m = 1$, $\gamma = 1$; если $i = 3$, то $l = 1$, $m = 2$, $\gamma = -1$, а комплексно-сопряженные компоненты вектора \mathbf{a} заменяются на действительные ($a_n^* \rightarrow a_n$).

Таким образом, для волн на f -плоскости нами выявлены взаимодействие волны Альфвена ($\omega_1 = \omega_A(\mathbf{k}_1)$) и двух сжимаемых магнитогравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_2)$, $\omega_3 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$); взаимодействие двух вертикальных магнитных волн с частотами $\omega_1 = \omega_{z_1}(k_{z_1})$, $\omega_2 = \omega_{z_1}(k_{z_2})$ и вертикальной магнитной волны с частотой $\omega_3 = \omega_{z_2}(k_{z_3})$; взаимодействие трех вертикальных магнитных волн с частотами $\omega_1 = \omega_{z_2}(k_{z_1})$, $\omega_2 = \omega_{z_2}(k_{z_2})$, $\omega_3 = \omega_{z_2}(k_{z_3})$; возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$) при взаимодействии сжимаемой магнитострофической ($\omega_1 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн ($\omega_2 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$) или при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн ($\omega_1 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$); возникновение сжимаемой магнитострофической волны ($\omega_3 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$) при взаимодействии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_1 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$), либо двух сжимаемых магнитострофических волн ($\omega_1 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$), либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_1 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$) и сжимаемой магнитострофической волн ($\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$). Качественный анализ дисперсионных соотношений на нестандартной f -плоскости показывает возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_3})$) при взаимодействии волны Альфвена ($\omega_1 = \omega_{A_x}(k_{x_1})$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2})$) или при взаимодействии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_1 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_1})$, $\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2})$); возникновение волны Альфвена ($\omega_3 = \omega_{A_x}(k_{x_3})$) при взаимодействии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_1 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_1})$, $\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2})$); возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mig_y}(k_{y_3})$) при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн ($\omega_1 = \omega_{mstr_y}(k_{y_1})$, $\omega_2 = \omega_{mstr_y}(k_{y_2})$) или при взаимодействии сжимаемой магнитострофической ($\omega_1 = \omega_{mstr_y}(k_{y_1})$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_2 = \omega_{mig_y}(k_{y_2})$) волн при $f_H \gg 1$.

Таким образом, получены дифференциальные операторы и коэффициенты трехволновых взаимодействий для сжимаемых волн в приближении стан-

дартной и нестандартной f -плоскостей. Эффекты сжимаемости представлены в полученных выражениях слагаемым с потенциальной температурой a_8 , а также собственным вектором \mathbf{z} системы магнито-гидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

5.2.2. Дифференциальные операторы и коэффициенты амплитудных уравнений для трехволновых взаимодействий на стандартной и нестандартной β -плоскостях

Запишем теперь полученные выражения для дифференциальных операторов $s_{i\beta}$ и коэффициентов взаимодействия $f_{i\beta}$ волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении на β -плоскости. Коэффициент $r_{i\beta}$ при производной по медленному времени T_1 в (99) в приближении стандартной β -плоскости имеет вид

$$r_{i\beta} = -ik_{y_i} z_1 a_1 + \sum_{j=2}^3 z_j a_j + z_4 a_8 + \sum_{j=5}^7 z_j a_{j-1}, \quad (112)$$

аналогичный полученному в работе [18] (формула (52)) с отличием в собственном векторе \mathbf{z} и компоненте a_8 .

Коэффициент $p_{i\beta}$ при производной по медленной координате X_1 в (99) в приближении стандартной β -плоскости имеет вид

$$p_{i\beta} = -iz_1 k_{y_i} (a_7 + B_{y_0} a_5 + B_{z_0} a_6) - B_{x_0} (z_2 a_5 + z_3 a_6 + z_6 a_2 + z_7 a_3) + a_1 (B_{y_0} z_6 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_1. \quad (113)$$

Коэффициент $q_{i\beta}$ при производной по медленной координате Y_1 в (99) в приближении стандартной β -плоскости имеет вид

$$q_{i\beta} = iz_1 [\omega a_1 + i f_v a_2 - k_{x_i} a_7 - B_{y_0} (k_{x_i} a_5 + 2k_{y_i} a_4) + B_{z_0} (k_{z_i} a_4 - k_{x_i} a_6)] + z_2 (a_7 + B_{z_0} a_6 + B_{x_0} a_4) - B_{y_0} (z_3 a_6 + z_5 a_1 + z_7 a_3) + a_2 (B_{x_0} z_5 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_2. \quad (114)$$

Коэффициент $w_{i\beta}$ при производной по медленной координате Z_1 в (99) в приближении стандартной β -плоскости имеет вид

$$w_{i\beta} = z_3 (a_7 + B_{x_0} a_4 + B_{y_0} a_5) - B_{z_0} (iz_1 k_{y_i} a_4 + z_2 a_5 + z_5 a_1 + z_6 a_2) + a_3 (B_{x_0} z_5 + B_{y_0} z_6) + z_8 a_3. \quad (115)$$

Здесь и далее $\omega = \omega(\mathbf{k}_i)$.

Коэффициенты $f_{i\beta}$, зависящие от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн на β -плоскости, представим в виде суммы:

$$f_{i\beta} = \sum_{s=1}^8 z_s \mathcal{X}_{s i \beta}, \quad (116)$$

где $\mathcal{X}_{8 i \beta} = 0$.

Слагаемое $\mathcal{X}_{1 i \beta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{1 i \beta} = & \gamma k_{y_i} [k_{y_m} (a_{2k_l} a_{1k_m}^* - a_{5k_l} a_{4k_m}^*) + \\ & + k_{z_m} (a_{3k_l} a_{1k_m}^* - a_{6k_l} a_{4k_m}^*)] - \\ & - k_{y_i} [k_{x_i} (a_{1l_m}^2 + a_{5l_m}^2 + a_{6l_m}^2) + \\ & + k_{y_l} (a_{2k_m}^* a_{1k_l} - a_{5k_m}^* a_{4k_l}) + \\ & + k_{z_l} (a_{3k_m}^* a_{1k_l} - a_{6k_m}^* a_{4k_l})]. \quad (117) \end{aligned}$$

Остальные слагаемые в сумме (116) отличаются от слагаемых в сумме (104) только собственным вектором z линейного оператора системы (61)–(66).

Отметим, что выражения для коэффициентов $r'_{i\beta}$, $p'_{i\beta}$, $w'_{i\beta}$ дифференциальных операторов $s'_{i\beta}$ и коэффициентов взаимодействия $f'_{i\beta}$ волн в приближении нестандартной β -плоскости имеют такой же вид, как и коэффициенты $r_{i\beta}$ (112), $p_{i\beta}$ (113), $w_{i\beta}$ (115) дифференциальных операторов $s_{i\beta}$ и коэффициенты $f_{i\beta}$ (116) на стандартной β -плоскости и отличаются только собственным вектором z линейного оператора системы (77)–(82). Коэффициент $q'_{i\beta}$ при медленной переменной Y_1 в (99) на нестандартной β -плоскости имеет вид

$$\begin{aligned} q_{i\beta} = & iz_1 [\omega a_1 - i f_H a_3 + i f_v a_2 - k_{x_i} a_7 - \\ & - B_{y_0} (k_{x_i} a_5 + 2k_{y_i} a_4) + B_{z_0} (k_{z_i} a_4 - k_{x_i} a_6)] + \\ & + z_2 (a_7 + B_{z_0} a_6 + B_{x_0} a_4) - \\ & - B_{y_0} (z_3 a_6 + z_5 a_1 + z_7 a_3) + \\ & + a_2 (B_{x_0} z_5 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_2. \quad (118) \end{aligned}$$

Для всех найденных типов взаимодействий существует следующее соотношение между индексами в полученных коэффициентах: индексы « i », « m », « l » соответствуют одной из трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма. Таким образом, при взаимодействии трех волн с частотами $\omega_1(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ индексы $i, m, l = 1$ будут соответствовать первой волне, индексы $i, m, l = 2$ — второй, а индексы $i, m, l = 3$ — третьей. Индексы « m »,

« l », параметр γ и комплексное сопряжение вектора \mathbf{a} связаны с индексом « i » следующим образом: если $i = 1$, то $l = 3$, $m = 2$, $\gamma = 1$; если $i = 2$, то $l = 3$, $m = 1$, $\gamma = 1$; если $i = 3$, то $l = 1$, $m = 2$, $\gamma = -1$, а комплексно-сопряженные компоненты вектора \mathbf{a} заменяются на действительные ($a_n^* \rightarrow a_n$).

Для волн на β -плоскости нами выявлены возникновение волны магнито-Россби ($\omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$) при взаимодействии двух волн магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$) или при взаимодействии сжимаемой магнитогравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_1)$) и волны магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$); возникновение сжимаемой магнито-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$) при взаимодействии волны магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$) и сжимаемой магнитогравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_2)$); возникновение сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби (ω_3) при взаимодействии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (ω_1, ω_2).

Для волн на нестандартной β -плоскости нами выявлены возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_3)$) при взаимодействии либо волны магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2)$), либо двух волн магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$), либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_1 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2)$); возникновение волны магнито-Россби ($\omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$) при взаимодействии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_1 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2)$), либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_1)$) и волны магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$), либо двух волн магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$); возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mig_\beta}(\mathbf{k}_3)$) при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_\beta}(\mathbf{k}_1)$) и сжимаемой магнитострофической волны ($\omega_2 = \omega_{mstr_\beta}(\mathbf{k}_2)$); возникновение сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби (ω_3) при взаимодействии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (ω_1, ω_2).

Таким образом, получены дифференциальные операторы и коэффициенты трехволновых взаимодействий для сжимаемых волн в приближении стандартной и нестандартной β -плоскостей. Эффекты сжимаемости представлены в полученных выражениях слагаемым с потенциальной температурой a_8 ,

а также собственным вектором \mathbf{z} системы магнито-гидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

5.2.3. Параметрические неустойчивости во вращающейся сжимаемой стратифицированной плазме в неупругом приближении

Система уравнений (98) является универсальной для описания параметрических неустойчивостей трехволновых взаимодействий. Различия, связанные с выбором приближения силы Кориолиса, содержатся только в коэффициентах взаимодействия и дифференциальных операторах, приведенных выше в разд. 5.2.1, 5.2.2. Поэтому в магнито-гидродинамических течениях стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении реализуются два типа параметрических неустойчивостей [16, 53]. Первый тип — распад волны с частотой ω_1 на две волны с частотами ω_2 и ω_3 и инкрементом неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{|f_2 f_3| / |r_2 r_3|} |\phi_0| > 0$$

— реализуется, когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много больше амплитуд двух других ($\phi = \phi_0 \gg \psi, \chi$). Второй тип параметрической неустойчивости — усиление волны с частотой ω_1 двумя волнами с частотами ω_2 и ω_3 и коэффициентом усиления

$$\Gamma = (|f_1| / |r_1|) |\psi_0 \chi_0| > 0$$

— реализуется, когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много меньше амплитуд двух других ($\phi \ll \psi = \psi_0, \chi = \chi_0$).

Таким образом, суммируя, для волн на f -плоскости имеют место распад или усиление волны Альфвена ($\omega_1 = \omega_A(\mathbf{k}_1)$) при участии двух сжимаемых магнитогравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление вертикальной магнитной волны с частотой $\omega_1 = \omega_{z_1}(k_{z_1})$ при участии двух вертикальных магнитных волн с частотами $\omega_2 = \omega_{z_1}(k_{z_2})$ и $\omega_3 = \omega_{z_2}(k_{z_3})$; распад или усиление вертикальной магнитной волны с частотой $\omega_1 = \omega_{z_2}(k_{z_1})$ при участии двух вертикальных магнитных волн с частотами $\omega_2 = \omega_{z_2}(k_{z_2})$ и $\omega_3 = \omega_{z_2}(k_{z_3})$; распад или усиление сжимаемой магнитострофической волны ($\omega_1 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$), либо сжимаемой магнитострофической ($\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_3 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$)

волн, либо двух сжимаемых магнитострофических волн ($\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_2 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнитострофической ($\omega_3 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$) волн, либо двух сжимаемых магнитострофических волн ($\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$).

Для волн на нестандартной f -плоскости имеют место распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_1})$) при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2}), \omega_3 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_3})$), либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2})$) и волны Альфвена ($\omega_3 = \omega_{A_x}(k_{x_3})$); распад или усиление волны Альфвена ($\omega_1 = \omega_{A_x}(k_{x_1})$) при участии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2}), \omega_3 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_3})$); распад или усиление сжимаемой магнитострофической волны ($\omega_1 = \omega_{mstr_y}(k_{y_1})$) при участии либо сжимаемой магнитострофической ($\omega_2 = \omega_{mstr_y}(k_{y_2})$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_3 = \omega_{mig_y}(k_{y_3})$) волн, либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_y}(k_{y_2}), \omega_3 = \omega_{mig_y}(k_{y_3})$) при $f_H \gg 1$.

Для волн на β -плоскости имеют место распад или усиление волны магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$), либо двух сжимаемых магнитогравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитогравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_1)$) при участии двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби (ω_1) при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (ω_2, ω_3).

Для волн на нестандартной β -плоскости имеют место распад или усиление волны магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$), либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_3)$), либо волны магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо двух жи-

маемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2)$, $\omega_3 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_3)$), либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2)$) и волны магнито-Россби ($\omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$), либо двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$, $\omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_\beta}(\mathbf{k}_1)$) при участии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mig_\beta}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнито-Россби волны ($\omega_3 = \omega_{mstr_\beta}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби (ω_3) при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (ω_1, ω_2).

Таким образом, получены инкременты неустойчивости двух типов (распад и усиление), имеющей место в системе для амплитуд трех взаимодействующих волн в неупругом приближении. Эффекты сжимаемости в найденных инкрементах неустойчивости неявно содержатся в коэффициентах взаимодействия f_i и коэффициентах r_i при производной по медленному времени, которые включают в себя слагаемые с потенциальной температурой a_8 , а также собственный вектор \mathbf{z} системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в поле силы тяжести в неупругом приближении. Исследованы магнитогидродинамические течения в слое сжимаемой устойчиво-стратифицированной вращающейся плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении. Развита теория линейных волн в сжимаемых течениях на стандартной и нестандартной f -плоскостях, получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие различные типы волн.

В приближении f -плоскости найдены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: сжимаемые трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (34), которые в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые трехмерные инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении (35); трехмерные магнито-Россби волны (36), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости; двумерные волны Альфвена (38); дву-

мерные сжимаемые магнито-Россби волны (39); вертикальные магнитные волны, аналогичные найденным в работе [18].

На нестандартной f -плоскости найдены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: одномерные волны Альфвена (49); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (50), (53), которые при равенстве нулю горизонтальной компоненты вектора Кориолиса переходят в одномерные сжимаемые магнито-Россби волны (51), (54), а в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (52), (55); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (57) и магнито-Россби волны (59), аналогичные найденным в работе [18], с точностью до слагаемых с частотой Брента–Вяйсяля для сжимаемых течений. Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента–Вяйсяля N_θ^2 для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления.

Для сферических течений в приближениях стандартной и нестандартной β -плоскостей также развита теория линейных волн и получены дисперсионные уравнения. В приближении стандартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: двумерные сжимаемые магнито-Россби волны (69), которые в отсутствие магнитного поля переходят в стандартные гидродинамические волны Россби (70); волны магнито-Россби (71), не имеющие аналога в динамике нейтральной жидкости; одномерные волны Альфвена (73); низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (75).

В приближении нестандартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: волны магнито-Россби (85), (86), аналогичные волнам на β -плоскости; двумерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (87), (88), аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости; одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (90) и магнито-Россби (92) волны с новыми законами дисперсии, включающими слагаемые с параметром β ; низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (93). Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента–Вяйсяля N_θ^2 для сжимаемых стратифици-

рованных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления.

В рамках магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы в неупругом приближении для каждого из четырех различных приближений силы Кориолиса развита нелинейная теория волновых процессов. Качественный анализ дисперсионных кривых всех найденных типов волн выявил существование следующих видов трехволновых взаимодействий, удовлетворяющих условию синхронизма. В приближении стандартной f -плоскости могут взаимодействовать три вертикальные магнитные волны с частотой ω_{z_2} , две вертикальные магнитные волны с частотой ω_{z_1} и вертикальная магнитная волна с частотой ω_{z_2} , две сжимаемые магнитогравиационные волны и волна Альфвена, сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig_{B_z}}$ и две сжимаемые магнитострофические волны с частотой $\omega_{mstr_{B_z}}$, сжимаемая магнитострофическая волна с частотой $\omega_{mstr_{B_z}}$ и две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig_{B_z}}$, три сжимаемые магнитострофические волны с частотой $\omega_{mstr_{B_z}}$.

В приближении нестандартной f -плоскости могут взаимодействовать две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig_{x_1}}$ и волна Альфвена, три сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig_{x_1}}$, сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой ω_{mig_y} и две сжимаемые магнитострофические волны с частотой ω_{mstr_y} , две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой ω_{mig_y} и сжимаемая магнитострофическая волна с частотой ω_{mstr_y} при $f_H \gg 1$. В приближении стандартной β -плоскости могут взаимодействовать две сжимаемые магнитогравиационные волны и волна Альфвена, три волны магнито-Россби, две сжимаемые магнитогравиационные волны и волна магнито-Россби, две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитогравиационная волна, три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби.

В приближении нестандартной β -плоскости могут взаимодействовать две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig'_1}$ и волна магнито-Россби, две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'_1}$, две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой ω_{mig_β} и сжимаемая магнитостро-

фическая волна с частотой ω_{mstr_β} , три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби.

С использованием метода многомасштабных разложений получена универсальная система амплитудных уравнений для взаимодействующих волн. В каждом из четырех различных приближений силы Кориолиса выписаны дифференциальные операторы и коэффициенты в амплитудных уравнениях и для всех найденных типов трехволновых взаимодействий показано различие в них. Также в каждом из перечисленных случаев найдены инкременты двух типов неустойчивостей, имеющих место в системе, — распада и усиления. Эффекты сжимаемости в найденных коэффициентах взаимодействия, дифференциальных операторах и инкрементах содержатся в слагаемых с потенциальной температурой (энтропией) и в собственном векторе системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

Финансирование. Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «Базис» и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 19-02-00016).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. S. Miesch and P. A. Gilman, *Solar Phys.* **220**, 287 (2004).
2. D. W. Hughes, R. Rosner, and N. O. Weiss, *The Solar Tachocline*, Cambridge Univ. Press (2007).
3. P. A. Gilman, *Astrophys. J. Lett.* **544**, L79 (2000).
4. M. Dikpati and P. A. Gilman, *Astrophys. J.* **551**(1), 536 (2001).
5. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, and B. M. Shergelashvili, *Astron. Astrophys.* **470**, 815 (2007).
6. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester et al., *Astron. Astropys.* **532**, A139 (2011).
7. J. Philidet, C. Gissinger, F. Lignières, and L. Petitd-mange, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **114**, 336 (2020).
8. J. M. Stone, J. F. Hawley, C. F. Gammie, and S. A. Balbus, *Astrophys. J.* **463**, 656 (1996).
9. K. Batygin, S. Stanley, and D. J. Stevenson, *Astrophys. J.* **776**, 53 (2013).
10. V. G. A. Böning, H. Hu, and L. Gizon, *Astron. Astrophys.* **629**, A26 (2019).

11. B. Loeptien, L. Gizon, A. C. Birch et al., *Nature Astron.* **2**, 568 (2018).
12. M. Dikpati, B. Belucz, P. A. Gilman, and S. W. McIntosh, *Astrophys. J.* **862**, 159 (2018).
13. S. W. McIntosh, W. J. Cramer, M. P. Marcano, and R. J. Leamon, *Nature Astron.* **1**, 0086 (2017).
14. T. V. Zaqarashvili and E. Gurgenashvili, *Front. Astron. Space Sci.* **6**, 7 (2018).
15. L. Gizon, D. Fournier, and M. Albekioni, <https://arxiv.org/abs/2008.02185v1>.
16. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **152**, 705 (2017).
17. М. А. Федотова, Д. А. Климачков, and А. С. Петросян, *Plasma Phys. Rep.* **46**, 50 (2020).
18. М. А. Федотова, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **158**, 374 (2020).
19. M. Dikpati, P. S. Cally, S. W. McIntosh et al., *Sci. Rep.* **7**, 14750 (2017).
20. M. Dikpati and S. W. McIntosh, *Space Weather* **18**, e2018SW002109 (2020).
21. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
22. О. Г. Онищенко, О. А. Похотелов, Н. М. Астафьева, *УФН* **178**, 605 (2008).
23. D. A. Klimachkov and A. S. Petrosyan, *Phys. Lett. A* **381**, 106 (2017).
24. A. S. Petrosyan, D. A. Klimachkov, M. A. Fedotova, and T. A. Zinyakov, *Atmosphere* **11**, 314 (2020).
25. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press (2006).
26. B. P. Brown, G. M. Vasil, and E. G. Zweibel, *Astrophys. J.* **756**, 109 (2012).
27. A. S. Almgren, J. B. Bell, A. Nonaka, and M. Zingale, *Comp. Sci. Eng.* **11**(2), 24 (2009).
28. G. K. Batchelor, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **79**(340), 224 (1953).
29. J. G. Charney and Y. Ogura, *J. Meteor. Soc. Jpn Ser. II* **38**(6), 19a (1960).
30. D. O. Gough, *J. Atmosph. Sci.* **26**, 448 (1969).
31. P. R. Bannon, *J. Atmosph. Sci.* **53**, 3618 (1996).
32. M. A. Calkins, K. Julien, and P. Marti, *Proc. Roy. Soc. London A* **471**, 20140689 (2015).
33. S. Paolucci, Sandia Nat. Lab. Rep. SAND82-8277 Livermore, CA, USA (1982).
34. N. Botta, R. Klein, and A. Almgren, Summary Rep. No 55, Potsdam Inst. for Climate Impact Research (1999).
35. R. Klein, N. Botta, T. Schneider et al., *J. Eng. Math.* **39**, 261 (2001).
36. S. I. Braginsky and P. H. Roberts, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **79**, 1 (1995).
37. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Physica D* **97**, 81 (1996).
38. P. Olson and U. R. Christensen, *Earth and Planetary Sci. Lett.* **250**, 561 (2006).
39. C. A. Jones, K. M. Kuzanyan, and R. H. Mitchell, *J. Fluid Mech.* **634**, 291 (2009).
40. P. A. Gilman and G. A. Glatzmaier, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **45**, 335 (1981).
41. R. K. Yadav and J. Bloxham, *PNAS* <https://doi.org/10.1073/pnas.2000317117> (2020).
42. G. A. Glatzmaier, *J. Comput. Phys.* **55**, 461 (1984).
43. S. R. Lantz and Y. Fan, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **121**, 247 (1999).
44. M. S. Miesch, J. R. Elliott, J. Toomre et al., *Astrophys. J.* **532**, 593 (2000).
45. A. S. Brun, M. S. Miesch, and J. Toomre, *Astrophys. J.* **614**, 1073 (2004).
46. B. P. Brown, M. K. Browning, A. S. Brun et al., *Astrophys. J.* **689**, 1354 (2008).
47. B. P. Brown, M. S. Miesch, M. K. Browning et al., *Astrophys. J.* **731**, 69 (2011).
48. P. K. Smolarkiewicz and P. Charbonneau, *J. Comput. Phys.* **236**, 608 (2013).
49. J. Goldstein, R. H. D. Townsend, and E. G. Zweibel, *Astrophys. J.* **881**, 66 (2019).
50. D. J. Raymond, *Physics 589 — Geophysical Fluid Dynamics. Wave Modes of a Resting Atmosphere. Ch. 3: Sound, Inertia-Gravity Waves, and Lamb Waves*, Physics Internal Website, <http://kestrel.nmt.edu/raymond/classes/ph589/notes/ssmodes/ssmodes.pdf>.
51. J. I. Yano, *J. Fluid Mech.* **810**, 475 (2017).
52. G. Falkovich, *Fluid Mechanics: a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).
53. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **149**, 965 (2016).