

# КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

*С. М. Стишов\**, *А. Е. Петрова*

*Институт физики высоких давлений Российской академии наук  
108840, Троицк, Москва, Россия*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 июля 2020 г.,  
после переработки 21 июля 2020 г.  
Принята к публикации 22 июля 2020 г.

Дано описание различных критических явлений и критических точек, возникающих в системах многих частиц при вариации внешних условий (полей), включающих температуру, давление, магнитные и электрические поля. Конкретная природа частиц здесь не играет большой роли, законы статистической физики универсальны, и рассматриваемые явления могут наблюдаться в системах макрочастиц (коллоидов), атомов и молекул, субъядерных частиц (нуклонов и кварков).

DOI: 10.31857/S0044451020120184

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение .....	1215	8. Квантовая критическая точка (QCP) .....	1221
2. Критическая точка (CP) .....	1216	9. Квантовая конечная критическая точка (QCFP) .....	1223
3. Трикритическая точка (TCP) .....	1217	Литература .....	1223
4. Бикритическая и тетракритическая точки (BP и TP) .....	1219	Алфавитный указатель тома за 2020 г. ....	1225
5. Изолированная критическая точка (ICP) .....	1219	Предметный указатель тома за 2020 г. ....	1236
6. Точка Лифшица (LP) .....	1220		
7. Концевая критическая точка (CFP) ..	1221		

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с впечатляющим прогрессом в инструментальных исследованиях вещества с использованием высоких и сверхвысоких давлений, генерируемых алмазными наковальнями и сверхмощными лазерами, сверхсильных магнитных полей, нейтронных и синхротронных источников излучения, лазеров на свободных электронах и многих других устройств, а также теоретических расчетов на базе суперкомпьютеров драматически растет количество новых результатов, содержащих сведения о фазовых переходах в различных, часто экзотических, системах, таких как экзопланеты и кварк-глю-

онная плазма. Линии фазовых переходов не распространяются безгранично, а могут либо оканчиваться в определенной точке, либо пересекаться с другими линиями. Точки окончания или пересечения являются критическими точками, где термодинамические величины имеют те или иные особенности, определяемые спецификой флуктуационных явлений. Основные черты критических точек, обнаруживаемых при изучении фазовых диаграмм, в большинстве своем могут быть описаны в рамках теории среднего поля. Флуктуации в ряде случаев существенно влияют на форму фазовых линий и характер поведения термодинамических величин вблизи критических точек. Последнее хорошо иллюстрируется сравнением критических показателей, вычис-

\* E-mail: sergei@hppi.troitsk.ru

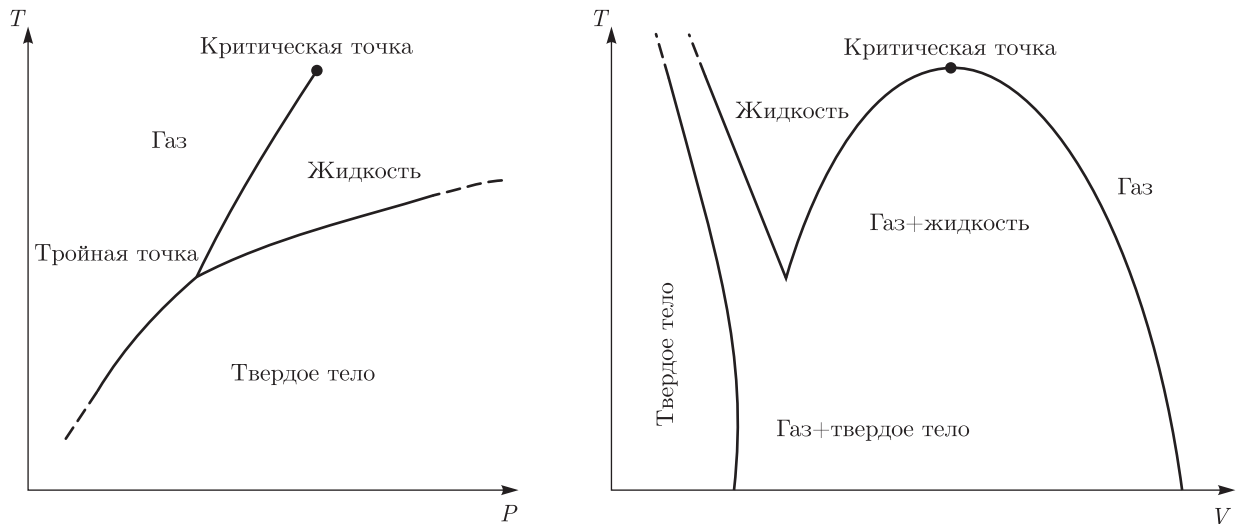


Рис. 1. Вид фазовых диаграмм однокомпонентных систем

ленных в рамках среднеполевой и флуктуационной моделей (см. следующий раздел). В настоящей статье кратко описаны фазовые диаграммы различных моделей и веществ, ярко иллюстрирующие существование различного рода критических точек. Тонкие детали рассматриваемых критических явлений интересующийся читатель может найти в цитируемой литературе. Далее мы предполагаем, что читатель знаком с основной терминологией, используемой при описании фазовых переходов.

## 2. КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА (СР)

Наиболее известной критической точкой является критическая точка типа жидкость–газ, которая обнаруживается при кипении простых жидкостей, при этом симметрия вещества не претерпевает изменений (рис. 1). Параметром порядка в данном случае является разность плотностей сосуществующих фаз, которая становится равной нулю в критической точке. В рамках приближения Ван-дер-Ваальса (среднее поле) термодинамические величины ведут себя в критической точке согласно соотношениям

$$\begin{aligned}
 C_V &\propto (T - T_c)^\alpha, & \alpha &= 0, \\
 V_{gas} - V_{liq} &\propto (T_c - T)^\beta, & \beta &= 1/2, \\
 k_T &= -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \propto (T - T_c)^{-\gamma}, & \gamma &= 1, \\
 P - P_c &\propto (V - V_c)^\delta, & \delta &= 3.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — так называемые критические показатели. Нулевой показатель теплоемкости в данном случае означает, что теплоемкость испытывает простой скачок. Заметим также, что среднеполевые показатели в выражении (1) не подчиняются скейлинговым соотношениям [1]. Численные значения в соотношениях (1) находятся в противоречии с экспериментальными данными. Дело в том, что в критической области происходят мощные флуктуации плотности, о чем свидетельствует, например, интенсивное рассеяние света (критическая опалесценция).

Благодаря флуктуациям, критические показатели ренормализуются и приобретают значения  $\alpha \approx 0.1, \beta \approx 0.33, \gamma \approx 1.2, \delta \approx 4.4$ .

Сюда же следует добавить показатель  $\nu \approx 0.6$  в соответствии с соотношением  $\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}$ , где  $\xi$  — корреляционная длина, характеризующая пространственную неоднородность флуктуационной области.

Как видно, теплоемкость в критической точке стремится к бесконечности (расходится) вместо того, чтобы иметь простой скачок, как в теории Ван-дер-Ваальса. Добавим, что исследования критической точки простых жидкостей внесли основополагающий вклад в создание флуктуационной теории фазовых переходов.

Критические точки этого типа могут быть найдены в металлических жидкостях, в системе экситонов, при изоструктурных фазовых переходах (церий, коллоидальные суспензии) [1], см. в этой связи рис. 2. Критические точки также обсуждаются в астрофизических теориях, описывающих ранние

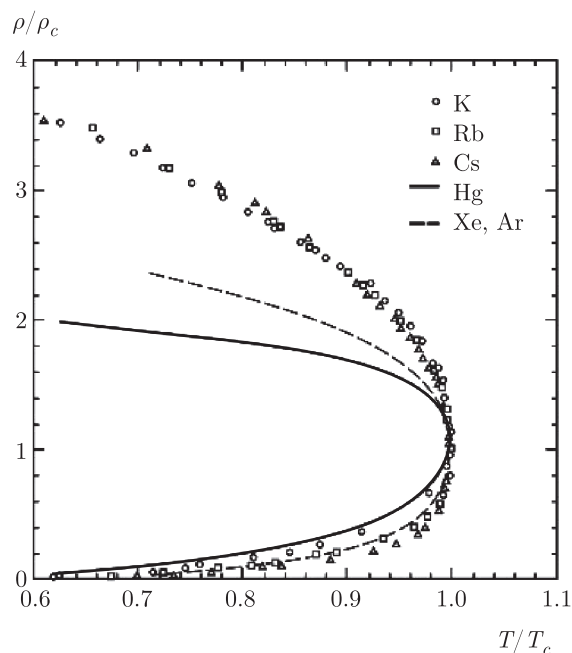


Рис. 2. Кривые сосуществования жидкость–пар для щелочных металлов, ртути и благородных газов [3]

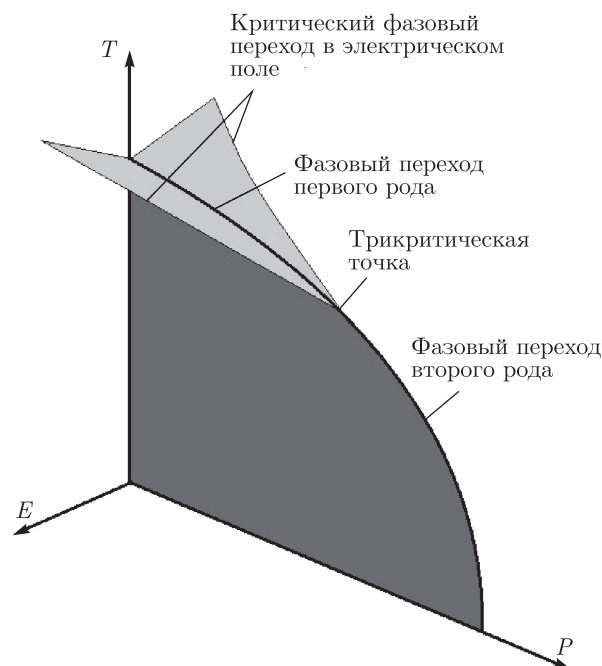


Рис. 3. Схематический вид фазовой диаграммы сегнетоэлектрика в электрическом поле. Видно, что в трикритической точке смыкаются три линии непрерывных фазовых переходов

стадии эволюции Вселенной (см., например, [2]).

### 3. ТРИКРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА (ТСР)

С критическими точками иного типа мы встретимся при анализе фазовых переходов второго рода. Фазовые переходы второго рода представляют собой обширный класс переходов, характеризующихся непрерывным изменением энтропии и объема. В зависимости главным образом от величины корреляционной длины (критерий Леванюка–Гинзбурга [4]) фазовые переходы второго рода могут быть описаны в рамках теории среднего поля или в моделях, включающих флуктуации параметров порядка. Конкретное поведение термодинамических величин определяется соответствующим классом универсальности. Л. Д. Ландау сделал ряд предсказаний относительно критических точек, основываясь на анализе своего знаменитого разложения термодинамического потенциала по степеням параметра порядка в виде (здесь и далее мы будем использовать выражения, выписанные в книге Ландау и Лифшица [4])

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0(P, T) + A(P, T)\eta^2 + C(P, T)\eta^3 + B(P, T)\eta^4 + \dots \quad (2)$$

Коэффициент  $A(P, T) = a(P)(T - T_c)$  меняет знак в точке перехода. В соответствии с условиями устойчивости в точке перехода  $\eta = 0$ ,  $A(P, T) = 0$ ,  $C(P, T) = 0$ ,  $B(P, T) > 0$ . Коэффициент  $B$  также положителен и в окрестности точки перехода. Член третьего порядка  $C(P, T)$  может быть тождественно равен нулю, как это имеет место, например, в случае магнитных фазовых переходов в связи с симметрией по отношению к инверсии знака времени. Тогда имеется только одно уравнение  $A(P, T) = 0$ , определяющее существование линии фазовых переходов второго рода в плоскости  $P$ – $T$ . Разложение термодинамического потенциала (2) следует переписать в виде

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0(P, T) + A(P, T)\eta^2 + B(P, T)\eta^4 + \dots \quad (3)$$

В точке фазового перехода теплоемкость испытывает скачок в соответствии с выражением

$$C_P = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = C_{P_0} + \frac{a^2 T_c}{2B}. \quad (4)$$

Ландау отметил, что линия фазовых переходов второго рода не может просто окончиться в некоторой точке, но она может перейти в линию фа-

зовых переходов первого рода при изменении знака коэффициента  $B$ . Точку, в которой это происходит, Ландау назвал критической точкой переходов второго рода. В современной литературе эта точка, по предложению Гриффитса, называется трикритической [5]. Природа этого термина становится ясной из рассмотрения рис. 3, где демонстрируется схематический вид фазовой диаграммы сегнетоэлектрика в электрическом поле. Электрическое поле поляризует симметричную фазу сегнетоэлектрика и уничтожает различие в симметрии обеих фаз, подавляя тем самым фазовый переход второго рода. В то же время фазовый переход первого рода продолжает существовать и в электрическом поле, исчезая только при определенной напряженности, как критический фазовый переход. Эти области фазового перехода первого рода формируют своего рода крылья с противоположным направлением поляризации. Края этих крыльев соответствуют критическому фазовому переходу, где исчезают скачки параметра порядка и термодинамических величин. В результате в трикритической точке встречаются три линии непрерывных фазовых переходов. В разложении (3) трикритическая точка определяется обращением в нуль коэффициентов  $A(P, T)$  и  $B(P, T)$ . При  $A = 0$  и  $B > 0$  переход является непрерывным, при изменении знака  $B$ , т. е. при  $B < 0$ , переход становится фазовым переходом первого рода. Для устойчивого состояния тела в трикритической точке в разложении (3) следует удержать член шестого порядка, который должен быть положительным. Таким образом, разложение в трикритической точке имеет вид

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0(P, T) + A(P, T)\eta^2 + B(P, T)\eta^4 + D(P, T)\eta^6 + \dots \quad (5)$$

В трикритической точке имеет место  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $D > 0$ .

Поведение параметра порядка и теплоемкости в трикритической точке  $T_{tr}$  существенно отличается от такового на линии фазовых переходов второго рода. Особенно это касается теплоемкости, где вместо простого скачка возникает расходимость:

$$C_P = \left( \frac{T^2 a^3}{12D} \right)^{1/2} (T_{tr} - T)^{-1/2}. \quad (6)$$

Нетрудно догадаться, что причина такого поведения является чисто геометрической. Действительно, вряд ли по-другому возможно осуществить сопряжение простого скачка и  $\delta$ -функции, характеризующих поведение теплоемкости по обе стороны от

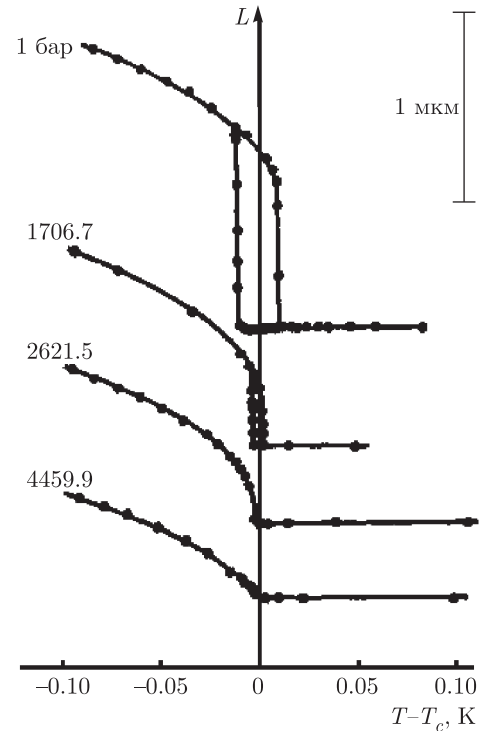


Рис. 4. Зависимости длины образца сегнетоэлектрика KDP от температуры в области фазового перехода при различных давлениях [6]

трикритической точки. Как следует из флуктуационной теории, в трикритической точке флуктуации играют меньшую роль, чем в случае фазовых переходов второго рода. По этой причине мы можем ожидать, что экспериментальные степенные показатели, описывающие поведение физических величин в трикритической точке, будут близки к среднеполевому значению, полученным, например, в рамках теории Ландау. Трикритические точки, где встречаются фазовые переходы первого и второго рода, обычны для фазовых переходов первого рода, близких ко второму (сегнетоэлектрики, магнитные переходы). Как все это происходит, показано на рис. 4, где изображены зависимости длины образца сегнетоэлектрика KDP от температуры в области фазового перехода при различных давлениях [6]. На рис. 4 видно, что скачки длины образца и гистерезис, характеризующие фазовый переход первого рода, исчезают в трикритической точке около 2.62 кбар.

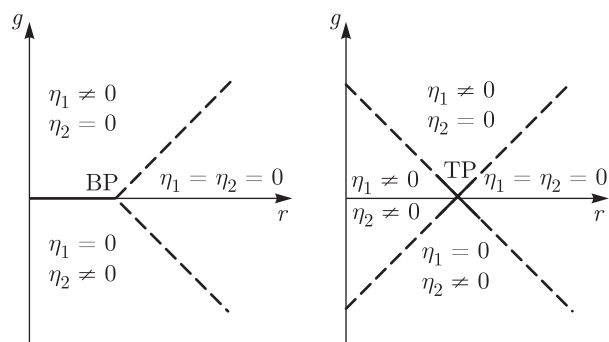


Рис. 5. Схематическое представление фазовых переходов в системе с двумя взаимодействующими параметрами порядка  $\eta_1$  и  $\eta_2$  [8]

#### 4. БИКРИТИЧЕСКАЯ И ТЕТРАКРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКИ (ВР И ТР)

Ландау также предсказал существование иных мультикритических точек, возникающих при пересечении линий фазовых переходов. Критическая точка, образующаяся при пересечении линий фазовых переходов второго рода и фазового перехода первого рода, называется бикритической. Эта точка соответствует случаю, когда несимметричная фаза имеет различную симметрию в разных областях пространства  $P-T-H$ . В общем случае эти симметрии не являются подгруппами друг друга, и фазовый переход между двумя несимметричными фазами является фазовым переходом первого рода. В бикритической точке все три фазы становятся эквивалентными. В том случае, когда симметрии возникающих фаз являются подгруппами друг друга, может появиться тетракритическая точка. Бикритическая и тетракритическая точки возникают естественным образом при анализе системы с двумя взаимодействующими векторными параметрами в рамках теории Ландау [7, 8]. В [8] рассматривается система с термодинамическим потенциалом вида

$$\Phi(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}r(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}g(\eta_1^2 - \eta_2^2) + u_1\eta_1^4 + u_2\eta_2^4 + 2u_{12}\eta_1^2\eta_2^2. \quad (7)$$

Детали фазовой диаграммы, описываемой потенциалом (7), зависят от относительной амплитуды членов четвертого порядка. При  $u_1u_2 < u_{12}^2$  вдоль линии  $g = 0, r < 0$  происходит фазовый переход первого рода, отделяющий фазу с  $\eta_1 \neq 0$  и  $\eta_2 = 0$  от фазы с  $\eta_2 \neq 0$  и  $\eta_1 = 0$ , как это показано в левой части рис. 5. Два фазовых перехода второго рода встречаются в точке  $r = 0, g = 0$ , и эта точка называется бикритической (ВР). При  $u_1u_2 > u_{12}^2$  об-



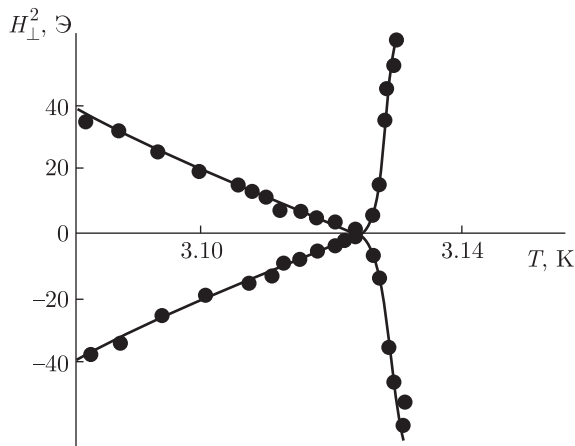
Рис. 6. Магнитная фазовая диаграмма  $MnF_2$ , демонстрирующая существование бикритической точки [9]

разуется смешанная фаза с ненулевыми значениями обоих параметров порядка,  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , отделенная линиями фазовых переходов второго рода от фаз с  $\eta_1 = 0$  и  $\eta_2 = 0$ , как это показано в правой части рис. 5. В этом случае четыре линии фазовых переходов второго рода встречаются в точке  $r = 0, g = 0$ , образуя тем самым тетракритическую точку (ТР).

На рис. 6 и 7 приведены экспериментальные примеры, демонстрирующие возникновение рассматриваемых критических точек в магнитных системах.

#### 5. ИЗОЛИРОВАННАЯ КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА (ICP)

Ландау также рассмотрел случай, когда в разложении (2) член третьего порядка не равен тождественно нулю и происходит фазовый переход первого рода. Однако член третьего порядка может обратиться в нуль при изменении внешних условий (например, при изменении давления), что определяет возможность существования изолированной критической точки, координаты которой определяются при совместном решении уравнений  $A(P, T) = 0$  и  $C(P, T) = 0$ . В этом случае изолированная критическая точка лежит на пересечении двух линий

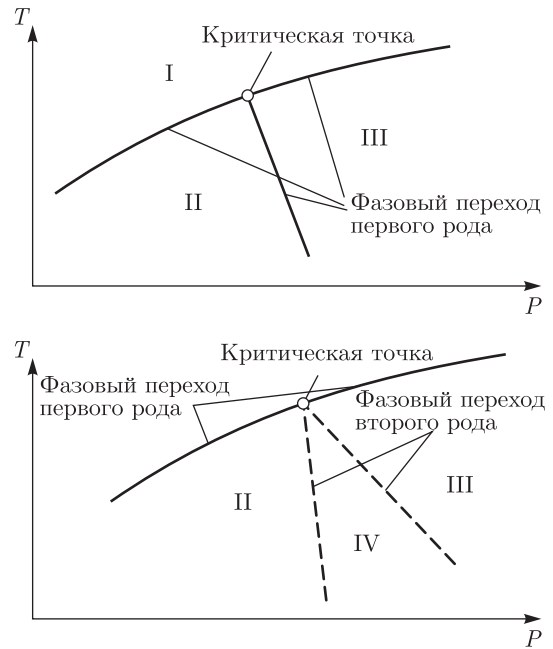


**Рис. 7.** Магнитная фазовая диаграмма  $GdAlO_3$  при направлении магнитного поля перпендикулярно легкой оси намагничивания. Четыре линии фазовых переходов второго рода встречаются в тетракритической точке, разделяя антиферромагнитную, спин-флип, смешанную и парамагнитную фазы. Следует заметить, что эта же система демонстрирует бикритическую точку в параллельном поле [10]

фазового перехода первого рода, причем упорядоченные фазы имеют одинаковые симметрии и различаются только знаком параметра порядка. В изолированной критической точке все три фазы становятся тождественными. Эта ситуация анализировалась в работе [11] для случая нематического жидкого кристалла. В результате были построены две гипотетические фазовые диаграммы (рис. 8). Обратим внимание, что в нижней части рис. 8 вместо фазового перехода первого рода, разделяющего нематические фазы с разными знаками параметра порядка, появляются два фазовых перехода второго рода, ограничивающие двухосную фазу. По существу на этой диаграмме два фазовых перехода первого рода и два фазовых перехода второго рода формируют своеобразную тетракритическую точку. Существование двухосной промежуточной фазы сближает эту ситуацию с канонической картиной тетракритического поведения. К сожалению, экспериментальных данных, подтверждающих существование фазовых диаграмм типа представленных на рис. 8, пока не существует.

### 6. ТОЧКА ЛИФШИЦА (LP)

В работе [12] предложен новый тип мультикритических точек, названный точкой Лифшица (LP). Эта точка возникает в системах, в которых низ-



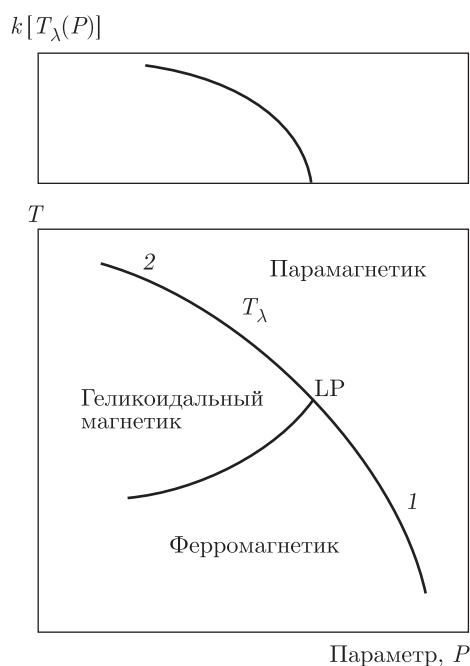
**Рис. 8.** Два варианта фазовой диаграммы для нематического фазового перехода [11]. Здесь I — изотропная фаза, II и III — нематические фазы с  $\eta = +$  и  $\eta = -$ , IV — двухосная фаза

котемпературная упорядоченная фаза испытывает переход от пространственно-однородного порядка к пространственно-модулированному порядку. Для изотропной системы со скалярным параметром порядка  $M$  разложение Ландау в этом случае включает пространственные производные параметра порядка и выглядит следующим образом:

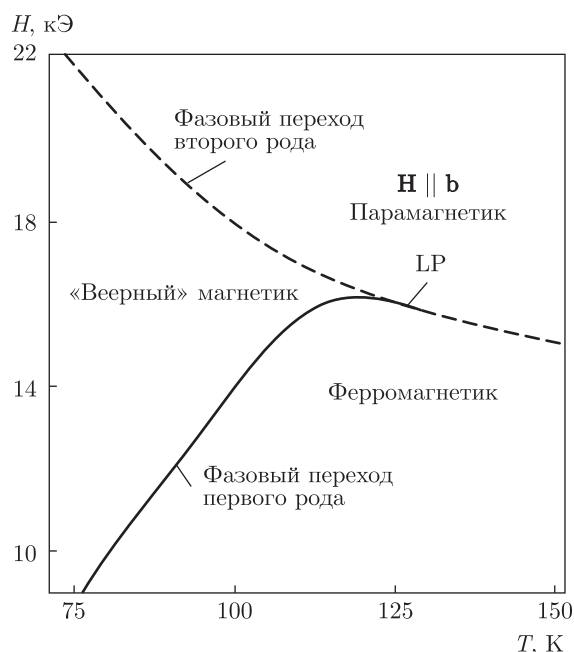
$$\Phi = a_2 M^2 + a_4 M^4 + a_6 M^6 + \alpha (\nabla M)^2 + \beta (\nabla^2 M)^2 + \dots \quad (8)$$

Предполагается, что коэффициент  $\beta > 0$ , а коэффициент  $\alpha$  зависит от внешнего параметра  $P$ . При  $\alpha(P) > 0$  устанавливается ферромагнитный порядок, а при  $\alpha(P) < 0$  имеет место геликоидальный порядок. Точка Лифшица соответствует ситуации  $\alpha(P) = 0$  [13]. На рис. 9 схематически представлена фазовая диаграмма, демонстрирующая точку пересечения линии фазового перехода первого рода, разделяющей геликоидальную и ферромагнитную фазы, и линии фазового перехода второго рода, ограничивающей парамагнитную фазу. Именно эта точка получила название точки Лифшица. Как отмечено в [8], фазовый переход между однородной и модулированной фазами является фазовым переходом первого рода в случае скалярного параметра порядка (тогда точка Лифшица по существу явля-





**Рис. 9.** Схематическая фазовая диаграмма магнитной системы, демонстрирующая точку Лифшица (LP). Кривая 1–2 — линия фазовых переходов второго рода. В верхней части рисунка показано поведение волнового вектора геликоидальной фазы на линии фазовых переходов второго рода [12]



**Рис. 10.** Магнитная фазовая диаграмма MnP в области, примыкающей к точке Лифшица. Линии проведены с использованием экспериментальных данных работы [13]

ется бикритической точкой). В случае векторного параметра порядка этот переход является фазовым переходом второго рода, и, таким образом, в точке Лифшица встречаются три линии непрерывных фазовых переходов, образуя своеобразную тройную точку. Экспериментальное наблюдение точки Лифшица на магнитной фазовой диаграмме магнетика MnP иллюстрируется на рис. 10 [13]. Примечательно, что в ближайшей окрестности точки Лифшица обе линии фазовых переходов являются касательными по отношению к друг другу, что подтверждает расчеты, проведенные в рамках теории Ландау [14].

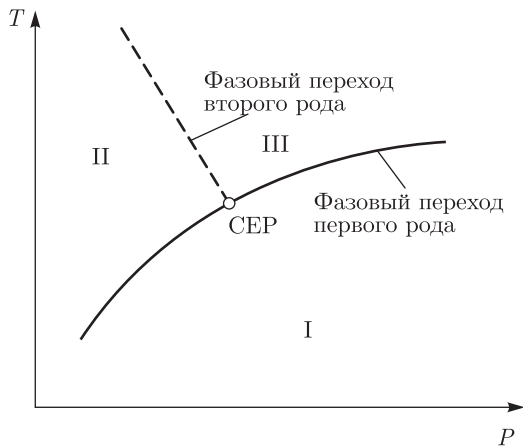
### 7. КОНЦЕВАЯ КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА (СЕР)

Еще один тип критической точки — конечная критическая точка — был идентифицирован в работе [15]. В конечной критической точке критическая фаза сосуществует с не критической. Следует различать классическую критическую точку, возникающую при кипении простых жидкостей, и конечную критическую точку. Дело в том, что фазовый переход жидкость–пар является фазовым переходом первого рода и не проявляет критических свойств всюду за исключением самой точки окончания фазового перехода — критической точки (СР). В противоположность этому концепция конечной критической точки (СЕР) соответствует ситуации, когда критическая линия фазовых переходов второго рода оканчивается на не критической линии фазовых переходов первого рода (рис. 11), что индуцирует нетривиальные критические эффекты [15]. По-видимому, впервые конечная критическая точка наблюдалась при исследовании фазовой диаграммы <sup>4</sup>He [16] (рис. 12, 13).

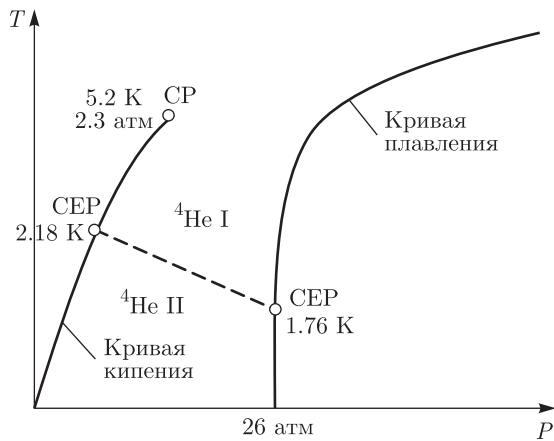
Заметим, что в работе [8] описывается модель, фазовая диаграмма которой содержит обе критические точки, СР и СЕР.

### 8. КВАНТОВАЯ КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА (QCP)

Квантовая критическая точка есть точка на фазовой диаграмме, где происходит непрерывный фазовый переход (второго рода) при  $T = 0$  [17]. Соответственно, фазовые переходы, происходящие при  $T = 0$  при вариации переменных, определяющих интенсивность квантовых флуктуаций, называются квантовыми фазовыми переходами. Рассмотрим рис. 14, где  $T_c(P)$  есть линия непрерывного фазового

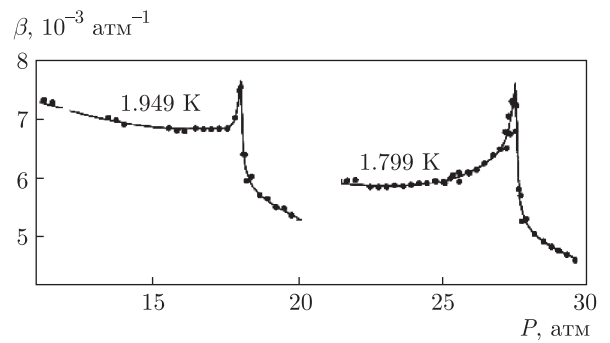


**Рис. 11.** Концевая критическая точка (СЕР). Линия фазовых переходов второго рода оканчивается на линии фазовых переходов первого рода. Любопытно, что эта диаграмма представляет собой своего рода «бикритику» наоборот (см. рис. 5, 6)

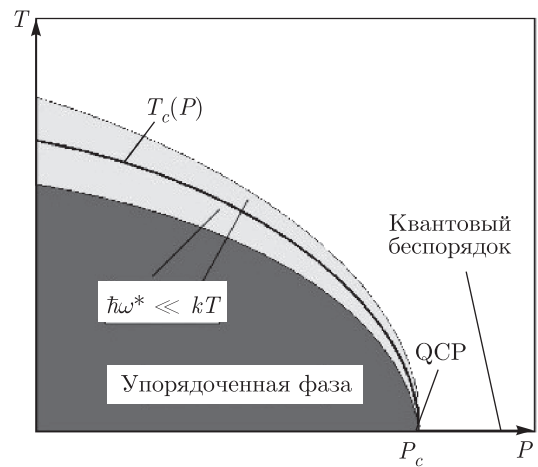


**Рис. 12.** Схематическая фазовая диаграмма  $^4\text{He}$ . Линия сверхтекучего фазового перехода ограничивается кривой испарения и кривой плавления, образуя две концевые критические точки (СЕР)

перехода, соответствующего, например, некоторому магнитному превращению. При нормальном давлении температура фазового перехода имеет вполне конечное значение. Повышение давления приводит к прогрессивному падению температуры перехода вплоть до  $T = 0$  при некотором критическом значении давления  $P_c$  (вместо давления здесь может фигурировать другой контролирующий параметр, например, магнитное поле, концентрация и т. д.). «Разупорядоченная» фаза, возникающая под действием квантовых флуктуаций при  $T = 0$ , является реализацией «квантового» беспорядка, принципиально отличного от беспорядка «классического».



**Рис. 13.** Сжимаемость жидкого  $^4\text{He}$  в области концевой критической точки. Видно, что аномалия сжимаемости растет по мере приближения к этой точке

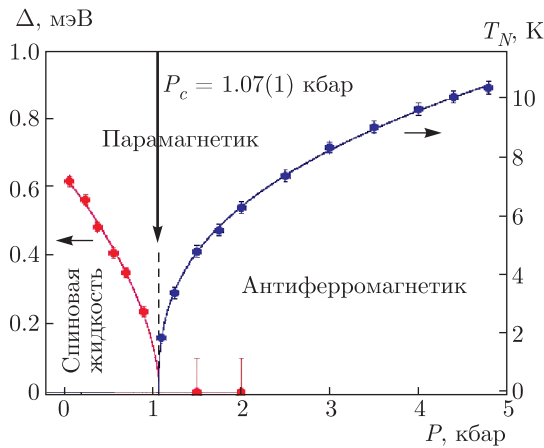


**Рис. 14.** Иллюстрация к определению квантовой критической точки (QCP).  $T_c$  — линия фазового перехода второго рода. Светло-серым цветом обозначена область классических флуктуаций ( $\omega^*$  — характерная частота флуктуаций)

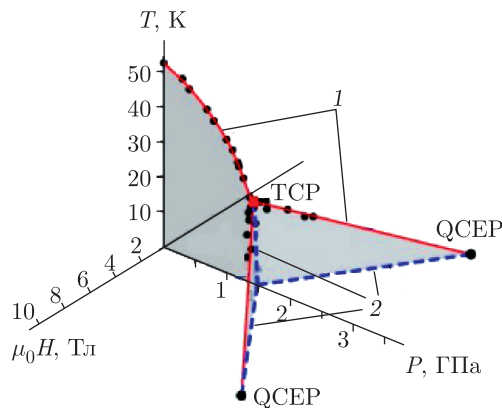
В данном случае квантовый фазовый переход при  $T = 0$  возникает как предельный случай классического фазового перехода, имеющего место при  $T \neq 0$ , но возможна ситуация (система в состоянии нижней критической размерности), когда фазовый переход может происходить только при  $T = 0$ .

Далее следует напомнить, что квантовая статистическая задача в  $d$ -мерном пространстве при  $T = 0$  может быть сведена к задаче классической с эффективной размерностью  $d + 1$ . Однако когда это касается критических свойств системы, ее эффективная размерность оказывается равной  $d + z$ , где  $z$  — динамический показатель. Таким образом, эффективная размерность квантовой системы в критической области при  $T = 0$  оказывается равной или даже превышает верхнюю критическую размерность, и, следовательно, критические показатели в квантовой критической точке будут иметь средне-





**Рис. 15.** Квантовый фазовый переход спиновая жидкость–антиферромагнетик в системе  $\text{TlCuCl}_3$  под действием давления [18]. Здесь  $\Delta(P)$  — щель между синглетным и триплетным состояниями электронной подсистемы, измеренная при температуре 1.85 К. Заметим, что в данном случае упорядоченное состояние возникает при повышении давления в противоположность случаю, представленному на рис. 14



**Рис. 16.** (В цвете онлайн) Частичная фазовая диаграмма  $\text{UGe}_2$  по данным работы [20], демонстрирующая возникновение квантовой концевой критической точки (QСЕР) при метамагнитном фазовом переходе. Красные сплошные линии 1 — непрерывный фазовый переход, синие штриховые линии 2 — фазовый переход первого рода

полевые (гауссовы) значения. Экспериментальный пример квантового фазового перехода в  $\text{TlCuCl}_3$  демонстрируется на рис. 15. Считается, что интенсивные квантовые критические флуктуации определяют возникновение высокотемпературной сверхпроводимости. Наконец, в соответствии с принципом неопределенности по мере приближения к абсолютному нулю точная локализация фазовой границы может стать невозможной.

## 9. КВАНТОВАЯ КОНЦЕВАЯ КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА (QСЕР)

По-видимому, первоначальная идея о квантовых концевых критических точках возникла в результате исследования метамагнитного фазового перехода в металлическом рутенате  $\text{Sr}_3\text{Ru}_2\text{O}_7$  [19]. Далее эта идея естественно возродилась при детальном экспериментальном исследовании трикритических явлений [20, 21]. На рис. 16 приведена частичная фазовая диаграмма соединения  $\text{UGe}_2$ , иллюстрирующая возникновение квантовой концевой критической точки (QСЕР) при метамагнитном фазовом переходе. Как следует из рис. 16, QСЕР локализована в точке касания непрерывного фазового перехода (1) и фазового перехода первого рода (2) при  $T = 0$  в согласии с определением концевой критической точки (СЕР) (см. выше). В работе [19] подчеркивается, что в QСЕР не происходит спонтанного нарушения симметрии в противоположность случаю квантовой критической точки (QСР).

**Финансирование.** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00183-а) и Российского научного фонда (грант № 17-12-01050).

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Стишов, *Фазовые переходы для начинающих*, Москва–Ижевск (2019).
2. D. Boyanovsky, H. J. de Vega, and D. J. Schwartz, *Ann. Rev. Part. Sci.* **56**, 441 (2006).
3. F. Hensel, M. Stolz, G. Hohl, R. Winter, and W. Gotzclaff, *J. de Phys. IV, Coll. C5, Suppl. J. de Phys. I* **1**, 5 (1991).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, часть 1, Наука, Москва (1995).
5. R. B. Griffiths, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 715 (1970).
6. А. Н. Зисман, В. Н. Качинский, С. М. Стишов, *Письма ЖЭТФ* **31**, 172 (1980).
7. М. А. Анисимов, Е. Е. Городецкий, В. М. Запрудский, *УФН* **133**, 103 (1981).
8. P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge Univ. Press (1995).

9. Y. Shapira and S. Foner, *Phys. Rev. B* **1**, 3083 (1970).
10. H. Rohrer and Ch. Gerber, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 909 (1977).
11. П. В. Вигман, А. И. Ларкин, В. М. Филев, *ЖЭТФ* **68**, 1883 (1975).
12. R. M. Hornreich, M. Luban, and S. Shtrikman, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1678 (1975).
13. Y. Shapira, C. C. Becerra, N. F. Oliveira, Jr., and T. S. Chang, *Phys. Rev. B* **24**, 2780 (1981).
14. A. Michelson, *Phys. Rev. B* **16**, 377 (1977).
15. M. E. Fisher and P. J. Upton, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2402 (1990).
16. E. R. Grilly, *Phys. Rev.* **149**, 97 (1966).
17. С. М. Стишов, *УФН* **174**, 853 (2004).
18. Ch. Ruegg, A. Furrer, D. Sheptyakov, Th. Strassle, K. W. Kramer, H.-U. Gudel, and L. Melesi, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 257201 (2004).
19. S. A. Grigera, R. S. Perry, A. J. Schofield, M. Chiao, S. R. Julian, G. G. Lonzarich, S. I. Ikeda, Y. Maeno, A. J. Millis, and A. P. Mackenzie, *Science* **294**, 329 (2001).
20. V. Taufour, D. Aoki, G. Knebel, and J. Flouquet, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 217201 (2010).
21. D. Aoki, T. Combier, V. Taufour, T. D. Matsuda, G. Knebel, H. Kotegawa, and J. Flouquet, *J. Phys. Soc. Jpn* **80**, 094711 (2011).