

# ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМЕ НЕИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ КУРАМОТО – БАТТОГТОХА

*М. И. Болотов*<sup>a\*</sup>, *Л. А. Смирнов*<sup>a,b\*\*</sup>, *Е. С. Бубнова*<sup>a</sup>,  
*Г. В. Осипов*<sup>a\*\*\*</sup>, *А. С. Пиковский*<sup>c,a\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»,  
Институт информационных технологий, математики и механики,  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия*

<sup>b</sup> *Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

<sup>c</sup> *Institute for Physics and Astronomy, University of Potsdam  
D-14476, Potsdam-Golm, Germany*

Поступила в редакцию 11 августа 2020 г.,  
после переработки 11 августа 2020 г.  
Принята к публикации 9 сентября 2020 г.

Для ансамбля нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов рассмотрены пространственно-временные состояния, соответствующие различным режимам долговременной эволюции такого рода системы. Найдены однородные, градиентные и неоднородные стационарные решения уравнений Отта – Антонсена, соответствующие ключевым вариантам реализующегося коллективного вращательного движения элементов обсуждаемой среды с ненулевыми мезоскопическими характеристиками, определяющими степень когерентности динамики расположенных поблизости частиц. Описаны процедуры поиска класса неоднородных решений как неподвижных точек вспомогательного точечного отображения и определения устойчивости на основе анализа спектра собственных значений композитного оператора. Продемонстрированы и описаны статические и бризерные кластерные режимы, а также режимы с нерегулярным поведением усредненных комплексных полей, к которым, в частности, относится локальный параметр порядка.

DOI: 10.31857/S0044451021010120

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время системы связанных осцилляторов являются актуальной темой для теоретических и экспериментальных исследований. Обусловлено это, прежде всего, тем, что данные системы представляют собой базовые модели в различных областях современной науки и техники. С их помощью удастся адекватно описывать не только механические объекты (в частности, взаимодействующие маятники [1, 2], закрепленные на общей осно-

ве метрономы [3, 4]), но и разнообразные процессы в электрических (в том числе силовых) сетях [5, 6], твердотельных структурах [7, 8], молекулярных цепочках [9, 10] и т. д. Ссылки на конкретные экспериментальные и теоретические исследования можно найти, например, в книгах [11, 12] и обзоре [13].

Целый ряд ключевых фундаментальных явлений, свойственных нелинейным осцилляторным средам различной по своей сути природы, нередко и достаточно успешно удастся рассмотреть в рамках фазового приближения [12, 14, 15]. К таким явлениям, в частности, относится синхронизация и возникновение корреляций в системе [1, 11]. Переход от более точных и конкретных теоретических постановок к универсальному описанию с помощью динамических уравнений для фазовых переменных позволя-

\* E-mail: maksim.bolotov@itmm.unn.ru

\*\* E-mail: smirnov\_lev@appl.sci-nnov.ru

\*\*\* E-mail: osipov@vmk.unn.ru

\*\*\*\* E-mail: pikovsky@uni-potsdam.de

ет выявить единые принципы и общие закономерности в поведении физических, химических, биологических и социальных систем. При этом для изучения поведения популяции осцилляторов, взаимодействующих через среднее поле, чаще всего используется широко известная модель Курамото с глобальной связью и ее разнообразные модификации [11,13,16–22]. Отличительная особенность такого рода топологии связи состоит в отсутствии какой-либо информация о положении элементов ансамбля в координатном пространстве. Поэтому в данном случае, несмотря на то, что возможен процесс объединения осцилляторов в кластеры, нельзя поставить задачи о формировании пространственных структур и распространении волн. Однако картина принципиально меняется, если взаимодействие в среде носит не глобальный, а локальный или нелокальный характер, так как система становится пространственно-упорядоченной. В ней автоматически пропадает полная симметрия относительно перестановок элементов, и их нумерация начинает играть важную роль при изучении динамики осцилляторных популяций.

Нелокальную связь математически можно представить, например, в виде оператора свертки. Ядро этого оператора полностью определяет характер взаимодействия внутри такого рода осцилляторной среды. Несмотря на то, что в литературе рассматривались, в том числе, и дальнедействующие связи (см., например, [23]), убывающие по степенному закону, в основном значительные и во многом неожиданные результаты были получены для ядер конечного радиуса, а также с экспоненциально убывающими хвостами [24–26]. Прежде всего, среди данных результатов стоит выделить образование в ансамблях идентичных элементов химерных состояний, которые характеризуются сосуществованием синхронных и асинхронных групп осцилляторов. На сегодняшний день подобные нетривиальные состояния остаются одним из привлекательных и интригующих эффектов для многих исследователей в области нелинейной динамики (см. недавние обзоры [24–29]). Этот интерес обусловлен тем, что формирование химер происходит вследствие фундаментального явления нарушения симметрии [30], которое в распределенных популяциях проявляется в том, что несмотря на то, что однородное полностью синхронное состояние существует и устойчиво, система (для целого ряда начальных условий) в процессе долговременной эволюции может прийти к совершенно другому (более сложному) режиму своей динамики, когда наряду с группами взаимно синхронных

элементов имеется значительная часть асинхронных осцилляторов.

Нетривиальные состояния в средах, состоящих из фазовых осцилляторов с нелокальной связью, могут быть описаны как стационарные структуры с пространственно-неоднородным профилем комплексного параметра порядка, который определяется локально как мера когерентности мезоскопической группы соседних элементов. В частности, в данном контексте для химерных режимов в распределенных ансамблях и популяциях с композитной топологией абсолютное значение такого локального комплексного параметра порядка обращается тождественно в единицу там, где соседние осцилляторы синхронны, и меньше единицы в областях с асинхронным поведением элементов [24–28, 31–35].

Среди проводимых исследований особое место занимают системы, состоящие из неидентичных осцилляторов [13, 18, 20–23, 36–43]. В таких системах каждый осциллятор обладает своей собственной частотой, значение которой зависит от свойств конкретного элемента. В ансамбле, состоящем из большого числа осцилляторов, вполне естественно считать, что эти частоты выбираются случайным образом, и их распределения подчиняется некоторому закону, который заранее определен из физических соображений. Если рассматриваются популяции с нелокальным взаимодействием, то можно сказать, что появляется пространственный беспорядок, способный существенным образом повлиять как на когерентность в группе соседних осцилляторов, так и на динамику ансамбля в целом. С одной стороны, его наличие усложняет анализ долговременного поведения и устанавливающихся в итоге состояний среды, так как появляются еще дополнительные параметры, ответственные за разброс частот. Можно ожидать возникновения каких-то новых более сложных режимов, которые отсутствуют в случае идентичных осцилляторов. От степени пространственного беспорядка зависят бифуркационные значения других величин, при которых происходит качественное изменение в возможных сценариях долговременной эволюции. С другой стороны, появляется потенциал для того, чтобы продвинуться в аналитическом описании результатов численного моделирования. Это прежде всего связано с тем, что полностью когерентный режим не может реализовываться в подобных системах. Поэтому вырожденная ситуация, когда модуль локального комплексного параметра порядка тождественно обращается в единицу, становится невозможной.

В настоящее время распределенные системы, состоящие из неидентичных нелокально связанных осцилляторов, активно изучаются с различных точек зрения. Из большого числа статей, вышедших за последнее десятилетие по данному направлению исследования, здесь выделено лишь несколько ключевых работ [37–43]. В частности, в работах [37, 38] представлены долгоживущие состояния, которые характеризуются присутствием областей с разной степенью когерентности частиц. Такого рода состояния представляют собой аналоги химер и трансформируются в них в пределе нулевого разброса по частотам. Там же впервые продемонстрировано, что для анализа данных режимов можно эффективно использовать редукцию Отта–Антонсена [20–22], которая позволяет получить самосогласованные динамические уравнения для макроскопических комплексных полей, одним из которых оказывается локальный параметр порядка. В статье [39] обсуждается обобщенная фазовая модель, которая может быть использована для описания сетей нелокально взаимодействующих между собой элементов, индивидуальные характеристики которых различаются. Ключевой особенностью рассматриваемой в [39] системы является присутствие в связи между двумя парами элементов запаздывания, выбираемого случайным образом и вносящего дополнительный беспорядок. В частности, было показано, что если значения управляющих параметров близки к критическим, при которых однородное частично синхронное состояние теряет свою устойчивость, в процессе своей эволюции популяция неидентичных фазовых осцилляторов с временной задержкой в целом ряде случаев приходит к транзиентным состояниям, которые отличаются наличием нескольких (двух и более) экстремумов в распределении усредненных величин, что, в свою очередь, указывает на то, что среда разбивается на регулярные (во времени) чередующиеся (в пространстве) участки с повышенной и пониженной когерентностью. В работах [44, 45] (в случае, когда среда состоит из одинаковых частиц, см., например, публикации [40, 41, 46]) проанализирован еще один из возможных типичных режимов, на который может выйти ансамбль осцилляторов. Ниже будем называть его градиентным, так как он выделяется тем, что в среднем фаза в произвольный момент времени при обходе замкнутой в кольцо системы увеличивается на  $2\pi q$ , где  $q$  — целое число. В статье [42] внимание авторов было сосредоточено на состояниях с нерегулярным (хаотическим) поведением макроскопических полей. В том числе, была предпринята попытка классифи-

цировать наблюдаемые турбулентные режимы. А в недавно вышедшей работе [43] обсуждалось существование при наличии разброса собственных частот и структурные особенности бризерных квазилинейных режимов, которые характеризуются, с одной стороны, периодическим изменением во времени амплитуд комплексных мезоскопических полей в каждой точке пространства, а с другой, сосуществованием областей с повышенной и пониженной когерентностью. Отметим, что такие режимы были ранее обнаружены для систем идентичных фазовых осцилляторов (см., например, [32, 33]). Кроме того, особо подчеркнем, что в большинстве из перечисленных публикаций в качестве ядер интегрального оператора, описывающего нелокальное взаимодействие, использовались либо функции с конечным числом членов в соответствующем ряде Фурье, либо прямоугольные распределения конечной ширины.

В предлагаемой работе наряду с изложением оригинальных результатов для ядер с экспоненциально убывающими хвостами предпринята так же попытка некоторой систематизации и обобщения ранее полученных данных и встречающихся в литературе сведений. Изучаются синхронные и асинхронные режимы и соответствующие им пространственно-временные структуры в ансамбле слабонеидентичных нелокально связанных фазовых осцилляторов, равномерно распределенных на кольце. При теоретическом исследовании используется подход Отта–Антонсена [20–22]. Характер взаимодействия (экспоненциального типа) внутри среды позволяет перейти от интегро-дифференциального уравнения для параметра порядка к самосогласованной системе дифференциальных уравнений в частных производных для двух комплексных полей аналогично тому, как это было сделано в работах [31–33]. Неидентичность элементов среды является ключевой особенностью, которая позволяет продвинуться прежде всего в изучении разнообразия стационарных неоднородных профилей локального параметра порядка и их устойчивости по сравнению с выполненными нами ранее исследованиями систем идентичных осцилляторов [31–33, 46], так как интересующие нас комплексные поля представляют собой гладкие функции, которые по модулю меньше единицы. Численное моделирование проводится как в рамках исходной модели популяции, состоящей из большого количества фазовых осцилляторов с собственными частотами, выбранными случайно согласно распределению Лоренца, так и на базе замкнутых самосогласованных уравнений для макроскопических (усредненных) величин.

Математическая постановка изучаемой проблемы приводится в разд. 2. Простейшие решения с постоянным по модулю значением параметра порядка описаны в разд. 3. Здесь речь идет об асинхронных и частично синхронных однородных режимах, а также о градиентных состояниях. В разд. 4 приводятся сначала базовые сведения и соотношения, лежащие в основе предлагаемого нами метода поиска стационарных (равномерно вращающихся) неоднородных решений уравнения Отта – Антонсена с периодическими граничными условиями. Далее представлены ключевые аспекты линейного анализа устойчивости данных нетривиальных пространственных структур, которым можно поставить в соответствие квазихимерные статические состояния исходной фазовой модели. Затем обсуждаются основные моменты и преимущества процедуры построения семейств подобных образований с разным числом областей повышенной и пониженной когерентности и формулируются полученные в рамках такого подхода результаты. Кроме того, сделанные выводы подкрепляются прямым численным моделированием динамики распределенных фаз и локального комплексного параметра порядка. Классы возможных наблюдаемых режимов с более сложным (периодическим или нерегулярным) поведением (как в пространстве, так и во времени) мезоскопических (усредненных) полей обсуждаются в разд. 5. В Заключение подводятся итоги проведенного исследования.

## 2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим ансамбль из  $N$  нелокально связанных неидентичных осцилляторов ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), равномерно распределенных на отрезке длины  $L$  с периодическими граничными условиями на концах [37–39, 41–43]. Данную систему будем описывать в рамках фазового приближения с помощью динамических переменных  $\varphi_n(t)$ , изменение каждой из которых во времени задается уравнением

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = \omega_n + \text{Im} \left( H_n(t) e^{-i\varphi_n(t)} \right), \quad (1)$$

где  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) — собственные частоты осцилляторов. Как и в большинстве работ [18, 37–39, 41–43], предполагается, что величины  $\omega_n$  выбраны случайным образом и имеют функцию распределения Лоренца (или Коши)

$$\pi g(\omega) = \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (2)$$

со средним значением  $\omega_0$  и полушириной  $\gamma$ .

Действующее на осцилляторы поле  $H_n(t)$  имеет общий для всех элементов фазовый сдвиг  $\alpha$  и определяется через дискретный оператор свертки:

$$H_n(t) = e^{-i\alpha} \frac{L}{N} \sum_{\tilde{n}=1}^N G \left( \frac{L}{N} (n - \tilde{n}) \right) e^{i\varphi_{\tilde{n}}(t)}. \quad (3)$$

Его ядро  $G(x)$  характеризует взаимодействие внутри обсуждаемой среды и удовлетворяет требованию единичной нормировки. В качестве  $G(x)$  выбрана функция

$$G(x) = \kappa \text{ch}(\kappa(|x| - L/2)) / 2 \text{sh}(\kappa L/2), \quad (4)$$

хорошо аппроксимирующая случай слабой нелокальной связи [31–33, 46]. Она достаточно адекватно описывает эффекты, связанные с влиянием на произвольно выделенный элемент не только его ближайших соседей, но также и других (более далеких) осцилляторов. Естественно предположить, что это влияние относительно быстро уменьшается с увеличением расстояния между частицами. Особо подчеркнем, что выражение (4) в пределе  $\kappa L \rightarrow +\infty$  переходит в экспоненциальное ядро

$$G_{KB}(x) = \kappa \exp(-\kappa|x|/2)$$

из классической работы Курамото и Баттогтоха [47]. Фактически, и  $G_{KB}(x)$ , и  $G(x)$  в форме (4) являются функцией Грина неоднородного уравнения Гельмгольца с источником в правой части. Однако в первом случае система считается распределенной на всем (бесконечном) интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а вторая же ситуация отвечает среде конечной длины, замкнутой в кольцо, т. е. для которой выполнены периодические граничные условия.

Сделаем еще ряд замечаний, которые позволяют сократить число параметров в рассматриваемой системе. Так, например, совокупность соотношений (3) и (4) инвариантно относительно масштабных преобразований. Благодаря данному обстоятельству без ограничения общности коэффициент  $\kappa$  можно принять равным единице. Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $\kappa = 1$ , а сила связи между элементами, фактически, определяется длиной среды  $L$ . Кроме того, путем перехода во вращающуюся с угловой скоростью  $\omega_0$  систему координат несложно исключить  $\omega_0$  из обсуждения с точки зрения управляющих параметров. Следовательно, уже на этапе постановки задачи целесообразно положить значение  $\omega_0$  равным нулю, т. е. ниже  $\omega_0 = 0$ . Таким образом, для характерных режимов долговременной эволюции обсуждаемого ансамбля нелокально-взаимодействующих осцилляторов определяющими являются три величины  $L$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$ . Отметим также, что

случай идентичных осцилляторов ( $\gamma = 0$ ) уже исследовался нами в работах [31–33, 46].

Сформулированная выше модель, состоящая из конечного числа  $N$  осцилляторов и описываемая уравнениями (1)–(4) имеет достаточно широкий спектр практических приложений в различных областях науки и техники [11, 12, 15]. Однако для более глубокого понимания полученных в ходе расчетов результатов нередко бывает полезен и даже чаще всего оказывается необходим анализ динамических свойств и структурных особенностей изучаемой системы в термодинамическом пределе, когда считается, что в ней содержится бесконечно большое количество элементов, т.е.  $N \rightarrow \infty$ . В этом случае от выражений (1) и (3) переходят к континуальному варианту их записи:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega + \text{Im} \left( H(x, t) e^{-i\phi(x, t)} \right), \quad (5)$$

$$H(x, t) = e^{-i\alpha} \int_0^L G(x - \tilde{x}) e^{i\phi(\tilde{x}, t)} d\tilde{x}. \quad (6)$$

Здесь, согласно нашему предположению, в полном соответствии с исходной дискретной моделью величина  $\omega$  в каждой точке  $x$  интервала от 0 до  $L$  задается независимо случайным образом с использованием вероятностного распределения (2). Обратим внимание также на то, что интеграл в представлении (6) комплексного поля  $H(x, t)$ , отвечающего за нелокальное взаимодействие, стоит воспринимать как предел интегральных сумм Лебега [48]. Таким образом, в (5) и (6) не требуется гладкости функции  $\phi(x, t)$  по пространственной координате  $x$ . Данной чертой отсутствия гладкости обладают все обсуждаемые режимы поведения среды фазовых осцилляторов, что существенно затрудняет задачу их анализа и классификации на микроскопическом уровне рассмотрения, ограничивающемся только соотношениями (1)–(6). Однако переход к мезоскопическим полям в пределе  $N \rightarrow \infty$  дает возможность значительно продвинуться в решении этой задачи. Основные моменты такого перехода состоят в следующем.

С одной стороны, с помощью процедуры усреднения (см., например, [19–22, 26]) можно определить локальный параметр порядка  $Z(x, t) = \langle e^{i\phi} \rangle_{loc}$ , представляющий собой непрерывную комплексную функцию координаты  $x$  и времени  $t$  и удовлетворяющую неравенству  $|Z(x, t)| \leq 1$ . В случае, когда  $|Z(x, t)| = 1$ , все осцилляторы, находящиеся вблизи точки  $x$ , синхронны по фазе. При выполнении условия  $0 < |Z(x, t)| < 1$  принято говорить, что наблюда-

ется режим частичной синхронизации. В этой ситуации в движении частиц наблюдаются корреляции. Равенство  $|Z(x, t)| = 0$  указывает на то, что элементы ансамбля вращаются полностью асинхронно. Таким образом, как и для систем с глобальным взаимодействием, при исследовании систем с нелокальной связью комплексный параметр порядка  $Z(x, t)$  играет важную роль, так как его амплитуда характеризует степень локальной синхронизации в популяции, а фаза дает представление о среднем значении, вокруг которого разбросана величина  $\phi$  в окрестности точки с координатой  $x$ .

С другой стороны, ключевые аспекты эволюции осцилляторной среды в рамках обсуждаемой фазовой модели в термодинамическом пределе могут быть описаны путем введения плотности вероятности  $\rho(\varphi, \omega, x, t)$  распределения динамической переменной  $\varphi$  при заданном  $\omega$  и определенных  $x, t$ . В частности, очевидно, что  $Z(x, t)$  определяется непосредственно с помощью  $\rho(\varphi, \omega, x, t)$  как

$$Z(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(\varphi, \omega, x, t) e^{i\varphi(x, t)} d\varphi d\omega. \quad (7)$$

В свою очередь, действительная функция  $\rho(\varphi, \omega, x, t)$  должна удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega \rho + \text{Im}(H e^{-i\varphi}) \rho) = 0. \quad (8)$$

В работах [20, 21] для данного уравнения с  $H = H(t)$  найдено притягивающее многообразие. Впоследствии разработанный в [20, 21] подход и полученные там результаты были обобщены на случай, когда действующее на элементы ансамбля поле  $H$  зависит не только от времени  $t$ , но и от пространственной координаты  $x$ , т.е. в (8) в такой ситуации  $H = H(x, t)$  (см., например, ссылки [22, 37], а также обзор [26]). Здесь лишь кратко остановимся на базовой идее этого метода и вытекающих из него следствиях.

Принимая во внимание то, что собственные частоты фазовых осцилляторов и в (1), и в (5) выбираются независимо, а также учитывая условие цикличности  $\rho(\varphi, \omega, x, t) = \rho(\varphi + 2\pi, \omega, x, t)$ , решение уравнения (8) целесообразно искать в виде разложения

$$\rho(\varphi, \omega, x, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi} \times \left( 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[ a_m(\omega, x, t) e^{im\varphi} + \text{C.c.} \right] \right), \quad (9)$$

являющегося, фактически, рядом Фурье по динамической переменной  $\varphi$ . Для интересующего нас многообразия Отта – Антонсена (называемого так по фамилиям авторов статей [20, 21]) в спектральном представлении (9) все коэффициенты  $a_m(\omega, x, t)$  с индексами  $m > 1$  выражаются через множитель  $a_1(\omega, x, t)$ , стоящий при первой гармонике, путем возведения его в соответствующую степень:

$$a_m(\omega, x, t) = a_1^m(\omega, x, t). \quad (10)$$

При этом поведение  $a_1(\omega, x, t)$  описывается уравнением

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = -i\omega a_1 + \frac{1}{2}(H^* - H a_1^2), \quad (11)$$

в чем несложно убедиться с помощью прямой подстановки (9) совместно с (10) в (8).

Далее, следуя предложенной в [20, 21] (см. также [22, 26, 37]) общей концепции и задействовав в равенстве (7) разложение (9), легко устанавливается связь между  $a_1(\omega, x, t)$  и  $Z(x, t)$ , из которой, воспользовавшись сделанным нами ранее предположением о том, что функция  $g(\omega)$  имеет форму распре-

деления Коши (2), после интегрирования по  $\omega$  вытекает, что в данной ситуации  $Z(x, t) = a_1^*(-i\gamma, x, t)$ . Отметим, что здесь учтено, что  $\omega_0 = 0$ . Тогда, исходя из (11), для локального комплексного параметра порядка  $Z(x, t)$  получаем эволюционное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\gamma Z + \frac{1}{2}(H - H^* Z^2), \quad (12)$$

где  $H(x, t)$  выражается уже непосредственно через  $Z(x, t)$  с помощью оператора свертки

$$H(x, t) = e^{-i\alpha} \int_0^L G(x - \tilde{x}) Z(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \quad (13)$$

а интеграл по пространству в (13) следует уже воспринимать в смысле Римана (в отличие от соотношения (6)). Кроме того, для многообразия Отта – Антонсена с учетом (2) по  $Z(x, t)$  можно восстановить плотность вероятности  $f(\varphi, x, t)$  разброса  $\varphi$  при определенных  $x$  и  $t$  [37, 38]:

$$f(\varphi, x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\varphi, \omega, x, t) d\omega = \begin{cases} \delta(\varphi - \arg(Z)), & |Z|=1, \\ (1 - |Z|^2)/2\pi(1 - 2|Z| \cos(\varphi - \arg(Z)) + |Z|^2), & |Z|<1, \end{cases} \quad (14)$$

применив формулу для суммы тригонометрической прогрессии. Это означает, что профилю  $Z(x, t)$  можно поставить в соответствие распределение фаз  $\varphi(x, t)$  (и наоборот, естественно, тоже) в любой заданный момент времени.

Все перечисленные выше обстоятельства делают методы, базирующиеся на идеях работ [20–22] и основное внимание уделяющие анализу поведения мезоскопических полей  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$ , весьма эффективным инструментом изучения и предсказания возможных ключевых режимов поведения интересующей нас многочастичной модели (1)–(4). В представляемом далее материале нами сделан еще один шаг, позволяющий упростить исследование пространственной структуры  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$ . Используя для ядра  $G(x)$  конкретный вид (4), от соотношения (13) несложно перейти к эквивалентному ему дифференциальному уравнению

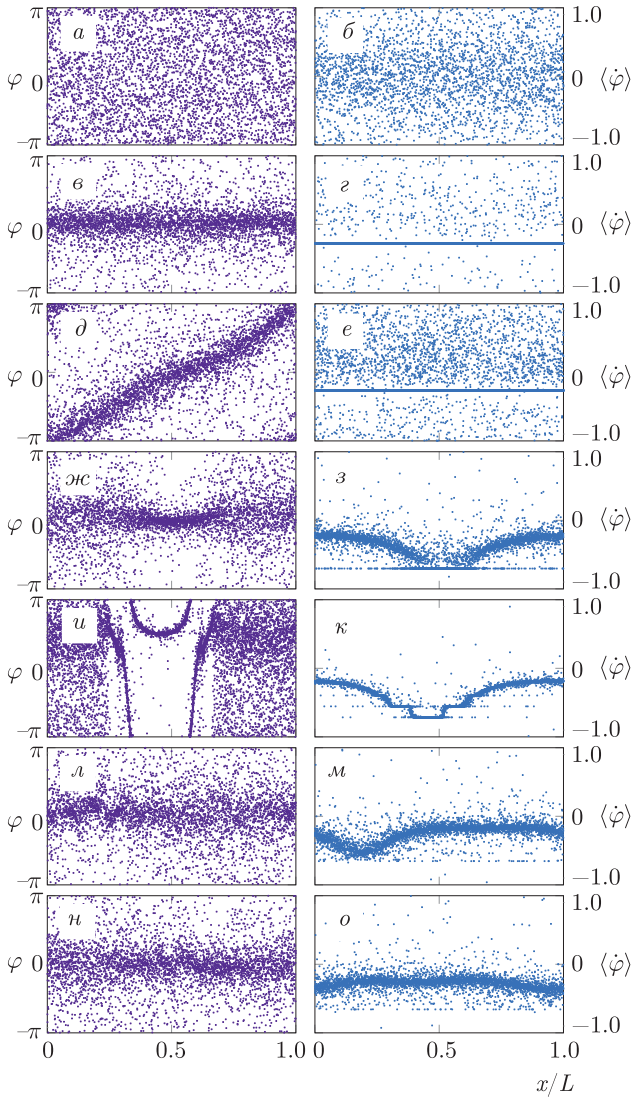
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - H = -Z e^{-i\alpha} \quad (15)$$

с периодическими граничными условиями на концах интервала  $[0, L]$ , а именно

$$H(0, t) = H(L, t), \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial H}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (16)$$

Таким образом, для исходной задачи (1)–(4) в пределе  $N \rightarrow \infty$ , построена редукция, заключающаяся в переходе от рассмотрения негладких профилей фаз к работе с непрерывными (на характерных масштабах среды) распределениями  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$ . Как будет показано ниже, при анализе коллективных эффектов в системе (1)–(4), содержащих большое число элементов  $N$ , для более глубокого понимания протекающих процессов целесообразно изучать как динамику ансамбля фазовых осцилляторов, так и эволюцию комплексного локального параметра порядка  $Z(x, t)$ , задаваемого системой дифференциальных уравнений в частных производных (12), (15) с граничными условиями (16).

Прежде чем переходить к последовательному и подробному изложению материала кратко обозначим типичные устанавливающиеся в ходе численных расчетов режимы поведения замкнутой в кольцо среды нелокально взаимодействующих элементов. Выполненный в рамках модели (1)–(4) и проведенный на базе моделирования самосогласованных уравнений (12), (15) анализ показал существование следующих устойчивых структурно различных состояний:



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Режимы, реализующиеся в системе (1)–(4). Левая колонка — мгновенные снимки фаз  $\varphi_n$ . Правая колонка — средние частоты осцилляторов  $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$ . *а, б)* Полностью асинхронное состояние при  $\alpha = 0.2$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $L = 5.0$ . *в, г)* Однородный частично синхронный режим при  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $L = 6.0$ . *д, е)* Частично синхронный градиентный режим при  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $L = 25.0$ . *ж, з)* Режим кластерной синхронизации при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $L = 6.0$ . *и, к)* Бризерный кластерный режим при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.002$ ,  $L = 7.005$ . *л, м)* Режим перемежаемости при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $L = 8.837$ . *н, о)* Турбулентный режим при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $L = 16.655$

- 1) полностью асинхронное состояние (рис. 1*а, б*);
- 2) однородное частично синхронное состояние (рис. 1*в, г*);
- 3) частично синхронное состояние с градиентным распределением фаз (рис. 1*д, е*);

4) пространственно-неоднородное кластерное частично синхронное состояние (рис. 1*ж, з*), в котором явным образом выделяются несколько (чаще всего статичных) участков с большей или меньшей степенью когерентности осцилляторов;

5) бризерный кластерный режим, когда сосуществуют несколько синхронных кластеров с различной средней частотой (рис. 1*и, к*);

6) режим перемежаемости, когда на пространственно-временной диаграмме интервалы с нерегулярной динамикой усредненных полей сменяются продолжительными участками с их регулярным поведением (что можно трактовать как области кластерной синхронизации) (рис. 1*л, м*);

7) режим турбулентности со сложным нерегулярным поведением мезоскопических характеристик системы, когда не удается выделить протяженные временные интервалы, в течение которых наблюдается квазистатическая структура пространственных областей с различной степенью когерентности (рис. 1*н, о*).

Отметим, что второй и третий виды состояний в пределе бесконечно малого разброса собственных частот ( $\gamma \rightarrow 0$ ) трансформируются в полностью синхронные, а образования, описанные в четвертом и пятом пунктах, для идентичных частиц превращаются в стационарные и бризерные химеры [26, 31–34]. Подчеркнем также то, что рис. 1 не полностью отражает все особенности последних двух из перечисленных режимов. Однако несложно заметить, что для таких состояний ансамбля с конечным количеством элементов  $N$  уровень фазовой когерентности меняется со временем в окрестности каждой пространственной точки, а в распределении средних частот не выделяются синхронные кластеры, состоящие из макроскопического числа осцилляторов.

Ниже, для того чтобы понять и объяснить специфику и условия установления каждого из режимов, наблюдаемых при прямом моделировании системы (1)–(4), будем придерживаться следующей стратегии. В первую очередь попытаемся найти в термодинамическом пределе соответствующие решения уравнения Отта – Антонсена (12), (15) с граничными условиями (16) и проанализировать их устойчивость, а затем проведем проверку полученных аналитических результатов численно в рамках исходной модели (1)–(4).

### 3. СОСТОЯНИЯ С РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО АНСАМБЛЮ СТЕПЕНЬЮ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ СОСЕДНИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

#### 3.1. Однородные состояния

Начнем наш анализ с рассмотрения наиболее простого класса решений самосогласованной системы уравнений (12), (15) с граничными условиями (16). Речь идет о стационарных однородных решениях, для которых модуль локального комплексного параметра порядка  $Z(x, t)$  представляет собой постоянную величину, а фаза растет линейно со временем и не зависит от пространственной координаты  $x$ . При этом в исходной модели (1)–(4) наблюдается в среднем равномерное вращение значительной группы осцилляторов, а степень когерентности элементов в каждой точке среды одинакова. В данном случае функции  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  будем искать в виде

$$Z(x, t) = z_0 e^{i\Omega t}, \quad H(x, t) = h_0 e^{i\Omega t}, \quad (17)$$

где с помощью  $z_0$  и  $h_0$  обозначены неизменные (согласно нашему предположению) амплитуды усредненных полей,  $\Omega$  (здесь и в других ситуациях далее) играет роль параметра, который задает их общую несущую частоту. После подстановки (17) в соотношения (12) и (15) получим следующую связь между  $z_0$ ,  $h_0$  и  $\Omega$ :

$$2z_0(i\Omega + \gamma) = z_0(h_0 - h_0^* z_0^2), \quad h_0 = z_0 e^{-i\alpha}. \quad (18)$$

В первую очередь стоит отметить, что если  $z_0 = h_0 = z_{as} = 0$ , то очевидно, что алгебраические равенства (18) выполняются при любых  $\alpha$  и  $\gamma$  и независимо от длины среды  $L$ . Кроме того, величина  $\Omega$  остается неопределенной, т. е. существует некий произвол в ее выборе (в том числе  $\Omega$  можно положить равной нулю). Такое тривиальное решение уравнений Отта – Антонсена (12), (15) отвечает полностью асинхронному поведению элементов в обсуждаемом ансамбле, когда фазы осцилляторов распределены равномерно в интервале от  $-\pi$  до  $\pi$  в каждый момент времени.

Однако нас прежде всего интересуют установленные режимы, для которых мезоскопические характеристики распределенной популяции имеют конечные значения, что указывает на присутствие корреляций в движении соседних элементов. Из соотношений (18) непосредственно следует, что подобные частично синхронные состояния можно найти в рамках рассматриваемого здесь класса стационарных однородных решений. Существуют данные коллективные моды, когда управляющие параметры  $\alpha$

и  $\gamma$  удовлетворяют условию  $2\gamma < \cos \alpha$  (так как  $\gamma$  является полушириной распределения собственных частот, то  $\gamma \geq 0$ ). В этом случае легко убедиться в том, что равенствам (18) можно удовлетворить, если

$$\begin{aligned} |z_0|^2 = r_{hps}^2 &= 1 - 2\gamma / \cos \alpha, \\ \Omega_{hps} &= \gamma \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

Подчеркнем, что для (19) очевидным образом выполняется требование  $|z_0| \leq 1$ , которое вытекает из определения локального параметра порядка. Отметим также, что согласно выражениям (19) длина  $L$  системы не оказывает влияния на само наличие однородных частично когерентных режимов. Несмотря на то, что результаты численного моделирования во многом согласуются со сделанными в ходе проведенного выше анализа выводами (в частности, уровень синхронизации, вычисленный по данным расчетов в рамках модели (1)–(4), с достаточно хорошей степенью точности совпадает с оценкой (19)) для целого ряда ситуаций, когда, например, величина фазовой расстройки  $\alpha$  близка к  $\pi/2$  ( $\alpha \lesssim \pi/2$ ), а  $\gamma$  чуть меньше  $\cos \alpha/2$  ( $\gamma \lesssim \cos \alpha/2$ ), однородные частично синхронные состояния перестают наблюдаться, начиная с некоторого значения  $L$ . Ниже будет представлено объяснение и сформулированы причины такого поведения исходной системы (1)–(4) на базе линейного анализа устойчивости стационарных решений (19) уравнений Отта – Антонсена (12), (15). Но перед этим рассмотрим еще один класс режимов, для которых уровень когерентности осцилляторов оказывается одинаковым вдоль всей среды.

#### 3.2. Градиентные состояния

В случае идентичных осцилляторов, когда  $\gamma = 0$ , обсуждаемые в предыдущем разделе однородные частично когерентные состояния переходят в полностью синхронные, для которых  $|Z(x, t)| = 1$  при каждом  $x$  в любой момент времени  $t$ , что непосредственно видно из соотношений (19) в пределе  $\gamma \rightarrow 0$ . Однако для распределенного в пространстве ансамбля, состоящего из нелокально взаимодействующих частиц с одинаковыми индивидуальными характеристиками, есть еще один режим с  $|Z(x, t)| = 1$  всюду. Отличительной чертой данного режима является наличие постоянной разности фаз при переходе от точки к точке (для произвольно выбранного  $n$  выполняется равенство  $\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t) = \Delta\varphi = \text{const} \neq 0$ ), так что полный набег фазы при прохождении вдоль всей среды отличен от нуля. Подобное состояние в англоязычной литературе называют «splay state» [40, 44, 45]. Вполне естественно



ожидать присутствия их аналогов при  $\gamma \neq 0$  для исследуемой нами модели (1)–(4). Случайный разброс собственных частот осцилляторов, конечно, должен привести к тому, что распределение фаз тоже станет нерегулярным. Однако, несмотря на видимый беспорядок, степень которого зависит от  $\gamma$ , поведение мезоскопических полей останется тем же, что и при  $\gamma = 0$ , и в среднем общие тенденции (прежде всего наклон) в профиле  $\varphi(x, t)$  (или  $\varphi_n(t)$ ) сохраняются. Поэтому такие состояния далее будем называть градиентными. Отметим, что ранее уже предпринимались попытки их изучения, но для ядер  $G(x)$  другого вида (см., например, [40, 41, 44, 45]).

Учитывая то, что для градиентных режимов, так же как и для рассмотренных выше однородных состояний, характерно постоянное значение модуля локального параметра порядка  $Z(x, t)$  по всей длине среды, будем искать поля  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  в схожем с (17) виде

$$Z(x, t) = z_0 e^{i\Omega t - iQx}, \quad H(x, t) = h_0 e^{i\Omega t - iQx} \quad (20)$$

с тем лишь отличием, что в (20) в показателе экспоненты появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное пространственной координате  $x$  и ответственное за общий наклон фазового фронта функций  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$ . Коэффициент  $Q$  такой линейной зависимости в силу периодических граничных условий должен быть определен как  $Q = 2\pi q/L$ , где целое (в интересующей нас здесь ситуации отличное от нуля) число  $q$  ( $q = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) указывает на количество оборотов на  $2\pi$ , которое совершит усредненная фаза при полном обходе системы. Подставив (20) в уравнения Отта – Антонсена (12), (15), получим два алгебраических равенства:

$$2(i\Omega + \gamma)z_0 = h_0 - h_0^* z_0^2, \quad (1 + Q^2)h_0 = z_0 e^{-i\alpha}, \quad (21)$$

для которых легко находится нетривиальное решение

$$|z_0|^2 = r_{gps}^2 = 1 - \frac{2\gamma(1 + Q^2)}{\cos \alpha}, \quad (22)$$

$$\Omega_{gps} = \gamma \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{1 + Q^2},$$

отвечающее градиентным состояниям. Непосредственно из выражений (22) следует, что для наличия такого рода режимов необходимо, чтобы  $\cos \alpha > 2\gamma$ . Кроме того, из требования  $r_{gps}^2 > 0$  вытекает условие для протяженности  $L$  распределенной популяции фазовых осцилляторов. Согласно этому условию градиентные состояния с числом оборотов  $q$  существуют, только когда размер  $L$  замкнутого в

кольцо ансамбля превышает критическое значение  $L_{gps}(q)$ , т. е.

$$L > L_{gps}(q) = 2\pi q \sqrt{2\gamma / (\cos \alpha - 2\gamma)}. \quad (23)$$

Заметим, что если формально в (22) положить  $q$  равным нулю, то выражения (22) совпадут с соотношениями (19). Данное обстоятельство лишней раз подтверждает взаимосвязь частично синхронных однородных и градиентных состояний. Однако их все-таки стоит выделять в два режима различных классов. В частности, в пользу подобной точки зрения говорит то, что такая важная в теории синхронизации характеристика, как глобальный параметр порядка

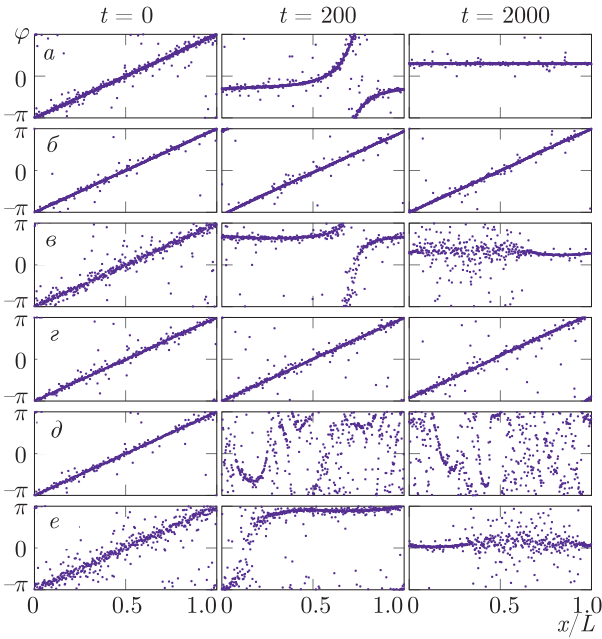
$$R(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n} \right|, \quad (24)$$

который в пределе  $N \rightarrow \infty$  можно рассчитывать по формуле

$$R(t) = \left| \frac{1}{L} \int_0^L Z(\tilde{x}, t) d\tilde{x} \right|, \quad (25)$$

для однородных частично синхронных состояний принимает конечные значения, а для градиентных режимов всегда равен нулю, в чем несложно убедиться, воспользовавшись (20). Подчеркнем также еще один момент, что для фиксированных  $\alpha$  и  $\gamma$  в первом случае степень локальной когерентности всегда выше по сравнению со второй.

Численные расчеты, выполненные в рамках исходной модели (1)–(4), при определенном выборе пары значений  $\alpha$  и  $\gamma$  демонстрируют хорошее согласие с рассмотренным выше описанием. Во-первых, выражается это в том, что частично синхронные градиентные состояния наблюдаются в течение длительных промежутков времени и остаются невосприимчивыми по отношению к малым возмущениям, т. е. представляют собой возможные стабильные варианты вращения фазовых осцилляторов (см. рис. 1*д* и рис. 2). Во-вторых, степень локальной когерентности, о которой можно судить по абсолютной величине комплексного параметра порядка, вычисленного с помощью процедуры мезоскопического усреднения результатов прямого моделирования, достаточно адекватно воспроизводится формулой (22). Кроме того, точность оценки (22) становится выше с ростом числа  $N$  элементов в системе. Однако в численных расчетах не при всех  $L > L_{gps}(q)$  удается реализовать градиентные режимы. Так, например, на рис. 2*а* и 2*б* показаны две ситуации, которые отвечают одному и тому же выбору  $\alpha$  и  $\gamma$



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Эволюция градиентного частично синхронного режима (ГС). Результаты прямого численного моделирования системы (1)–(4) при  $\alpha = 1.457$ . Мгновенные снимки фаз  $\phi_n$  для областей, представленных на рис. 3. Область A: *a* — неустойчивое ГС, эволюционирующее к однородному режиму с  $|z| = r_{hps}$  при  $\gamma = 0.001$ ,  $L = 4$ , *б* — устойчивое ГС при  $\gamma = 0.001$ ,  $L = 14$ ; область B: *в* — неустойчивое ГС, эволюционирующее к неоднородному режиму при  $\gamma = 0.003$ ,  $L = 4$ , *г* — устойчивое ГС при  $\gamma = 0.003$ ,  $L = 12$ , *д* — неустойчивое ГС, эволюционирующее к неоднородному режиму при  $\gamma = 0.003$ ,  $L = 28$ ; область C: *е* — неустойчивое ГС, эволюционирующее к неоднородному режиму при  $\gamma = 0.005$ ,  $L = 4$

( $\alpha = 1.457$  и  $\gamma = 0.001$ ), но разным  $L > L_{gps} \approx 0.841$  ( $L = 4$  (рис. 2*a*) и  $L = 14$  (рис. 2*б*)). Видно, что при  $L = 4$  (рис. 2*a*) состояние с  $q = 1$  числом оборотов средней фазы на  $2\pi$  относительно быстро распадается и трансформируется в частично синхронный однородный режим. Когда же  $L = 14$  (рис. 2*б*) такого процесса не происходит, и характерные особенности пространственного распределения динамических переменных  $\varphi_n(t)$  не претерпевают существенных изменений на протяжении сколь угодно длительных временных отрезков. Похожий эффект, заключающийся в разрушении градиентного состояния, несмотря на то, что размер среды  $L$  удовлетворяет условию существования (23), присутствует для  $\alpha = 1.457$  и  $\gamma = 0.003$  (см. рис. 2*в,г,д*). Хотя стоит отметить, что здесь в отличие от случая  $\alpha = 1.457$  и  $\gamma = 0.001$  разрушение сформированного в соответствии с (20), (22) и (14) профиля фаз происходит как в сравнительно коротких ( $L = 4$ , рис. 2*е*), так и про-

тяженных популяциях ( $L = 28$ , рис. 2*д*), и лишь в некотором интервале длин  $L$  градиентные состояния оказываются устойчивыми. Для того чтобы объяснить теоретически наблюдаемые в численных расчетах особенности эволюции обсуждаемых режимов, требуется линейный анализ их устойчивости.

### 3.3. Устойчивость частично синхронных однородных и градиентных состояний

В данном разделе в термодинамическом пределе на базе редукции Отта – Антонсена проведем линейный анализ устойчивости рассмотренных выше режимов поведения системы нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов. Это позволит разрешить отмеченные ранее кажущиеся (но не существующие на самом деле) противоречия между развитым теоретическим описанием и проведенными численными расчетами. Указанный анализ выполним в рамках единого формализма, который является общим и может быть применен как для однородных, так и для градиентных состояний. Отметим, что для удобства и наглядности ниже будет использована эквивалентность уравнения (15) с периодическими граничными условиями (16) и оператора свертки с ядром (13).

Для того чтобы исследовать аналитически устойчивость обсуждаемых распределений осцилляторов во времени, представим комплексные поля  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z(x, t) &= \left( z_0 + \mathcal{Z}(x, t) \right) e^{i\Omega t - iQx}, \\ H(x, t) &= \left( h_0 + \mathcal{H}(x, t) \right) e^{i\Omega t - iQx}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь явным образом учтены ключевые особенности интересующих нас профилей фаз, которым при фиксированной длине среды  $L$  отвечают стационарные решения уравнений Отта – Антонсена (12), (15), характеризующиеся параметрами  $\Omega$  и  $Q$ . В выражениях (26) функции  $\mathcal{Z}(x, t)$  и  $\mathcal{H}(x, t)$  играют роль слабых (периодических по пространственной координате  $x$ ) возмущений к однородному состоянию при  $Q = 0$  или к градиентному решению с  $Q \neq 0$ . Подставив (26) в соотношения (12), (13) и линеаризовав их вблизи  $z_0$  и  $h_0$  с учетом малости  $\mathcal{Z}(x, t)$  и  $\mathcal{H}(x, t)$ , получим линейное интегро-дифференциальное уравнение с не зависящими от  $x$  и  $t$  коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t} = - \left( \gamma + i\Omega + \frac{e^{i\alpha} |z_0|^2}{1 + Q^2} \right) \mathcal{Z} + \frac{1}{2} (\mathcal{H} - |z_0|^2 \mathcal{H}^*), \quad (27)$$

$$\mathcal{H}(x, t) = e^{-i\alpha} \int_0^L G(x - \tilde{x}) e^{iQ(x - \tilde{x})} \mathcal{Z}(\tilde{x}, t) d\tilde{x}. \quad (28)$$

Далее, следуя одному из вариантов стандартной процедуры анализа на устойчивость пространственно-временных структур, будем искать  $\mathcal{Z}(x, t)$  как суперпозицию двух ортогональных компонент, записанных в факторизованной форме:

$$\mathcal{Z}(x, t) = \mathcal{A}(x)e^{\Lambda t} + \mathcal{B}^*(x)e^{\Lambda^* t}, \quad (29)$$

где комплексное число  $\Lambda$ , имеющее в общем случае как действительную, так и мнимую составляющие, полностью характеризует динамику каждого из слагаемых в сумме (29). В силу предположения о том, что рассматриваемая нами система замкнута в кольцо, т. е. на концах отрезка  $[0, L]$  выполняются периодические граничные условия, а также благодаря постоянству множителей во всех членах  $\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{H}$  в соотношении (29), в качестве  $\mathcal{A}(x)$  и  $\mathcal{B}(x)$  можно выбрать функции, пропорциональные  $e^{iKx}$ :

$$\mathcal{A}(x) = ae^{iKx}, \quad \mathcal{B}(x) = be^{iKx}, \quad (30)$$

где волновые числа  $K = 2\pi k/L$  с  $k = 0, 1, 2, \dots$  определяют пространственный период моды, который не превышает продольный размер  $L$  системы. Тогда после подстановки (29), (30) в (27), (28) останется рассчитать постоянные комплексные амплитуды  $a$  и  $b$ , а требование существования нетривиальных решений, для которых хотя бы одна из этих амплитуд отлична от нуля, позволит определить соответствующие величины  $\Lambda$ . В результате получим задачу на собственные векторы  $\xi = (a, b)^T$  и собственные значения  $\Lambda$   $2 \times 2$ -матрицы  $\hat{P}$ :

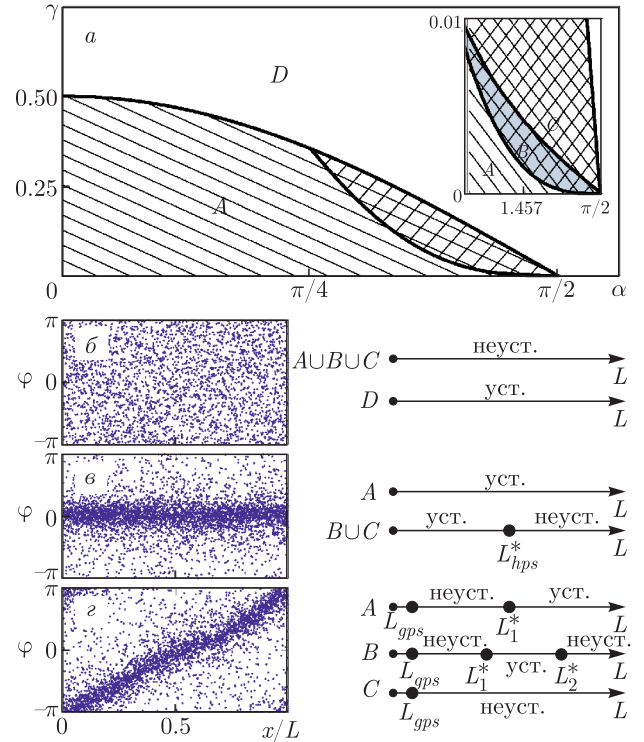
$$\Lambda \xi = \hat{P} \xi, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\gamma - i\Omega - \frac{e^{i\alpha}|z_0|^2}{1+Q^2} + \frac{e^{-i\alpha}}{2(1+(K-Q)^2)}, \\ p_{12} &= -\frac{e^{i\alpha}|z_0|^2}{2(1+(K+Q)^2)}, \\ p_{21} &= -\frac{e^{-i\alpha}|z_0|^2}{2(1+(K-Q)^2)}, \\ p_{22} &= -\gamma + i\Omega - \frac{e^{-i\alpha}|z_0|^2}{1+Q^2} + \frac{e^{i\alpha}}{2(1+(K+Q)^2)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (31) непосредственно вытекает, что для нахождения  $\Lambda$  требуется решить квадратное уравнение, пара корней которого записывается напрямую через след  $\text{tr} \hat{P}$  и детерминант  $\det \hat{P}$  только что введенной матрицы  $\hat{P}$ :

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \text{tr} \hat{P} \pm \sqrt{(\text{tr} \hat{P})^2 - 4 \det \hat{P}} \right). \quad (33)$$



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) а) Области (на плоскости от параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ ) существования и устойчивости режимов с равномерным распределением по ансамблю уровней синхронизации. Для таких режимов амплитуда локального параметра порядка  $Z(x, t)$  одинакова для любой точки среды в каждый момент времени. б) Асинхронное состояние существует при всех  $\alpha$  и  $\gamma$  вне зависимости от длины среды. Неустойчиво в областях A (часть плоскости  $\alpha, \gamma$  с одинарной штриховкой), B (затененная область с двойной штриховкой) и C (светлая область с двойной штриховкой) и устойчиво в области D (часть области  $\alpha, \gamma$  без штриховки). в) Однородное частично синхронное состояние существует и устойчиво при всех  $L$ , если пара величин  $\alpha$  и  $\gamma$  выбрана из области A. Если же точка  $\alpha, \gamma$  лежит в областях B или C, то существует критическое значение, начиная с которого данный режим становится неустойчивым. В области D такие состояния отсутствуют. г) Градиентное частично синхронное состояние существует только в областях A, B и C, когда  $L > L_{gps}$ . Этот режим устойчив в областях A и B, если  $L > L_1^*$  и  $L_1^* < L < L_2^*$ , соответственно. В области C градиентное состояние всюду неустойчиво

Исходя из последнего выражения, несложно сделать вывод об устойчивости режимов с однородным распределением модуля комплексного параметра порядка. Если действительная часть  $\Lambda_1$  или  $\Lambda_2$  оказывается положительной, то согласно (29) малые возмущения должны экспоненциально нарастать с течением времени.

Теперь на основе выработанного выше критерия определим характер поведения отклонений  $\mathcal{Z}(x, t)$  от  $z_0$ , отвечающих одному из трех рассмотренных ранее режимов, а именно, полностью асинхронному, частично синхронному однородному и градиентному состояниям. Резюмирующим отражением описанных выше результатов служит рис. 3.

Полностью асинхронный режим с  $|z_0| = z_{as}$  притягивает к себе близлежащие траектории системы, если  $\cos \alpha < 2\gamma$ , при любой длине среды  $L$ , так что в процессе долговременной эволюции реализуется ситуация, при которой отсутствуют какие-либо корреляции фаз отдельных элементов. В противном случае, когда  $\cos \alpha > 2\gamma$ , асинхронный режим оказывается неустойчивым (рис. 3а,б). К развитию данной неустойчивости приводят однородные по пространству линейные моды с  $K = 0$ . Отметим, что данный результат является универсальным для стандарт-

ных видов ядер, используемых для описания нелокального взаимодействия между элементами популяции, что полностью совпадает с выводом работы [41], где подробно обсуждалась динамика тривиального режима с  $|z_0| = z_{as} = 0$  для функции связи  $G(x)$  прямоугольной формы. Отметим также, что такого рода неустойчивость достаточно распространена в нелинейных распределенных моделях и носит имя Экхауса в честь автора монографии [49].

Для частично когерентных состояний с  $Q = 0$ ,  $|z_0| = r_{hps}$  и  $\Omega = \Omega_{hps}$  (см. формулу (19)), возникающих при тех же условиях, при которых асинхронный режим теряет свою устойчивость, аналогичным образом несложно изучить поведение малых возмущений  $\mathcal{Z}(x, t)$  в форме (29), (30). Воспользовавшись выражениями (19), (31), (32) и (33), после ряда алгебраических преобразований получим

$$\Lambda_{1,2} = \gamma - \cos \alpha \left( 1 - \frac{I(K)}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( I(K) \left( 1 - \frac{2\gamma}{\cos \alpha} \right) \right)^2 - (2\gamma \operatorname{tg} \alpha - I(K) \sin \alpha)^2}, \quad (34)$$

где  $I(K) = (1 + K^2)^{-1}$  представляет собой коэффициент, к умножению на который сводится оператор свертки в (28), если считать, что  $\mathcal{H}(x, t)$ , так же как и  $\mathcal{Z}(x, t)$  пропорционально  $e^{iKx}$ . Анализ выражений (34) показывает, что при  $\gamma < (\cos \alpha)^3$  однородный частично синхронный режим является устойчивым для любого значения  $L$ . В случае, когда  $\gamma > (\cos \alpha)^3$ , для подобного состояния, существующего лишь при  $\gamma < \cos \alpha/2$ , условие  $\operatorname{Re} \Lambda < 0$  оказывается выполненным, только если  $K = 2\pi m/L$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) больше некоторого критического значения  $K_{hps}^*(\alpha, \gamma)$ . Это означает, что имеется предельная длина  $L_{hps}^*(\alpha, \gamma)$ , при превышении которой соответствующие пространственно-однородные режимы поведения системы неустойчивы:

$$L_{hps}^* = 2\pi \sqrt{\frac{\cos^4 \alpha - 2\gamma \cos^3 \alpha + \gamma^2}{(\cos \alpha - 2\gamma)(\gamma - \cos^3 \alpha)}}. \quad (35)$$

Что касается градиентных состояний, каждое из которых определяется своим  $Q = 2\pi q/L$  ( $q = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и формулами (22) для  $|z_0| = r_{gps}$  и  $\Omega_{gps}$ , то исследование их устойчивости и соответствующие результаты выглядят несколько сложнее. Так, детальный анализ собственных значений  $\Lambda_{1,2}$  показывает, что в зависимости от значений параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  можно выделить различные ситуации, качественное отображение которых представлено на рис. 3г.

На рис. 3а для случая  $q = \pm 1$  указаны границы областей, отвечающих данным трем ситуациям. Если  $\alpha$  и  $\gamma$  выбирать из той части плоскости, которая имеет одинарную штриховку (область А), то существует критическая длина  $L_1^*$  такая, что при  $L < L_1^*$  градиентный режим неустойчив, а при  $L > L_1^*$ , наоборот, устойчив (рис. 2б). Это подтверждают и прямые численные расчеты в рамках модели (1)–(4) (см., например, рис. 2а,б). Для тонкого слоя В имеются два критических значения длины  $L_1^*$  и  $L_2^*$ . При этом состоянии с набегом фазы на  $2\pi$  устойчиво в интервале  $L_1^* < L < L_2^*$  (рис. 2г) и неустойчиво при  $L < L_1^*$  (рис. 2в),  $L > L_2^*$  (рис. 2д). В области С градиентный режим неустойчив для любого значения  $L$  (рис. 2е). Отметим, что здесь выписать явные выражения для  $L_1^*, L_2^*$  не удается и приходится их находить численно.

В заключение данного раздела подчеркнем, что найденные условия существования и устойчивости режимов с пространственно-однородной степенью синхронизации фазовых осцилляторов, а также наличие различных критических значений для длины среды теперь хорошо объясняют поведение системы (1)–(4), демонстрируемое при прямых численных расчетах (см. рис. 2). Однако в процессе долговременной эволюции также могут устанавливаться и менее тривиальные состояния, речь о которых пойдет в следующих разделах.

**4. СОСТОЯНИЯ СО СТАТИЧНЫМ  
ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫМ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СТЕПЕНИ ФАЗОВОЙ  
СИНХРОНИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ  
АНСАМБЛЯ**

**4.1. Стационарные решения уравнений  
Отта – Антонсена**

При подробном изучении сценариев долговременной эволюции модели (1)–(4) в зависимости от величины фазового сдвига  $\alpha$ , степени пространственного беспорядка  $\gamma$ , а также длины среды  $L$  с помощью прямого численного моделирования установлено, что особую роль играют кластерные частично синхронные режимы вращения (как предельные, так и транзитные), для которых явным образом выделяются несколько статичных или квазистатичных участков с различным уровнем когерентности осцилляторов. Примеры перехода рассматриваемой системы в подобные состояния представлены на рис. 2*в,е*, где показано, как разрушается градиентное распределение фаз с одинаковым значением модуля локального параметра порядка в интервале  $[0, L]$ , и устанавливается неизменная в течение всего дальнейшего времени расчётная картина, характерные особенности которой отражены на мгновенных снимках при  $t = 2000$ . На данных фрагментах видно, что имеются две области с большей и меньшей степенью скоррелированности движения соседних друг к другу элементов. Указанное обстоятельство даёт основание полагать, что профиль каждого из введенных ранее путем процедуры усреднения мезоскопических полей становится и затем остается пространственно-неоднородным. Такие долгоживущие режимы поведения распределенных популяций вызывают особый интерес прежде всего по двум причинам. Во-первых, в обсуждаемых нами ансамблях нелокально связанных фазовых осцилляторов эти нетривиальные режимы наблюдаются даже тогда, когда частично синхронное однородное состояние устойчиво. Во-вторых, для идентичных элементов (т. е. в пределе  $\gamma \rightarrow 0$ ) структурные образования, аналогичные по своему виду тем, что изображены на рис. 2*в,е*, а также на рис. 1*ж,и*, трансформируются в химеры (в классическом их понимании), отличительной чертой которых является присутствие наряду с участками с частично когерентным движением элементов макроскопических групп с полностью синхронным вращением [24–29]. Перечисленные факты позволяют сделать вывод об отношении состояний, которым посвящен данный раздел, к фундаментальному эффекту частичной потери симметрии [30].

С целью понять и детально описать в термодинамическом пределе ключевые особенности покоящихся пространственных структур с областями с повышенной и пониженной степенью локальной фазовой когерентности поведения элементов замкнутой в кольцо среды построим и проанализируем стационарные (по модулю) решения редуцированной задачи, полученной с помощью подхода Отта – Антонсена и сформулированной нами в форме совокупности двух уравнений в частных производных (12), (15) с граничными условиями (16). Для этого представим комплексные поля  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  в виде

$$Z(x, t) = z(x)e^{i\Omega t}, \quad H(x, t) = h(x)e^{i\Omega t}, \quad (36)$$

где  $\Omega$  играет роль неизвестного параметра, который требуется определить. После подстановки выражений (36) для мезоскопических величин  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  в соотношения (12) и (15) приходим к следующей системе, состоящей из алгебраического равенства и обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, в которые входят зависящие только от переменной  $x$  комплексные функции  $z(x)$  и  $h(x)$ :

$$2(-i\Omega - \gamma)z + h - h^*z^2 = 0, \quad (37a)$$

$$h'' - h + ze^{-i\alpha} = 0. \quad (37b)$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по координате  $x$ . В ситуации, когда  $\gamma \neq 0$ , т. е. осцилляторы нетождественны друг другу и различаются по своим индивидуальным характеристикам, при  $N \rightarrow \infty$  в интервале  $[0, L]$  не найдется ни одной точки, в малой окрестности которой может быть достигнута полная синхронизация по фазе, а значит, абсолютное значение локального параметра порядка всегда остается меньше единицы, т. е.  $|z(x)| < 1$ . Тогда из (37a) несложно выразить  $h(x)$  через  $z(x)$ :

$$h = 2 \left( \frac{i\Omega}{1 + |z|^2} + \frac{\gamma}{1 - |z|^2} \right) z. \quad (38)$$

Затем перепишем  $z(x)$  как

$$z(x) = r(x)e^{i\theta(x)}, \quad (39)$$

введя две действительные функции  $r(x)$  и  $\theta(x)$ , которые естественно называть соответственно амплитудой и фазой для  $z(x)$  с тем лишь отличием от классических определений, что для удобства будем считать  $r(x)$  знакопеременной величиной, предполагая, в свою очередь,  $\theta(x)$  непрерывной в том числе в тех точках, где  $r(x)$  обращается в нуль. При этом выражение (38) для  $h(x)$  примет вид

$$h = 2re^{i\theta} \left( \frac{i\Omega}{1 + r^2} + \frac{\gamma}{1 - r^2} \right). \quad (40)$$

Подставив (40) в (37b) и приравняв по отдельности нулю действительную и мнимую части получившегося соотношения, перейдем к следующей паре уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(1+r^2)}{(1-r^2)^2}r'' - \frac{\Omega r}{1+r^2}\theta'' - \frac{2\Omega(1-r^2)}{(1+r^2)^2}r'\theta' + \\ + \frac{2\gamma r(r^2+3)}{(1-r^2)^3}(r')^2 - \frac{\gamma r}{1-r^2}(\theta')^2 = \\ = \frac{\gamma r}{1-r^2} - \frac{r}{2}\cos\alpha, \end{aligned} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(1-r^2)}{(1+r^2)^2}r'' + \frac{\gamma r}{1-r^2}\theta'' + \frac{2\gamma(1+r^2)}{(1-r^2)^2}r'\theta' + \\ + \frac{2\Omega r(r^2-3)}{(1+r^2)^3}(r')^2 - \frac{\Omega r}{1+r^2}(\theta')^2 = \\ = \frac{\Omega r}{1+r^2} + \frac{r}{2}\sin\alpha, \end{aligned} \quad (41b)$$

которую путем введения новой переменной  $u = r'$  и дополнительной замены  $v = r^2\theta'$ , после ряда преобразований можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка для  $r(x)$ ,  $u(x)$  и  $v(x)$  со свободным параметром  $\Omega$  при заданных значениях  $\alpha$ ,  $\gamma$ :

$$r' = u, \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} u' = \frac{1}{2(\gamma^2(1+r^2)^4 + \Omega^2(1-r^2)^4)(1-r^4)r^3} \times \\ \times \left( -4r^4u^2(\gamma^2(r^2+3)(1+r^2)^4 + \Omega^2(r^2-3)(1-r^2)^4) - \right. \\ \left. - 2(8\gamma\Omega v u r^3 + \gamma^2(v^2 + r^4)(1+r^2)^2 + \right. \\ \left. + \Omega^2 r^3(1-r^2))(1-r^4)^2 + r^4(-\gamma(1+r^2)\cos\alpha + \right. \\ \left. + \Omega(1-r^2)\sin\alpha)(1-r^4)^3 \right), \end{aligned} \quad (42b)$$

$$\begin{aligned} v' = \frac{1}{2(\gamma^2(1+r^2)^4 + \Omega^2(1-r^2)^4)(1-r^4)} \times \\ \times \left( 8v r u^2(\Omega^2(1-r^2)^5 - 2\gamma^2(1+r^2)^5) + \right. \\ \left. + 8\gamma\Omega(3r^2u^2 + v^2 + r^4)(1-r^4)^2 + \right. \\ \left. + r^2(\Omega(1-r^2)^3\cos\alpha + \gamma(1+r^2)^3\sin\alpha) \times \right. \\ \left. \times (1-r^4)^2 \right). \end{aligned} \quad (42c)$$

Отметим, что понижение размерности (с четвертой у совокупности соотношений (41) до третьей у системы (42)) удастся осуществить за счет того, что

функция  $\theta(x)$  определена с точностью до постоянного слагаемого, т. е. структура комплексных полей  $z(x)$  и  $h(x)$  (а с ними  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$ ) инвариантна относительно совместного сдвига фаз на константу. По этой же причине без ограничения общности можно положить  $\theta(0) = 0$ . Подчеркнем также, что в силу граничных условий (16) на концах интервала  $[0, L)$  нас будут интересовать только периодические решения уравнений (42) с периодом, совпадающим с размером обсуждаемой среды  $L$ . Такого рода решения обладают важной особенностью — трансляционной симметрией, что позволяет удобным способом (благодаря некоторому произволу) выбирать положение начала отсчета по пространственной координате  $x$ . Кроме того, несложно заметить, что при замене  $x \rightarrow -x$ ,  $r \rightarrow r$ ,  $u \rightarrow -u$ ,  $v \rightarrow -v$  система (42) останется неизменной. Другими словами, для соотношений (42) проходит преобразование инволюции. Перечисленные свойства как зависимости  $r(x)$ ,  $u(x)$  и  $v(x)$ , так и самих уравнений (42) дают основание ограничиться поиском лишь симметричных по отношению к середине интервала  $[0, L)$  периодических решений  $r(x)$ ,  $u(x)$  и  $v(x)$ , удовлетворяющих следующим условиям:

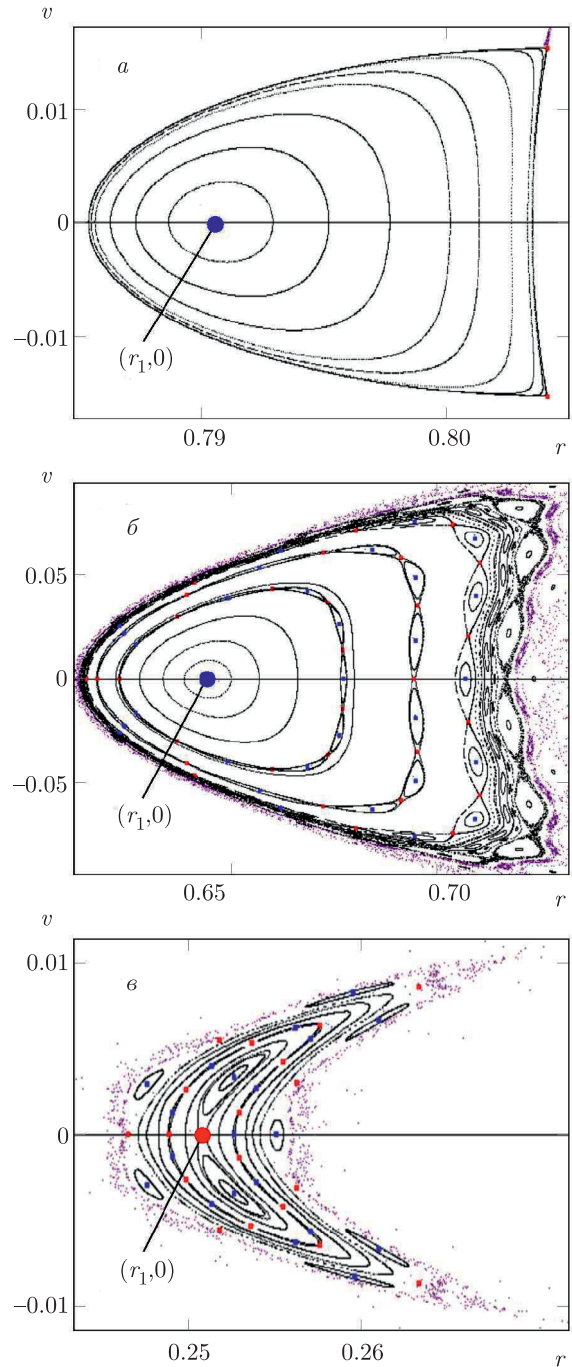
$$\begin{aligned} r(0) = r(L), \quad u(0) = u(L) = 0, \\ v(0) = v(L) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Данным решениям должны быть поставлены в соответствие пространственные профили  $z(x)$  и  $h(x)$ , которые вместе с соответствующим значением параметра  $\Omega$  определяют вид стационарных структур. Подчеркнем также то, что в пользу выбора выделенного класса функций  $r(x)$ ,  $u(x)$  и  $v(x)$  как наиболее перспективных в плане описания долгоживущих состояний со статичным неоднородным распределением степени фазовой синхронизации элементов ансамбля говорят и прямые численные расчеты в рамках исходной модели (1)–(4) (см., например, рис. 1ж и фрагменты рис. 2в,е при  $t = 2000$ ). Стоит однако учитывать, что не все решения системы (42), для которых выполнены условия (43), являются физически реализуемыми. Они имеют смысл только тогда, когда  $|r(x)| = |z(x)|$  при всех  $x$  на отрезке  $[0, L)$  не превышает единицы. Данное требование вытекает непосредственно из определения локального комплексного параметра порядка  $Z(x, t)$ . Таким образом, поставленная нами в начале раздела задача о нахождении стационарных решений (36) системы (12), (15) с граничными условиями (16) может быть сведена к нахождению периодических траекторий системы (42), для которых выполняются условия (43).

### 4.2. Процедура поиска статичных неоднородных состояний и их структурный анализ

Перейдем теперь к детальному обсуждению ключевых особенностей стационарных режимов с неоднородным распределением по пространству локального параметра порядка  $Z(x, t)$ . В данном разделе прежде всего приведем процедуру поиска всех существующих периодических решений вспомогательной системы (42), определяющих вид профилей комплексных полей  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  с равномерно вращающейся фазой. Затем выделим основные отличительные черты семейства подобных решений и соотнесем их с той картиной разброса динамических переменных  $\varphi_n(t)$ , которая должна, соответственно, реализовываться в исходной модели (1)–(4) ансамбля нелокально связанных неидентичных осцилляторных элементов. Далее такого рода состояния рассматриваемых популяций будут проинтерпретированы как с позиции мезоскопических (усредненных) характеристик, так и с точки зрения свойств движения отдельных осцилляторов.

Начнем с описания разработанного нами метода поиска неоднородных стационарных (по модулю) состояний вида (36), базирующегося на идее выделения при фиксированных значениях  $\Omega$  замкнутых (и тем самым удовлетворяющих условиям (43)) траекторий в фазовом пространстве  $r, u, v$  системы обыкновенных дифференциальных уравнений (42) третьего порядка. Для нахождения указанных траекторий использовалось сечение Пуанкаре  $u = 0, u' > 0$ , которое строилось путем численного интегрирования системы (42), стартуя при этом с множества  $r(0) = r_0, u(0) = 0, v(0) = 0$ , где  $r_0$  принимает свои значения из интервала  $(0, 1)$ , и детектируя каждое событие с  $u = 0, u' > 0$ , а далее нанося его для визуализации маркером на плоскость  $r, v$  (см. рис. 4). Наш анализ (прежде всего использующий представленные в разд. 4.1 факты) показывает, что неподвижным точкам периода  $p$  построенного таким образом отображения отвечают искомые периодические решения системы (42) и, следовательно, симметричные пространственно-неоднородные структуры с  $p$  максимумами модуля локального параметра порядка  $z(x, t)$ . Длина  $L$  каждой подобной найденной траектории совпадает с размером среды, в которой может наблюдаться данное состояние. В итоге, при заданном  $\Omega$  находим профиль  $z(x)$ , который в точности повторяет себя через период  $L$ , определяемый выбором  $\Omega$ . При необходимости по формуле (38) легко определяется и зависимость  $h(x)$ . Но



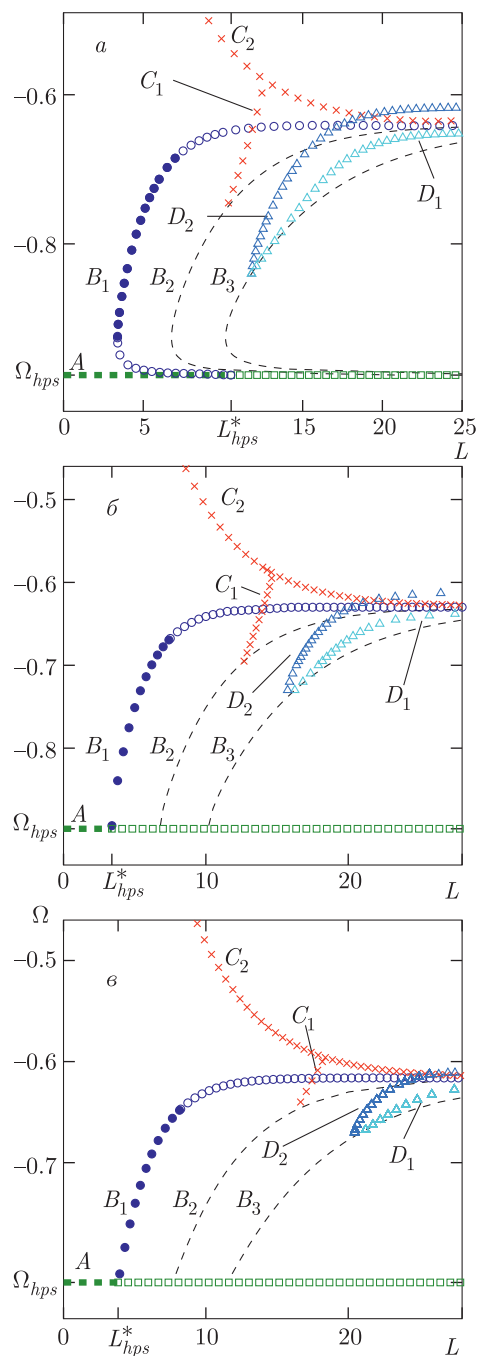
**Рис. 4.** (В цвете онлайн) Отображение Пуанкаре для системы (42) при  $\alpha = 1.457, \gamma = 0.020$ . Условия для сечения:  $u = 0, u' > 0$ . Эллиптические (синие маркеры) и гиперболические седловые (красные маркеры) неподвижные точки: **a** —  $\Omega = -0.8185$ , **б** —  $\Omega = -0.78$ , **в** —  $\Omega = -0.647$ . Неподвижная точка  $(r_1, 0)$  соответствует неоднородному решению (36) с одним максимумом  $|z(x)|$ . Черные (фиолетовые) точки обозначают траектории, не покидающие (покидающие) области на плоскости  $(r, v)$ , отображаемые на фрагментах **a–в**

более важным является то, что по локальному параметру порядка  $z(x)$  с учетом (36) всегда удается восстановить распределение исходной динамической переменной  $\varphi(x, t)$  или  $\varphi_n(t)$ . Таким образом, получается обнаружить разнообразные семейства статичных неоднородных состояний среды нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов. Каждое такое семейство характеризуется индивидуальной зависимостью  $\Omega(L)$  (см. рис. 5), которая рассчитывается в неявном виде с помощью описанной выше процедуры.

Перед тем как перейти к обсуждению конкретных примеров, отметим, что похожий подход уже успешно применялся в наших предыдущих работах [31–33], где с помощью него изучались химеры в средах, состоящих из одинаковых частиц (т. е.  $\gamma = 0$ ). Однако в изучаемом в статьях [31–33] случае имеется ряд сложностей, вызванных наличием участков с полностью синхронными элементами, затрудняющих использование численных процедур, которые позволяют находить воспроизводящие себя на конечном отрезке кривые. Когда же  $\gamma > 0$ , удается избежать проблем, связанных с возможностью тождественного совпадения фаз осцилляторов в окрестности некоторой точки  $x$ , так как вырожденная ситуация  $|z(x)| = 1$  становится недостижимой. Требование  $|z(x)| < 1$  существенно сужает множество начальных условий, с которых необходимо стартовать для построения сечения Пуанкаре, что упрощает процедуру поиска неподвижных точек отображения и гарантирует отсутствие потерянных решений. Однако при  $\gamma = 0$  нельзя дать аналогичных гарантий, потому что все преобразования и вычисления проводятся с полем  $h(x)$ , для амплитуды которого отсутствует ограничение сверху. С другой стороны, стоит подчеркнуть, что при стремлении к нулю величины  $\gamma$ , ответственной за степень пространственного беспорядка, стационарные неоднородные состояния вида (36), полученные для задачи (12), (15), способны дать дополнительную информацию о химерных решениях, образующихся при  $\gamma = 0$ , и их областях существования.

В качестве примера исследуем неподвижные точки отображения Пуанкаре для фиксированных значений  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.02$  и различных  $\Omega$  (см. рис. 4). Для данных значений параметров в системе существует однородное частично синхронное состояние с  $\Omega = \Omega_{hps} \approx -0.81854$  и  $r = r_{hps} = 0.80482$ .

На сечении Пуанкаре  $(r, v)$ , которое определяется условиями  $u = 0, u' > 0$ , ему соответствует неподвижная точка с координатами  $(r_{hps}, 0)$ . При увеличении параметра  $\Omega$  данная неподвижная точ-



**Рис. 5.** (В цвете онлайн) Бифуркационная диаграмма стационарных решений (36) уравнений Отта – Антонсена (12), (13) при  $\alpha = 1.457$ : а —  $\gamma = 0.002$ , б —  $\gamma = 0.011$ , в —  $\gamma = 0.020$ . Пунктир (A) — однородное частично синхронное состояние. Кружки ( $B_1$ ) — неоднородное частично синхронное состояние с одним максимумом  $|z(x)|$ , крестики ( $C_1, C_2$ ) — с двумя максимумами, треугольники ( $D_1, D_2$ ) — с тремя максимумами  $|z(x)|$ . Закрашенные (пустые) символы — устойчивые (неустойчивые) режимы. Линии  $B_2$  и  $B_3$  — неоднородное частично-синхронное состояние с одним максимумом  $|z(x)|$  соответственно с удвоенной и утроенной длиной среды



ка претерпевает бифуркацию, в результате которой возникают три неподвижные точки: эллиптическая  $(r_1, 0)$  периода  $p = 1$  и две седловые точки  $(r_2, v_2)$  и  $(r_2, -v_2)$ . При этом замкнутым траекториям отвечают квазипериодические решения системы (42) (рис. 4а). Неподвижная точка  $(r_1, 0)$  соответствует неоднородному частично синхронному состоянию  $z = z_1(x)$  с одним максимумом модуля параметра порядка  $|z(x)|$ .

При дальнейшем непрерывном изменении значения  $\Omega$  на инвариантных траекториях в результате резонансов возникают периодические точки различных периодов (рис. 4б). Причем в случае перекрытия резонансов образуются области хаотического блуждания [50]. На отображении Пуанкаре рядом с сепаратрисами седловых точек в такой ситуации можно наблюдать так называемые стохастические слои (рис. 4б, в). Далее при  $\Omega \approx 0.648$  из точки  $(r_1, 0)$  рождаются две эллиптические точки, а она при этом становится седловой (рис. 4в). Обратим внимание, что существует множество неподвижных точек отображения Пуанкаре с координатами  $(r, 0)$ , которым соответствуют различные стационарные решения системы (12) и (15).

При дальнейшем увеличении параметра  $\Omega$  все траектории (кроме устойчивых сепаратрис) вблизи седловой точки  $(r_1, 0)$  быстро покидают ее окрестность. Поиск неподвижной точки с помощью описанного метода усложняется в силу того, что ее максимальный по модулю мультипликатор значительно превышает единицу. Аналогичное поведение наблюдается в окрестности остальных седловых точек большего периода, которые расположены на оси  $v = 0$ . Такого рода особенность связана с существенным возрастанием длины возвратных траекторий непосредственно в трехмерном фазовом пространстве  $r, u, v$ .

#### 4.3. Линейный анализ устойчивости стационарных неоднородных состояний

При изучении (как однородных, так и градиентных) режимов с равномерно распределенной степенью синхронизации вдоль всей популяции (см. разд. 3) нами было установлено, что информации только о существовании состояний оказывается недостаточно, чтобы предсказывать возможные сценарии долговременной эволюции ансамблей нелокально связанных фазовых осцилляторов. Для этого еще дополнительно требуется исследовать соответствующие пространственные структуры по отно-

шению к малым возмущениям на устойчивость во времени.

Далее, следуя общей логике, которой, в частности, следовало изложение предыдущего раздела, проведем линейный анализ свойств устойчивости статичных конфигураций с неоднородным профилем локального параметра порядка, что позволит достичь более глубокого понимания динамики обсуждаемой среды и кооперативных процессов в ней. С данной целью линеаризуем записанное в своей исходной форме интегро-дифференциальное уравнение Отта – Антонсена (12), (13) вблизи одного из его стационарных решений (36), характеризующихся параметром  $\Omega$  и длиной  $L$ . Согласно стандартной процедуре, представим  $Z(x, t)$  в виде

$$Z(x, t) = \left( z(x) + \mathcal{Z}(x, t) \right) e^{i\Omega t}, \quad (44)$$

где с помощью  $\mathcal{Z}(x, t)$  обозначены присутствующие в комплексном поле  $Z(x, t)$  периодические по  $x$  слабые отклонения от профиля  $z(x)$  [26, 31, 34]. Подставив (44) в (12), выполнив ряд преобразований с учетом (37) и сохранив лишь слагаемые первого порядка малости по  $\mathcal{Z}(x, t)$ , получим

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t} = -(\gamma + i\Omega + h^* z) \mathcal{Z} + \frac{1}{2} (\mathcal{H} - \mathcal{H}^* z^2). \quad (45)$$

Здесь  $\mathcal{H}(x, t)$  и  $\mathcal{Z}(x, t)$  связаны посредством оператора свертки с ядром (4), т. е. аналогично тому, как  $H(x, t)$  выражается через  $Z(x, t)$  по формуле (13). Выделим действительную и мнимую компоненты у комплексной функции  $\mathcal{Z}(x, t) = \zeta_1(x, t) + i\zeta_2(x, t)$  и перепишем равенство (45) как систему уравнений относительно вещественного вектора  $\zeta(x, t) = (\zeta_1(x, t), \zeta_2(x, t))^T$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, t) = [\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}] \zeta(x, t), \quad (46)$$

где  $\hat{\mathbf{M}}(x)$  — мультипликативный оператор:

$$\hat{\mathbf{M}}\zeta(x, t) = \begin{pmatrix} \mu_1(x) & -\mu_2(x) \\ \mu_2(x) & \mu_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1(x, t) \\ \zeta_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

а  $\hat{\mathbf{K}}(x)$  — интегральный оператор:

$$\hat{\mathbf{K}}\zeta(x, t) = \begin{pmatrix} \varkappa_{11}(x) & \varkappa_{12}(x) \\ \varkappa_{21}(x) & \varkappa_{22}(x) \end{pmatrix} \times \int_0^L G(x - \tilde{x}) \begin{pmatrix} \zeta_1(\tilde{x}, t) \\ \zeta_2(\tilde{x}, t) \end{pmatrix} d\tilde{x}. \quad (48)$$

Здесь для удобства и краткости записи приведенных выше представлений  $\hat{\mathbf{M}}(x)$  и  $\hat{\mathbf{K}}(x)$  были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mu_1(x) &= -\operatorname{Re}(z(x)h^*(x)) - \gamma, \\ \mu_2(x) &= -\operatorname{Im}(z(x)h^*(x)) - \Omega, \\ \varkappa_{11}(x) &= (\cos \alpha - \operatorname{Re}(e^{i\alpha}z^2(x)))/2, \\ \varkappa_{12}(x) &= (\sin \alpha - \operatorname{Im}(e^{i\alpha}z^2(x)))/2, \\ \varkappa_{21}(x) &= \varkappa_{12} - \sin \alpha, \quad \varkappa_{22}(x) = \cos \alpha - \varkappa_{11}.\end{aligned}\quad (49)$$

Из (46) непосредственно вытекает, что характер поведения малых возмущений  $\mathcal{Z}(x, t)$  определяется собственными числами  $\lambda$  суммы  $\hat{\mathbf{M}}(x) + \hat{\mathbf{K}}(x)$  не зависящих от времени операторов  $\hat{\mathbf{M}}(x)$  и  $\hat{\mathbf{K}}(x)$ . В полном спектре обычно в функциональном анализе выделяют непрерывную составляющую  $\lambda_e$ , содержащую в себе существенную часть всех значений  $\lambda$ , и дискретную составляющую  $\lambda_p$ , к которой принадлежат обособленные точки спектра  $\lambda$ . Стоит отметить, что оператор  $\hat{\mathbf{K}}(x)$  является компактным для любого кусочно-гладкого ядра  $G(x)$  [34]. В силу данного свойства существенная часть  $\lambda_e$  интересующего нас набора собственных чисел  $\lambda$  комбинации  $\hat{\mathbf{M}}(x) + \hat{\mathbf{K}}(x)$  совпадает с соответствующей входящей в нее компонентой первого слагаемого  $\hat{\mathbf{M}}(x)$ . Таким образом, получаем, что  $\lambda_e = \mu_1(x) \pm i\mu_2(x)$ . Несложно проверить, что  $\lambda_e$  удовлетворяют условию  $\operatorname{Re}(\lambda_e) < 0$ . Следовательно, за линейную устойчивость пространственного профиля  $z(x)$  (и связанного с ним распределения  $h(x)$ ) отвечают только значения из точечной части  $\lambda_p$  спектра  $\lambda$ .

Полученные с использованием описанных выше методов результаты поиска стационарных неоднородных решений уравнений Отта - Антонсена и анализа устойчивости соответствующих структур объединены и показаны на рис. 5. Здесь представлены зависимости  $\Omega(L)$  для однородных частично синхронных (ветвь  $A$ ) и неоднородных с одним (ветвь  $B_1$ ), двумя (ветви  $C_1$  и  $C_2$ ) и тремя (ветви  $D_1$  и  $D_2$ ) максимумами амплитуды  $|z(x)|$  параметра порядка стационарных решений для  $\alpha = 1.457$  и нескольких значений  $\gamma$ :  $\gamma = 0.002$ ,  $\gamma = 0.011$  и  $\gamma = 0.020$  (соответственно рис. 5а, б, в). В отличие от ситуации, когда рассматриваются среды из идентичных элементов [26, 31–34], при наличии случайного разброса (беспорядка) в индивидуальных частотах осцилляторов можно достоверно рассчитать  $\lambda_p$  (по крайней мере те  $\lambda_p$ , для которых  $\operatorname{Re} \lambda_p > 0$ ) с применением только стандартного метода дискретизации и замены операторов  $\hat{\mathbf{M}}(x)$  и  $\hat{\mathbf{K}}(x)$  матрицами большой размерности, не задействуя при этом дополнительных модификаций подобной процедуры, кото-

рые оказываются необходимы для выявления истинных  $\lambda_p$  в случае  $\gamma = 0$  (см. подробности в работах [31–33]). В итоге, с точки зрения анализа в термодинамическом пределе имеем еще одно преимущество в задаче с пространственным беспорядком (т. е. при  $\gamma \neq 0$ ).

Каждый из выделенных видов неоднородных состояний отмечен своим типом маркеров. Причем закрашенные точки отвечают устойчивым режимам, а пустые — неустойчивым. Видно, что ветвь неоднородного частично синхронного режима  $B_1$  рождается из прямой линии, с помощью которой на плоскости  $L, \Omega$  отражен однородный частично синхронный режим. Происходит это именно в тот момент, когда последний теряет устойчивость, т. е. в точке с абсциссой  $L = L_{hps}^*$  там, где сплошная линия меняется на штриховую. Кривые  $B_2$  ( $B_3$ ) соответствует удвоенным (утроенному) неоднородным состояниям, для которых длина среды в два (три) раза превышает пространственный размер структур с ветви  $B_1$ , хотя профиль локального комплексного параметра порядка полностью совпадает с одним из распределений  $z(x)$ , полученных при построении семейства  $B_1$ . Несложно заметить, что на линии  $B_1$  имеются точки с такими  $L$  и  $\Omega$ , что найденные при этих значениях пространственные образования должны быть устойчивыми, а значит, представляют собой возможный наблюдаемый в процессе долговременной эволюции устанавливающийся режим поведения системы. Данное обстоятельство подтверждает и численное моделирование уравнений Отта - Антонсена. Следует отметить, что в зависимости от величины  $\gamma$  переходы от однородного частично синхронного к кластерному режиму существенно различаются. В случае сильных частотных расстройек (большие  $\gamma$ ) (рис. 5б, в) переход происходит мягко. В случае же слабых частотных расстройек (малые  $\gamma$ ) переход является жестким, имеет место гистерезис (рис. 5а, см. область сопряжения ветвей  $A$  и  $B_1$ ).

При увеличении параметра  $L$  состояния с одной повышенной и одной пониженной областью когерентности теряют свою устойчивость. Также рост продольной длины ансамбля приводит к появлению режимов с большим числом кластеров с различной степенью фазовой синхронизации. В частности, из ветви  $B_2$  рождается еще дополнительная ветвь решений, обозначенная нами как  $C_1$ . Для структур этого типа характерно, что  $|z(x)| > 0$ , и, следовательно, глобальный параметр порядка отличен от нуля. Кривая  $C_1$  заканчивается на семействе  $C_2$ , которое сформировано также стационарными неоднородными режимами с  $p = 2$ . Основное отличие со-

стояний с ветви  $C_2$  от образований, параметры которых лежат на линии  $C_1$ , состоит в том, что для них  $|z(x)|$  в двух точках обращается в нуль, а собранное по всей популяции макроскопическое поле  $R$  равняется нулю. С подобной ситуацией нам уже приходилось сталкиваться, когда проводилось сравнение однородных частично синхронных и градиентных режимов. Если двигаться дальше, то из ветви  $B_3$  рождаются семейства  $D_1$  и  $D_2$ . Они соответствуют структурам с  $p = 3$  и переходят друг в друга. Так, двигаясь в сторону увеличения  $L$ , будем регистрировать возникновение новых решений с последовательно возрастающим числом максимумов  $p$ .

Несмотря на то, что среди обнаруженных нами состояний линейно устойчивыми (в строгом смысле) оказались лишь режимы с  $p = 1$ , для некоторых решений с  $p > 1$  показатели экспоненциального роста являются малыми ( $\sim 10^{-3}, 10^{-4}$ ). Поэтому стоит ожидать, что все рассмотренные нами статические неоднородные структуры играют важную роль в динамике исходной системы. Подобные ожидания подтверждаются и численными расчетами, проведенными на базе уравнений Отта - Антонсена (12), (15). Моделирование начальной задачи показывает, что мезоскопические поля  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  с высокой долей вероятности переходят в обсуждаемые в текущем разделе устойчивые или слабо неустойчивые состояния, которые наблюдаются в течение длительных промежутков времени. Ниже (в следующем разделе) внимание будет уделено результатам численных расчетов, выполненных непосредственно в рамках исходной модели (1)–(4), и исследованию того, какие еще (уже динамические) режимы могут возникнуть в процессе распада статических квазихимерных структур. В качестве заключительного замечания здесь отметим, что степень беспорядка  $\gamma$ , с одной стороны, приводит к стабилизации стационарных с точки зрения распределения абсолютной величины локального параметра порядка образований, но с другой стороны,  $\gamma$  влияет на длину замкнутых траекторий системы (42) (см. рис. 5), а та, в свою очередь, во многом определяет положение дискретных собственных значений  $\lambda_p$  оператора  $\hat{M}(x) + \hat{K}(x)$  на комплексной плоскости  $\text{Re } \lambda, \text{Im } \lambda$ . Согласно проведенному анализу, чем длиннее среда, тем выше шансы, что найдутся  $\lambda_p$  с  $\text{Re } \lambda_p > 0$ . Таким образом, наиболее устойчивыми являются неоднородные состояния со статическими кластерами фазовой синхронизации в случае промежуточных значений параметра  $\gamma$ , ответственного за разброс в индивидуальных характеристиках составляющих среду осцилляторных элементов. Так, например, среди

ситуаций, рассмотренных при построении рис. 5, образования с двумя явно выраженными, практически не смещающимися, максимумами амплитуды поля  $Z(x, t)$  дольше всего наблюдаются при  $\gamma = 0.011$ .

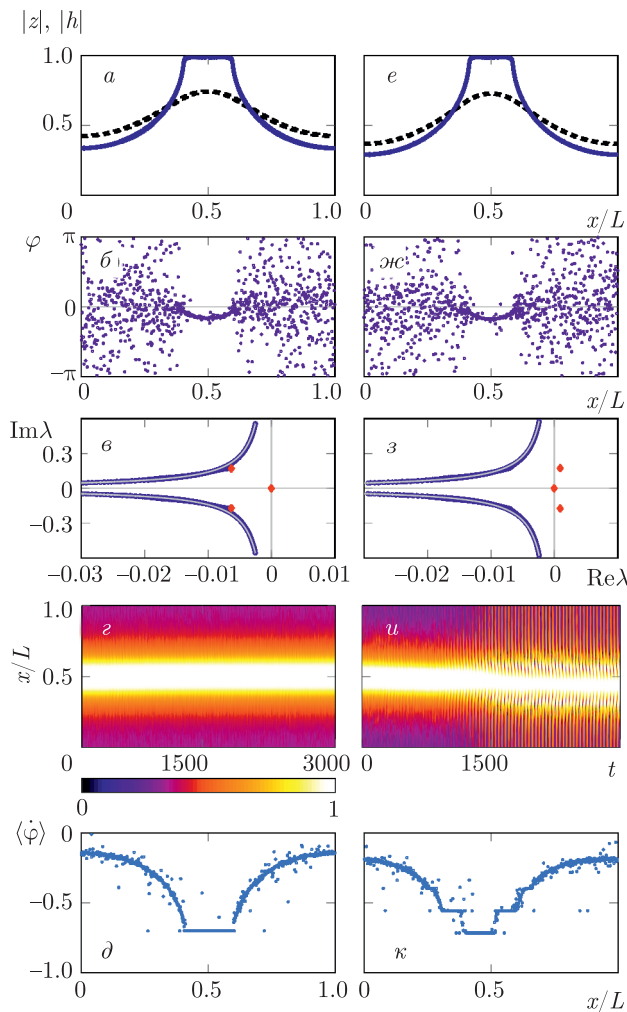
### 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМЫ НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В данном разделе сначала еще раз остановимся на режиме со статичной картиной кластерной синхронизации (рис. 1ж,з), а затем перейдем к подробному описанию следующих типов таких динамических неоднородных состояний, как бризерный кластерный режим (рис. 1и,к), нерегулярные состояния с явно выраженной перемежаемостью (рис. 1л,м) и без нее (рис. 1н,о). Представленные здесь результаты получены в рамках прямого численного моделирования системы (1)–(4). В качестве начальных условий задавалось распределение фаз, восстановленное по одному из профилей  $z(x)$  с соответствующим значением  $\Omega$ , которые, как обсуждалось в предыдущем разделе, определяются длиной среды  $L$  при фиксированных параметрах  $\alpha$  и  $\gamma$ . Выберем для определенности в качестве величины параметра фазового сдвига  $\alpha = 1.457$ .

#### 5.1. Статичная кластерная синхронизация

Обсудим прежде всего ситуацию, когда начальные распределения фаз формируются по стационарным неоднородным решениям уравнений Отта - Антонсена (12), (15) с числом максимумов  $p = 1$ . Как было указано ранее, на бифуркационных диаграммах, представленных на рис. 5, им соответствуют ветви  $B_1$ . Координата каждого максимума амплитуды комплексного поля  $Z(x, t)$  задает положение середины группы с повышенной степенью фазовой когерентности и одновременно центра кластера с частотной синхронизацией осцилляторов (рис. 1ж,з), т. е. набора элементов, которые имеют одинаковые средние частоты  $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$ . Чем ближе величина  $\max |Z(x, t)|$  к единице, тем более выражена синхронность осцилляторов. Отметим, что для идентичных частиц ( $\gamma = 0$ ) эти две макроскопические фракции совпадают и образуют абсолютно скоррелированный участок среды с  $|Z(x, t)| = 1$  и  $\langle \dot{\varphi} \rangle = \Omega$ .

Рассмотрим случай  $\gamma = 0.002$  (рис. 5а). Тогда ветвь  $B_1$  возникает при  $\Omega = \Omega_{hps}^* = -0.9276$  ( $L_{hps}^* =$



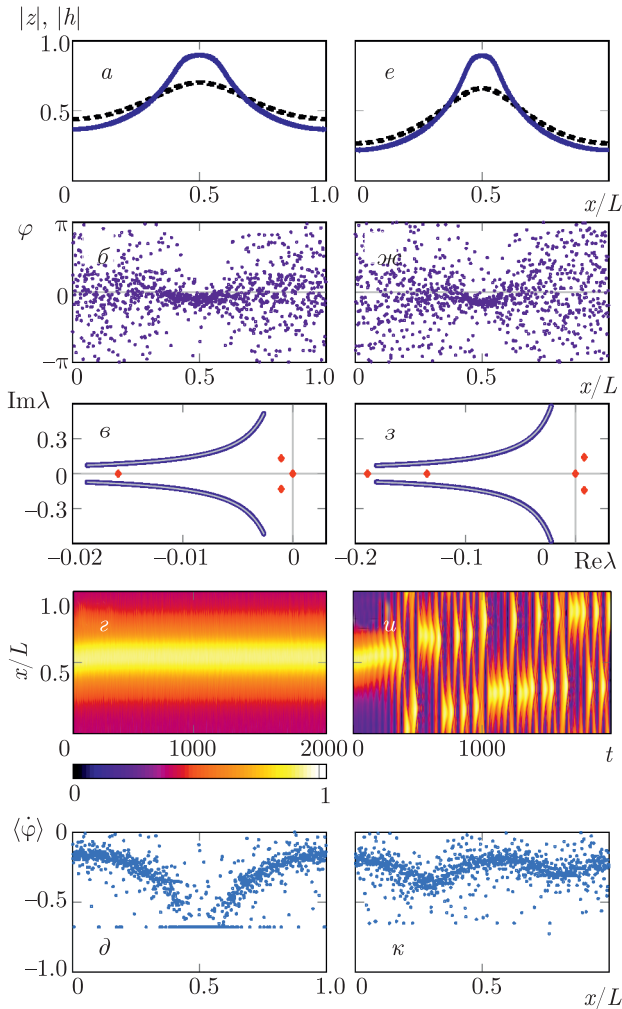
**Рис. 6.** (В цвете онлайн) *a-d*) Устойчивое неоднородное состояние при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.002$ ,  $\Omega = -0.70$ ,  $L \approx 6.4135$ . *e-k*) Неустойчивое неоднородное состояние эволюционирует к бризерному режиму при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.002$ ,  $\Omega = -0.685$ ,  $L \approx 7.0047$ . Начальные условия соответствуют ветви  $B_1$  бифуркационной диаграммы на рис. 5*a*. *a,e*) Профили  $|z|$  (синяя сплошная линия),  $|h|$  (черная штриховая линия), определенные методом, описанным в разд. 5. *б,жс*) Начальные распределения фаз  $\varphi_n$ , которые восстановлены по локальным параметрам порядка  $Z(x)$ . *в,з*) Спектр  $\lambda$  линейных возмущений для соответствующих стационарных решений  $Z(x)$  уравнений Отта–Антонсена. Существенная  $\lambda_e$  (синие кружки) и точечная  $\lambda_p$  (красные ромбы) составляющие спектра  $\lambda$ . *г,д,и,к*) Результаты прямого численного моделирования системы (1)–(4). *г,и*) Поведение во времени абсолютной величины комплексного поля  $Z(x_n, t)$ . *д,к*) Средние частоты осцилляторов  $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$

$= 10.5141$ ) из однородного частично синхронного режима, а отвечающая ей зависимость  $\Omega(L)$  является неоднозначной, что характерно для ситуаций с бистабильностью и гистерезисом. На данной ветви существует устойчивый интервал  $-0.9241 < \Omega < -0.6851$  ( $3.3882 < L < 7.0$ ). На рис. 6*a* представлены профили  $|z(x)|$  и  $|h(x)|$ , а на рис. 6*б* соответствующее им распределение мгновенных фаз  $\varphi_n$  для  $\Omega = -0.7$ . Рисунок 6*в* содержит спектр собственных значений  $\lambda_e$  и  $\lambda_p$ , где в силу инвариантности к сдвигу по пространству  $x \rightarrow x + x_0$  системы (12), (15) существует одно дискретное нулевое собственное значение, при этом для остальных выполняется условие  $\text{Re } \lambda_p < 0$ , что говорит об устойчивости исследуемого режима. На рис. 6*г* изображена пространственно-временная динамика величины  $|Z(x, t)|$ , полученная в результате прямого численного моделирования системы (1)–(4) с конечным числом элементов  $N = 4096$ . На рис. 6*д* представлены средние частоты осцилляторов  $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$ . Отчетливо виден один кластер синхронных по частоте элементов, основная группа которых расположена по середине интервала  $[0, L]$ , а также явно выделяется максимум в профиле модуля локального параметра порядка  $Z(x, t)$ . Данный режим при  $\gamma = 0$  трансформируется в устойчивую однокластерную химеру (см., например, работы [31–33]).

При увеличении  $\gamma$  степень фазовой когерентности вдоль всей популяции в целом падает. Также сокращается (в процентном соотношении) и количество осцилляторов, принадлежащих частотно синхронному кластеру, т. е. все меньшее число элементов ансамбля в нем имеют равные средние частоты. Так, например, в случае  $\gamma = 0.02$  (см. рис. 5*в*) стационарный неоднородный режим с  $L = 6.5861$  и  $\Omega = -0.68$  должен быть устойчивым по отношению к малым возмущениям, так как выбранное нами значение длины среды попадает в интервал устойчивости  $L_{hps}^* < L < L_1^*$ , где  $L_{hps}^* = 3.83422$ ,  $L_1^* = 8.232$ . Результаты анализа в рамках развитых в разд. 4 подходов и прямого численного моделирования системы (1)–(4) приведены на рис. 7*a-d*. Сравнивая данные фрагменты рис. 7 с аналогичными панелями рис. 6, несложно заметить указанные особенности, обусловленные изменением уровня беспорядка в среде.

### 5.2. Бризерный кластерный режим

Вернемся опять к случаю  $\gamma = 0.002$ . При критическом значении  $\Omega_1^* \approx -0.6851$  ( $L_1^* \approx 7.0$ ) стационарный неоднородный режим теряет устойчивость (см.



**Рис. 7.** (В цвете онлайн) То же, что на рис. 6. *a-d*) Устойчивое неоднородное состояние при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $\Omega = -0.68$ ,  $L \approx 6.5861$ . *e-k*) Неустойчивое неоднородное состояние эволюционирует к режиму перемежаемости при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $\Omega = -0.64$ ,  $L \approx 8.8373$ . Начальные условия соответствуют ветви  $B_1$  бифуркационной диаграммы на рис. 5в

рис. 6*e-k*). Два комплексно-сопряженных собственных значения из спектра  $\lambda_p$  при этом пересекают мнимую ось (рис. 6з). Система при этом переходит к бризерному кластерному режиму, когда существуют несколько частотно синхронных кластеров (рис. 6к). Причем усредненные величины  $H(x, t)$  и  $Z(x, t)$  в каждой точке пространства испытывают периодические колебания (рис. 6*u*). Заметим, что данные состояния в случае сред, состоящих из идентичных элементов, т. е. при  $\gamma = 0$ , переходят в бризерные химеры, которые были обнаружены в системах с различными типами определяющих нелокальную связь ядер, заданных как в виде экспоненциально убывающих [32, 33], так и гармонических функций [26, 34],

а также в форме прямоугольника [51]. Для ансамблей, состоящих из фазовых осцилляторов с собственными частотами, распределенными по закону Коши, подобные решения с периодическим поведением локальных мезоскопических полей были рассмотрены в работах [37, 43]. В работе [43] показано, что такие бризерные режимы реализуются в наиболее широких диапазонах управляющих параметров, если ответственная за степень беспорядка величина параметра разброса  $\gamma$  мала, однако отлична от нуля, что справедливо и для исследуемой нами ситуации. Отметим также, что бризерные режимы наблюдались в двумерных решетках связанных фазовых осцилляторов [52, 53].

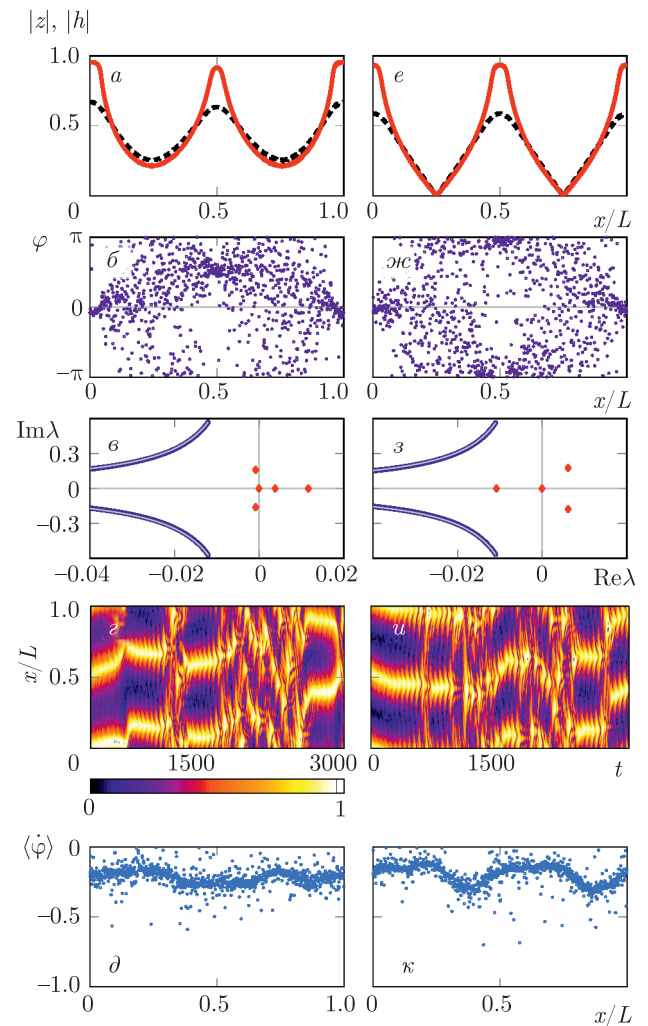
Когда  $\gamma = 0.02$ , при превышении критической длины среды  $L_1^* = 8.232$ , начиная с которой состояние со статичной кластерной синхронизацией становится неустойчивым, бризерный режим регистрируется только в очень узком интервале значений  $L$ , так что его довольно трудно выявить. Однако наличие такого режима оказывает ощутимое влияние на переходные процессы в рассматриваемой системе. В частности, на рис. 7*e-k* отчетливо видно, что, несмотря на существенно более сложный (нерегулярный) характер поведения тех движений, которые устанавливаются в результате развития неустойчивости структуры, изображенной на рис. 7*e*, на относительно протяженных временных отрезках имеет место квазипериодическая динамика, всеми своими атрибутами напоминающая бризерный кластерный режим. Подобная динамика прерывается резким смещением положений областей повышенной и пониженной фазовой когерентности в пространстве, после чего снова восстанавливается (рис. 7*u*). Такого рода чередование продолжительных колебаний структуры мезоскопических полей и быстрых (скачкообразных) изменений, происходящих за короткие (в масштабах численных расчетов) промежутки времени, можно интерпретировать как явление перемежаемости. Данное явление служит одним из механизмов перехода к развитой турбулентности, что фактически и происходит при дальнейшем увеличении длины среды. Система начинает демонстрировать сложную пространственно-временную динамику с нерегулярным поведением усредненных комплексных полей  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$ , о чем пойдет речь ниже.

### 5.3. Нерегулярные режимы

Еще раз подчеркнем, что во всех рассмотренных нами ситуациях, когда распределение модуля

комплексного параметра порядка имеет один или несколько максимумов и нигде не достигает нуля, процесс разрушения регулярных с точки зрения мезоскопических полей статичных неоднородных состояний протекает всегда по схожему сценарию. При этом два комплексно-сопряженных значения, принадлежащих дискретному спектру  $\lambda_p$ , пересекают мнимую ось, что указывает на осцилляторный характер неустойчивости. Здесь можно провести прямую аналогию с бифуркацией Андронова–Хопфа [54]. В частности, на справедливость такой интерпретации указывает то, что при определенных сочетаниях величин  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $L$  удается достоверно зарегистрировать переход к бризерным кластерным режимам, и только потом при увеличении длины среды  $L$  распад состояний, отвечающих стационарным квазихимерным решениям уравнения Отта–Антонсена (12), (15), заканчивается установлением сложных динамических режимов, отличительными чертами которых являются дрейф и резкие смещения положений областей с повышенной и пониженной степенью фазовой когерентности. Стоит обратить внимание на то, что в большинстве случаев (две популяции, с одной стороны, достаточно протяженные, а с другой, обладающие конечным размером) число локальных экстремумов в пространственных зависимостях амплитуд усредненных комплексных полей в каждый момент времени сохраняются (см. рис. 8*z, u*).

В данном разделе сначала выделим и обсудим более детально основные особенности нерегулярных неоднородных режимов на примере ситуации, когда  $\gamma = 0.011$ , а начальные условия для элементов ансамбля формируются с использованием стационарных решений уравнения Отта–Антонсена (12), (15), для которых  $p = 2$ , а соответствующие ветви на рис. 5*б* отмечены как  $C_1$  и  $C_2$ . С учетом вышесказанного и из приведенного ниже описания можно сделать вывод и о других возможных нерегулярных режимах (развивающихся из статичных кластерных состояний с другим числом максимумов  $|z(x)|$ ). Примеры типичных профилей  $|z(x)|$  локального параметра порядка и связанных с ними распределений фаз  $\varphi_n$  представлены на рис. 8*a, e* и 8*б, жс*. Соответствующие им спектры  $\lambda$  композитного оператора  $\hat{M}(x) + \hat{K}(x)$  линейной задачи (46) на устойчивость отображены на рис. 8*в, з*. Нетрудно заметить, что среди собственных значений  $\lambda$  имеются такие, для которых  $\text{Re } \lambda > 0$ . Хотя отдельно заметим, что  $\text{Re } \lambda \sim 10^{-2}$ . Таким образом, данные режимы являются слабонеустойчивыми, и ансамбль фазовых осцилляторов (1)–(4) в прямом численном



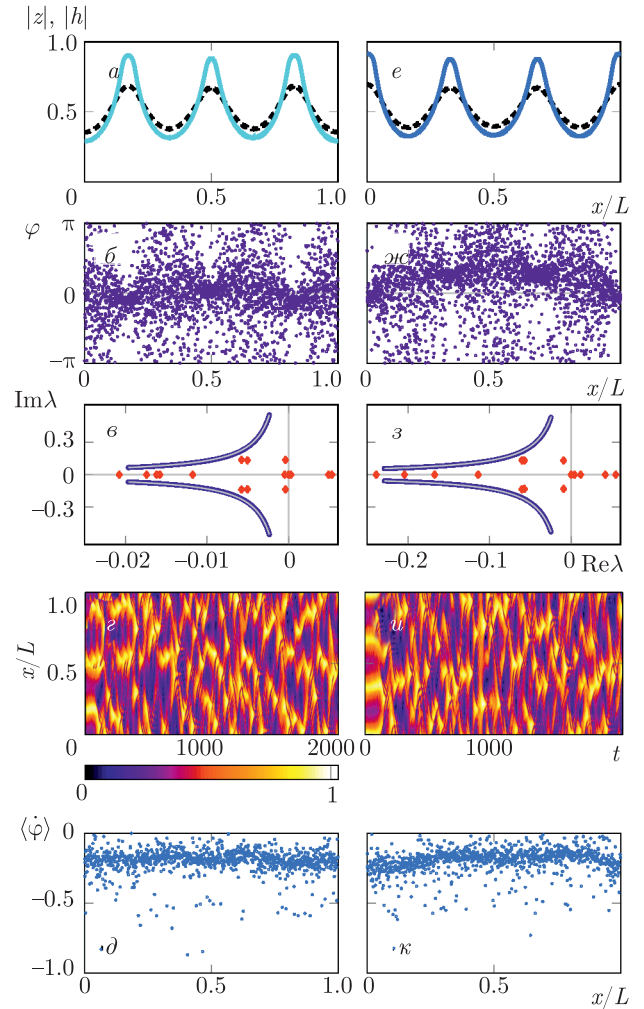
**Рис. 8.** (В цвете онлайн) То же, что на рис. 6. Неустойчивые неоднородные решения с двумя максимумами  $|z(x)|$  (для разных значений  $\Omega$  и  $L$ ) эволюционируют к режиму перемежаемости при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.011$ . Начальные условия соответствуют ветви  $C_1$  при  $\Omega = -0.625$ ,  $L \approx 14.1367$  (фрагменты (a–d)) и  $C_2$  при  $\Omega = -0.566$ ,  $L \approx 12.7904$  (фрагменты (e–к)) бифуркационной диаграммы на рис. 5*б*

моделировании демонстрирует переход к сложной пространственно-временной динамике (в том числе, комплексных мезоскопических полей). Однако отчетливо видно, что на достаточно продолжительных временных интервалах динамика возвращается к состояниям, в которых выделяются две квазистатичные области с высокой степенью когерентности и два (также квазистатичных) участка с практически асинхронным поведением осцилляторов (рис. 8*z, u*). Причем в конце продолжительных отрезков времени распределение амплитуды  $Z(x, t)$  начинает рас-

качиваться и уходить от близкой структуры к стационарной через колебания, что как раз можно объяснить осцилляторным характером развития неустойчивости. Таким образом, система демонстрирует перемежаемость регулярных и хаотических режимов. Это связано с тем, что среди найденных нами решений уравнений (12), (15), отвечающим ветвям  $C_1$  и  $C_2$  на рис. 5, существуют слабонеустойчивые распределения, которым могут быть поставлены в соответствие относительно простые переходные долгоживущие режимы движения. На профиле средних частот  $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$  (рис. 8*д,к*) в данном случае не удастся выделить кластеры частотно синхронных осцилляторов, так как за достаточно продолжительный промежуток времени (интервал усреднения) каждый элемент успевает побывать как в областях с высокой степенью когерентности фаз, так и в практически асинхронных участках среды. Это приводит к тому, что средние частоты имеют практически однородно зашумленный профиль, сосредоточенный вблизи кривой, в форме которой однако прослеживаются структурные особенности, обусловленные тем, что популяция достаточно долго находится в окрестности одного из слабонеустойчивых образований, обусждаемых в разд. 4.

Если профиль  $|z(x)|$ , определяющий начальные значения, является сильнонеустойчивым, то система демонстрирует хаотическую пространственную динамику, которая уже не прерывается выходом на квазистатичные регулярные структуры. В качестве примера продемонстрируем случай  $\gamma = 0.02$  для неустойчивых неоднородных состояний с тремя максимумами  $|z(x)|$ . Рисунки 9*а–д* соответствуют решению, расположенному на ветви  $D_1$ , а рис. 9*е–к* — решению, расположенному на ветви  $D_2$ . Здесь состояния, соответствующие режиму с тремя областями повышенной фазовой когерентности, достаточно быстро разрушаются, и локальный параметр порядка начинает демонстрировать нерегулярную динамику (рис. 9*з,у*). Распределение средних частот  $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$  при этом оказывается равномерно зашумленным (так же, как в случае перемежаемости). Однако в отличие от рис. 8*д,к* на рис. 9*д,к* значения  $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$  распределены практически вдоль прямой линии с одинаковой по величине степенью разброса, что указывает на отсутствие существенных различий между пространственными точками среды после усреднения по времени.

Таким образом, в системе (1)–(4) неидентичных нелокально-связанных фазовых осцилляторов при  $\gamma < \cos \alpha/2$  и  $\gamma \gtrsim \cos^3 \alpha$ , начиная с некоторого критического значения длины среды  $L$ , перестают



**Рис. 9.** (В цвете онлайн) То же, что на рис. 6. Неустойчивые неоднородные решения с тремя максимумами  $|z(x)|$  (для разных значений  $\Omega$  и  $L$ ) эволюционируют к турбулентному режиму при  $\alpha = 1.457$ ,  $\gamma = 0.020$ . Начальные условия соответствуют ветви  $D_1$  при  $\Omega = -0.66$ ,  $L \approx 21.9922$  (фрагменты (а–д)) и  $D_2$  при  $\Omega = -0.66$ ,  $L \approx 20.7145$  (фрагменты (е–к)) бифуркационной диаграммы на рис. 5*в*

наблюдаться устойчивые неоднородные состояния с регулярным поведением усредненных полей. Вместо этого реализуются сложные пространственно-временные режимы с хаотической динамикой параметра порядка  $Z(x, t)$  двух типов. В первом случае имеет место перемежаемость, при которой чередуются достаточно протяженные временные отрезки с квазистатичным распределением мезоскопических характеристик ансамбля и с относительно быстрым смещением областей с повышенной и пониженной степенью синхронизации, во втором — чисто турбулентный режим.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем кратко итоги работы и сформулируем ее основные результаты. Нами был рассмотрен ансамбль, состоящий из большого числа нелокально-связанных неидентичных фазовых осцилляторов, которые равномерно распределены на отрезке с периодическими граничными условиями. При этом предполагалось, что собственные частоты задаются независимо случайным образом согласно распределению Лоренца, а взаимодействие между осцилляторами ослабевает по экспоненциальному закону. Отметим, что данная конфигурация эквивалентна ситуации, когда элементы располагаются на кольце. Основными параметрами такой системы являются величина фазового сдвига, определяющая тип связи (притягивающий, нейтральный или отталкивающий), полуширина распределения собственных частот, задающая степень их неоднородности, а также длина осцилляторной среды. Основная цель работы состояла в том, чтобы в широком диапазоне значений указанных параметров исследовать и классифицировать пространственно-временные структуры, возникающие в процессе долговременной эволюции обсуждаемого ансамбля.

С использованием процедуры усреднения было получено динамическое уравнение Отта – Антонсена для локального комплексного параметра порядка, характеризующего степень фазовой коррелированности элементов в малой окрестности произвольной точки рассматриваемой осцилляторной среды. В рамках этого уравнения, прежде всего, были найдены стационарные (равномерно вращающиеся) режимы с постоянным по модулю значением локального параметра порядка. Установлено, что среди таких состояний можно выделить два вида: однородные и градиентные. Далее, была определена их устойчивость с помощью анализа спектра собственных значений соответствующих линеаризованных уравнений. Показано, что при больших значениях полуширины функции распределения собственных частот реализуется только полностью асинхронный режим с нулевым средним полем. Если же полуширина случайного разброса становится меньше некоторой пороговой величины, то данное состояние перестает быть устойчивым, а в системе могут наблюдаться как однородные, так и градиентные частично синхронные режимы в зависимости от размеров среды и фазового сдвига.

Воспользовавшись тем, что взаимодействие между элементами убывает экспоненциальным образом,

интегро-дифференциальное уравнение Отта – Антонсена было преобразовано к самосогласованной системе уравнений в частных производных. Это позволило предложить метод эффективного поиска стационарных (равномерно вращающихся) неоднородных пространственных структур, которые в пределе одинаковых элементов переходят в химерные состояния. Основная идея данного метода состоит в построении замкнутых траекторий в фазовом пространстве вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Отметим, что подобным периодическим решениям несложно поставить в соответствие неподвижные точки двумерного отображения. После того, как были найдены примеры неоднородных профилей локального комплексного параметра порядка и по ним восстановлены распределения фаз, анализировалась устойчивость полученных состояний как с помощью расчета спектра линейных возмущений, так и с использованием прямого численного моделирования. Для проведения такого рода анализа потребовалось, в частности, разработать и адаптировать процедуру расчета непрерывной и дискретной составляющих спектра собственных значений линеаризованного вокруг одного из стационарных образований интегро-дифференциальное уравнение Отта – Антонсена.

В итоге, установлено, что среди неоднородных состояний со статичным распределением областей с повышенной и пониженной степенью синхронизации устойчивыми (в строгом смысле) являются только те режимы, для которых у профиля локального параметра порядка имеется только один максимум. Однако среди остальных найденных нами структур встречаются слабонеустойчивые (транзистентные) образования. С помощью прямого численного моделирования в рамках исходной системы удалось подтвердить данные выводы и показать, что обсуждаемые квазихимерные режимы (как предельные, так и транзистентные) вращения играют важную роль в динамике ансамбля из большого числа неидентичных нелокально связанных фазовых осцилляторов с экспоненциальным типом взаимодействия, так как одни из них устанавливаются и в последствии не разрушаются, а другие возникают в виде переходных продолжительных процессов между интервалами со сложным нерегулярным поведением усредненных полей. Кроме того, помимо подобной перемежаемости регулярных и хаотических коллективных движений для протяженных сред численные расчеты позволили выделить и описать такие состояния



долговременной эволюции изучаемой системы, как бризерная кластерная синхронизация и развитый турбулентный режим.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00367) (разд. 1 и 2), Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0036) (разд. 3), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-52-12053) (разд. 4 и 5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. V. Osipov, J. Kurths, and Ch. Zhou, *Synchronization in Oscillatory Networks*, Springer Verlag, Berlin (2007).
2. V. S. Afraimovich, V. I. Nekorkin, G. V. Osipov, and V. D. Shalfeev, *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*, World Scientific, Singapore (1994).
3. J. Pantaleone, *Amer. J. Phys.* **70**, 992 (2002).
4. S. Chhabria, K. A. Blaha, F. D. Rossa, and F. Sorrentino, *Chaos* **28**, 111102 (2018).
5. J. Machowski, J. W. Bialek, and J. R. Bumby, *Power System Dynamics: Stability and Control*, John Wiley and Sons (2002).
6. P. J. Menck, J. Heitzig, J. Kurths, and H. J. Schellnhuber, *Nature Commun.* **5**, 3969 (2014).
7. S. Ryu, W. Yu, and D. Stroud, *Phys. Rev. E* **53**, 2190 (1996).
8. Z. Zheng, B. Hu, and G. Hu, *Phys. Rev. E* **57**, 1139 (1998).
9. S. Homma and S. Takeno, *Progr. Theor. Phys.* **72**, 4 (1984).
10. S. Takeno and S. Homma, *Progr. Theor. Phys.* **77**, 3 (1987).
11. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
12. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, Heidelberg (1984).
13. A. Pikovsky and M. Rosenblum, *Chaos* **25**, 097616 (2015).
14. E. Brown, J. Moehlis, and P. Holmes, *Neural Comp.* **16**, 4 (2004).
15. C. R. Laing, *J. Math. Neurosci.* **8**, 4 (2018).
16. J. Acebron, L. Bonilla, C. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
17. F. A. Rodrigues, T. K. D. Peron, P. Ji, and J. Kurths, *Phys. Rep.* **610**, 1 (2016).
18. S. Gupta, A. Campa, and S. Ruffo, *Statistical Physics of Synchronization*, Springer International Publishing (2018).
19. S. Watanabe and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2391 (1993).
20. E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos* **18**, 037113 (2008).
21. E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos* **19**, 023117 (2009).
22. B. Pietras and A. Daffertshofer, *Chaos* **26**, 103101 (2016).
23. D. Chowdhury and M. C. Cross, *Phys. Rev. E* **82**, 016205 (2010).
24. M. J. Panaggio and D. M. Abrams, *Nonlinearity* **28**, R67 (2015).
25. N. Yao and Z. Zheng, *Int. J. Mod. Phys. B* **30**, 1630002 (2016).
26. O. E. Omel'chenko, *Nonlinearity* **31**, R121 (2018).
27. S. Majhi, B. K. Bera, D. Ghosh, and M. Perc, *Phys. Life Rev.* **28**, 100 (2019).
28. E. Schöll, A. Zakharova, and R. G. Andrzejak, *Chimera States in Complex Networks*, Lausanne: Frontiers Media SA (2020).
29. E. Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* **225**, 891-919 (2016).
30. A. E. Motter, *Nature Phys.* **6**, 164 (2010).
31. L. Smirnov, G. Osipov, and A. Pikovsky, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 08LT01 (2017).
32. М. И. Болотов, Л. А. Смирнов, Г. В. Осипов, А. С. Пиковский, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 393 (2017).
33. М. И. Болотов, Л. А. Смирнов, Г. В. Осипов, and А. Pikovsky, *Chaos* **28**, 045101 (2018).
34. O. E. Omel'chenko, *Nonlinearity* **26**, 9 (2013).
35. M. Wolfrum, O. E. Omel'chenko, S. Yanchuk, and Y. L. Maistrenko, *Chaos* **21**, 013112 (2011).
36. G. B. Ermentrout, *SIAM J. Appl. Math.* **52**, 1665 (1992).
37. C. R. Laing, *Physica D* **238**, 1569 (2009).
38. C. R. Laing, *Chaos* **52**, 013113 (2009).

39. W. S. Lee, J. G. Restrepo, E. Ott, and T. M. Antonsen, *Chaos* **21**, 023122 (2011).
40. G. S. Medvedev and X. Tang, *J. Nonlinear Sci.* **25**, 1169 (2015).
41. O. E. Omel'chenko, M. Wolfrum, and C. R. Laing, *Chaos* **24**, 023102 (2014).
42. M. Wolfrum, S. V. Gurevich, and O. E. Omel'chenko, *Nonlinearity* **29**, 257 (2016).
43. O. E. Omel'chenko, *Chaos* **30**, 043103 (2020).
44. D. Wiley, S. Strogatz, and M. Girvan, *Chaos* **16**, 015103 (2006).
45. T. Girnyk, M. Hasler, and Y. Maistrenko, *Chaos* **22**, 013114 (2012).
46. D. Bolotov, M. Bolotov, L. Smirnov, G. Osipov, and A. Pikovsky, *Regular and Chaotic Dynamics* **24**, 717 (2019).
47. Y. Kuramoto and D. Battogtokh, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* **5**, 380 (2002).
48. I. N. Pesin, *Classical and Modern Integration Theories, Probability and Mathematical Statistics*. 8. Academic Press, New York–London (1970).
49. W. Eckhaus, *Studies in Nonlinear Stability Theory*, Springer, Berlin (1965).
50. F. C. Moon, *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, Wiley-VCH (2004).
51. Y. Suda and K. Okuda, *Phys. Rev. E* **97**, 042212 (2018).
52. J. Xie, E. Knobloch, and H.-C. Kao, *Phys. Rev. E* **92**, 042921 (2015).
53. O. E. Omel'chenko, M. Wolfrum, and E. Knobloch, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **17**, 97 (2018).
54. Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, New York (1995).