

# ВОЗМОЖНЫ ЛИ ИЗОТРОПНЫЕ МЕТАМАТЕРИАЛЫ И МЕТАМАТЕРИАЛЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПРОНИЦАЕМОСТЯМИ $\epsilon$ И $\mu$ ?

*М. В. Давидович\**

*Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410012, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 12 февраля 2020 г.,  
после переработки 22 июля 2020 г.  
Принята к публикации 26 июля 2020 г.

Предпринята попытка ответа на поставленный в заглавии вопрос. Рассмотрены периодические метаматериалы — кубические фотонные кристаллы с диэлектрическими включениями, в том числе с металлическими свойствами, методы введения материальных уравнений (гомогенизации), возможность описания метаматериалов двумя скалярными проницаемостями (или двумя скалярными параметрами), в том числе с отрицательными значениями их действительных частей. Для фотонных кристаллов подтвержден вывод Ландау об отсутствии высокочастотных (оптических) магнитных свойств. В частности, невозможны отрицательные значения магнитной проницаемости или каких-либо ее компонент. Приведены конфигурации метаматериалов, обладающие почти изотропными свойствами при пренебрежении пространственной дисперсией.

DOI: 10.31857/S0044451021020012

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Под метаматериалами в широком смысле будем понимать любые искусственные среды (ИС), которые благодаря развитию современных технологий, включая нанотехнологии, в последние два десятилетия усиленно создаются и широко теоретически исследуются. Их исследование началось более ста лет назад, и уже к середине прошлого столетия были получены важные результаты по искусственным диэлектрикам и структурам (см., например, обзор [1]). Создаваемые ИС могут быть периодическими и хаотическими, т. е. с периодическим и хаотическим расположением частиц или метаатомов (МА) в основе — обычно некой однородной и изотропной диэлектрической среде. Другой тип ИС создают и исследуют на основе теории смесей, формул смешения, теории перколяции, метода компактных групп и ряда других подходов [2, 3]. Здесь мы такие метаматериалы не рассматриваем, а будем исследовать только периодические ИС, которые также называют фотонными кристаллами. Соответственно имеет место аналогия между ними и кристаллами в оптике,

а аналогией для смесей служат аморфные диэлектрики. Часто метаматериалы понимаются в узком смысле как периодические ИС, содержащие металлические МА или частицы, и даже в более узком смысле как ИС с «одновременно отрицательными диэлектрической проницаемостью (ДП)  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью (МП)  $\mu$ » [2, 4]. Также их ассоциируют с ИС, в которых распространяются объемные обратные волны (ОВ) [4]. В последнее время возрос интерес к метаповерхностям, вдоль которых возможны ОВ, при этом требование одновременной отрицательности ДП и МП (или каких-либо их компонент) не является обязательным [5]. Сразу оговоримся, что ни  $\epsilon$ , ни  $\mu$  отрицательными быть не могут, поскольку это комплексные величины, тем более что потери в металлических МА существенные, а рассматриваемые структуры с ОВ резонансные. Кроме того, ОВ существуют в любом фотонном кристалле, который строго описывается только тензорной ДП с учетом пространственной дисперсии [6–8]. Поэтому много работ было посвящено получению и исследованию полностью диэлектрических ИС с одновременно электрическими и магнитными откликами. Ответ на вопрос о том, возможно ли получить отрицательные эффективные значения  $\epsilon$  и  $\mu$  (а тем

\* E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

более их одновременно отрицательные значения) в полностью диэлектрических ИС, является одной из целей данной работы и будет дан ниже. Обычно «одновременность» понимается как значения на одной фиксированной частоте. Эта идея заманчива, поскольку тангенс угла потерь хороших диэлектриков в широком диапазоне от микроволн до оптики может быть порядка и меньше  $10^{-4}$ , при этом не требуется криогенных температур. Однако эти параметры зависят и от волнового вектора  $\mathbf{k}$ , т. е. надо понимать одновременность как принадлежность к фиксированной точке поверхности изочастот (дисперсионной поверхности в  $\mathbf{k}$ -пространстве). Соответственно переход от одной области дисперсионной поверхности или ветви к другой может сопровождаться переходом от прямых волн к обратным. Снизить потери на два порядка можно, используя гелиевые температуры. Такие периодические ИС с металлическими МА уже можно рассматривать как фотонные кристаллы наряду с диэлектрическими ИС. В подобных электромагнитных кристаллах поглощением фотонов можно пренебречь, и тогда поведение последних аналогично поведению электронов в обычных кристаллах. Так же как электроны и дырки в твердотельном кристалле, это квазичастицы — квазифотоны или поляритоны, обладающие дисперсией и позволяющие эффективно управлять светом, чем и обусловлен большой интерес к таким структурам нанофотоники. Квазифотоны обладают дисперсией, причем для них возможны почти запрещенные зоны. Слово «почти» можно опустить, если пренебречь диссипацией и рассматривать бесконечный периодический фотонный кристалл.

В электродинамике сплошных сред известно утверждение, что с ростом частоты МП  $\mu$  все более теряет свой смысл, а в области оптических частот  $\mu \approx 1$ , и рассматривать магнитный отклик бессмысленно [9] §79, §103. Это утверждение за последние двадцать лет многократно подвергалось сомнению и опровержению (см., например, [10]). Однако вывод о нецелесообразности высокочастотного описания природных материалов и метаматериалов с помощью МП верен. В данной работе этот вывод, полученный в [9] в общем случае, подтверждается конкретно для фотонных кристаллов с привлечением классической электродинамики и гомогенизации. Его можно распространить на взаимодействие излучения с периодически расположенными МА как квантовыми точками. Также рассмотрен вопрос о создании изотропных метаматериалов. Важным в этом случае является размер кристалла или число периодов. Их должно быть так много, чтобы радиа-

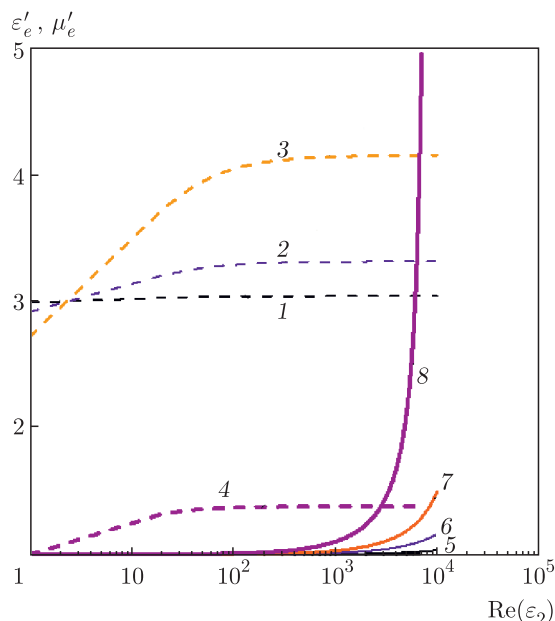
ционными потерями можно было пренебречь. Именно в этих приближениях мы и будем рассматривать задачу. Например, тонкая пленка в 100 нм с пятью периодами и двумя разными слоями по 10 нм в периоде не является 1D-кристаллом. Она более соответствует оптическому фильтру [11, 12]. Чтобы возникло подобие запрещенной зоны, пленка должна иметь толщину более 800 нм, когда число периодов больше или равно 40 [12]. Фотонный кристалл (как и обычный) описывается тензором ДП  $\hat{\epsilon}$ , а никак не отрицательным скаляром. Однако имеется весьма много работ, в которых периодические ИС описываются с помощью ДП  $\epsilon < 0$  и МП  $\mu < 0$ . Часто такие параметры просто вводят и анализируются какие-то свойства, например, поведение лучей. Тогда волновая векторная электродинамика заменяется лучевой оптикой. В лучшем случае такие проницаемости вводят в уравнения Максвелла. Это связано с тем, что строгие решения весьма сложны и в известных нам работах не применялись (за исключением использования коммерческих программных пакетов). Ниже приведены подходы к строгому численно-аналитическому решению подобных задач.

Известно, что внутреннее поле играет огромную роль при описании ДП и МП в природных веществах. Обычно ДП и МП вводят путем усреднения полей, индукций и поляризаций микроскопических уравнений Максвелла–Лоренца по физически бесконечно малому объему [6–8, 13]. Для кристаллов и смесей такой процесс называется гомогенизацией. Для смесей усреднение проводится по малому объему с линейным размером, существенно меньшим длины волны, но в котором много МА. Для фотонного кристалла будем делать усреднение по ячейке периодичности. Требовать ее малость по сравнению с длиной волны не обязательно, но для локальности материальных уравнений необходимо. Низкочастотная гомогенизация означает  $\mathbf{k} = 0$ , т. е. пренебрежение пространственной дисперсией (ПД). Для рассчитанной зонной структуры гомогенизация зависит от точки на дисперсионной поверхности. Упомянутое усреднение изначально зависит и от модели среды [1, 4–8, 14]. Так, можно вовсе не вводить МП, т. е. не использовать симметричный подход, а определять только тензор  $\hat{\epsilon}$ . Для определения его шести компонент (в общем случае комплексных) вполне достаточно шести скалярных уравнений Максвелла, что и определяет его преимущества. Симметричный же подход на основе  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\mu}$  требует введения дополнительных условий, обычно связанных с симметрией [15, 16].

## 2. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

В первых работах по гомогенизации [17–19] при задании модели среды в виде скаляров  $\varepsilon$  и  $\mu$  были получены магнитные свойства с использованием только диэлектрических МА. Так, Левин [17, 18] рассматривал отражение нормально падающей волны от кубической решетки сферических магнитодиэлектрических МА. Поляризация волны была фиксирована вдоль одной из осей. Использовался ряд приближений. Для металлических МА был получен диамагнетизм. Для диэлектрических МА с большой ДП получена широкая вариация значений  $\mu$  с утверждением, что эта величина может лежать почти в любой точке комплексной плоскости. Это не совсем так. На рис. 1 приведены результаты вычислений по формулам из [17, 18], из которых видно, что  $\mu'_e > 0$ ,  $\mu''_e > 0$  в области  $\varepsilon'_2 < 5000$ . При более высоких значениях ДП и достаточно больших шариках возможны резонансы с малой зоной отрицательной ДП. Однако веществ с такими большими линейными изотропными ДП нет, а сами резонансы обусловлены введенной в [18] функцией  $F(k_0 a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})$  и являются нефизическими. При больших ДП шариков ДП  $\varepsilon'_e$  насыщается, что также говорит об ограниченности модели. ДП основы в расчетах равнялась  $3 - i0.0003$ , при этом получено  $\mu''_e/\mu'_e \sim 10^{-4}$ . ДП шариков изменялась от 1 до 10000, при этом тангенс угла потерь брался равным  $10^{-4}$ . Сам автор отметил, что результаты пригодны только для макроскопического коэффициента отражения при нормальном падении. То есть при падении под углом параметры могут измениться. Результаты справедливы в предположении  $k_0 a \ll 1$ , где  $a$  — радиус шариков, тогда как для гомогенизации надо использовать более жесткое условие  $k_0 d \ll 1$ , где  $a \ll d$ ,  $d$  — период. Если это жесткое условие выполнено, эффективная ДП мало отличается от проницаемостей основы, а МП уменьшается на порядок и более. Таким образом, условие  $\mu'_e \gg 1$  есть результат сильного взаимодействия МА (влияния внутреннего поля), при этом модель становится менее строгой из-за пространственной дисперсии и других факторов. Основное ограничение модели при увеличении размеров — исчезновение сферической симметрии, используемой при выводе формул.

В работе Рытова [19] рассмотрена плоскостная периодическая среда. Для нее найдены скалярные ДП и МП, описывающие волны двух поперечных направлений. Условия получены путем приравнивания волнового сопротивления и коэффициента замедления своим эффективным значениям:



**Рис. 1.**  $\text{Re}(\varepsilon_e)$  (кривые 1–4) и  $\text{Re}(\mu_e)$  (5–8) в зависимости от  $\text{Re}(\varepsilon_2)$  согласно [12, 13] при  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $k_0 d \sqrt{\varepsilon_1} = 0.1$ :  $\varepsilon_1 = 3$  (1–3, 5–7), 1 (4, 8). Кривые 1, 5 соответствуют  $a/d = 0.1$ ; кривые 2, 3 —  $a/d = 0.2$ ; кривые 4, 7, 8 —  $a/d = 0.3$

$\sqrt{\mu_e/\varepsilon_e}$  и  $n = \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$ . Два условия определяют две эффективные величины  $\varepsilon_e$  и  $\mu_e$ . Эти величины различны по разным направлениям. При этом даже если слои диэлектрические, возникает МП. С другой стороны, в длинноволновом пределе получены материальные уравнения для такой одноосной диэлектрической ИС:  $\varepsilon_{e\perp} = (\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2)/d$ ,  $\varepsilon_{e\parallel}^{-1} = (\varepsilon_1^{-1} d_1 + \varepsilon_2^{-1} d_2)/d$ , а также аналогичная формула для МП в случае ИС с магнитными слоями. Такие 1D-метаматериалы описываются диагональными тензорами, в которые входят проницаемости слоев и их толщины. Если магнитных свойств у слоев нет, то  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  и  $\mu_e = 1$ , т.е. нет их и у ИС. Однако такой метаматериал можно описать моделью, учитывающей магнитные свойства, введя два скалярных параметра  $\varepsilon_e$  и  $\mu_e$  вместо тензора  $\hat{\varepsilon}_e$ . Например, можно потребовать, чтобы коэффициент отражения  $R$  от такой среды был равен коэффициенту отражения от изотропной эффективной среды. Коэффициент отражения зависит от угла падения, т.е. от вектора  $\mathbf{k}$  в среде, поэтому подход позволяет учесть ПД. Его можно распространить на структуру типа мелкомасштабный период в крупномасштабном периоде [20]. Если структура имеет большое число  $N$  периодов по два диэлектрических слоя в периоде, то ее коэффициент отражения и коэффи-

циент прохождения рассчитываются точно. Удобно использовать матрицу передачи. Описывая структуру как однородную с двумя параметрами  $\varepsilon_e$  и  $\mu_e$ , мы можем их связать с параметрами слоев. Такая модель будет достаточно правильно описывать дифракцию на плоскостойких структурах при других больших значениях  $N$ , т.е. при других толщинах всей структуры. Однако она не применима для описания волн внутри. Более подходит модель на основе тензора ДП одноосного кристалла. Приведенная выше модель, описывающая  $\varepsilon_{e\perp}$  и  $\varepsilon_{e\parallel}^{-1}$ , является приближенной. Можно учесть ПД, сшив поля и вычислив поляризацию под воздействием плоской волны направления  $\mathbf{k}$  [1]:

$$\varepsilon_{xx} = k_0^{-1} [k_x^2 + k_{1z}^2 d^{-2} (d_1^2 + d_1 d_2) + k_{2z}^2 d^{-2} (d_2^2 + d_1 d_2)],$$

$$\varepsilon_{zz} = k_0^{-2} k_x^2 \times \left\{ 1 - \frac{k_{1z}^2 d^{-2} (d_1^2 + d_1 d_2 \varepsilon_2 / \varepsilon_1) + k_{2z}^2 d^{-2} (d_2^2 + d_1 d_2 \varepsilon_1 / \varepsilon_2)}{k_x^2 + k_{1z}^2 d^{-2} (d_1^2 + d_1 d_2) + k_{2z}^2 d^{-2} (d_2^2 + d_1 d_2)} \right\}^{-1}.$$

Здесь обозначены ДП  $\varepsilon_n$  и толщина слоев  $d_n$ ,  $k_{nz}^2 = k_0^2 \varepsilon_n - k_x^2$ ,  $d = d_1 + d_2$ . Интересно отметить, что результат этих формул в ряде частных случаев совпадает с результатом приведенных выше. Нормированное к импедансу  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$  волновое сопротивление необыкновенной волны в таком 1D-фотонном кристалле равно  $\sqrt{\varepsilon_{xx}^{-1} - (k_x^2 / k_0^2) / (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz})}$ . В вакууме  $\tilde{Z}_0 = E_x / H_y = Z_0 \sqrt{1 - k_x^2 / k_0^2}$ . Коэффициент отражения  $R = (Z / Z_0 - 1) / (Z / Z_0 + 1)$  связываем с тензором ДП, что дает еще одну возможность теоретического и экспериментального определения его компонент. С другой стороны, из уравнения Флоке–Блоха  $\cos(\tilde{k}d) = (a_{11} + a_{22}) / 2$  можно определить блоховское волновое число  $\tilde{k}$  и импеданс  $E$ -волны в направлении  $z$ :  $Z = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} k_0 \tilde{k} / (\tilde{k}^2 + k_x^2)$ . Здесь  $a_{mn}$  — элементы матрицы передачи одного периода из двух слоев. Отличие двух импедансов в том, что первый построен на основе гомогенизации в виде уравнения Френеля, а второй соответствует строгому решению уравнения Флоке–Блоха. Во вторую формулу для коэффициента отражения эффективные проницаемости не входят. Приравняв оба коэффициента отражения, получим формулу для гомогенизации:

$$\sqrt{1 - \frac{k_x^2 / k_0^2}{\varepsilon_{zz}}} = \frac{k_0 \sqrt{\varepsilon_{xx}} \tilde{k}}{\tilde{k}^2 + k_x^2}.$$

Для исследования свойств метаматериалов применялись коммерческие пакеты программ, позволяющие рассчитывать конфигурационно сложные периодические микроструктуры. Такие пакеты могут демонстрировать решения, иллюстрирующие отрицательную рефракцию (ОР) или преломление. Однако ОР никак не означает, что  $\varepsilon < 0$  и  $\mu < 0$ , и даже ничего не говорит о том, что какие-то компоненты тензоров отрицательны. Обычно ОР связывают с объемными ОВ. Однако ОВ и ОР — явления разные и могут существовать независимо [1, 4]. Часто такие ИС называют левыми, метаматериалами с отрицательной групповой скоростью или с отрицательным показателем преломления. Отрицательным показателем преломления быть не может [21]. Это понятие введено в оптике на заре ее развития и применимо для изотропных сред, когда длина волны в  $10^5$  раз и более превышает размеры молекул. Для ИС это соотношение как минимум на три порядка меньше, и для них ДП  $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$  есть тензор, причем зависящий от волнового вектора  $\mathbf{k}$  [4, 6–8]. Объемные волны в таком кристалле удовлетворяют уравнению Френеля в общем случае четвертого порядка по  $\mathbf{k}$  и шестого по волновому числу  $k_0$ . Максимальное количество таких волн — четыре, а вопрос о прямой или обратной объемной волне в недиссипативном фотонном кристалле решается посредством определения угла между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\hat{\varepsilon}, \mathbf{k})$ . Тип волны зависит от направления групповой скорости (нормали к поверхности изочастот) по отношению к вектору  $\mathbf{k}$ . В диссипативном кристалле вместо  $\mathbf{v}_g$  следует использовать вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) / 2$ . В общем случае без бианизотропии поверхность изочастот определяется уравнением  $\omega(\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}), \hat{\mu}(\omega, \mathbf{k}), \mathbf{k}) = \text{const}$ , в котором учтена ПД. Для гиперболического метаматериала это приводит к ограниченности поверхности изочастот [1]. Обладающий магнитным откликом бианизотропный метаматериал описывается еще двумя тензорами кросс-поляризации [14–16]. Он характеризуется сильной ПД. Однако он также может быть описан только одним тензором ДП, но такой тензор в общем случае не может быть приведен к диагональному виду. Для получения отрицательной рефракции важно, под каким углом волна падает и какова оптическая плотность среды падения [4]. При падении из среды с ДП  $\tilde{\varepsilon}$  касательная к поверхности компонента вектора  $\tilde{\mathbf{k}}$  сохраняется, а сам вектор удовлетворяет уравнению Френеля  $\tilde{\mathbf{k}} = k_0^2 \tilde{\varepsilon}$ . Внутри кристалла вектор  $\mathbf{k}$  удовлетворяет более сложному уравнению Френеля. Изменяя угол падения, мы изменяем положение конца век-

тора на поверхности изочастот. Ввести один показатель преломления для таких кристаллов нельзя, даже если взять его тензорным. Да и вводить его нецелесообразно: в электродинамике вводится вектор  $\mathbf{k}$  и волновые матричные импедансы, поскольку гомогенизированные (макроскопические) уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -Z_0 k_0 \hat{\epsilon}_e(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= -Z_0^{-1} k_0 \hat{\mu}_e(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{H},\end{aligned}$$

а импедансы определяются из них, когда определена зависимость  $\mathbf{k}(\omega)$  для конкретной дисперсионной ветви и получены эффективные параметры  $\hat{\epsilon}_e(\omega, \mathbf{k})$  и  $\hat{\mu}_e(\omega, \mathbf{k})$ . В диссипативных ИС отрицательная групповая скорость и объемные ОВ — понятия не тождественные. При диссипации  $\mathbf{k}$ -пространство уже не является трехмерным: оно шестимерное комплексное, что не позволяет определить групповую скорость как градиент скаляра. Поэтому скорость движения энергии и групповая скорость — также понятия различные. В металлических фотонных кристаллах в области плазмонного резонанса  $|\epsilon'| \sim \sim \epsilon''$ , а сделать  $\epsilon''/|\epsilon'| < 10^{-3}$  при комнатной температуре практически невозможно. Поверхностные волны также могут быть обратными [22], и для этого не требуется наличие магнитных свойств у среды, хотя есть и обратные магнитостатические волны [23]. В отличие от наведенного магнетизма в ИС анизотропный магнитный отклик в ферритах проявляется в СВЧ-диапазоне в присутствии внешнего магнитного поля, что связано с ограниченностью намагниченности насыщения. Поверхностные ОВ могут испытывать отрицательное преломление на метаповерхностях.

Рассмотренные выше понятия требуют корректного использования. Часто ряд из них лишен физического смысла. Так, формальная подстановка в уравнения Максвелла однородных и изотропных величин  $\epsilon_e = \epsilon' - i\epsilon''$  и  $\mu_e = \mu' - i\mu''$  при  $\epsilon'' > 0$  и  $\mu'' > 0$  дает для показателя преломления  $n_e = n' - in''$  значение  $n' < 0$ , если взять  $\epsilon' < 0$  и  $\mu' < 0$ . Цель данной работы — рассмотреть, возможно ли получить изотропную среду с  $\epsilon' < 0$  и  $\mu' < 0$ . Ниже показано, что это невозможно, что в некотором роде перекликается с выводами работы [24]. Волны в таком метаматериале в низкочастотном пределе подчиняются уравнению Френеля  $\mathbf{k}^2 = k_0^2 \epsilon_e \mu_e$ . Построенный как кристалл, он должен обладать следующими свойствами. Решетка должна быть кубической с периодом  $a \ll \Lambda$ , где  $\Lambda$  — минимальная внутренняя длина волны, а  $\lambda = \Lambda \sqrt{\epsilon_e \mu_e}$  — длина волны в вакууме. Включенные в узлы решетки частицы долж-

ны быть симметричными, т. е. иметь одинаковые дипольные моменты (коэффициенты поляризуемости) вдоль каждой из осей. Диссипация должна быть малой:  $|\mathbf{k}''|/|\mathbf{k}'| \ll 1$ ,  $|n''/n'| \ll 1$ , где  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$  — волновой вектор,  $n = \sqrt{\epsilon_e \mu_e} = n' - in''$  — полученный гомогенизацией показатель преломления (заметим, что можно ввести вектор  $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/k_0$ , модуль которого определяет замедление в направлении  $\mathbf{k}'$ ). ПД и биизотропия должны быть пренебрежимо малыми. Последнее соответствует тому, что метаматериал следует рассматривать вдали от резонансов и запрещенных зон при малых  $|\mathbf{k}|$  и больших по сравнению с размерами частиц длинах волн  $\Lambda$ . Пренебрежение биизотропией означает, что вторичные электрические поля, создаваемые за счет поляризации каждой частицы, не вносят вклад в ее магнитную поляризацию и в магнитную поляризацию ее соседей. Это же относится и к магнитным полям. Еще раз подчеркнем, что использование в уравнениях Максвелла скалярных величин  $\epsilon < 0$  и  $\mu < 0$  дает решение в виде плоской волны, для которой  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{S} < 0$ , что не требует введения ни отрицательного показателя преломления, ни отрицательной групповой скорости. В монохроматической волне нет группы волн, поэтому нет и основания для ее введения.

### 3. ПОЧТИ ИЗОТРОПНЫЕ МЕТАМАТЕРИАЛЫ

Электрический диполь длины  $l$  хорошо моделируется малым тонким металлическим цилиндром малого радиуса  $r \ll l$ . Изотропный диполь представляет собой три таких взаимно перпендикулярных цилиндра (рис. 2а). Его излучение изотропно. Магнитный диполь представляет собой проволочную рамку. Изотропный магнитный диполь представим как три скрещенные рамки (рис. 2). Поместим два (магнитный и электрический) изотропных диполя в каждый узел кубической решетки (рис. 2а). Для устранения взаимного влияния диполей соседних узлов предположим, что  $R \ll a$ . Считаем  $l < R$ . Даже в этом случае имеет место ближнепольное взаимное влияние диполей в узле: возбуждение электрического диполя приводит к излучению, которое возбуждает токи в рамках, а возбуждение рамок, в свою очередь, возбуждает электрические диполи. Поэтому такой кристалл не совсем удовлетворяет нашим требованиям. Он, скорее, будет биизотропным. В нем каждый излучатель в узле принадлежит восьми кубическим ячейкам. Поскольку в кубе их восемь, одному кубу принадлежит один из-



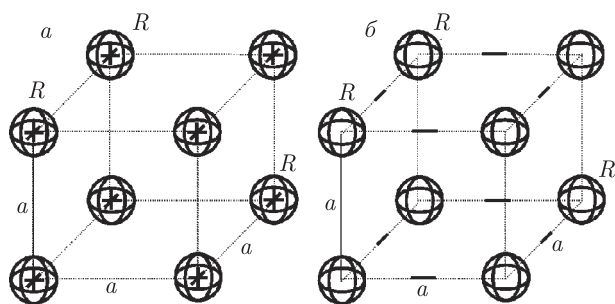


Рис. 2. Фотонный кристалл с магнитными и электрическими диполями в кубической решетке

лучатель. Его можно расположить в центре куба. Тогда надо задать разложение токов в проволочках, вычислить для них поля, используя периодическую функцию Грина (ФГ) данного фотонного кристалла и наложить граничные условия на проволочках. Это позволяет сформулировать дисперсионное уравнение. Его будем называть микроскопическим. Оно позволяет построить точную зонную структуру и микроскопическую поверхность изочастот. Для ее построения нужно дисперсионное уравнение, в которое входят только поля, частота и волновой вектор  $\mathbf{k}$ . Теперь можно выполнить гомогенизацию, определить средние поля, индукции и поляризации, что позволяет определить усредненные (эффективные) гомогенные в общем случае тензорные проницаемости. Им соответствует уравнение Френеля для фотонного кристалла, в которое входят величины  $\hat{\epsilon}_e, \hat{\mu}_e, \mathbf{k}, k_0$ . При фиксации  $k_0$  оно дает макроскопическую поверхность изочастот и может считаться макроскопическим дисперсионным уравнением.

На рис. 2б представлена ИС, которая более соответствует требованиям изотропности. Очевидно, три кольцевых рамки можно заменить металлическим шаром. Кольцевые токи на поверхности шара наводят магнитную поляризацию. Это низкочастотные токи. Шар также может представлять собой электрический диполь, квадруполь, октуполь и т.п. [25]. Мультипольные резонансные токи соответствуют более высоким частотам, хотя они существуют на любых частотах в силу разложений полного тока по мультиполям, т. е. по производным полиномов Лежандра. Однако ориентацию оси  $z$  можно выбрать произвольно, поэтому это изотропные излучатели. Часто токи считают поверхностными. Для этого глубина проникновения должна быть существенно меньше размеров МА. Говоря далее о токах, мы всегда подразумеваем их плотности, за исключением отдельно оговоренных случаев. Слишком низкие частоты или слишком малые размеры могут

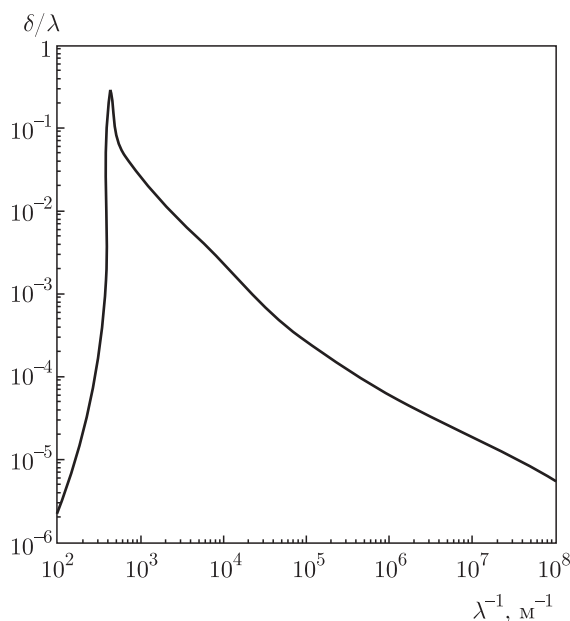


Рис. 3. Нормированная глубина проникновения в серебро в зависимости от обратной длины волны

приводить к полному проникновению поля в шарики или проволочки. Для наноразмерных металлических структур оно возможно в широких частотных диапазонах, включая оптические и УФ-области. На рис. 3 приведена кривая нормированной к длине волны глубины проникновения в серебро в зависимости от обратной длины волны в метрах. Использована формула Друде – Лоренца для объемного образца. Для наноразмерных пленок и квантовых нитей эти результаты являются приближенными, поскольку вычисление требует квантовых подходов.

Различные резонансные излучатели типа разомкнутых колец, двойных разомкнутых колец и т.п. не являются изотропными. Фотонные кристаллы на их основе не являются изотропными средами. В общем случае метаматериалы с такими МА являются бианизотропными: электрическое поле наводит в них как электрическую, так и магнитную поляризацию, а магнитное поле — соответственно магнитную и электрическую поляризацию. Такие ИС могут демонстрировать ОР, но никак не являются структурами с  $\epsilon < 0$  и  $\mu < 0$  или с  $n < 0$ . Их строгий анализ весьма сложен. Другие почти изотропные структуры приведены на рис. 4. Они более простые для анализа и гомогенизации. Для металлических шариков (рис. 4а) имеет место диамагнетизм и малая эффективная ДП [26]. Металлические цилиндры (рис. 4б) демонстрируют изотропную электрическую и магнитную поляризацию. Диэлектри-

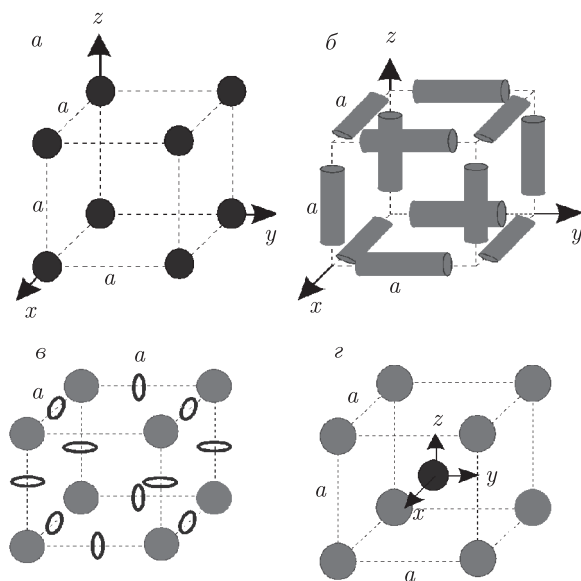


Рис. 4. Элементарные ячейки кубических фотонных кристаллов с шаровыми (*a*, *г*), цилиндрическими (*б*), шаровыми и кольцевыми (*в*) включениями МА в диэлектрическую основу (матрицу)

ческие шары и металлические кольца (рис. 4в) демонстрируют изотропную поляризацию обоих типов. Структура (рис. 4г) из двух сдвинутых прямоугольных решеток с различными диэлектрическими шарами в рассматриваемом низкочастотном приближении может создавать только изотропную электрическую поляризацию. Такой метаматериал представляет собой две сдвинутые на полпериода одинаковые кубические решетки с разными шаровыми МА в них. Замена металлических цилиндров на диэлектрические возможна. Замена шаров на симметрично расположенные кубики также возможна. Кубики существенно удобнее для моделирования. Но технологически кубики невозможно расположить в узлах решетки без случайных поворотов. В ряде работ было предложено использовать ИС (рис. 4г) как метаматериал с одновременно отрицательными  $\epsilon$  и  $\mu$  [27–31]. Приводилось такое объяснение. Пусть совпадают резонансные частоты каких-либо  $E$ -мод и  $H$ -мод для двух различных шариков. Тогда они дают вклад в поляризацию как электрическую, так и магнитную. Чуть сдвигая частоту вверх, мы как бы должны получить поляризации, сдвинутые по фазе относительно полей. Здесь можно возразить так. Во-первых, все резонансы высокочастотные. Известные изотропные диэлектрики с малыми потерями не обладают очень большими ДП. МА необходимо включить в диэлектрическую осно-

ву, что снижает эффект. Во-вторых, мода отдельного резонатора и поле резонатора в фотонном кристалле при движении волны в нем совершенно различны. Волна заданного направления  $\mathbf{k}$  в кристалле из таких МА соответствует определенной точке на дисперсионной поверхности, и изменение частоты ведет к изменению  $\mathbf{k}$ . От этого зависит направление поляризации. В силу открытости сферического резонатора его моды являются квазисобственными с комплексными резонансными частотами. Они не образуют полную систему функций, а МА обменивается энергией со всеми соседями, включая удаленные. Поле внутри МА при возбуждении рассматриваемой волной состоит из бесконечного набора таких мод и функций непрерывного спектра, т. е. нельзя выделить одну моду. В-третьих, рассматриваемый кристалл обладает сильной ПД, т. е. не является изотропным, поскольку на высоких резонансных частотах возбуждение шара зависит от направления  $\mathbf{k}$ , а отклик не является локальным. В-четвертых, в диэлектрических структурах магнитные свойства можно не вводить, описывая их только тензором ДП. В-пятых, даже если из каких-то соображений вводится магнитная поляризация, необходимо доказывать, что какие-то ее компоненты находятся в противофазе к магнитному полю, чтобы утверждать об отрицательности компонент МП.

#### 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим фотонный кристалл с кубическими ячейками с размером граней  $a$ , заполненными диэлектрической средой с ДП  $\tilde{\epsilon}$ , и диэлектрические тела или МА в ней объема  $V$  с поверхностью  $S$ . Область может быть многосвязной, т. е. объем может состоять из суммы объемов, ограниченных не контактирующими поверхностями. Комплексную ДП  $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)$  МА считаем не зависящей от координаты  $\mathbf{r}$  внутри тела, а границы МА резкими, т. е. ДП при переходе через границу терпит скачок:  $\epsilon^-(\omega, \mathbf{r}) \neq \epsilon^+(\omega, \mathbf{r}) = \tilde{\epsilon}$ ,  $\mathbf{r} \in S$ . При этом на поверхности  $S$  терпит скачок и нормальная компонента электрического поля:  $E_n^- \tilde{\epsilon} = E_n^+ \tilde{\epsilon}$ , а на границе имеются источники — наведенная поверхностная плотность связанных зарядов. Очевидно, что ее интеграл по всей поверхности, т. е. полный связанный заряд, равен нулю. В такой постановке задачу удобно решать методом объемных интегральных уравнений с использованием периодической скалярной ФГ [1]:

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{a^3} \times \sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\left[\tilde{k}_{xk}x + \tilde{k}_{yl}y + \tilde{k}_{zm}z\right]\right)}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2\tilde{\varepsilon}}. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{k}_{xk} = k_x + 2k\pi/a$ ,  $\tilde{k}_{yl} = k_y + 2l\pi/a$ ,  $\tilde{k}_{zm} = k_z + 2m\pi/a$ , что и определяет периодичность по  $\mathbf{k}'$  с точностью до пространственных гармоник. В случае учета потерь  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$ . ФГ (1) удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + k_0^2\tilde{\varepsilon})\tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}').$$

Диэлектрическое тело с ДП  $\varepsilon$  в основе с ДП  $\tilde{\varepsilon}$  создает плотность тока поляризации  $\mathbf{J}_p(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Ток поляризации является дополнительным к току смещения в основе. Отсюда нетрудно видеть, что в среде с отрицательной ДП имеет место сдвиг по фазе на  $-\pi/2$  между током поляризации и полем, тогда как в обычной диэлектрике этот сдвиг равен  $\pi/2$ . Такой подход применим для всех частот и любых рассматриваемых МА. Для сверхнизких частот  $\mathbf{J}_p(\mathbf{r}) = (\varepsilon_0\omega_p^2/\omega_c)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sigma_0\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , где обозначена проводимость на постоянном токе. На низких частотах это проводимость Друде. В оптике существенен член Лоренца. Для тонких и длинных проволочных структур важна только продольная компонента тока, что упрощает расчет. Интеграл от ФГ (1) с плотностью  $\mathbf{J}_p(\mathbf{r})$  дает вектор-потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , дифференцируя который приходим к объемному интегральному уравнению в виде  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon})^{-1}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + k_0^2\tilde{\varepsilon}\mathbf{A}(\mathbf{r}))$ . Далее обозначим  $k = k_0\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ . Кроме этого имеем магнитное поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Можно записать несколько уравнений для поля  $\mathbf{E}$ , для поля  $\mathbf{H}$ , для их комбинации, а также уравнения, нагруженные поверхностными интегралами по границе  $S$ , и без них [1]. В общем случае они имеют форму интегродифференциальных уравнений, поскольку искомые величины находятся как под знаком интеграла, так и под знаком производных. Использование поверхностных интегралов, как видно из рис. 2, 4, неудобно для ал-

горитмизации. Мы будем использовать объемное интегральное уравнение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})(2 + \varepsilon(\mathbf{r})/\tilde{\varepsilon})/3 = \text{p.v.} \int_V \hat{L}\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\varepsilon(\mathbf{r}')/\tilde{\varepsilon} - 1)\mathbf{E}(\mathbf{r}')d^3r'. \quad (2)$$

Здесь обозначен оператор  $\hat{L} \equiv k^2\hat{I} + \nabla \otimes \nabla$ . Интеграл в (2) берется как главное значение по Коши. Зависимость ФГ от  $k$  и  $\mathbf{k}$  опущена, но как раз она определяет дисперсионное уравнение. В правой части (2) не зависящий внутри объема однородных частиц множитель  $\kappa = \varepsilon/\tilde{\varepsilon} - 1$  выносим из-под знака интеграла. В силу ФГ (1) это интегральное уравнение достаточно решить только в одной (нулевой) ячейке периодичности и только внутри частиц, где  $\varepsilon(\mathbf{r}) \neq \tilde{\varepsilon}$ . Поэтому множитель у поля в левой части есть  $1 + \kappa/3$ . ФГ обеспечивает правильное взаимовлияние всего бесконечного ансамбля МА. В (2) можно использовать соотношение  $\hat{L}\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \hat{L}'\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , где штрих означает дифференцирование по штрихованным координатам (точке истока). Поле  $\mathbf{E}$  будем аппроксимировать объемными кубическими кусочно-постоянными конечными элементами, нумеруя их одномерным индексом  $m$ . Пусть таких элементов  $M$ . Метод Галеркина для (2) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)  $(1 + \kappa/3)\hat{I}E = \kappa\hat{G}E$  размерности  $3M$ , где  $\hat{I}$  — единичная матрица размерности  $3M$ ,  $E$  — вектор-столбец размерности  $3M$ , состоящий из вектор-столбцов  $E^x, E^y$  и  $E^z$  размерности  $M$ . Значения  $E_m^x, E_m^y$  и  $E_m^z$  соответствуют значениям соответствующих компонент электрического поля в элементе с номером  $m$ . Матрица  $\hat{G}$  размерности  $3M$  имеет блочную структуру  $\hat{G}_{mm'}^{\alpha\beta}$ , где  $\alpha, \beta$  принимают значения  $x, y, z$ . Дисперсионное уравнение имеет вид равенства нулю определителя указанной СЛАУ. Находить корни такого уравнения весьма сложно. Удобнее использовать стационарный квадратичный функционал, получающийся умножением (2) скалярно на  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$  и интегрированием по объему. Его удобно разрешить относительно  $k^2$ :

$$k^2 = \frac{(1 + \kappa/3) \int_V |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r - \kappa \cdot \text{p.v.} \int_V \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla \otimes \nabla \tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' d^3r}{\int_V \int_V \mathbf{E}^* \tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r' d^3r}. \quad (3)$$



Правая часть (3) нелинейно зависит от  $k$ , поэтому уравнение (3) следует решать совместно с уравнением (2) итерационно. Удобно сначала найти приближенное решение дисперсионного уравнения, задать одну из амплитуд, например,  $E_1^x$ , что задает амплитуду волны, и решить СЛАУ прямыми методами. Это позволяет уточнить решение дисперсионного уравнения и далее использовать итерации. Если по каждой из координат разбить частицу на 10 конечных элементов, то всего получим  $10^3$  элементов, а размерность задачи будет  $3 \cdot 10^3$ . Для матрицы СЛАУ и функционала (3) можно написать квадратурные формулы. Диагональные элементы при вычислении интегралов в смысле главного значения можно приравнять нулю или использовать другие приближенные оценки.

В принципе дисперсионное уравнение позволяет при задании  $\mathbf{k}$  определить  $\omega$ . Без учета диссипации  $\mathbf{k}$  можно задавать произвольно. Фиксируя  $k_0$ , можно построить поверхность изочастот в  $\mathbf{k}$ -пространстве. Величина  $\mathbf{v}_g = \nabla\omega(\mathbf{k})$  есть групповая скорость, показывающая направление движения энергии. В случае диссипации групповую скорость использовать нельзя, следует вычислять усредненный по ячейке вектор Пойнтинга  $\langle \mathbf{S} \rangle$ . Он может не совпадать по направлению с  $\mathbf{v}_g$ . При этом вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$  является комплексным. Подлежащих определению скалярных компонент становится больше (шесть) и одного комплексного дисперсионного уравнения уже недостаточно.  $\mathbf{k}$ -пространство также становится шестимерным. Необходимо вычислять вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)/2$  и использовать условие  $\mathbf{S}/|\mathbf{S}| = \mathbf{k}''/|\mathbf{k}''|$ . Его смысл в том, что направление затухания волны  $\mathbf{k}''$  совпадает с направлением движения энергии.

Поскольку дисперсионное уравнение в виде равенства нулю определителя большого порядка очень сложное, более простой приближенный подход может быть основан на использовании уравнения в виде функционала, построенного на основе (2). Для этого умножим (2) на  $\mathbf{E}^*$  и проинтегрируем по объему или МА. Приближенное уравнение получается, если выбрать электрическое поле (или ток) из физических соображений. Для проволочных МА, когда глубина проникновения меньше их радиуса, вместо поля удобно использовать осевой ток, а граничные условия налагать на поверхности проволочек. Это приводит к простым дисперсионным уравнениям [26]. Для МА в виде однородного диэлектрического цилиндра или шара удобно использовать явные низкочастотные решения уравнения Гельмгольца внутри и определять неизвестные коэффициенты

из условий экстремума функционала. Часто, например для тонких и длинных цилиндров, можно пренебречь какими-то компонентами поля (радиальной и/или азимутальной).

## 5. ГОМОГЕНИЗАЦИЯ

Гомогенизация — процедура (в общем случае неоднозначная) получения эффективных параметров однородных (гомогенных) сред, эквивалентных электродинамически в некотором смысле исходным ИС, основанная на решении обратных задач. В общем случае для нее нужны некоторые процедуры усреднения. Зависимость методов усреднения — одна из причин неоднозначности. Другая причина заключается в неоднозначности модели гомогенной среды. Третья причина заключается в разных методах гомогенизации. Один из первых методов, примененный в теории искусственных диэлектриков, — использование параметров дифракции [17]. Для выполнения условий теоремы погашения ИС должна иметь много периодов по каждому измерению. Данный подход электродинамически сложный, особенно для 3D-задач. Второй метод основан на сравнениях расчетов дисперсии по электродинамическим моделям (например, по уравнениям типа (2), (3)) с дисперсией на основе уравнения Френеля. Он относительно простой, если получено микроскопическое дисперсионное уравнение. Третий способ, который будем использовать здесь, это гомогенизация на основе вычисления усредненных по ячейке периодичности поляризации для волны, определяемой волновым числом  $k_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Концептуально он соответствует определению параметров макроскопической электродинамики путем усреднения по физически бесконечно малому объему. Однако размер ячейки периодичности  $a$  не обязательно мал по сравнению с длиной волны. Во всяком случае, при строгом решении уравнений Максвелла, усреднения возможны при любых соотношениях, если только не накладывається условие  $a \ll \lambda$ . Это условие важно для введения локальных проницаемостей. Введем усредненные по ячейке поля, поляризации и индукции, например,

$$\langle E_x \rangle = \frac{1}{a^3} \int_V E_x(\mathbf{r}) d^3r.$$

Электрическую поляризацию запишем как

$$\langle \mathbf{P}^e \rangle = \varepsilon_0 (\hat{\varepsilon}_e - \hat{\varepsilon} \hat{I}) \langle \mathbf{E} \rangle + c^{-1} \hat{\xi} \langle \mathbf{H} \rangle.$$

Здесь мы рассмотрели бианизотропную модель. Аналогично для магнитной поляризации

$$\langle \mathbf{P}^m \rangle = \mu_0 (\hat{\mu}_e - \hat{I}) \langle \mathbf{H} \rangle + c^{-1} \hat{\zeta} \langle \mathbf{E} \rangle.$$

Введем намагниченность  $\mathbf{M} = (\hat{\mu}_e - \hat{I}) \mathbf{H}$ . Записывая другие усредненные компоненты, получаем СЛАУ для определения эффективных параметров. Подход годится для анизотропной и бианизотропной моделей сред с учетом соотношений симметрии для материальных параметров. При большом числе неизвестных можно написать переопределенную СЛАУ и решать ее методом регуляризации. В случае изотропной модели  $\hat{\xi} = \hat{\zeta} = 0$ . В случае биизотропной модели эти параметры — ненулевые псевдоскаляры. В случае диэлектрической анизотропной среды имеем три уравнения:

$$\langle P_x^e \rangle = \varepsilon_0 ((\varepsilon_{exx} - \tilde{\varepsilon}) \langle E_x \rangle + \varepsilon_{exy} \langle E_y \rangle + \varepsilon_{exz} \langle E_z \rangle)$$

и два аналогичных для других компонент. При пренебрежении диссипацией имеют место условия симметрии Онзагера–Казимира  $\varepsilon_{e\alpha\beta} = \varepsilon_{e\beta\alpha}$ , т.е. тензор является симметричным. При диссипации тензор эрмитовым не будет, но будет выполнено условие  $\varepsilon'_{e\alpha\beta} = \varepsilon'_{e\beta\alpha}$ . Из трех уравнений определяются три величины, если учесть условия симметрии. Уравнения упрощаются при приведении тензора ДП к главным осям. Итак, по трем поляризациям можно определить три компоненты тензора ДП. Если есть только два тензора  $\hat{\varepsilon}_e$  и  $\hat{\mu}_e$  и их можно одновременно привести к диагональному виду, то шесть в общем случае комплексных компонент можно определить из шести независимых комплексных скалярных уравнений Максвелла. Однако возможность такого приведения зависит от структуры ИС. Например, пусть у нас имеется ИС с магнитными и электрическими диполями в узлах двух одинаковых вложенных кубических решеток. Мы можем изготовить ИС, сдвинув решетки друг относительно друга на произвольное расстояние. Формально мы также можем повернуть одну решетку относительно другой на три произвольных угла относительно разных осей. Наверяд ли следует реализовывать такой мысленный эксперимент, но это отличает ИС от природных сред, где симметрия существенна. В случае только диэлектрической модели ИС без диссипации условия Онзагера–Казимира выполняются и в общем случае тензор приводится к диагональному виду. Может оказаться, что более удобна система координат, в которой достаточно определить шесть его компонент из шести уравнений Максвелла, а не три. Для интересующей нас изотропной ИС достаточно за-

писать соотношения только для одной компоненты. Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= \tilde{\varepsilon} + \varepsilon_0^{-1} \langle P_x^e \rangle / \langle E_x \rangle, \\ \mu_e &= 1 + \mu_0^{-1} \langle P_x^m \rangle / \langle H_x \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Получив решение задачи для  $\mathbf{E}$ , поле  $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  находится как  $H = \hat{A}E$ , где введенная матрица определяется интегродифференциальным оператором получения магнитного поля. Рассмотрим вычисление поляризацій:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}^e \rangle &= \frac{1}{a^3} \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3r, \\ \langle \mathbf{M} \rangle &= \frac{1}{a^3} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}_p(\mathbf{r}) d^3r. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь имеется плотность заряда  $\rho(\mathbf{r}) = i\nabla \cdot \mathbf{J}_p / \omega = -\varepsilon_0 \nabla \cdot [(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \mathbf{E}]$ . Поскольку мы рассматриваем МА из однородного диэлектрика, внутри него  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ . Поэтому следует вычислить поверхностную дивергенцию, связанную с наведенной поверхностной плотностью заряда  $\rho_S = \varepsilon_0 E_\nu (1 - \tilde{\varepsilon} / \varepsilon)$ . Здесь  $E_\nu$  — внешняя нормальная координата. Поскольку  $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$ , имеем  $\tilde{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{E} = -(\tilde{\varepsilon} / \varepsilon) \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon$ ,  $\nabla \varepsilon = (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)$ , и плотность заряда пропорциональна дельта-функции от нормальной координаты. Поэтому первый интеграл в (5) становится поверхностным:

$$\langle \mathbf{P}^e \rangle = \frac{1}{a^3} \oint_S \rho_S(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^2r.$$

Обозначим  $\chi = \varepsilon / \tilde{\varepsilon} - 1$ . Уравнение (2) можно записать в следующей форме:  $\mathbf{E} = \hat{G}(\chi \mathbf{E})$ ,  $\hat{G} = \hat{L} \hat{\hat{G}}(\ )$ , где  $\hat{\hat{G}}$  — интегральный оператор с ядром  $\tilde{G}$ ,  $\hat{L} = \nabla \otimes \nabla + k^2$  — дифференциальный оператор. Поскольку  $\nabla \cdot \nabla \otimes \nabla = \nabla \cdot \nabla^2$  и  $(\nabla^2 + k^2) \tilde{G} = -\delta(\mathbf{r})$ , нетрудно видеть, что действие оператора дивергенции слева на интегральное уравнение дает тождество. Решая это уравнение, следует определять нормальную компоненту электрического поля и поверхностную плотность заряда.

Рассмотрим ряд простых случаев. Пусть имеем фотонный кристалл из проволочных колец, ориентированных вдоль оси  $z$ . Для него  $\varepsilon_e = 1$ ,  $\mu_{ezz} = \mu$ ,  $\mu_{exx} = \mu_{eyy} = 1$ . Имеем одну компоненту электрического тока  $J_\varphi = \sigma(\omega) E_\varphi$ . Пусть для простоты радиус проволочки меньше толщины скин-слоя, а ток распределен равномерно. Соленоидальный ток создает две компоненты вектор-потенциала [25]:

$$A_\rho = \int_V J_\varphi \sin(\varphi - \varphi') \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r',$$

$$A_\varphi = \int_V J_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r'.$$

Интегрирование проводится по объему кольца, а ток можно вынести из-под интеграла, поскольку он постоянен. Считаем проволочки тонкими, а поле полностью принадлежащим в них. Нам удобнее использовать обычную ФГ

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |4\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^{-1} \exp(-ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|),$$

а затем ее следует периодически продолжить. Имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho^{-1} \partial_\rho(\rho A_\rho) + \rho^{-1} \partial_\varphi A_\varphi,$$

$$G_{lm} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-in(\phi - \phi')) \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}|z - z' - ma|) J_n(\kappa\rho) J_n(\kappa(\rho' + la))}{4\pi\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}} \kappa d\kappa. \tag{6}$$

Очевидно, что  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Вычисляя интегральное уравнение в нулевой ячейке, получаем решение задачи. Чтобы не переходить в тороидальную систему координат, мы, оставаясь в цилиндрической, заменим круглое сечение проволоки радиуса  $r_0$  на прямоугольное площади  $4r_0^2$ , почти не изменяя результат. Считая поле постоянным, имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi - \varphi') \exp(-in(\varphi - \varphi')) d\varphi' = i(\delta_{n,-1} - \delta_{n,1}),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \varphi') \exp(-in(\varphi - \varphi')) d\varphi' = \delta_{n,-1} + \delta_{n,1}.$$

Обозначая интеграл в (6) как  $g_{nim}(\rho, z | \rho', z')$ , получаем

$$A_\rho = i \int (g_{-1lm}(\rho, z | \rho', z') - g_{1lm}(\rho, z | \rho', z')) \rho' d\rho' dz' = 0,$$

а для ФГ запишем выражения

$$G_{xlm} = \exp(-ilk_x a - imk_z a) G_{lm},$$

$$G_{ylm} = \exp(-ilk_y a - imk_z a) G_{lm}.$$

ФГ  $G_{xlm}$  соответствует источник, расположенный в точке  $x = la, y = 0, z = ma$ , а ФГ  $G_{ylm}$  — источник, расположенный в точке  $x = 0, y = la, z = ma$ . Однако поля от всех источников рассматриваются в нулевой ячейке. Поэтому с помощью суммирования

$$\tilde{G} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-ia[mk_z + l(k_x + k_y)]) G_{lm}$$

получаем периодическую ФГ, действующую в нулевой ячейке, связанной с началом координат. Обозначим  $\psi_{lm}(k_x, k_y, k_z) = a[mk_z + l(k_x + k_y)]$ . Для ФГ имеем [25]

$$A_\varphi = 2 \int g_{1lm}(\rho, z | \rho', z') \rho' d\rho' dz'.$$

Мы воспользовались равенством  $J_{-1}(x) = -J_1(x)$  для функций Бесселя. Вектор-потенциал имеет одну компоненту, не зависящую от  $\varphi$ . Электрическое поле имеет три компоненты  $E_\rho = \partial_\rho A_\varphi / (i\omega\epsilon_0)$ ,  $E_\varphi = k_0^2 A_\varphi / (i\omega\epsilon_0)$ ,  $E_z = \partial_z A_\varphi / (i\omega\epsilon_0)$ . Магнитное поле имеет две компоненты  $H_\rho = -\partial_z A_\varphi$  и  $H_z = \rho^{-1} \partial_\rho(\rho A_\varphi)$ . В декартовой системе имеются все шесть компонент. Компонентами  $E_\rho$  и  $E_z$  внутри проволочки можно пренебречь по сравнению с постоянной азимутальной компонентой поля. Внутри проволочки электрическое поле  $E_\varphi$  равно сумме всех продуцированных периодической ФГ откликов:

$$E_\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-ia[mk_z + l(k_x + k_y)]) E_{\varphi lm}, \tag{7}$$

$$E_{\varphi lm} = \frac{\pi k_0^2 \sigma(\omega)}{i\omega\epsilon_0} \int \rho' d\rho' dz' \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}|z - z' - ma|) J_1(\kappa\rho) J_1(\kappa(\rho' + la))}{\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}} \kappa d\kappa. \tag{8}$$

В (7) мы проинтегрировали по углу, поэтому интегрирование в (8) теперь выполняется по сечению провода. Считая поле постоянным, умножим (7) на  $\rho$ , проинтегрируем еще раз по сечению и сократим на поле. Слева в (7) останется  $4Rr_0^2$ . Правую часть (8) рассмотрим отдельно для нулевого и ненулевого значений индекса  $m$ , обозначив  $\alpha = \sqrt{\kappa^2 - k_0^2}$ . В первом случае область интегрирования по штрихованной координате разбиваем на две. Результат имеет вид

$$f_0(\kappa, k_0, r_0) = \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-r_0}^{r_0} \exp\left(-\sqrt{\kappa^2 - k_0^2} |z - z'|\right) dz dz' = \frac{4r_0}{\alpha} \left(1 - \frac{1 - \exp(-2\alpha r_0)}{2\alpha r_0}\right).$$

Если величина  $\alpha$  мала, то  $\kappa^2 \approx k_0^2$  и  $f = 4r_0^2$ . Во втором случае интегралы с положительными и равными по модулю отрицательными индексами равны

$$f_m(\kappa, k_0, r_0) = f_{-|m|}(\kappa, k_0, r_0) = -4 \exp(-\alpha |m| a) \left(\frac{\text{sh}(\alpha r_0)}{\alpha}\right)^2.$$

Переходя к суммированию по положительным индексам, получаем  $2f_m(\kappa, k_0, r_0)$ . Вычисляя интегралы по  $\rho'$ , будем интегрировать по областям  $la - R - r_0 < \rho' < la - R + r_0$ ,  $la + R - r_0 < \rho' < la + R + r_0$ . Получаем

$$I_l(\kappa, r_0, R) = \int_{la-R-r_0}^{la-R+r_0} J_1(\kappa\rho) \rho d\rho + \int_{la+R-r_0}^{la+R+r_0} J_1(\kappa\rho) \rho d\rho \approx 2r_0 [(la-R) J_1(\kappa(la-R)) + (la+R) J_1(\kappa(la+r))].$$

Здесь  $R$  — радиус кольца. Мы воспользовались малостью радиуса проволоочки и теоремой о среднем значении интеграла. Имеем  $I_{-l} = I_l$ , поэтому суммируем по положительным индексам, удваивая  $I_l$ . Получим аналогичный результат для комплексно-сопряженного дисперсионного уравнения. Учитывая, что  $\sigma(\omega) = i\omega\varepsilon_0 (\varepsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_c))$  и перемножая оба результата, получаем уравнение

$$1 = \left(\frac{\pi k_0^2 |\sigma(\omega)|}{\omega\varepsilon_0}\right)^2 \times \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-i\psi_{ml}(k_x, k_y, k_z)) \times (2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{l0}) \times \int_0^{\infty} \frac{f_m(\kappa, k_0, r_0) I_l(\kappa, k_0, r_0) J_1(\kappa R)}{r_0 \sqrt{\kappa^2 - k_0^2}} \kappa d\kappa \right|^2. \quad (9)$$

Оно связывает частоту и волновой вектор. Этот результат показывает, что в некоординатных задачах решения принимают сложный вид даже при сильных упрощениях. В низкочастотном пределе  $\alpha = \kappa$ , и из (9) можно явно выразить  $k_0^2$ . Магнитный момент для задачи принимает вид  $\langle M_z \rangle = J_\varphi (\pi r_0 R)^2 / a^3$ . Для решения вопроса о знаке МП необходимо вычислить усредненную компоненту поля:

$$\langle H_z \rangle = \frac{1}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz H_z(\mathbf{r}, \mathbf{k}, k_0).$$

Такие вычисления удобнее проводить в декартовой системе координат. Знак МП определяет формула  $\mu = 1 + \langle M_z \rangle / \langle H_z \rangle$ . Если диссипации нет, намагниченность должна быть в противофазе к полю, т.е. отрицательной, и по модулю превышать единицу.

Покажем, как эта задача решается в декартовой системе. Далее вместо (9) выведем новое дисперсионное уравнение, считая, рамку прямоугольной. Кольцо радиуса  $R$  заменим прямоугольной рамкой с плечом  $b = R\sqrt{\pi}$  и сечением  $4\delta^2 = \pi r_0^2$ . Вынесем из-под интеграла плотность  $J$ , направленную по часовой стенке вдоль осей  $x$  и  $y$ . Получаем компоненты вектор-потенциала и поля:

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{-16iJ}{a^3} \times \sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\left[\tilde{k}_{xk}x + \tilde{k}_{yl}y + \tilde{k}_{zm}z\right]\right)}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2} \times \frac{\sin(\tilde{k}_{zm}\delta)}{\tilde{k}_{zm}} \frac{\sin(\tilde{k}_{xk}b/2)}{\tilde{k}_{xk}} \frac{\sin(\tilde{k}_{yl}\delta)}{\tilde{k}_{yl}} \times \sin(\tilde{k}_{yl}b/2), \quad (10)$$

$$A_y(\mathbf{r}) = \frac{16iJ}{a^3} \times \sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\left[\tilde{k}_{xk}x + \tilde{k}_{yl}y + \tilde{k}_{zm}z\right]\right)}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2} \times \frac{\sin\left(\tilde{k}_{zm}\delta\right)}{\tilde{k}_{zm}} \frac{\sin\left(\tilde{k}_{xk}b/2\right)}{\tilde{k}_{xk}} \frac{\sin\left(\tilde{k}_{yl}\delta\right)}{\tilde{k}_{yl}} \times \sin\left(\tilde{k}_{xk}b/2\right), \quad (11)$$

$$H_z = \partial_x A_y(\mathbf{r}) - \partial_y A_x(\mathbf{r}) = -\frac{4Jb^2\delta^2}{a^3} \times \sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\left[\tilde{k}_{xk}x + \tilde{k}_{yl}y + \tilde{k}_{zm}z\right]\right)}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yk}^2 + \tilde{k}_{zk}^2 - k_0^2} \times F_{mlk}(\mathbf{k}), \quad (12)$$

$$F_{mlk}(\mathbf{k}) = \text{sinc}\left(\tilde{k}_{zm}\delta\right) \text{sinc}\left(\tilde{k}_{xk}b/2\right) \times \text{sinc}\left(\tilde{k}_{yl}b/2\right) \left[ \left(\tilde{k}_{yl}\right)^2 \text{sinc}\left(\tilde{k}_{yl}\delta\right) + \left(\tilde{k}_{xk}\right)^2 \times \text{sinc}\left(\tilde{k}_{xk}\delta\right) \right]. \quad (13)$$

Теперь надо усреднить поле (12). Усредняем следующим образом:

$$f\left(\tilde{k}_{xk}\right) = \frac{1}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-i\tilde{k}_{xk}x\right) dx = \frac{2 \sin\left(\tilde{k}_{xk}a/2\right)}{\tilde{k}_{xk}a} = \text{sinc}\left(\tilde{k}_{xk}a/2\right).$$

Поэтому

$$\langle H_z \rangle = -\frac{4Jb^2\delta^2}{a^3} \times \sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}\left(\tilde{k}_{xk}a/2\right) \text{sinc}\left(\tilde{k}_{yl}a/2\right) \text{sinc}\left(\tilde{k}_{zm}a/2\right)}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2} \times F_{mlk}(\mathbf{k}). \quad (14)$$

Функции  $\text{sinc} = \sin(x)/x$  четные и быстро убывают. В (14) существенный вклад вносит нулевой член суммы, но строгий результат требует учета большого числа членов. Теперь запишем

$$\chi_{ezz} = \mu - 1 = -\frac{1}{\sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}\left(\tilde{k}_{xk}a/2\right) \text{sinc}\left(\tilde{k}_{yl}a/2\right) \text{sinc}\left(\tilde{k}_{zm}a/2\right)}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2} F_{mlk}(\mathbf{k})}. \quad (15)$$

В (15) следует подставлять решение микроскопического дисперсионного уравнения. Если же подставить квадрат волнового числа из макроскопического уравнения Френеля  $k_0^2 = (k_x^2 + k_y^2)/\mu_{ezz} + k_z^2$ , то, задавая  $\mathbf{k}$ , получаем неявное уравнение. Его решение симметрично по волновому вектору,  $\mu(\mathbf{k}) = \mu(-\mathbf{k})$ . Упрощение может быть достигнуто выбором направления распространения волны. Так, выбирая  $k_x = k_y$ ,  $k_z = 0$ , из уравнения (9) найдем частоту и подставим в (15). Имеем  $F_{000}(\mathbf{k}_\perp) = 2\text{sinc}(k_x\delta) [k_x \text{sinc}(k_x b/2)]^2$  и следующее нулевое приближение:

$$\mu_{(0)} = 1 - \frac{2k_x^2 - k_0^2}{2[k_x \text{sinc}(k_x a/2) \text{sinc}(k_x b/2)]^2}.$$

Оно весьма грубое, что определяется медленной сходимостью ряда (15). Для медленной волны знак восприимчивости  $\chi_{ezz}^{(0)}$  отрицательный. Из уравнения Френеля следует  $2k_x^2 = \mu k_0^2$ , поэтому в низкочастотном пределе имеет место решение  $\mu_{(0)} = 1$ . Если  $\mu < 0$ , то волновые числа мнимые. Это возможно

при брэгговском резонансе в запрещенной зоне. Для медленной волны максимальное замедление имеет место при  $k_x = k_y = \pi/a$ , откуда получаем максимальное значение  $\mu = 2\pi^2/(k_0 a)^2 > 1$ . Частоту максимального замедления можно найти из дисперсионного уравнения. Выше частоты резонанса в запрещенной зоне  $\mu < 0$ . Однако это так в предположении, что уравнение Френеля еще справедливо. Такой подход для кристалла из металлических рамок использован в работе [26]. Здесь имеет место аналогия с кристаллооптикой, для которой сильная ПД и брэгговские резонансы наступают в рентгеновском диапазоне. Используя же приближенную формулу с учетом только одного члена ряда, получаем

$$\mu_{(0)} = 1 - \frac{2\pi^2 - k_0 a}{8\text{sinc}^2(\pi b/(2a))} \approx 1 - \frac{2\pi^2 - k_0 a}{8}.$$

Мы учли, что  $b \ll a$ . В общем случае обозначим сумму в знаменателе (15) как

$$S = S_0(\mathbf{k}) + \tilde{S}(\mathbf{k}) + \tilde{S}(-\mathbf{k}),$$



$$\begin{aligned} \tilde{S} = & S_{00m}(\mathbf{k}) + S_{k00}(\mathbf{k}) + S_{0l0}(\mathbf{k}) + S_{0lm}(\mathbf{k}) + \\ & + S_{k0m}(\mathbf{k}) + S_{kl0}(\mathbf{k}) + S_{klm}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_0(\mathbf{k}, k_0) &= \frac{\text{sinc}(k_x a/2) \text{sinc}(k_y a/2) \text{sinc}(k_z a/2)}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2} \times \\ & \times F_{000}(\mathbf{k}), \\ S_{00m}(\mathbf{k}, k_0) &= \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sinc}(\tilde{k}_{xm} a/2) \text{sinc}(\tilde{k}_{ym} a/2) \text{sinc}(\tilde{k}_{zm} a/2)}{k_x^2 + k_y^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2} \times \\ & \times F_{00m}(\mathbf{k}), \\ S_{0lm}(\mathbf{k}, k_0) &= \\ &= \sum_{l,m=1}^{\infty} \frac{\text{sinc}(k_x a/2) \text{sinc}(\tilde{k}_{yl} a/2) \text{sinc}(\tilde{k}_{zm} a/2)}{k_x^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2} \times \\ & \times F_{0lm}(\mathbf{k}), \\ S_{klm}(\mathbf{k}, k_0) &= \\ &= \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \frac{\text{sinc}(k_x a/2) \text{sinc}(\tilde{k}_{yl} a/2) \text{sinc}(\tilde{k}_{zm} a/2)}{k_x^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2} \times \\ & \times F_{klm}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Все остальные суммы вычисляются аналогично: тройные, двойные и однократные, взятые по положительным индексам. Тогда

$$\mu(\mathbf{k}, k_0) = 1 - \frac{1}{S_0(\mathbf{k}) + \tilde{S}(\mathbf{k}) + \tilde{S}(-\mathbf{k})}.$$

Имеем  $\tilde{S}(\mathbf{k}) = \tilde{S}(-\mathbf{k})$ , поэтому  $\mu(-\mathbf{k}, k_0) = \mu(\mathbf{k}, k_0)$ . При  $\mathbf{k} = 0$  решением дисперсионного уравнения является  $k_0 = 0$ , поэтому  $\mu(0, 0) = 1$ . При малых размерах  $\delta$  и  $b$  имеем  $\mu(\mathbf{k}, k_0) \approx 1$ . Сильная ПД означает, что нельзя получить зависимость  $\mu(\omega)$ : результат существенно зависит от  $\mathbf{k}$ . Полученное материальное уравнение нелокально: оно относится ко всей области ячейки, а локальность наступает при  $\lambda \gg a$ , т. е. при  $\mathbf{k}^2 \approx k_0^2$ , когда и  $\mu(\mathbf{k}, k_0) \approx 1$ . Путем увеличения размеров рамки можно получить значения МП, отличные от единицы и даже отрицательные, но не факт, что реально достигается отрицательная МП в обычном понимании: в этом случае модель становится весьма приближенной, а результат зависит от  $\mathbf{k}$ .

Заменяем металлическое кольцо тонким диэлектрическим. Пренебрежем поперечными полями по сравнению с тороидальным. По кольцу идет ток поляризации, который возбуждает такое же поле, как и ток проводимости. Для металлического кольца нет разницы: высокочастотный ток в той или иной степени тоже есть ток поляризации. Для диэлектрического кольца отсутствует ток на нулевой частоте. В приведенных выше формулах для проводимости достаточно положить  $\omega_P^2 = 0$ . Весьма заманчиво получить магнитные свойства ИС на структурах типа диэлектрические кольца, диэлектрические спирали и вообще на МА с соленоидальными токами поляризации. Однако токи должны быть строго соленоидальными. Для диэлектрического кольца радиуса  $R$  должно выполняться условие  $k_0 \sqrt{\epsilon} R \ll 1$ , что для больших ДП приводит к весьма малым радиусам и малым эффективным проницаемостям. ДП диэлектрического кольца, расположенного в диэлектрической основе, должна сильно отличаться от ее ДП. Диэлектрическое кольцо должно быть очень тонким, чтобы можно было пренебречь поперечными полями и резонансами. Это приводит к малым эффективным параметрам. В отличие от металла, на низких частотах ток поляризации мал, а на высоких частотах приближение работает плохо. Тем не менее, чисто формально можно использовать полученные результаты для диэлектрических колец. В вакууме такое кольцо является резонатором с  $H_{01\delta}$ -топом колебания (см. [29]). В фотонном кристалле такой резонатор является источником волны и в то же время возбуждается ей. Поляризация и ток кольца должны быть в противофазе компоненте  $H_z$ . При отрицательной компоненте МП фотонный кристалл становится гиперболическим метаматериалом. Рассматривая квадратную диэлектрическую рамку, можно использовать компоненты (10), (11) для получения дисперсионного уравнения. Электрическое поле определяется через вектор-потенциал как  $\mathbf{E} = (k_0^2 + \nabla \nabla \cdot) \hat{G}((\epsilon - 1) \mathbf{E})$ , где  $\mathbf{A} = i\omega \epsilon_0 \hat{G}((\epsilon - 1) \mathbf{E})$ , а  $\hat{G}$  — интегральный оператор с ядром (1). Использовать алгоритм с ядром  $\nabla \otimes \nabla \hat{G}$  проблематично в силу неинтегрируемой особенности. Считая поле соленоидальным внутри кольца и перенося оператор  $\nabla \cdot$  на  $(\epsilon - 1) \mathbf{E}$ , получим поверхностные интегралы от поверхностной плотности заряда. Поскольку мы пренебрегли на границе кольца нормальными компонентами поля, пренебрегли и поверхностными зарядами, и хорошим приближением является интегральное уравнение  $\mathbf{E} = k_0^2 \hat{G}((\epsilon - 1) \mathbf{E}) = k_0^2 (\epsilon - 1) \hat{G}(\mathbf{E})$ . Диспер-

сионное уравнение на его основе запишем в виде

$$\int_V |\mathbf{E}|^2 d^3r = k_0^2 (\varepsilon - 1) \times \int \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r d^3r'. \quad (16)$$

В декартовой системе удобнее рассмотреть прямоугольную рамку. Считая теперь поле постоянным и имеющим одну постоянную компоненту  $E_x$  или  $E_y$  в каждом плече,  $E_x(x, -b/2, z) = -E_x(x, b/2, z) = E_y(b/2, y, z) = -E_y(-b/2, y, z) = E$ , получаем уравнение

$$1 = \frac{4k_0^2 \delta^2 b (\varepsilon - 1)}{a^3} \sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{|G_{klm}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2},$$

где

$$|G_{klm}(\mathbf{k})|^2 = \text{sinc}^2(\tilde{k}_{zm}\delta) \text{sinc}^2(\tilde{k}_{xk}b/2) \times \text{sinc}^2(\tilde{k}_{yl}b/2) \left[ \sin^2(\tilde{k}_{xk}b/2) + \sin^2(\tilde{k}_{yl}b/2) \right].$$

Задавая вектор  $\mathbf{k}$ , из этого уравнения можно определить волновое число:

$$k_0^2 = \frac{1}{\frac{4\delta^2 b (\varepsilon - 1)}{a^3} \sum_{k,l,m=-\infty}^{\infty} \frac{|G_{klm}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 - k_0^2}}. \quad (17)$$

Уравнение (17) можно решать итерационно. Оно также подходит для металлической рамки, если в качестве  $\varepsilon$  взять ДП металла. В случае наличия основы ДП  $\tilde{\varepsilon}$  необходимо сделать замены  $k_0^2 \rightarrow k_0^2 \tilde{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/\tilde{\varepsilon}$ . Считая  $\mathbf{k} = \mathbf{x}_0 k_x$ ,  $k_x \approx k_0 \ll \pi/a$ , учитывая только большой нулевой член суммы, получим  $k_0^2 \approx k_x^2 / [1 + 4\delta^2 b (\varepsilon - 1)/a^3]$ . Приближение справедливо, если  $4\delta^2 b (\varepsilon - 1)/a^3 \ll 1$ . В этом случае  $k_x \approx k_0$ . Конечно, уравнение (17) весьма приближенное. Задавая поле в виде циклического тока поляризации, мы наложили условия симметрии:  $E_x(x, y, z)$  — четная функция по  $x$ ,  $z$  и нечетная по  $y$ , а  $E_y(x, y, z)$  — четная функция по  $y$ ,  $z$  и нечетная по  $x$ . В силу симметрии такое решение может существовать, но могут быть решения с другими соотношениями четности–нечетности. Решая задачу в общем виде, например, методом конечных элементов, мы можем найти волны всех возможных симметрий и соответствующие им дисперсии. Уравнение (17) при полностью четном поле будет четным. При дифракции волн на метаматериале конечных

размеров указанная симметрия полей, вообще говоря, не выполняется. Она означает наличие двух электрических стенок, перпендикулярных плоскости рамки, и может быть реализована при сдвиге фаз  $\pi$  на ячейку по обеим координатам, что может выполняться в запрещенной зоне, которой соответствует полоса заграждения фильтра из конечного образца. При дифракции на метаматериале в низкочастотном пределе реализуется сдвиг фаз, близкий к нулю. Использование постоянных по значениям компонент электрического поля внутри рамки — наиболее жесткое ограничение модели. Но именно оно позволило получить простой явный результат.

## 6. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ $\varepsilon'_e$ И $\mu'_e$ В МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Классическая модель Лоренца для разреженного газа осцилляторов (электрических диполей или осцилляторов) с частотами  $\omega_{0el}$  дает выражение для ДП [13]:

$$\varepsilon_L(\omega) = 1 + \sum_{l=1}^N \frac{\omega_{el}^2}{\omega_{0el}^2 - (\omega^2 - i\omega\omega_{cl})}. \quad (18)$$

Здесь квадрат частоты  $\omega_{el}^2 = e^2 N_l / (\varepsilon_0 m_l)$  определяется концентрацией  $N_l$  и массой заряженных частиц сорта  $l$ , а частота  $\omega_{cl}$  релаксации импульса (частота столкновений) определяет уширение спектральной линии. Квантовое описание на основе полуклассического приближения дает такую же форму ДП [6, 13, 32]:

$$\varepsilon_L(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \times \sum_{\nu} \sum_k N_k^{\nu} \sum_{l \neq k} \frac{f_{lk}^{\nu}}{(\omega_{0lk}^{\nu})^2 - (\omega^2 - i\omega\omega_{lk}^{\nu})}. \quad (19)$$

Здесь суммирование по индексам  $\nu$  идет по всем сортам атомов, по индексам  $k$  — по всем энергетическим уровням, по  $l$  — по всем разрешенным переходам с уровня  $k$ . Соответственно  $N_k^{\nu}$  — число атомов типа  $\nu$  в состоянии  $k$ ,  $\omega_{0\nu} = \omega_{lk}^{\nu} = (E_k - E_l) \hbar$ ,  $\omega_{lk}^{\nu}$  — ширина спектральной линии перехода  $k \rightarrow l$ , связанная со временем жизни. Если в возбужденных состояниях атомов больше, чем в основном, то  $\varepsilon'' < 0$  и среда является активной. Сила осциллятора  $f_{lk}^{\nu} = 2m_e |\omega_{0lk}^{\nu}| |d_{lk}^{\nu}|^2 / (3e_2 \hbar g_l)$  дипольного перехода для атома с дипольным моментом  $\mathbf{d}^{\nu}$  определяется квадратом модуля матричного элемента  $d_{lk}^{\nu} = -e \langle \psi_l | \mathbf{r} | \psi_k \rangle$  [6, 32]. В общем случае при вычислении (19) следует суммировать по всем элект-

рическим мультипольным переходам, удовлетворяющим правилам отбора. Нетрудно видеть, что может выполняться условие  $\varepsilon'_L(\omega) < 0$ . Однако (19) не дает правильное значение ДП, поскольку получено при воздействии поля плоской волны в вакууме на отдельный атом и путем суммирования вкладов атомов в поляризацию. Необходим учет среднего поля [6]. Часто в работах формулу типа (18) пишут для  $\mu_e$ , пытаясь получить  $\mu'_e < 0$  из решений задач дифракции, используя пакеты компьютерного моделирования. Но формула типа (18) не имеет отношения к  $\mu_e$ . В квантовом рассмотрении, как известно, можно представить возмущенный гамильтониан в виде  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ , где  $\hat{H}' = -(e/m)\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}^e + (e\mathbf{A}^e)^2/(2m) + \hat{H}_s$  — связанное с полем  $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$  возмущение [32, 33]. Здесь  $\hat{H}_s = \mu_B g_s \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{s}}/\mu_0$ ,  $\mathbf{A}^e = \mu_0 \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$  — ранее введенный вектор-потенциал,  $g_s \approx 2$  и для простоты рассмотрен один электрон в атоме со спином  $\hat{\mathbf{s}}$ . Пренебрегая вторым членом и учитывая свойства коммутации, можно записать [33]  $\hat{H}' = \mu_B (\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}})/\mu_0$ , где  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $\hat{\mathbf{S}}$  и  $\hat{\mathbf{L}}$  — полные операторы спинового и орбитального моментов атома (включая ядро). Магнитная восприимчивость зависит от полного магнитного момента атома, и если он ненулевой, складывается из поляризационного парамагнетизма, прецессионного диамагнетизма и ориентационного парамагнетизма [34]. В слабых полях для определения вклада атома в магнитную поляризацию следует вычислять матричные элементы  $\mathbf{m}_{lk} = -\mu_B \langle \psi_l | 2\hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}} | \psi_k \rangle$ . Ротационные спектры полярных молекул в газе и жидкости также могут формировать магнитный момент. Однако это обычно микроволновый диапазон с сильным уширением линий, и какого-либо вклада в МП не возникает. В оптическом диапазоне природные вещества не демонстрируют существенное отличие МП от единицы [9, 34]. ИС из металлических наночастиц, представляющих собой квантовые точки или трехмерные квантовые ящики, целесообразно моделировать квантовыми методами. Определяя для них уровни энергии и волновые функции или используя теорию функционала плотности, можно вычислить плотность тока, возникающего под действием поля  $\mathbf{V}(\omega)$ . Это поле также действует и на классическую рамку с током, поэтому в слабых полях  $\mathbf{P}^m(\omega)$  пропорционально  $\mathbf{V}(\omega)$ , а не  $\mathbf{H}(\omega)$ .

Рассматривая классические контуры с токами, возбуждаемыми магнитной индукцией  $\mathbf{V}(\omega) = \mu_0 \mu_e \mathbf{H}(\omega)$ , следует учесть, что ток в контуре в отсутствие поля затухает и не имеет резонанс-

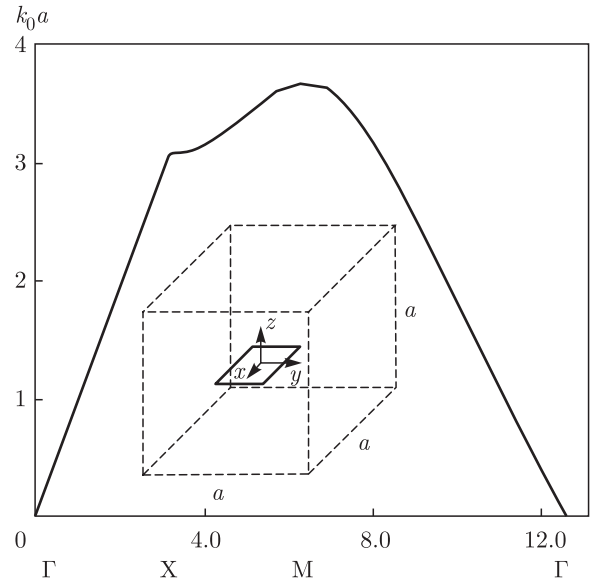


Рис. 5. Дисперсия в метаматериале из прямоугольных диэлектрических рамок

ных частот. При комнатной температуре длина свободного пробега электронов в металле порядка десятков нанометров. Кроме того, в отличие от спина в атоме магнитный момент контура не может менять направление ориентации в зависимости от изменения угла магнитного поля. Такой наведенный магнетизм на низких частотах является диамагнетизмом [26]. Можно получить формулу типа (18) без резонансов для  $\mu_e^{-1}$ , поскольку на движущиеся заряды действует поле  $\mathbf{V}(\omega)$ . Вклад в поляризацию от МА пропорционален  $\mathbf{V}(\omega)$ , а не  $\mathbf{H}(\omega)$ . Классический подход легко можно применить к интегральному уравнению из проволочных микроколец (рис. 4б). Удобно расположить их на ребрах кубического кристалла. Часто пытаются рассматривать резонансные структуры типа разомкнутых микроколец с емкостным зазором. У такого  $RCL$ -контура есть резонансная частота  $(LC)^{-1/2}$  вынужденного резонанса, но она очень высокая, поскольку краевая емкость мала. Для снижения  $\omega_0$  следует повышать емкость. Кольцо с емкостью является магнитным и электрическим диполями, ориентированными нормально и касательно плоскости кольца. Электрический диполь нормален зазору, что делает кольцо несимметричным излучателем в его плоскости. Поэтому кристалл (рис. 4б) с разомкнутыми кольцами не изотропный. Не спасает и двойное разомкнутое кольцо. Необходимы четверные разомкнутые кольца с поворотом зазоров на 45%, размещенные

на ребрах кубического фотонного кристалла. В силу правила Ленца такая ИС на низких частотах обладает диамагнетизмом. Важно синхронизировать углы поворота всех колец. Реально такой 3D-фотонный кристалл возможен в радиодиапазоне, где можно использовать и сосредоточенные емкости. Создание такой ИС в микроволновом диапазоне уже проблематично. Вблизи резонансной частоты  $\mu_e^{-1}(\omega) = 1 + \omega_m^2 / [\omega_0^2 - (\omega^2 - i\omega\omega_c)]$ . Рассмотрим  $\mu_e'$ . Имеем

$$\mu_e' = 1 - \frac{\omega_m^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_m^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_m^2)^2 + (\omega\omega_c)^2}.$$

Условие  $\mu_e' < 0$  имеет вид  $(\omega_m^2 - \omega_c^2)^2 > 4(\omega_m\omega_c)^2$ . Обозначим  $\Delta = (\omega_m^2 - \omega_c^2)^2 > 4(\omega_m\omega_c)^2$ . При слабой диссипации  $\omega_m^2 - \omega_c^2 > 2\omega_0\omega_c$  или  $\omega_m > \sqrt{2\omega_0\omega_c}$ . В этом случае имеется область отрицательных  $\mu_e' < 0$ , расположенная при

$$\omega_0^2 + \frac{\omega_m^2 - \omega_c^2}{2} - \Delta < \omega^2 < \omega_0^2 + \frac{\omega_m^2 - \omega_c^2}{2} + \Delta.$$

Обозначая  $\Omega = \omega^2 - \omega_0^2$ , имеем уравнение  $\Omega^2 - \Omega(\omega_m^2 - \omega_c^2) + (\omega_0\omega_c)^2 = 0$  для определения граничных частот, на которых  $\mu_e' = 0$ . С учетом диссипации таких частот может не быть. На резонансной частоте  $\mu_e' = 1 - 1 / \left[ 1 + (\omega_0\omega_c / \omega_m^2) \right] > 0$ . В этом случае при  $\omega_0\omega_c = \omega_m^2$  получаем  $\mu_e' = 1/2$ . С ростом диссипации  $\mu_e'$  при резонансе растет и стремится к 1, а при стремлении диссипации к нулю также стремится к нулю. При низких частотах имеем  $0 < \mu_e' < 1$ , т.е. диамагнетизм, и  $\mu_e' \rightarrow 1$  при  $\omega \rightarrow 0$ . На очень больших частотах ( $\omega^2 \gg \omega_0^2 + \omega_m^2$ ) имеем  $\mu_e' = 1 + (\omega_m^2 + 2\omega_c^2) / \omega^2 \rightarrow 1$ , т.е. реализуется парамагнетизм. Отметим, что мы ввели резонансную частоту искусственно на основе теории цепей и воспользовались формулой, которую еще надо получить, используя электродинамику. То есть надо строго решать задачу для разомкнутых колец.

Таким образом, отрицательная МП может быть реализована в резонансных ИС, но только в резонансной области, где существенна ПД, и описание двумя скалярными величинами  $\varepsilon_e$  и  $\mu_e$  не является полностью корректным. В низкочастотной области, где можно ввести эти параметры, ИС ведет себя как диамагнетик:  $0 < \mu_e < 1$ . Поскольку размер частицы существенно меньше  $a$ , указанные резонансы лежат обычно выше первого брэгговского резонанса, где уже изотропное приближение неприменимо. Наведенный магнетизм, однако, вполне имеет место в широком диапазоне частот.

### 7. УРАВНЕНИЕ ФРЕНЕЛЯ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Периодические фотонные кристаллы описываются уравнением Френеля. Это дисперсионное уравнение, построенное по результатам гомогенизации. В классическом случае имеют место два подхода к описанию эффективных параметров ИС: симметричный в рамках полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и индукций  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , а также несимметричный с использованием трех векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  [8, 9]. В этом разделе будем придерживаться первого подхода. В нем в общем случае бианизотропной ИС вводятся четыре тензорных параметра: тензоры ДП  $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$  и МП  $\hat{\mu}(\omega, \mathbf{k})$  и тензоры кросс-поляризации  $\hat{\xi}(\omega, \mathbf{k})$ ,  $\hat{\zeta}(\omega, \mathbf{k})$ . При распространении плоских волн  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  (или при комбинации поля из таких волн) и при симметричном рассмотрении имеют место связи

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) + c^{-1} \hat{\xi}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = \mu_0 \hat{\mu}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{k}) + c^{-1} \hat{\zeta}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}),$$

а также уравнения Френеля вида [1, 9]

$$\begin{aligned} \det \left[ \left( k_0^{-1} \hat{k} + \hat{\xi} \right) \hat{\mu}^{-1} \left( k_0^{-1} \hat{k} - \hat{\zeta} \right) + \hat{\varepsilon} \right] &= 0, \\ \det \left[ \left( k_0^{-1} \hat{k} - \hat{\zeta} \right) \hat{\varepsilon}^{-1} \left( k_0^{-1} \hat{k} + \hat{\xi} \right) + \hat{\mu} \right] &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь  $\nabla \times \mathbf{E} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \hat{k} \mathbf{E}$ , а матрица  $\hat{k}$  определяет оператор ротор:

$$\hat{k} = -i \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Если рассматривать изотропные метаматериалы в смысле работы [4], т.е. считать все эффективные материальные параметры скалярами, то ИС становится в общем случае биизотропной со скалярными параметрами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  и уравнением Френеля  $\det \left[ \hat{k}^2 + \hat{k}(\xi - \zeta) + \hat{I}k_0^2 \varepsilon \mu \right] = 0$ . Если же кросс-поляризацией можно пренебречь, а анизотропией нельзя, то уравнение Френеля приобретает вид

$$\begin{aligned} \det \left[ \hat{\varepsilon}^{-1} \hat{k} \hat{\mu}^{-1} \hat{k} - \hat{I}k_0^2 \right] &= 0, \\ \det \left[ \hat{\mu}^{-1} \hat{k} \hat{\varepsilon}^{-1} - \hat{I}k_0^2 \right] &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

В полностью изотропном случае ( $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ef} \hat{I}$ ,  $\hat{\mu} = \mu_{ef} \hat{I}$ ) уравнение Френеля  $\det \left[ \hat{k}^2 - \hat{I}k_0^2 \varepsilon \mu \right] = 0$  эквивалентно простейшему дисперсионному уравнению для обыкновенной волны  $\mathbf{k}^2 = k_0^2 \varepsilon \mu$ .

Для ИС из шариков двух типов рис. 4г оценим резонансные частоты, что, конечно, не означает достижимость однородного метаматериала, описываемого ДП и МП. Для обоснования этого следует задать в шариках меньшего размера только поле  $E_\varphi = \text{const}$  и расположить эти шарики на ребрах. Уже отмечалось, что такого возбуждения при дифракции волны на конечном образце может не быть. Поскольку ориентация осей различная, шарики дают вклад в магнитный момент по трем направлениям. Такие шарики подобны рассмотренным кольцам и создают магнитный момент. Конечно, это приближение: поле в шариках следует разлагать по всем сферическим гармоникам [18, 25]. Пусть шарики большего размера расположены в углах. Эти шарики создают электрический момент. ДП шариков считаем одинаковой. Для разложения поля можно взять несколько сферических гармоник относительно трех осей. В такую ИС мы искусственно привнесли симметрию. Далее следует рассчитать возбуждаемое шариками поле с учетом периодической ФГ (1) и решить интегральное уравнение. Такое решение учитывает взаимодействие всех шариков. Затем следует вычислить электрический и магнитный моменты и усредненные поля. В природных средах размер атомов  $r \approx 0.05$  нм, и при длине световой волны  $\lambda \approx 500$  нм и ДП основы  $\tilde{\epsilon} \approx 10$  и менее приходим к отношению размера к длине волны в среде  $r/\Lambda \approx 3 \cdot 10^{-4}$ . Для кристаллов это отношение имеет такой же порядок. На атомы действует локальное поле, а прецессия спинов дает магнитный момент, в линейном приближении пропорциональный компоненте локального магнитного поля. Для возбуждения рамки с током или шарика важен их размер, сравнимый с длиной волны. Магнитный момент не пропорционален локальному полю, а намагниченность зависит от  $\mathbf{k}$ . Для фотонного кристалла с  $a \approx 50$  нм уже  $a/\Lambda \approx 0.1$ , при этом для разреженности необходимо, по крайней мере, использовать частицы с  $r < 5$  нм. В области 100 ГГц при длине волны 3 мм,  $\tilde{\epsilon} = 10$  и  $\epsilon = 400$  оценим минимальную  $\Lambda$ . Поскольку изотропность предполагает работу вдали от брэгговских резонансов, хорошим и точным подходом для этого являются методы для хаотических метаматериалов типа смесей: формулы смешения для моделей эффективной среды, метод компактных групп, методы теории перколяции (протекания) и т. п. [7, 35]. Из формулы Гарнетта  $(\tilde{\epsilon}_e - \tilde{\epsilon}) / (\tilde{\epsilon}_e + 2\tilde{\epsilon}) = C(\epsilon - \tilde{\epsilon}) / (\epsilon + 2\tilde{\epsilon})$  имеем оценку для концентрации  $C$  диэлектрических шариков при условии  $\tilde{\epsilon}_e = \tilde{\epsilon} + 1 = 11$ :  $C = 1/30$ . Близкий результат дает и формула эффективного по-

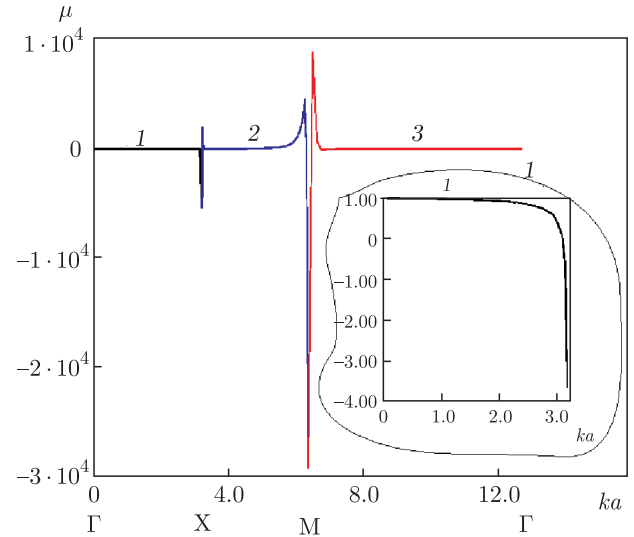


Рис. 6. Эффективная МП метаматериала из прямоугольных диэлектрических рамок по формуле (15), соответствующая дисперсии рис. 5

ля Бруггемана. Поскольку  $C = (4\pi/3)(r_1^3 + r_2^3)/a^3$ , при  $r_2 = 2r_1$  имеем  $r_1 \sim a \cdot 10^{-4}$ . При  $\tilde{\epsilon}_e = 11$  должно быть  $\Lambda < 1$  мм, т. е. по крайней мере  $a < 0.1$  мм, что дает оценку  $r_1 \sim 10^{-5}$  мм. Минимальное расстояние между рассеивателями  $a\sqrt{3}/2$ , поэтому взять  $r_1$  больше 0.01 мм без существенного нарушения разреженности нельзя. Однако такое увеличение нарушает условие  $\tilde{\epsilon}_e \approx \tilde{\epsilon}$  и уменьшает  $\Lambda$ . Нетрудно видеть на основе точных формул [36], что резонансные частоты таких изолированных наночастиц не лежат в заявленном авторами диапазоне. В свободном пространстве основной (низкочастотной) является магнитная мода  $H_{01\delta}$ , при этом индексы (кроме азимутального) нельзя считать целыми (в силу радиационных потерь их даже нужно считать комплексными). В фотонном кристалле нет радиационных потерь, но есть диполь-дипольное взаимодействие рассеивателей, которое необходимо строго учитывать.

Низкочастотная дисперсионная ветвь, соответствующая уравнению (17), приведена на рис. 5. На рис. 6 (кривая 1) даны результаты вычисления МП по формуле (15). В суммах формул (15) и (17) имеют место полюсы, которые определяются условием  $\tilde{k}_{xk}^2 + \tilde{k}_{yl}^2 + \tilde{k}_{zm}^2 = k_0^2$ . Они приводят к нулям в правых частях (15) и (17). Кроме того, имеют место нули у функций  $F_{mlk}(\mathbf{k})$  и  $|G_{mlk}(\mathbf{k})|^2$ . Они реализуются при достаточно больших  $|\mathbf{k}|$  и приводят к полюсам. Такие резонансы в МП нефизические и происходят при достижении запрещенной зоны, т. е. там, где модель неприменима. Избежать полюсов можно, учтя



потери или построив более строгую модель. В низкочастотной области  $|\mathbf{k}| \approx k_0$  нуль компенсирует полюс и МП практически равна единице, а модель демонстрирует бесконечно малый диамагнетизм. Отрицательные значения не достигаются. Расчеты в этой области выполнены при введении бесконечно малого тангенса диэлектрических потерь  $10^{-10}$ . При больших  $|\mathbf{k}|$  для вычисления МП использовались связи  $k_x = k_x(k_0)$  и  $k = k_x + k_y = k(k_0)$ , определяемые из уравнения (17), и брался тангенс потерь  $10^{-2}$ . Заметим, что можно построить дисперсию МП по результатам гомогенизации на основе уравнения Френеля  $\mu = (k_x/k_0)^2$ . Такая модель при  $|\mathbf{k}| \approx k_0$  дает слабый парамагнетизм. В точке X имеем  $\mu = 1.061$ . При переходе на обратную ветвь  $k_x \rightarrow \pi/a - k_x$  замедление и МП сильно растут. В запрещенной зоне компонента  $k_x$  является мнимой, а МП — отрицательной. При переходе через запрещенную зону на высокочастотную (оптическую) дисперсионную ветвь при изменении только  $k_x$  эта МП становится сначала отрицательной, затем положительной, но имеет значение меньше единицы. Как для рис. 6 в резонансных областях, так и здесь отличные от единицы резонансные значения МП не имеют физического смысла, хотя эти значения и описывают дисперсию моделью Френеля. При дифракции на образце фотонного кристалла для использования такой модели важно, в какой точке дисперсионной поверхности при данной частоте находится вектор  $\mathbf{k}$  с учетом всех волн, включая и отраженные, что само по себе сложно.

На низких частотах можно построить другие зависимости замедления на основе эффективной диэлектрической среды в виде смеси. Для нее имеем коэффициент заполнения  $C = 16b\delta^2/a^3$  и коэффициенты деполяризации (см. [7, 37])  $L_x = L_y = 1/2 - \delta/b$ ,  $L_z = 2\delta/b$ . Используя формулу Гарнетта, для тонкой диэлектрической рамки получим [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{exx} = \varepsilon_{eyy} &= 1 + \frac{C(\varepsilon - 1)}{1 + L_x(\varepsilon - 1 - C)} \approx \\ &\approx 1 + \frac{16b\delta^2(\varepsilon - 1)/a^3}{1 + (\varepsilon - 1 - 16b\delta^2/a^3)/2}, \\ \varepsilon_{ezz} &= 1 + \frac{16b\delta^2(\varepsilon - 1)/a^3}{1 + 2\delta(\varepsilon - 1 - 16b\delta^2/a^3)/b} \approx \\ &\approx 1 + 16b\delta^2(\varepsilon - 1)/a^3. \end{aligned}$$

Таким образом, на низких частотах ИС описывается диэлектрическими свойствами, а волна с  $k_z = 0$  идет почти со скоростью света. Теперь уравнение Френеля при  $k_y = k_z = 0$  имеет вид  $k_x = k_0\sqrt{\varepsilon_{ezz}}$ .

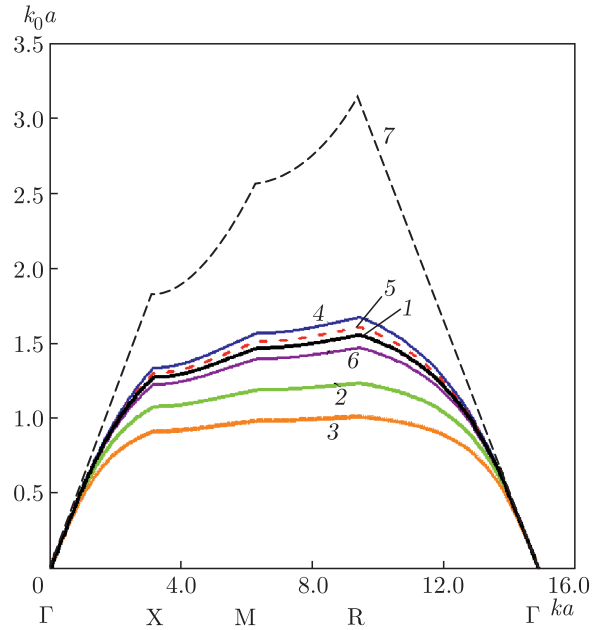


Рис. 7. Дисперсия (нижние частотные ветви) в кубическом фотонном кристалле с кубическими МА  $a_0 \times a_0 \times a_0$  в диэлектрической основе  $\tilde{\varepsilon} = 3.0$ . ДП включений  $\varepsilon = 6.0$  для кривых 1–4,  $\varepsilon = 0.5$  (5),  $\varepsilon = -1.0$  (6),  $\varepsilon = 3.1$  (7). Кривым 1, 4–7 соответствует  $a_0 = 0.1a$ ,  $a_0 = 0.2a$  (2),  $a_0 = 0.5a$  (3)

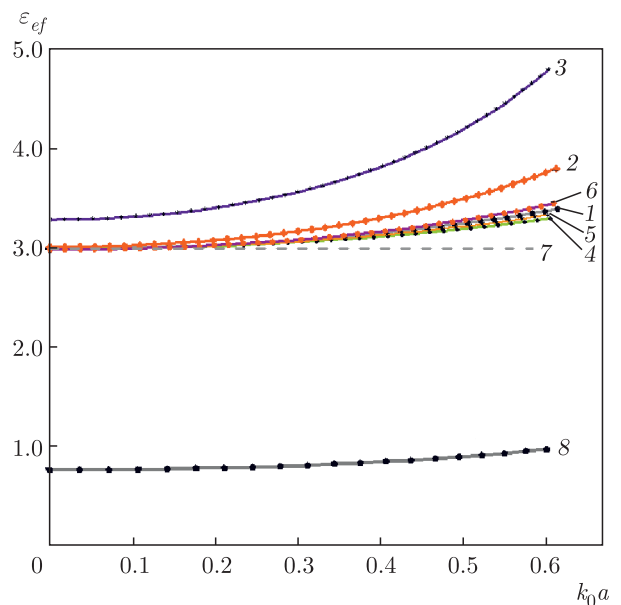


Рис. 8. Гомогенизированные значения эффективной ДП  $\varepsilon_{ef}$  для конфигураций (1–7), соответствующих рис. 7. Кривая 8 соответствует  $\varepsilon = -1.0$ ,  $a_0 = 0.3a$ ,  $\tilde{\varepsilon} = 1.0$

Результаты вычисления низкочастотных дисперсионных ветвей для (17) с эффективной ДП для кубического кристалла с кубическими диэлектрическими МА даны на рис. 7 и 8. Использовалась приближенная модель в виде аппроксимации ком-

полюс  $E_x, E_y, E_z$  кусочно-постоянными элементами с симметричным распределением поля, поэтому уравнение решалось в первом октанте куба. Использовались по две и три аппроксимации на компоненту, поэтому размерность задачи равнялась либо 8, либо 27. Гомогенизация выполнялась по формуле, аналогичной (15). Заметим, что простой алгоритм можно получить, взяв аппроксимации полей типа  $E_x(x, y, z) = E_{0x} \cos(\alpha_x x) \cos(\beta_x y) \cos(\gamma_x z)$ . Тогда дисперсионное уравнение получается в виде функционала, зависящего кроме  $k_0$  и  $\mathbf{k}$  еще от 12 параметров. Их можно сократить до 8, наложив условие соленоидальности и условия удовлетворения каждой из компонент волновому уравнению. Однако такая задача является нелинейной.

### 8. ВЫВОДЫ

Рассмотрены структуры периодических метаматериалов, которым могут соответствовать изотропные эффективные материальные параметры, в том числе и с двумя проницаемостями  $\epsilon_e$  и  $\mu_e$ . Поскольку все МА (исключая ферромагнитные частицы во внешнем магнитном поле) можно описать ДП, симметричный кубический кристалл также моделируется только диагональным тензором с одинаковыми компонентами  $\epsilon_e(k_0, \mathbf{k})$  [1, 6]. Поэтому введение  $\mu_e$  — искусственный прием. Исключения могут составить магнитные МА из ферритов и магнитных металлов, магнетизм которых обусловлен прецессией некомпенсированных магнитных моментов атомов или доменов во внешнем магнитном поле. Такие ИС могут демонстрировать резонансные свойства и изменение знака компонент МП, но они анизотропны и обычно проявляют такие свойства в микроволновом диапазоне и ниже. Там имеет место гиротропия.

Так называемый наведенный магнетизм демонстрирует зависимость намагниченности от  $\mathbf{k}$  даже в низкочастотном пределе. При этом  $\mu_e(0, 0) = 1$ . Показано, что для кольцевых ИС в низкочастотном пределе  $|\mathbf{k}| \approx k_0(0, 0) \ll \pi/a$  имеет место слабый диамагнетизм (см. [26]). Рассмотрим это качественно на примере одиночной проволочной рамки с площадью  $S$ . Имеем  $\mathbf{A} = \hat{G}(\mathbf{J})$ ,  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = -j\mathbf{k} \times \hat{G}(\mathbf{J})$ ,  $d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{J} dl$ . Для плоской круглой рамки с током  $I = |\mathbf{J}| \delta^2$  получаем  $\mathbf{M} = \mathbf{n}_0 S I$ . Диамагнетизм обеспечивает правило Ленца. Усредненное магнитное поле не является локальным, поэтому нельзя ввести локальные материальные параметры. Большие значения МП связаны с тем, что  $\langle H_z(k_0, \mathbf{k}) \rangle \approx 0$  для некоторых точек дисперсионной поверхности. Нелокальное магнитное поле означает,

что большая МП не имеет обычного физического смысла. В низкочастотном пределе при малом фазовом сдвиге на ячейку МП принимает локальный смысл.

Для поддерживающего волну тока поляризации  $\mathbf{J}_p$  (даже замкнутого) намагниченность можно не вводить, а ввести только электрическую поляризацию  $\langle \mathbf{P}^e \rangle = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \langle \mathbf{E} \rangle_V$ . Усреднение здесь выполнено по МА. Такой дипольный момент отличается от (5) и является более приближенным. В низкочастотном пределе поле постоянно и  $\langle \mathbf{E} \rangle_V = V \langle \mathbf{E} \rangle / a^3$ . Формально можно вводить разные модели ИС, используя тензорные или скалярные материальные параметры, а затем определять их из условий гомогенизации. В качестве таковых могут фигурировать свойства волн в метаматериале, параметры рассеяния, поляризуемости. Неоднозначность обратной задачи гомогенизации требует решения переопределенной системы уравнений. В частных случаях число уравнений и неизвестных может совпадать. Определение МП такими способами не гарантирует, что имеет место локальная связь магнитной индукции и магнитного поля. Формально введение магнитных свойств основано на том, что в низкочастотном пределе рассеяние плоской волны на малой частице можно описать как возникновение в ней электрического и магнитного диполей [7, 17, 37]. Однако для выполнения граничных условий магнитный диполь можно не вводить, а ввести еще один ортогональный электрический диполь. Мы не рассмотрели ряд важных вопросов: влияние квадрупольных и высших мультипольных моментов на поляризацию, плотно упакованные (не разреженные) фотонные кристаллы, сильно нелокальные ИС и ряд других.

Итак, однородные периодические ИС, описываемые ДП, возможны в низкочастотном пределе при пренебрежении ПД. При описании их ДП и МП последняя близка к единице, особенно в оптическом диапазоне. Однородные метаматериалы с отрицательной ДП также возможны. Это металлы при сверхнизких температурах на частотах вплоть до плазменных. Смеси металлических и диэлектрических МА в низкочастотном пределе также могут демонстрировать отрицательную ДП. Наведенный магнетизм возможен, но соответствующие ему метаматериалы не являются изотропными и могут быть описаны другими материальными параметрами. В оптике МП метаматериалов практически равна единице, что согласуется с аналогичным выводом для природных веществ [7, 30]. Для периодических ИС на поставленный в заглавии вопрос следует ответить отрицательно.

**Финансирование.** Работа осуществлена при поддержке Министерства образования и науки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRР-2020-0004).

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Давидович, УНФ **189**, 1250 (2019).
2. А. П. Виноградов, А. В. Дорофеенко, С. Зухди, УНФ **178**, 511 (2008).
3. М. Я. Сушко, С. К. Криськив, ЖТФ **79**(3), 97 (2009).
4. К. Р. Симовский, Опт. и спектр. **107**, 766 (2009).
5. М. А. Ремнев, В. В. Климов, УНФ **188**, 169 (2018).
6. В. М. Агранович, Ю. Н. Гартштейн, УНФ **176**, 1051 (2006).
7. А. П. Виноградов, *Электродинамика композитных материалов*, Эдиториал УРСС, Москва (2001).
8. А. П. Виноградов, УФН **172**, 363 (2002).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
10. R. Merlin, Proc. Nat. Acad. Sci. **106**, 1693 (2009).
11. A. H. Aly, M. Ismaeel, and E. Abdel-Rahman, Opt. Photon. J. **2**, 105 (2012).
12. М. В. Давидович, И. А. Корнев, Компьютерная оптика **43**, 765 (2019).
13. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, *Электромагнетизм и электромагнитные волны*, Высшая школа, Москва (1985).
14. R. D. Graglia, P. L. E. Uslenghi, and R. E. Zich, IEEE Trans. AP-**39**(1), 83 (1991).
15. Е. О. Каменетский, Phys. Rev. E **57**, 3563 (1998).
16. Е. О. Каменетский, Microw. Opt. Technol. Lett. **19**, 412 (1998).
17. L. Lewin, Proc. Inst. Elec. Eng. **94**(27), 65 (1947).
18. Л. Левин, *Современная теория волноводов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954).
19. С. М. Рытов, ЖЭТФ **29**, 605 (1955).
20. T. Gric, Waves in Random and Complex Media **33**(4) (2019), <https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1656846>.
21. М. В. Давидович, Известия Саратов. унив. Серия Физика **11**(1), 42 (2011).
22. М. В. Давидович, КЭ **47**, 567 (2017).
23. А. В. Вашковский, Э. Г. Локк, УФН **176**, 557 (2006).
24. В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, УФН **189**, 519 (2019).
25. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, *Возбуждение электромагнитных волн*, Радио и связь, Москва (1983).
26. М. В. Давидович, Письма в ЖЭТФ **108**, 299 (2018).
27. И. Б. Вендик, О. Г. Вендик, М. С. Гашинова, Письма в ЖТФ **32**(10), 30 (2006).
28. O. Vendik, I. Vendik, I. Kolmakov, and M. Odit, Opto-Electron. Rev. **14**(3), 179 (2006).
29. L. Jylha, I. Kolmakov, S. Maslovski, and S. Tretyakov, J. Appl. Phys. **99**, 043102 (2006).
30. A. Ahmadi and H. Mosallaei, Phys. Rev. A **77**, 045104 (2008).
31. A. Krasnok, S. Makarov, M. Petrov, R. Savelev, P. Belov, and Yu. Kivshar, Proc. SPIE **9502**, 950203 (2015).
32. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, под ред. В. В. Самарцева, Физматлит, Москва (2003).
33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматлит, Москва (1963).
34. Я. Г. Дорфман, *Магнитные свойства и строение вещества*, Гостехиздат, Москва (1955).
35. А. А. Снарский, УФН **177**, 1341 (2007).
36. P. Guillon and Y. Garault, IEEE Trans. MTT-**25**(11), 916 (1977).
37. R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, IEEE Press, New York (1991).