

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ МНОГИХ ЧАСТИЦ С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

*М. Ю. Романовский**

*Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

*МИРЭА — Российский технологический университет
119454, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 апреля 2020 г.,
после переработки 9 октября 2020 г.
Принята к публикации 12 октября 2020 г.

Рассматриваются системы многих частиц, содержащихся внутри других частиц (задача 1), а также системы частиц, ограниченных внутри других частиц, которые, в свою очередь, ограничены внутри третьих частиц (задача 2). При естественных предположениях о сохраняющихся величинах, таких как общее количество всех частиц, общей энергии и ряда других, изучаются наивероятнейшие распределения частиц по энергии — истинные (внутренние) и внешние — наблюдаемые. Результаты задач 1 и 2 могут трактоваться как разделение частиц нижнего уровня на сорта с разными распределениями, наблюдаемыми в разных экспериментах. В одночастичных наблюдениях в полной вероятностной задаче 1 непротиворечивым образом возникает эффективный принцип Паули.

DOI: 10.31857/S0044451021020140

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, 2], что система тождественных неразличимых частиц с дискретным энергетическим спектром при естественных предположениях о конечном числе всех частиц и существовании средней энергии частицы дает в качестве наивероятнейшей экспоненциальную плотность вероятности распределения¹⁾ нахождения частицы в определенном i -м энергетическом состоянии ϵ_i вида

$$W(\epsilon_i) = \frac{1}{\tau} e^{-\epsilon_i/\tau},$$

где τ — нормировочный коэффициент, имеющий смысл некоторой средней энергии или эффективной температуры системы частиц. Статистические ха-

рактеристики конкретных физических систем находятся как частные случаи применения этого общего распределения (распределения Гиббса). Это достигается путем введения ограничений, вытекающих из физических свойств рассматриваемых систем. Например, функции распределения для идеальных газов Ферми и Бозе получаются при учете перестановочной симметрии частиц. Назовем этот результат «задачей 0». Термодинамические величины и законы в такой системе бесструктурных частиц хорошо известны. В настоящей работе в качестве конкретных объектов рассматриваются системы, состоящие из неразличимых частиц, имеющих внутреннюю структуру.

Такие более сложные системы, состоящие из неразличимых частиц, имеющих внутреннюю структуру, во-первых, модифицируют термодинамические соотношения, как, например, это происходит для плазмы [3], так и приводят к новым эффектам типа «отрицательного трения» [4] (такие частицы часто именуется «активными»). Поэтому естественно возникает вопрос, что будет происходить с распределениями частиц по энергии, если определенные группы частиц отграничены от других, или одни частицы (назовем их части-

* E-mail: slon@kapella.gpi.ru

¹⁾ Далее для простоты мы будем именовать функции плотности вероятности распределения функциями распределения и просто распределением. Отметим также, что реально в работе под частицей понимается энергетическое состояние системы, более точно — какая-нибудь наблюдаемая характеристика, определяемая этим состоянием — дипольный момент, магнитный момент, и т. д., см. ниже. По-видимому, рассмотрение может быть применено и вовсе не к физическим системам.

цами верхнего уровня) содержат другие (нижнего уровня, также неразличимые). Здесь термин «ограничение» представляется наиболее адекватным для последующего анализа поведения иерархических систем частиц, аналогичным раскладыванию по коробкам (и отдельных коробок по еще большим коробкам, как в задаче 2, см. ниже), как это было сделано в работах [1, 2].

Эта задача также рассматривалась (см., например, [1]). При дополнительном предположении об *a priori* разном количестве частиц нижнего уровня внутри частиц верхнего уровня, наиболее вероятное распределение дается большим каноническим ансамблем. Условие тождественности частиц верхнего уровня здесь не ставится. Назовем это «задачей 0'». Дело не обязательно ограничивается частицами и распределениями по энергии – можно рассматривать, например, системы, имеющие внутри определенные структуры, которые оказывают влияние на внешние проявления системы, в этом случае роль «распределения по энергии» частиц нижнего уровня играет распределение по какому-то свойству (или признаку) системы нижнего уровня.

Естественным является переход к задаче с учетом наблюдаемой неразличимости частиц верхнего уровня, назовем это «задачей 1». Здесь следует найти наиболее вероятные распределения частиц нижнего уровня по энергии. Нельзя исключить, что таких распределений может быть несколько. Во-первых, это «истинные» распределения по энергии частиц нижнего уровня в одной частице верхнего уровня. Следует при этом выяснить, являются ли они наблюдаемыми, и если да, то в каких экспериментах. Во-вторых, какие распределения будут наблюдаемыми, и в чем их отличие от истинных. Естественным пределом задачи 1 при наличии внутри частицы верхнего уровня только одной частицы нижнего является (при определенных условиях) задача 0.

Постановка задачи может быть и более сложной, когда частицы имеют внутреннюю структуру в виде других частиц, которые, в свою очередь, содержат внутри себя еще и третьи частицы, это можно назвать задачей 2. Здесь также следует определить истинные и наблюдаемые наиболее вероятные распределения частиц нижнего уровня по энергии. Достаточно общепринятым является представление о частицах, заключенных в коробки (см., например, [1]), или в коробки с перегородками [2]. Последние могут быть заключены в некоторые внешние коробки, тогда получается задача 2. Очевидные примеры задачи 2 (отнюдь не только физические) легко определит читатель.

Решение задачи 1 подсказывает комбинаторная проблема о количестве комбинаций при распределении одинаковых предметов по группам. Решение задачи 2 будет приведено далее.

2. ЗАДАЧА 1

Пусть имеется набор (m_i) частиц верхнего уровня таких, что в m_1 таких неразличимых частицах содержится по p_1 частиц нижнего уровня²⁾, в m_2 – по p_2 , и т. д. вплоть до N -й частицы нижнего уровня. Здесь n – общее количество различных расстановок частиц нижнего уровня по частицам верхнего уровня. Полное количество N частиц нижнего уровня

$$N = \sum_{i=1}^n m_i p_i \quad (1)$$

распределено всего по M частицам верхнего уровня

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (2)$$

При этом общее количество перестановок всех частиц нижнего уровня по всем частицам верхнего уровня есть W_{10} [5]:

$$W_{10} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n (p_i!)^{m_i}}, \quad (3)$$

а при условии упомянутой неразличимости частиц верхнего уровня

$$W_{11} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n (p_i!)^{m_i} \prod_{i=1}^n (m_i!)}. \quad (4)$$

Обычно пользуются выражением $\ln W_{11}$:

$$\ln W_{11} = \ln N! - \sum_{i=1}^n m_i \ln(p_i!) - \sum_{i=1}^n \ln(m_i!). \quad (5)$$

Заметим, что, если здесь $m_i \equiv 1$, то для задачи вычисления наиболее вероятного распределения, определяемого условиями (1), (2), (4), мы имеем формулировку, аналогичную формулировке задачи 0³⁾.

²⁾ Если вместо «частиц верхнего уровня» читать «связок», вместо «частиц нижнего уровня» читать «грибов», то получится формулировка задачи о сушке грибов [5], или задача о циклических перестановках [6].

³⁾ Если в задаче о получении большого канонического ансамбля допустить варьирование N , то ее можно свести к задаче 1. Это не было сделано (см., например, [6]).

Пусть каждая частица нижнего уровня может находиться в состоянии с какой-то энергией ϵ_i . Для отыскания наиболее вероятного распределения по этим энергиям при произвольном m_i следует учесть, что, кроме выражения (3) или (4), и связей (1) и (2) еще имеются условия конечности полной энергии всей системы частиц

$$E = \sum_{i=1}^n m_i p_i \epsilon_i, \quad (6)$$

которое практически означает, что существует средняя «энергия» одной частицы нижнего уровня $\langle \epsilon \rangle$.

Решим задачу 1. Для этого сначала образуем вариацию от выражения (5) с учетом простейших связей (1), (2) и (6). Для этого в уравнение (5) надо в правую часть добавить члены $\alpha N + \beta M + \gamma E$ с лагранжевыми множителями α , β , и γ :

$$\begin{aligned} \ln W_1 = \ln N! - \sum_{i=1}^n m_i \ln(p_i!) - \sum_{i=1}^n \ln(m_i!) + \\ + \alpha \sum_{i=1}^n m_i p_i + \beta \sum_{i=1}^n m_i + \gamma \sum_{i=1}^n m_i p_i \epsilon_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Используем также первое приближение формулы Стирлинга по $m!$ и $p!$, и проведем варьирование по δp_i и δm_i . Тогда получим для вариации наиболее вероятного распределения $\ln W_1$:

$$\begin{aligned} \delta \ln W_1 = \sum_{i=1}^n [-(\delta m_i) p_i (\ln p_i - 1) - \\ - (\delta p_i) m_i \ln p_i - (\delta m_i) \ln m_i + \beta (\delta m_i) + \alpha (\delta m_i) p_i + \\ + \alpha m_i (\delta p_i) + \gamma (\delta m_i) p_i \epsilon_i + \gamma (\delta p_i) m_i \epsilon_i] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Соберем члены при независимых вариациях δp_i и δm_i . Для первой вариации, сократив все слагаемые на ненулевые величины δp_i и m_i , получим первое уравнение системы:

$$\ln p_i = \alpha + \gamma \epsilon_i. \quad (9)$$

Для второй вариации, сократив на ненулевую величину δm_i и использовав уравнение (9), получим

$$\ln m_i = \beta + p_i. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) дают решение задачи 1.

Решение уравнения (9) точно соответствует обычному распределению Гиббса (см. Введение, [1, 2]) и решению задачи 0. Отличия же от решения задачи 0' заключаются в том, что в задаче 0' не осуществляется варьирование по числу частиц верхнего уровня. Решения системы (9) и (10) очевидны:

$$p_i = e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} \quad (11)$$

и, в свою очередь,

$$m_i = e^{\beta + p_i}. \quad (12)$$

Таким образом, истинная функция наиболее вероятного распределения частиц нижнего уровня по энергии оказывается точно такой же, как и наиболее вероятная функция распределения в задаче 0 — это вероятность найти частицы нижнего уровня в энергетическом состоянии ϵ_i .

Однако эта функция не является прямо наблюдаемой и прямо измеримой. Для того чтобы измерить эту функцию распределения, следует иметь прибор, измеряющий p_i в зависимости от ϵ_i . Сделать это в какой-то одной определенной частице верхнего уровня нельзя в силу неразличимости частиц m_i . Какие функции будут наблюдаемыми? Для выяснения этого перепишем систему (9) и (10), образовав простейшие линейные комбинации уравнений

$$\begin{aligned} \ln p_i \pm \ln m_i = \alpha \pm \beta + \gamma \epsilon_i \pm p_i = \\ = \alpha \pm \beta + \gamma \epsilon_i \pm e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}, \end{aligned} \quad (13)$$

где мы воспользовались выражением (11). Таким образом, рассматриваться должны две функции — $p_i m_i$ и p_i / m_i , которые являются решениями системы (9) и (10).

Для дальнейшего анализа нужно определить константы в (9) и (10). Определим константу β . Величина m_i изменяется от некоторого положительного значения $e^{\beta + e^\alpha}$ при $\epsilon_i = 0$ до e^β при $\epsilon_i \rightarrow \infty$. При больших ϵ_i ввиду очевидной отрицательности γ

$$e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} \simeq 1 + e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} \quad (14)$$

По смыслу задачи при больших энергиях частицы нижнего уровня вряд ли может быть много частиц верхнего уровня, содержащих такую энергичную частицу нижнего уровня, и естественным образом для задачи 1 можно положить, что $\beta = 0$ при $\epsilon_i \rightarrow \infty$, и m_i стремится к 1 при $\epsilon_i \rightarrow \infty$, т. е. $\beta = 0$.

Очевидно, что функция $p_i m_i$ потенциально должна наблюдаться, поскольку она описывает распределение числа частиц (1). Эта функция значительно отличается от p_i (см. рис. 1, определения функций 1–4 на этом рисунке см. ниже):

$$p_i m_i = e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} e^{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}. \quad (15)$$

Нормированная функция этого распределения

$$(p_i m_i)_{norm} = |\gamma| \frac{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} e^{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}}{e^{\alpha} - 1}, \quad (16)$$

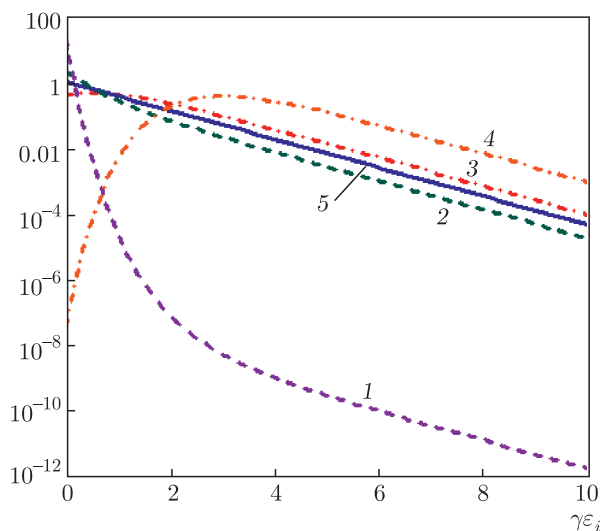


Рис. 1. Нормированные функции распределения $p_i m_i$ (штриховые кривые 1 и 2) и p_i/m_i (штрихпунктирные кривые 3 и 4) при различных параметрах нормировки α (для кривых 1 и 4 $\alpha = 3$, для кривых 2 и 3 $\alpha = 0.5$, принято $|\gamma| = 1$), а также $p_i = |\gamma|e^{\gamma\epsilon_i}$ (сплошная прямая 5). Полулогарифмический масштаб

для $\alpha/|\gamma| = 0.5, 3$ и кривых 1, 2 приведена на рис. 1 в виде штриховых кривых. При увеличении $\alpha/|\gamma|$, т. е. например при уменьшении температуры при постоянном α , значение функции (16) в нуле по сравнению с прямой 5 резко возрастает, а асимптотическое при умеренных и больших ϵ_i — очень сильно падает (см. рис. 1). Таким образом, распределение $p_i m_i$ (или $(p_i m_i)_{norm}$) описывает, по-видимому, конденсацию частиц нижнего уровня при малых энергиях, которая оказывается очень значительной при низких эффективных температурах (далее эффективную температуру будем именовать температурой для краткости). Наблюдаемость этой функции лучше всего реализуется в многочастичных эффектах типа фазовых переходов, когда «все» частицы (верхнего уровня) участвуют в процессе. Здесь ситуация не зависит качественно от величины α . Следует, тем не менее, обратить внимание на значительное уменьшение $p_i m_i$ при умеренных значениях энергии в сравнении с функцией p_i (на несколько порядков) уже при умеренных α . Для восстановления истинного распределения p_i по $p_i m_i$ и p_i/m_i следует прибегнуть к процедуре мультипликативного среднего (среднего геометрического): $p_i = \sqrt{(p_i m_i)(p_i/m_i)}$, что относительно несложно может быть реализовано в том числе экспериментально.

Вторая функция, являющаяся решением (13) — функция p_i/m_i — это распределение p_i в расчете на одну частицу верхнего уровня из набора m_i , она также представлена на рис. 1. Условия ее наблюдения очевидно отличаются от $p_i m_i$. По-видимому, наиболее близкими по смыслу будут одночастичные измерения энергетических спектров (в широком смысле спектроскопические наблюдения).

Рассмотрим распределение частиц нижнего уровня по энергиям в «среднем» на одну частицу верхнего уровня p_i/m_i :

$$\frac{p_i}{m_i} = e^{\alpha + \gamma\epsilon_i} e^{-e^{\alpha + \gamma\epsilon_i}}. \tag{17}$$

Здесь очевидно, что γ имеет смысл некоторой «обратной температуры» системы; нормировка на 1 распределения (17) дает множитель $|\gamma|/(1 - e^{-e^\alpha})$, что уже при умеренном и тем более большом α практически совпадает с $|\gamma|$. Функция (17) достигает максимума при $\epsilon_i = \alpha/|\gamma|$, а поскольку α является лагранжевым множителем при полном числе частиц (1), модельный «физический» смысл α (а точнее, $\alpha/|\gamma|$) может состоять в том, что это химический потенциал частиц нижнего уровня μ , а $\alpha = |\gamma|\mu$. Заметим, что плотность вероятности (17) совпадает с плотностью вероятности распределения Гумбеля (типа I) [7].

Если продвинуться к физическим приложениям рассматриваемой задачи 1, то, по-видимому, функции распределения (15) и (17) (а также нормированные функции распределения и функции распределения, возникающие в Задаче 2) следует понимать как распределение Гиббса (так как везде наличествует гиббсов фактор $e^{\gamma\epsilon_i}$), возникающее в системах с определенным взаимодействием — отграничением, неразличимостью частиц всех уровней и связанной с этим иерархией. Такое взаимодействие приводит к появлению дополнительного фактора в (15) и (17), а также в функциях распределения, возникающих в Задаче 2. Этот фактор может быть отнесен на соответствующий термодинамический потенциал (см. [1, 2])⁴.

Для удобства расчетов приведем нормированное на 1 распределение p_i/m_i :

$$\left(\frac{p_i}{m_i}\right)_{norm} = \frac{|\gamma|}{1 - e^{-e^\alpha}} \frac{e^{\alpha + \gamma\epsilon_i}}{e^{\alpha + \gamma\epsilon_i}}. \tag{18}$$

⁴ Прозрачный способ получения функций распределений в зависимости от определенного потенциала взаимодействия частиц, не такой, как в предлагаемой статье, рассмотрен, например, в работах [8, 9].

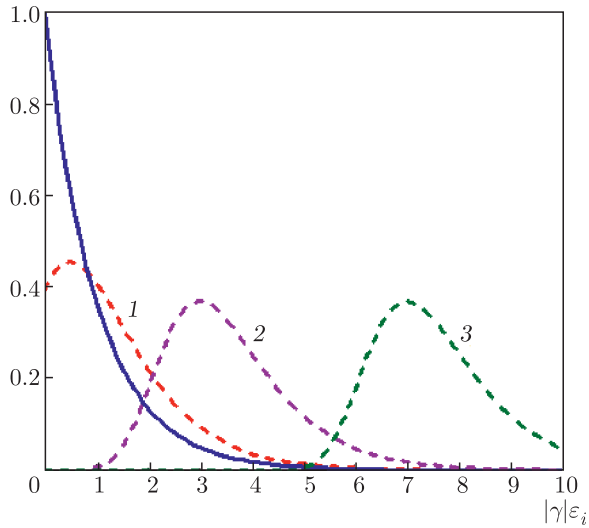


Рис. 2. Нормированные на 1 функции от ϵ_i плотности вероятности нормированного распределения $(p_i/m_i)_{norm}$ (18) при $\alpha = 0.5, 3, 7$ (штриховые кривые 1–3 соответственно). Сплошная кривая — распределение $|\gamma|e^{(\gamma\epsilon_i)}$. Равномерный масштаб $|\gamma|$ принята равной 1

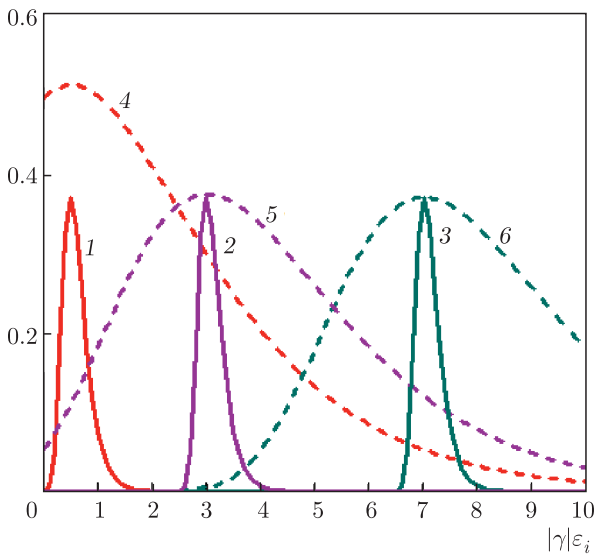


Рис. 3. Нормированные на 1 функции от ϵ_i плотности вероятности нормированного распределения $(p_i/m_i)_{norm}$ (18) при $\alpha = 0.5, 3, 7$. Для штриховых кривых 1–3 $|\gamma| = 0.5$, для сплошных кривых 4–6 $|\gamma| = 5$. Равномерный масштаб

На рис. 2 приведена функция (18) для нескольких значений α . Вместе с возрастанием α (кривые 1–3 соответственно) нормировочный множитель в (18) стремится к 1, и распределение $(p_i/m_i)_{norm}$ просто транслируется вдоль оси абсцисс в неизменном виде.

Зависимость (18) от коэффициента $|\gamma|$, т. е. от некоторой эффективной температуры, представле-

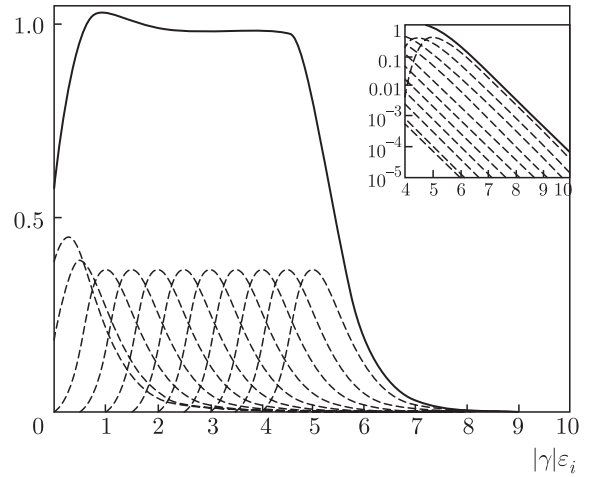


Рис. 4. Функции $(p_i/m_i)_{norm}$ (штриховые кривые) с α от 0.5 до 5 (через 0.5), а также сплошная кривая, представляющая сумму всех этих $(p_i/m_i)_{norm}$. На вставке в полулогарифмическом масштабе приведены значения этих функций для больших аргументов — видна экспоненциальная асимптотика суммарной функции. Принято $|\gamma| = 1$

на на рис. 3. Видно значительное «сужение» максимумов (18) при увеличении $|\gamma|$, т. е. при уменьшении эффективной температуры. Рисунки 2 и 3 показывают, что распределение (17) (и (18)) имеет выраженный максимум распределения, совпадающий с величиной химического потенциала $\epsilon_i = \mu = \alpha/|\gamma|$. Это означает, что при измерениях «на одну частицу» верхнего уровня частицы нижнего уровня могут присоединяться к (или отсоединяться от) частице верхнего уровня только в энергетические состояния, близкие μ . При понижении температуры ширина функции распределения уменьшается, и при малых температурах функция распределения может стать настолько узкой, что в это состояние «поместится» уже не более одной частицы нижнего уровня.

Закономерен вопрос, в какие состояния уходят остальные частицы нижнего уровня. На рис. 4 изображена модельная ситуация, где присутствует ансамбль частиц верхнего уровня с разными α (разными химическими потенциалами для частиц нижнего уровня).

В этом случае остальные частицы нижнего уровня разместятся в энергетических состояниях соответствующих распределений (штриховые кривые на рис. 4) с одинаковыми максимумами. При плотном распределении с $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$ (α_{min} может быть и нулем) суммарное распределение (сплошная кривая на рис. 4) по энергии в этом случае будет выглядеть как постоянное до $\epsilon < \alpha_{max}/|\gamma|$, а затем экспоненциально убывать (см. врезку рис. 4).

Такое суммарное распределение будет практически полностью совпадать с распределением Ферми с $\mu = \mu_{max} = \alpha_{max}/|\gamma|$. Этот результат наиболее очевидно следует трактовать как проявление некоторого эффективного принципа Паули.

Для этого же вполне можно ограничиться, не прибегая к сложным построениям рис. 4, тем сообщением, что при одночастичных измерениях состояния системы частиц всегда будет детектироваться некоторая энергия частицы нижнего уровня, причем при малых температурах частиц эта энергия может быть единственной — остальные значения могут просто не попасть «внутрь» кривых 1–3 рис. 3 в силу расстояния между уровнями дискретного энергетического спектра. Таким образом, одному энергетическому состоянию будет соответствовать только одна частица: это также можно истолковать как осуществление эффективного принципа Паули.

3. ЗАДАЧА 2

Как указывалось во Введении, возможна постановка задачи о распределении по энергиям частиц нижнего уровня, содержащихся в наборе частиц среднего уровня, которые, в свою очередь, содержатся в наборе частиц верхнего уровня. На всех трех уровнях частицы являются неразличимыми⁵⁾. Обозначим количество частиц нижнего уровня, содержащихся в частице среднего уровня, через p_i , количество частиц среднего уровня с таким количеством частиц нижнего уровня в частицах среднего уровня m_i , и количество частиц верхнего уровня, в которые сложены частицы среднего уровня в количестве m_i , через t_i . В этом случае полное количество расстановок частиц нижнего уровня по всем частицам среднего уровня, и последних по частицам верхнего уровня запишется как

$$W_{21} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n (p_i!)^{m_i t_i} \prod_{i=1}^n (m_i!)^{t_i} \prod_{i=1}^n (t_i!)}. \quad (19)$$

Здесь n — снова полное число различных расстановок частиц нижнего уровня по частицам среднего уровня, а тех — по частицам верхнего уровня. Есте-

⁵⁾ На языке обобщенной «задачи о сушке грибов» это будет подсчет распределения длин связок грибов, которые, в свою очередь, объединены в пучки разной величины. Неразличимыми теперь являются не только связки, но и пучки, не говоря уже о самих грибах.

ственно определяются теперь общее количество частиц нижнего уровня

$$N = \sum_{i=1}^n m_i p_i t_i, \quad (20)$$

общее количество частиц среднего уровня

$$M = \sum_{i=1}^n m_i t_i \quad (21)$$

и общее количество частиц верхнего уровня

$$T = \sum_{i=1}^n t_i. \quad (22)$$

Выражение для полной энергии соответствует

$$E = \sum_{i=1}^n m_i p_i t_i \epsilon_i. \quad (23)$$

По общему правилу образуем логарифм от этого количества расстановок

$$\ln W_{21} = \ln N! - \sum_{i=1}^n m_i t_i \ln(p_i!) - \sum_{i=1}^n t_i \ln(m_i!) - \sum_{i=1}^n \ln(t_i!). \quad (24)$$

Соответственно, варьироваться должна величина (24) с наложенными связями (20)–(23) с необходимыми множителями Лагранжа $\alpha, \beta, \gamma, \Delta$, аналогичная (7):

$$\ln W_2 = \ln W_{21} + \alpha N + \beta M + \gamma E + \Delta T. \quad (25)$$

Переменные варьирования теперь p_i, m_i, t_i . При варьировании по p_i получаем первое уравнение, точно совпадающее с уравнением (7) (и с решением задачи 0):

$$\ln p_i = \alpha + \gamma \epsilon_i. \quad (26)$$

Варьируя (25) по m_i и используя (26), имеем уравнение, точно совпадающее с уравнением (10):

$$\ln m_i = \beta + p_i. \quad (27)$$

Наконец, варьируя (25) по t_i и используя (26) и (27), имеем третье уравнение задачи 2:

$$\ln t_i = \Delta + m_i. \quad (28)$$

Сделаем некоторые замечания относительно величин β и Δ . Последняя входит во все выражения

как простой множитель, т. е. нужна только в случае какой-то специальной нормировки, в первом же приближении ее можно считать равной нулю, хотя естественным было бы $\Delta = -1$, тогда t_i стремилась бы к 1 при $\epsilon_i \rightarrow \infty$ (см. выше).

Величину β в задаче 2 в первом приближении можно считать совпадающей с β из задачи 1, т. е. тоже равной нулю. Анализ показывает, что неравная нулю β меняет вид распределений задачи 2, но только количественно. Она может описывать определенное число частиц нижнего уровня в частице среднего (верхнего в задаче 1) уровня, существующее при больших энергиях. Более полное выяснение физического смысла $\beta \neq 0$ есть предмет отдельной работы.

Создадим, как в задаче 1, простейшую линейную комбинацию уравнений (26)–(28) и воспользуемся их решениями. Получим

$$\ln p_i \pm \ln m_i \pm \ln t_i = \alpha \pm \beta \pm \Delta + \gamma \epsilon_i \pm e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} \pm e^{\beta + e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}. \quad (29)$$

По аналогии с задачей 1, решениями (29) и функциями распределения теперь являются выражения $p_i/m_i t_i$, $p_i m_i/t_i$, $p_i m_i t_i$, а также $p_i t_i/m_i$. Третья функция описывает рассмотренные многочастичные измерения с эффектом конденсации частиц при малых энергиях, еще более сильной, чем аналогичная конденсация в задаче 1. Первые же два соотношения описывают некоторые, измеренные либо на одну частицу среднего уровня, либо на одну частицу верхнего уровня, функции, имеющие выраженный максимум. Теперь, однако, этот максимум не совпадает с величиной α , а превышает ее: для $p_i/m_i t_i$ примерно на 1 в условиях рис. 5 (соответствует примерно одной единице эффективной температуры), и на 0.2 (соответствует примерно 0.2 единиц эффективной температуры) для $p_i m_i/t_i$.

Нормированные распределения суть

$$\left(\frac{p_i m_i}{t_i}\right)_{norm} = \frac{|\gamma|}{1/e - e^{-e^\alpha}} \frac{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} e^{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}}{e^{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}} \quad (30)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_i}{m_i t_i}\right)_{norm} &= \\ &= \frac{|\gamma|}{1/e - E_1(e^{e^\alpha}) + E_1(1) - e^{e^\alpha} e^{-e^{e^\alpha}}} \times \\ &\quad \times \frac{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} e^{-e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}}{e^{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}}, \quad (31) \end{aligned}$$

где $E_1(x)$ — интегральная показательная функция, изображены на рис. 5 (кривые 3 и 4 для (30) и 5

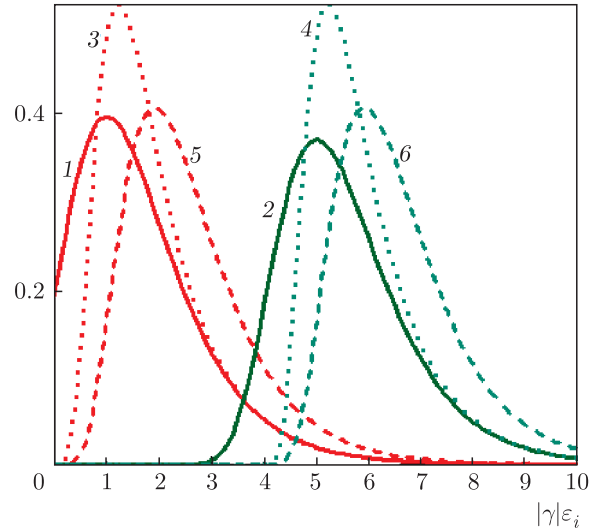


Рис. 5. Нормированные на 1 функции от ϵ_i плотности вероятности распределения $p_i/m_i t_i$ (кривая 5 для $\alpha = 1$ и кривая 6 для $\alpha = 5$), $p_i m_i/t_i$ (кривая 3 для $\alpha = 1$ и кривая 4 для $\alpha = 5$). Для сравнения приведены распределения (18) (кривая 1 для $\alpha = 1$ и кривая 2 для $\alpha = 5$). Равномерный масштаб, $|\gamma|$ принята равной 1

и 6 для (31)). Так же, как и для задачи 1, функции (30) и (31) являются некоторыми измеренными на одну частицу верхнего уровня «средними» функциями. На рис. 6 представлено поведение нормированных распределений (30), (31) в зависимости от эффективной температуры, кривые 1 и 3 — для сравнительно более малой температуры $|\gamma| = 5$, кривые 2 и 4 — для большей $|\gamma| = 0.5$. Видно превышение абсцисс максимумов распределений (30), (31) над величиной химического потенциала. Истинная функция распределения p_i опять выражается через среднее геометрическое наблюдаемых $p_i = \sqrt[4]{(p_i/m_i t_i)(p_i m_i/t_i)(p_i m_i t_i)(p_i t_i/m_i)}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты задач 1 и 2 можно интерпретировать как зависящие от способа наблюдения. Все наблюдения в спектроскопических экспериментах (не обязательно оптических, вообще большинства измерений спектров энергии) дают некоторые отнесенные к одной частице верхнего уровня функции распределения. Основным результатом задачи 1 является обнаружение максимума распределения частиц по энергиям при одночастичном наблюдении. В самом простом подходе к описанию этот максимум совпадает с химическим потенциалом частиц нижнего уровня в частицах верхнего уровня — энергией при-

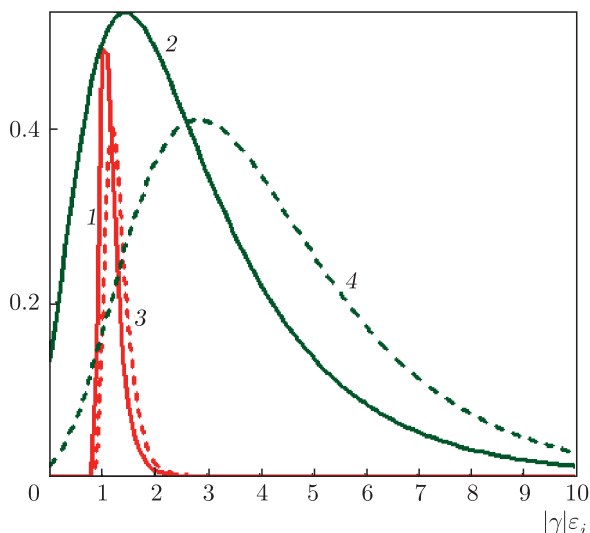


Рис. 6. Нормированные на 1 функции от ϵ_i плотности вероятности распределения $(p_i m_i / t_i)_{norm}$ (30) при $\alpha = 1$, для сплошной кривой 1 $|\gamma| = 5$, для сплошной кривой 2 $|\gamma| = 0.5$. Вероятности нормированного распределения $(p_i / m_i t_i)_{norm}$ (31) при $\alpha = 1$, для штриховой кривой 3 $|\gamma| = 5$, для штриховой кривой 4 $|\gamma| = 0.5$

соединения/отсоединения частицы нижнего уровня от остальных таких частиц в частице верхнего уровня. При этом простом подходе все частицы нижнего уровня с энергиями меньше химического потенциала должны интерпретироваться как связанные. Отношение доли связанных состояний к несвязанным состояниям в общем количестве всех состояний частиц нижнего уровня описывается соотношением $(1 - e^{1-e^\alpha}) / (e - 1)$.

Как уже указывалось, при малых эффективных температурах функция плотности вероятности найти частицу нижнего уровня в одночастичном измерении в состоянии ϵ_i имеет очень узкий максимум (см. рис. 3). Это значит, что при определенной малой (и еще меньшей) температуре это состояние занимает не более одной частицы. Подобный результат может быть истолкован как реализация эффективного принципа Паули — когда одно энергетическое состояние занимает одна частица определенного сорта, соответствующая знаку «-» в левой части (13). Некоторая модификация задачи 1, в которой возникает набор функций p_i / m_i с различными α , приводит при суммировании этих функций к функции, практически точно совпадающей с распределением Ферми. Это еще одна возможная реализация эффективного принципа Паули, появляющаяся в результате решения задачи 1.

Поведение другой наблюдаемой функции задачи 1, $p_i m_i$, также определяется температурой. Уже при умеренных значениях $\alpha \simeq 6$ доля частиц нормированного распределения (13) с энергиями большими соответствующего значения химического потенциала 10^{-180} , т. е. таких (свободных?) частиц, весьма вероятно нет во всей Вселенной. Вообще наивная интерпретация результатов задачи 1 с двумя функциями распределения, $p_i m_i$ и p_i / m_i , состоит в том, что мы имеем дело с частицами двух сортов — псевдобозонов для первой функции (так как она дает конденсацию в низкоэнергетических состояниях при малой температуре), и псевдофермионов (так как при малых температурах одно энергетическое состояние занимает одна такая частица).

Такая же интерпретация результатов задачи 2 приводит к 4 сортам частиц. Псевдобозоны с еще более выраженным эффектом конденсации описываются функцией $p_i m_i t_i$, частиц с энергиями большими химического потенциала здесь нет вовсе. Похожие результаты дает функция $p_i t_i / m_i$, но эффект конденсации в ней выражен меньше. Напротив, частицы верхнего уровня, описываемые функциями $p_i / m_i t_i$, $p_i m_i / t_i$, в основном содержат частицы нижнего уровня в энергетических состояниях выше химического потенциала. Простейшая интерпретация этого — они не связаны в частицах среднего уровня, но связаны и «обобщены» в частицах верхнего уровня.

Несомненно, распределение по энергетическим уровням полной системы, объединяющей частицы всех уровней, подчиняется распределению Гиббса. Однако, как отмечалось выше, эти вероятности — совсем не те величины, которые наблюдаются в реальных экспериментах. Наблюдаемые характеристики системы — дипольный момент, магнитный момент, момент инерции или, возможно, в ряде случаев, частота излучения — как раз и определяются распределениями высшего уровня, рассмотренными в данной работе. Очевидно, что это коллективные характеристики, и говорить о «чистых» бозонах или фермионах не следует. С другой стороны, фермиоподобные функции распределения возникают в статистической физике вполне классических систем с большим числом локальных минимумов энергии, самая известная — это так называемая KPZ (струна на случайном рельефе), сводящаяся к уравнению Бюргерса со случайным шумом, в которой возникает нечто вроде ударных волн в пространстве вероятностей. Проследить за явным возникновением такой функции можно в работе [10].

Благодарности. Автор признателен И. В. Колоколову за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Исихара, *Статистическая физика*, Мир, Москва (1973).
2. Ю. Б. Румер, М. С. Рывкин, *Термодинамика, статистическая физика и кинетика*, 2-е изд., Изд-во Новосибирского университета, Новосибирск (2000).
3. M. Yu. Romanovsky and W. Ebeling, *Contrib. Plasma Phys.* **46**, 260 (2006).
4. P. Romanczuk, M. Baer, W. Ebeling et al., *Eur. Phys. J. Special Topics* **202**, 1 (2012).
5. Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука, Москва (1969); Н. Я. Виленкин, *Популярная комбинаторика*, Наука, Москва (1975).
6. R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, Cambridge University Press (1997).
7. Э. Гумбель, *Статистика экстремальных значений*, Мир, Москва (1965).
8. M. Yu. Romanovsky, *Physica A* **265**, 264 (1999).
9. M. Yu. Romanovsky, *Physica A* **287**, 450 (2000).
10. И. В. Колоколов, К. С. Турицын, *ЖЭТФ* **121**, 1390 (2002).