

УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИКА РЕГУЛЯРНЫХ ГРАВАСТАРОВ С ТОНКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

*М. Шариф**, *Ф. Джавед***

*Department of Mathematics, University of the Punjab
Lahore-54590, Pakistan*

Поступила в редакцию 28 октября 2020 г.,
после переработки 25 ноября 2020 г.
Принята к публикации 25 ноября 2020 г.

(Перевод с английского)

STABILITY AND DYNAMICS OF REGULAR THIN-SHELL GRAVASTARS

M. Sharif, F. Javed

Исследуются устойчивые и динамические конфигурации гравастаров с тонкой оболочкой на основе сшивания внешнего (черные дыры Хейворда и черные дыры Хейворда–анти-де Ситтера) и внутреннего (черные дыры де Ситтера) пространства-времени. На тонкой оболочке эти два пространства-времени связываются с помощью “cut and paste” техники Виссера. Плотность поверхностной энергии, материя и давление описываются уравнениями Ланцоша. Для исследования устойчивости гравастаров рассмотрены экранированные области, для этого использовалось радиальное возмущение для равновесного радиуса оболочки. Динамика на тонкой оболочке рассмотрена как для безмассовых, так и для массивных скалярных полей с использованием уравнений движения и уравнений Клейна–Гордона. В случае скалярного поля гравастары с тонкой оболочкой могут демонстрировать коллапс и расширение в зависимости от радиуса оболочки, скорости его изменения и эффективного потенциала. Оказалось, что устойчивые области оболочки гравастара уменьшаются, при этом динамические конфигурации (коллапс и расширение) увеличиваются с ростом космологической постоянной.

DOI: 10.31857/S004445102103007X

1. ВВЕДЕНИЕ

Черная дыра (ЧД) образуется в результате гравитационного коллапса массивной звезды под действием ее гравитационных сил. Такие области пространства-времени нельзя в полной мере наблюдать из-за существования горизонта событий и центральной сингулярности. В центральной сингулярности массовая плотность и кривизна пространства-времени становятся бесконечными, поэтому общая теория относительности не описывает геометриче-

ской структуры черных дыр. В работе [1] получено точное решение полевых уравнений, представляющее ЧД с регулярным центром, названное регулярной ЧД. В работе [2] концепция регулярных ЧД была расширена введением нелинейного электрического поля. Некоторые другие модели регулярных ЧД также были предложены в работах [3–6]. Для более полного исследования ЧД требуется альтернативная модель, в которой отсутствовали бы центральная сингулярность и горизонт событий и была бы получена устойчивая конфигурация для некоторого конкретного выбора распределения материи.

В 2001 г. Мазур и Моттола в работе [7] предположили, что фазовый переход предотвращает коллапс звезды, а также предложили концепцию звезды гравитационного вакуума (гравастара). Грива-

* E-mail: msharif.math@pu.edu.pk

** E-mail: faisalrandawa@hotmail.com

стары являются аналогами ЧД, однако они не имеют ни сингулярности, ни горизонта событий. Такие звездные объекты можно было бы использовать для описания той роли, которую темная энергия играет в ускорении расширения вселенной. Кроме того, это могло бы объяснить, почему некоторые галактики имеют низкую или высокую концентрацию темной материи. Модель гравастара можно описывать с помощью трех различных областей с соответствующими уравнениями состояния (УС), а именно, внешняя область ($r_2 < r$) с $p = 0 = \sigma$, внутренняя область ($0 \leq r < r_1$) с $\sigma = -p > 0$ и промежуточная область ($r_1 < r < r_2$) с $p = \sigma$, где σ , p и $r_1 - r_2$ — плотность поверхностной энергии, давление и толщина оболочки, соответственно. Как можно видеть, внутренняя область соответствует геометрии де Ситтера (DS) с материей, имеющей постоянную положительную плотность энергии и отрицательное давление, что связано с вакуумным решением Шварцшильда через промежуточную область.

Промежуточная область, толщина которой определяется тонким слоем материальной поверхности, существенно влияет на динамическую конфигурацию. Эта область, также известная как тонкая оболочка, состоит из жестко распределенной материи. Существование материальной поверхности, образующей оболочку определенного радиуса, имеет большое значение для поддержания устойчивой конфигурации тонкой оболочки, при этом возникает сильное давление, достаточное для того, чтобы преодолеть влияние гравитационных сил. Компоненты тензора энергии-импульса можно получить, используя формализм, предложенный в работе [8]. Метод “cut and paste” Виссера предлагает общий формализм, позволяющий соединять внешнюю и внутреннюю геометрию на тонкой оболочке. Мазур и Моттола также использовали этот подход для построения гравастаров с тонкой оболочкой, сшивая внешнее пространство-время в виде ЧД Шварцшильда и внутреннее в виде многообразия DS. Этот подход очень полезен, если нужно избежать возникновения горизонта событий и сингулярности в геометрии гравастаров [9]. В работах [10–16] метод “cut and paste” использовался для объяснения кротовых нор с тонкой оболочкой, образованных из двух эквивалентных копий ЧД.

Новые результаты по исследованию гравастаров, полученные с использованием различных подходов, представлены в целом ряде работ. В работе [17] исследовалась динамическая устойчивость гравастаров с тонкой оболочкой с использованием метода “cut and paste” для внешней и внутренней

геометрии. Было получено, что гравастары с тонкой оболочкой становятся устойчивыми при подходящем выборе УС для переходных слоев. В работе [18] были построены гравастары для случая ЧД DS или анти-DS (ADS) в качестве внутреннего пространства-времени и ЧД Шварцшильда–ADS или Райснера–Нордстрема (РН) в качестве внешнего. В этой работе также исследовались устойчивые решения для гравастаров с использованием УС. В работе [19] были введены два типа теоретических гравастаров для пространства-времени РН и исследовалась роль заряда в устойчивости конфигурации гравастаров. В работе [20] исследовались гравастары с тонкой оболочкой в присутствии электромагнитного поля и была определена их энтропия. В работе [21] рассматривался гравастар с использованием ЧД в мире на бране в качестве внешнего многообразия.

В работе [22] была построена динамическая модель прототипа гравастаров, заполненных фантомной энергией. В этой работе исследовались гравастары с тонкой оболочкой с внешним пространством-временем Вайдьи, заполненные идеальной жидкостью. Было получено, что при различных распределениях материи на тонкой оболочке такая структура может представлять собой ЧД, а также устойчивый или неустойчивый гравастар или частичный (“bounded excursion”) гравастар. В работе [23] в рамках подхода Чандрасекара исследовались гравастары с непрерывным давлением, а также было получено УС для статического случая. В работе [24] было предложено существование гравастара с тонкой оболочкой в размерности $(2 + 1)$ и исследована его энтропия, длина, а также различные энергетические условия. В работе [25] исследовалось влияние различных физических характеристик на точные решения для некоммутативных гравастаров и анализировались устойчивые конфигурации переходного слоя. В этой работе было показано, что тонкая оболочка является устойчивой вблизи ожидаемого горизонта событий. В работе [26] с использованием радиальных возмущений исследовалась устойчивость некоммутативных гравастаров с тонкой оболочкой и были получены области устойчивости. Недавно авторами настоящей работы были исследованы гравастары с тонкой оболочкой, получающиеся при сшивании внутреннего пространства-времени ЧД DS с внешним пространством-временем ЧД Бардина и Бардина–DS [27]. Оказалось, что области устойчивости увеличиваются при увеличении космологической постоянной и убывают при возрастании заряда во внешнем пространстве-времени.

Скалярное поле играет важную роль при исследованиях различных астрофизических явлений, динамики кластеров и вообще в теоретической физике. В работе [28] была введена концепция электромагнитно-гравитационной сущности, названной геонем. В этой работе было предложено частице-подобное решение на основе взаимодействия гравитационного и классического электромагнитного поля, удерживаемое в ограниченной области гравитационным притяжением энергии своего собственного поля. В работе [29] исследовались решения полевых уравнений для ЧД Шварцшильда в случае скалярного поля. В работе [30] исследовались геометрические характеристики комплексного массивного скалярного поля. В работе [31] рассматривалась динамика и устойчивость бозонных звезд и были получены устойчивые решения для различных значений скалярного поля. В работе [32] исследовалась сферическая геометрия в случае безмассового скалярного поля.

В работе [33], с использованием метода “cut and paste” для двух эквивалентных копий ЧД Шварцшильда, обсуждалась динамика тонких оболочек в случае безмассового и массивного скалярных полей. Было получено, что в безмассовом случае тонкая оболочка демонстрирует коллапс, расширение и седловые точки, в то время как в случае массивного скалярного поля оболочка демонстрирует только коллапс. В работе [34] рассматривались тонкие оболочки в случае безмассового и массивного скалярных полей для черных дыр РН и было показано, что коллапс оболочки имеет место только в случае массивного скалярного поля. В работе [35] обсуждались расширение и коллапс тонкой оболочки в случае скалярного поля для регулярных ЧД. Недавно авторы исследовали динамическую эволюцию тонкой оболочки в случае скалярного поля для различных вращающихся регулярных ЧД и ЧД BTZ (Bañados, Teitelboim, Zanelli). Кроме того, рассматривались тонкие оболочки для d -мерных ЧД в случае безмассового и массивного скалярных полей [36]. В работе [37] в случае скалярного поля рассматривалась динамика тонкой оболочки, сформированной внутренней и внешней копиями черных дыр в мире на бране.

В настоящей работе рассмотрены стабильные и динамические конфигурации гравастаров с тонкой оболочкой для многообразий Хейворда и Хейворда–ADS в качестве внешнего пространства-времени и многообразия DS в качестве внутреннего пространства-времени. Работа построена следующим образом. В разд. 2 предлагается общий метод исследова-

ния гравастаров с тонкой оболочкой. В разд. 3 рассматривается устойчивость тонкой оболочки при наличии радиального возмущения. В разд. 4 рассматривается динамическая эволюция тонкой оболочки в случае безмассового и массивного скалярных полей. В последнем разделе обобщаются полученные результаты.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАВАСТАРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

В данном разделе представлен общий подход к исследованию гравастаров с использованием метода “cut and paste”. Пусть внешняя геометрия соответствует ЧД Хейворда–ADS, а внутренняя — многообразию DS. Используя формализм Израэля и уравнения Ланцоша, получим уравнения движения для случая тонкой оболочки. Соответствующий линейный элемент для внешней (Υ^+) и внутренней (Υ^-) геометрий имеет вид [5]

$$ds_{\pm}^2 = -\Pi_{\pm}(r_{\pm})dt_{\pm}^2 + \Pi_{\pm}^{-1}(r_{\pm})dr_{\pm}^2 + r_{\pm}^2(d\theta_{\pm}^2 + \sin^2\theta_{\pm}d\phi_{\pm}^2), \quad (1)$$

где $\Pi_{-}(r_{-}) = 1 - r_{-}^2/\alpha^2$, α — ненулевая постоянная. Явный вид внешней метрической функции определяет различные регулярные ЧД. Метрическая функция ЧД Хейворда–ADS равна [5]

$$\Pi_{+}(r_{+}) = 1 - \frac{2r_{+}^2 m}{r_{+}^3 + Q^3} - \frac{\Lambda r_{+}^2}{3},$$

где m — масса ЧД, а Λ — космологическая постоянная. Физический параметр Q связан с полным магнитным зарядом ЧД. В отсутствие Λ получаем ЧД Хейворда, метрическая функция которой равна [2]

$$\Pi_{+}(r_{+}) = 1 - \frac{2r_{+}^2 m}{r_{+}^3 + Q^3},$$

при этом, если Q , и Λ становятся равными нулю, мы получаем метрическую функцию ЧД Шварцшильда.

Чтобы построить геометрию гравастаров с тонкой оболочкой, требуется сшить внешнее и внутреннее пространство-время на гиперповерхности

$$\partial\Upsilon = r = h = \eta,$$

используя метод “cut and paste”. Таким образом, мы получим новое многообразие

$$\Upsilon = \Upsilon^- \cup \Upsilon^+$$

с минимальной площадью поверхности $\partial\Upsilon$. Спивание внешнего и внутреннего пространства-времени для минимальной площади поверхности соответствует случаю тонкой оболочки. Радиус оболочки ($h = h(\tau)$, где τ — собственное время) должен быть больше горизонта событий r_h , чтобы рассматриваемая структура не ушла за горизонт событий, а также чтобы не возникло сингулярности в пространстве-времени. Координаты $\partial\Upsilon$ можно определить как

$$\xi^i = (\tau, \theta, \phi),$$

тогда соответствующий линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = -d\tau^2 + h(\tau)^2 d\theta^2 + h(\tau)^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Векторы n_{\pm}^{α} , нормальные к Υ^{\pm} , определяются как

$$n_+^{\mu} = \left(\frac{\dot{h}}{1 - \frac{2h^2 m}{h^3 + Q^3} - \frac{\Lambda h^2}{3}}, \sqrt{1 - \frac{2h^2 m}{h^3 + Q^3} - \frac{\Lambda h^2}{3} + \dot{h}^2}, 0, 0 \right), \quad (2)$$

$$n_-^{\mu} = \left(\frac{\dot{h}}{1 - \frac{h^2}{\alpha^2}}, \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha^2} + \dot{h}^2}, 0, 0 \right), \quad (3)$$

где $\dot{h} = dh/d\tau$.

Материальная поверхность на оболочке данного радиуса обуславливает разрыв внешней кривизны $K_j^{i\pm}$. Математически компоненты внешней кривизны для обеих геометрий записываются следующим образом:

$$K_{\tau}^{\tau+} = \frac{2mh(h^3 - 2Q^3)}{(Q^3 + h^3)^2} + \frac{16\pi\Lambda h}{3} + 2\ddot{h}, \quad (4)$$

$$K_{\theta}^{\theta+} = \frac{1}{h} \sqrt{1 - \frac{2h^2 m}{h^3 + Q^3} - \frac{\Lambda h^2}{3} + \dot{h}^2}, \quad (5)$$

$$K_{\tau}^{\tau-} = \frac{-\frac{2h}{\alpha^2} + 2\ddot{h}}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha^2} + \dot{h}^2}}, \quad (6)$$

$$K_{\theta}^{\theta-} = \frac{1}{h} \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha^2} + \dot{h}^2}, \quad (7)$$

$$K_{\phi}^{\phi\pm} = \sin^2 \theta K_{\theta}^{\theta\pm}. \quad (8)$$

Если

$$K_{ij}^+ - K_{ij}^- \neq 0,$$

то на $\partial\Upsilon$ присутствует тонкий слой материи. Компоненты тензора энергии-импульса S_j^i такой материальной поверхности определяются уравнениями Ланцоша. Их можно выразить как

$$S_j^i = -\frac{1}{8\pi} \{ [K_j^i] - \delta_j^i K \}, \quad (9)$$

где $[K_j^i] = K_j^{+i} - K_j^{-i}$ и $K = \text{tr}[K_{ij}] = [K_j^j]$. Приведенное выше уравнение в терминах распределения идеальной жидкости принимает вид

$$S_j^i = v^i v_j (p + \sigma) + p \delta_j^i, \quad (10)$$

где v_i — компоненты скорости изменения радиуса тонкой оболочки, σ — плотность поверхностной энергии, а p — поверхностное давление. Радиус-вектор на гиперповерхности можно выразить как

$$x^i = (\tau, \theta, \phi),$$

а скорость — как

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau} = (1, 0, 0).$$

Пусть $r = h(\tau)$ — радиальная координата пространства-времени ЧД на гиперповерхности. Тогда радиус оболочки зависит от собственного времени τ и можно записать

$$\dot{h} = \frac{dh}{d\tau}.$$

Это — производная радиуса горловины по собственному времени, которая обычно определяет устойчивые и динамические конфигурации тонкой оболочки. Не имеется прямого соотношения, связывающего между собой v^i и \dot{h} . Здесь \dot{h} — скорость изменения радиуса горловины по отношению к собственному времени, а v^i — скорость частицы, движущейся над гиперповерхностью.

Из уравнений(3) и (4) получаем выражения для σ и p :

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi h} \left\{ \sqrt{\dot{h}^2 + 1 - \frac{2h^2 m}{h^3 + Q^3} - \frac{\Lambda h^2}{3}} - \sqrt{\dot{h}^2 + 1 - \frac{h^2}{\alpha^2}} \right\}, \quad (11)$$

$$p = \frac{1}{8\pi h} \times \left\{ \frac{2\dot{h}^2 + 2h\ddot{h} - \frac{2mh^2(4Q^3 + h^3)}{(Q^3 + h^3)^2} + \frac{32}{3}\pi\Lambda h^2 + 2}{\sqrt{\dot{h}^2 + 1 - \frac{2h^2m}{h^3 + Q^3} - \frac{\Lambda h^2}{3}}} - \frac{2\dot{h}^2 + 2h\ddot{h} + 2 - \frac{4h^2}{\alpha^2}}{\sqrt{\dot{h}^2 + 1 - \frac{h^2}{\alpha^2}}} \right\}. \quad (12)$$

Уравнение движения, описывающее динамические и устойчивые конфигурации гравастаров с тонкой оболочкой, можно получить, перегруппировав уравнение (5). Его можно записать в виде

$$\dot{h}^2 + \Omega(h) = 0, \quad (13)$$

где $\Omega(h)$ — потенциальная функция рассматриваемой структуры:

$$\Omega(h) = -\frac{\chi(h)^2}{64\pi^2 h^2 \sigma^2} + \frac{1}{2}\lambda(h) - 4\pi^2 h^2 \sigma^2, \quad (14)$$

для простоты мы ввели обозначения $\chi(h)$ и $\lambda(h)$:

$$\chi(h) = \Pi_-(h) - \Pi_+(h), \quad \lambda(h) = \Pi_-(h) + \Pi_+(h).$$

Теперь предположим, что \dot{h} и \ddot{h} обращаются в нуль для равновесного радиуса оболочки, h_0 , тогда при $h = h_0$ движение оболочки в радиальном направлении прекращается. Соответствующие значения поверхностного напряжения при $h = h_0$ принимают вид

$$\sigma_0 = -\frac{1}{4\pi h_0} \left\{ \sqrt{1 - \frac{2h_0^2 m}{h_0^3 + Q^3} - \frac{\Lambda h_0^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{h_0^2}{\alpha^2}} \right\}, \quad (15)$$

$$p_0 = \frac{1}{8\pi h_0} \left\{ \frac{-\frac{2mh_0^2(4Q^3 + h_0^3)}{(Q^3 + h_0^3)^2} + \frac{32}{3}\pi\Lambda h_0^2 + 2}{\sqrt{1 - \frac{2h_0^2 m}{h_0^3 + Q^3} - \frac{\Lambda h_0^2}{3}}} - \frac{2 - \frac{4h_0^2}{\alpha^2}}{\sqrt{1 - \frac{h_0^2}{\alpha^2}}} \right\}. \quad (16)$$

В следующем разделе мы рассмотрим влияние физических параметров на области устойчивости оболочки гравастара при линеаризованном радиальном возмущении. Кроме того, мы рассмотрим влияние скалярного поля на динамическую конфигурацию оболочки.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

В данном разделе мы рассмотрим устойчивые конфигурации гравастаров с тонкой оболочкой с возмущением вдоль радиального направления относительно равновесного радиуса оболочки $h = h_0$. Закон сохранения в терминах σ и p принимает вид

$$p \frac{d}{d\tau}(4\pi h^2) + \frac{d}{d\tau}(\mathcal{M}) = 0, \quad (17)$$

где $\mathcal{M} = 4\pi h^2 \sigma$ — распределение полной массы на тонкой оболочке. Приведенное выше уравнение можно переписать как

$$\sigma' = -\frac{2}{h}(p(\sigma) + \sigma). \quad (18)$$

Для исследования устойчивых конфигураций с возмущением вдоль радиального направления используем разложение $\Omega(h)$ в ряд Тейлора вблизи равновесного радиуса оболочки h_0 :

$$\Omega(h) = \Omega(h_0) + \Omega'(h_0)(h - h_0) + \frac{1}{2}\Omega''(h_0)(h - h_0)^2 + O[(h - h_0)^3].$$

Получаем

$$\Omega(h_0) = 0 = \Omega'(h_0),$$

тогда приведенное выше уравнение принимает вид

$$\Omega(h) = \frac{1}{2}(h - h_0)^2 \Omega''(h_0). \quad (19)$$

Соответственно, вторая производная $\Omega(h)$ при $h = h_0$ равна

$$\begin{aligned} \Omega''(h_0) = & \frac{2\mathcal{M}(h_0)\mathcal{M}'(h_0)}{h_0^3} - \frac{h_0^2\chi(h_0)\chi''(h_0)}{2\mathcal{M}(h_0)^2} + \\ & + \frac{2h_0^2\chi(h_0)\mathcal{M}'(h_0)\chi'(h_0)}{\mathcal{M}(h_0)^3} - \frac{\mathcal{M}'(h_0)^2}{2h_0^2} - \frac{h_0^2\chi'(h_0)^2}{2\mathcal{M}(h_0)^2} - \\ & - \frac{3h_0^2\chi(h_0)^2\mathcal{M}'(h_0)^2}{2\mathcal{M}(h_0)^4} - \frac{2h_0\chi(h_0)\chi'(h_0)}{\mathcal{M}(h_0)^2} + \\ & + \frac{\chi''(h_0)}{2} - \frac{3\mathcal{M}(h_0)^2}{2h_0^4} + \frac{h_0^2\chi(h_0)^2\mathcal{M}''(h_0)}{2\mathcal{M}(h_0)^3} - \\ & - \frac{\mathcal{M}(h_0)\mathcal{M}''(h_0)}{2h_0^2} - \frac{\chi(h_0)^2}{2\mathcal{M}(h_0)^2} + \\ & + \frac{2h_0\chi(h_0)^2\mathcal{M}'(h_0)}{\mathcal{M}(h_0)^3}. \quad (20) \end{aligned}$$

Для исследования областей устойчивости рассматриваемой структуры мы использовали общее представление для поверхностного давления как

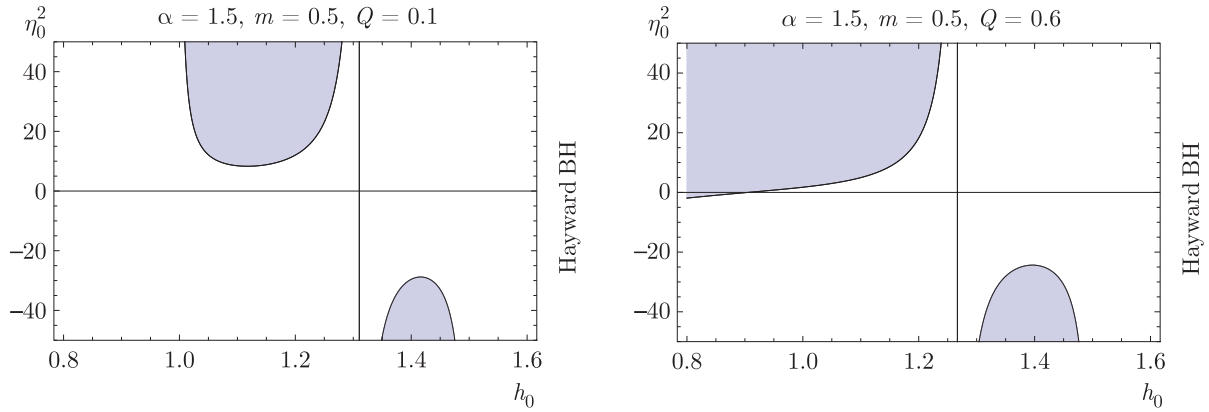


Рис. 1. Области устойчивости для гравастаров с тонкой оболочкой для ЧД Хейворда при различных значениях Q

функции плотности поверхностной энергии, это также было рассмотрено в работах [25–27]. Для исследования устойчивости гравастаров с тонкой оболочкой полезно также выбрать конкретный вид УС. Здесь мы рассмотрим зависимость поверхностного давления от плотности поверхностной энергии для оболочки гравастара только в общем виде, т. е. $p = p(\sigma)$. Параметр в уравнении состояния для равновесного радиуса оболочки можно выразить как

$$\eta_0^2 = dp/d\sigma|_{h=h_0}.$$

Соответственно, первая и вторая производные полной массы по h при $h = h_0$ имеют вид

$$\mathcal{M}'(h_0) = -8\pi h_0 p_0,$$

$$\mathcal{M}''(h_0) = -8\pi p_0 + 16\pi \eta_0^2 (\sigma_0 + p_0).$$

Поскольку эти выражения зависят от параметра УС, вторая производная потенциальной функции по радиусу оболочки также зависит от η_0^2 .

Будем исследовать устойчивость гравастаров с тонкой оболочкой, используя вторую производную эффективного потенциала при $h = h_0$. Известно, что если $\Omega''(h_0) < 0$, то тонкая оболочка обладает неустойчивой конфигурацией, если $\Omega''(h_0) > 0$ — устойчивой, а если $\Omega''(h_0) = 0$, то об устойчивости ничего сказать нельзя [38]. Поскольку мы исследуем области устойчивости с помощью второй производной $\Omega''(h_0)$, уравнение (16) можно записать как

$$\Omega''(h_0) > 0 \Rightarrow \Upsilon(h_0)\eta_0^2 - B(h_0) > 0. \quad (21)$$

Здесь $B(h_0) = B_0$ и $\Upsilon(h_0) = \Upsilon_0$ обозначают выражения, в которые не входит параметр УС η_0^2 . Чтобы охарактеризовать области устойчивости гравастаров с тонкой оболочкой, можно записать

- (i) Если $\Upsilon_0 < 0$, то $\eta_0^2 < B_0/\Upsilon_0$.
- (ii) Если $\Upsilon_0 > 0$, то $\eta_0^2 > B_0/\Upsilon_0$.

Здесь

$$\Upsilon_0 = (4\sigma_0 p_0 + 4\sigma_0^2) \times (-256\pi^4 h_0 + (\Pi_-(h_0) - \Pi_+(h_0))^2)^4 \sigma_0^4,$$

$$B_0 = -(4p_0^2 + 6p_0\sigma_0 + 3\sigma_0^2) 256\pi^4 h_0^4 \sigma_0^4 + h_0\sigma_0 (h_0\sigma_0 (\Pi_-(h_0)'' (16\pi^2 h_0^2 \sigma_0^2 - \Pi_-(h_0) + \Pi_+(h_0)) + \Pi_+(h_0)'' \times (\Pi_-(h_0) + 16\pi^2 h_0^2 \sigma_0^2 - \Pi_+(h_0))) + 2\Pi_-(h_0)' (h_0\sigma_0\Pi_+(h_0)' - 2(\Pi_-(h_0) - \Pi_+(h_0)) \times (2p_0 + \sigma_0)) - h_0\sigma_0 (\Pi_-(h_0)')^2 - h_0\sigma_0 (\Pi_+(h_0)')^2 + 4\Pi_+(h_0)'(2p_0 + \sigma_0) (\Pi_-(h_0) - \Pi_+(h_0))) - (12p_0^2 + 10p_0\sigma_0 + \sigma_0^2) \Pi_-(h_0)^2 + 2\Pi_-(h_0) \times (12p_0^2 + \sigma_0^2 + 10p_0\sigma_0) \Pi_+(h_0) - \Pi_+(h_0)^2 \times (12p_0^2 + 10p_0\sigma_0 + \sigma_0^2).$$

Для исследования областей устойчивости рассматриваемых структур проанализируем графики зависимостей B_0/Υ_0 и η_0^2 . Области устойчивости для гравастаров с тонкой оболочкой при различных значениях физических параметров показаны на рис. 1 и 2 темным цветом, при этом светлые области соответствуют неустойчивым конфигурациям. Как видно на рис. 1 и 2, размер областей устойчивости для гравастаров с тонкой оболочкой в случае ЧД Хейворда увеличивается как с ростом заряда, так и с ростом массы ЧД. Изменение физических параметров внутреннего пространства-времени DS оказывает существенное влияние на области устойчивости гравастаров с тонкой оболочкой. Оказалось, что чем больше значение α , тем больше области устойчивости (см. рис. 3). При этом для гравастаров с тонкой

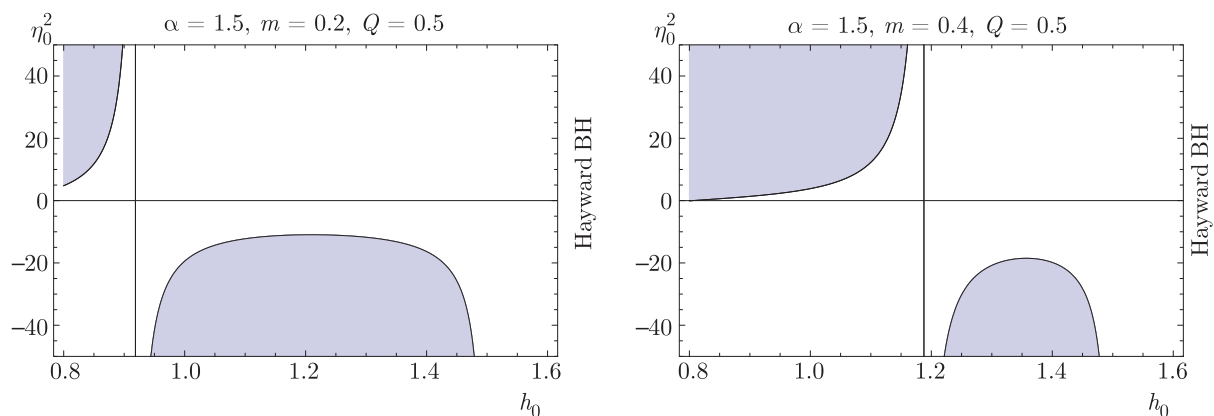


Рис. 2. Области устойчивости для гравестаров с тонкой оболочкой для ЧД Хейворда при различных значениях m

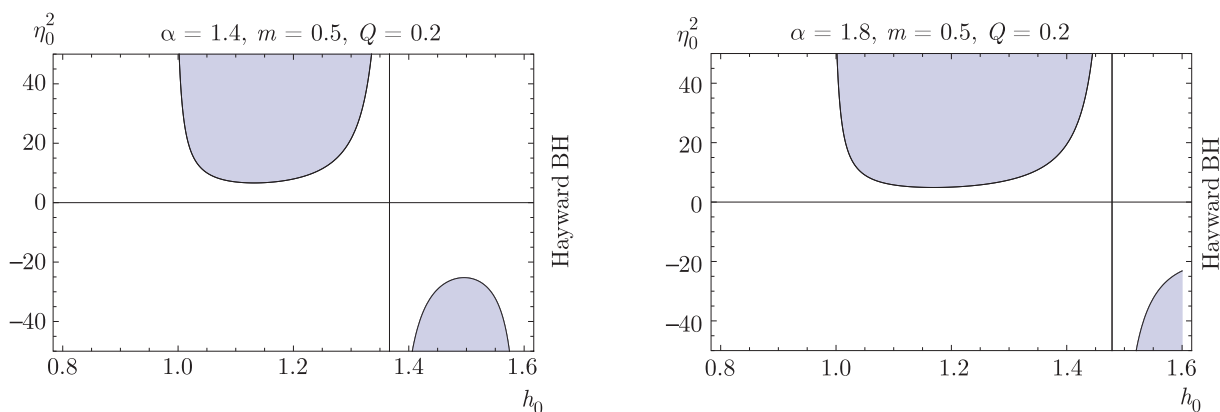


Рис. 3. Области устойчивости для гравестаров с тонкой оболочкой для ЧД Хейворда при различных значениях α

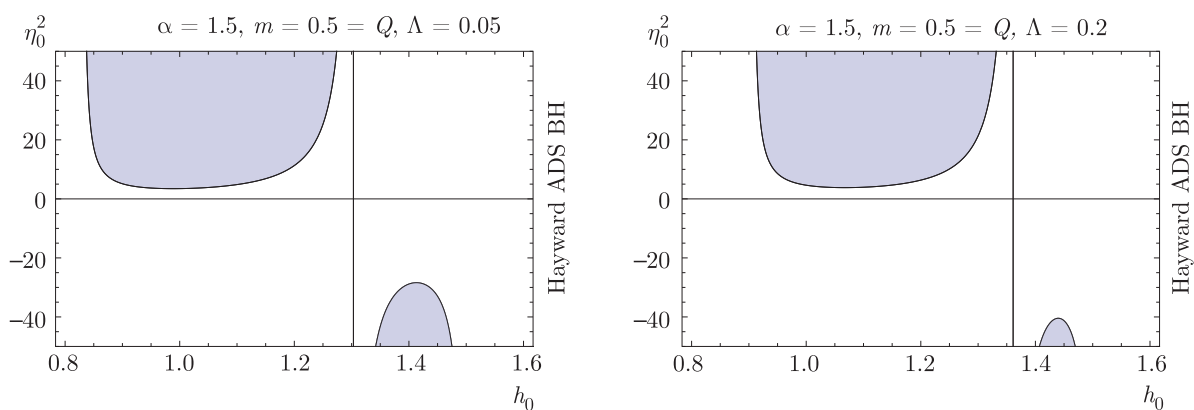


Рис. 4. Области устойчивости для гравестаров с тонкой оболочкой для ЧД Хейворда при различных значениях Λ

оболочкой для ЧД Хейворда–ADS при возрастании Λ области устойчивости уменьшаются (см. рис. 4). Можно сказать, что для гравестаров с тонкой оболочкой области устойчивости различны для различных случаев внешнего пространства-времени, облас-

ти устойчивости для ЧД Шварцшильда больше областей устойчивости для ЧД Шварцшильд ADS, а области устойчивости для ЧД Хейворда больше областей устойчивости для ЧД Хейворда ADS (см. рис. 5).

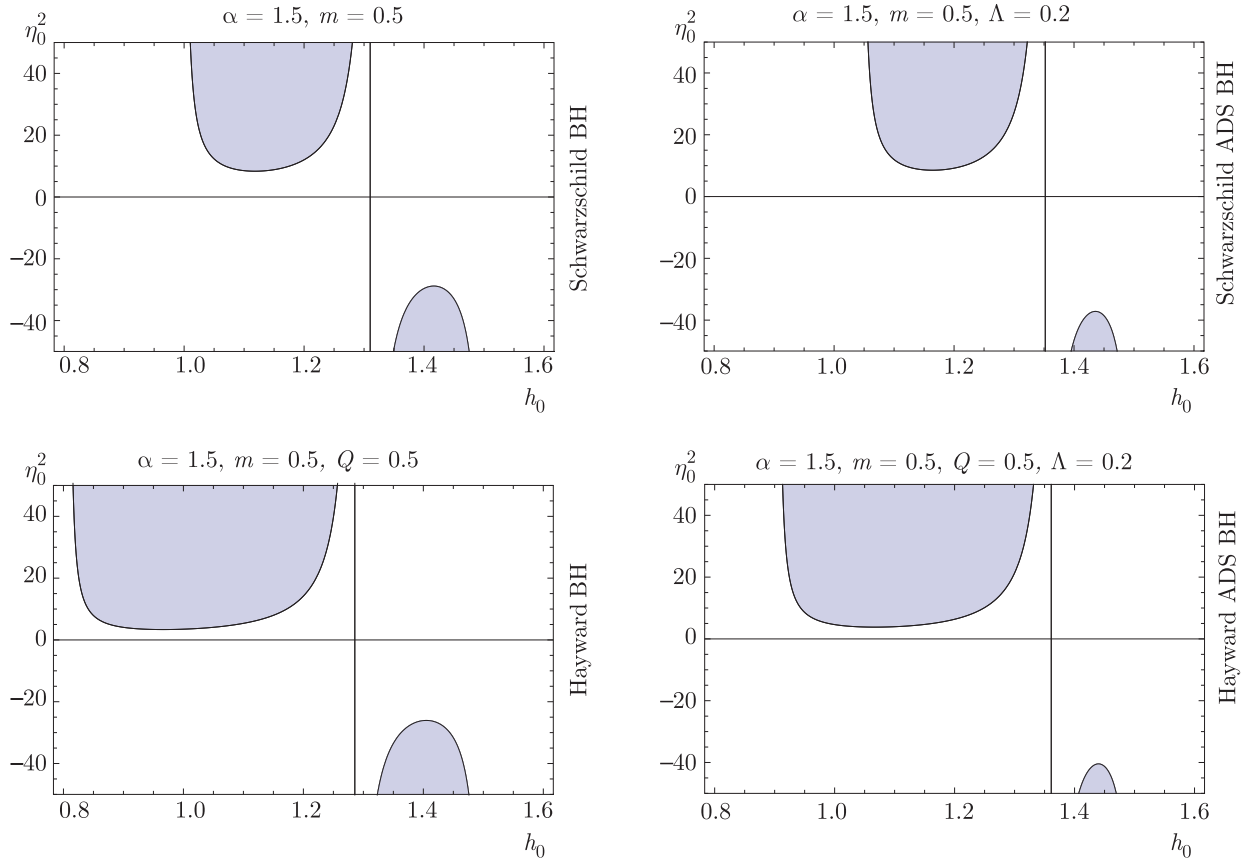


Рис. 5. Области устойчивости для гравастаров с тонкой оболочкой при различном выборе внешнего пространства-времени при $m = 0.5$

4. ДИНАМИКА ГРАВАСТАРОВ С ТОНКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

В данном разделе мы исследуем эффективный потенциал и скорость изменения радиуса оболочки рассматриваемой структуры, которые обеспечивают динамику в виде коллапса, расширения и седловых точек. Ниже мы получим соответствующие выражения для скорости и эффективного потенциала для гравастаров с тонкой оболочкой для случаев ЧД Хейворда и ЧД Хейворда ADS в терминах массы оболочки.

А. Черная дыра Хейворда

Скорость изменения радиуса оболочки (уравнение движения) для гравастаров с тонкой оболочкой для случая ЧД Хейворда имеет вид

$$\dot{h} = \pm \left\{ \frac{\mathcal{M}^2}{4h^2} + \frac{h^6 \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} \right)^2}{36\mathcal{M}^2} + \frac{h^2 \left(\frac{2m}{h^3 + Q^3} + \frac{1}{\alpha^2} \right) - 1}{2} \right\}^{1/2}. \quad (22)$$

Соответствующая потенциальная функция материальной поверхности на тонкой оболочке имеет вид

$$\Omega_h(h) = 1 - \frac{\mathcal{M}^2}{4h^2} - \frac{h^6 \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} \right)^2}{36\mathcal{M}^2} - \frac{h^2 \left(\frac{2m}{h^3 + Q^3} - \frac{1}{\alpha^2} \right)}{2}. \quad (23)$$

В. Черная дыра Хейворда ADS

Скорость изменения радиуса оболочки (уравнение движения) для гравастаров с тонкой оболочкой для случая ЧД Хейворда-ADS имеет вид

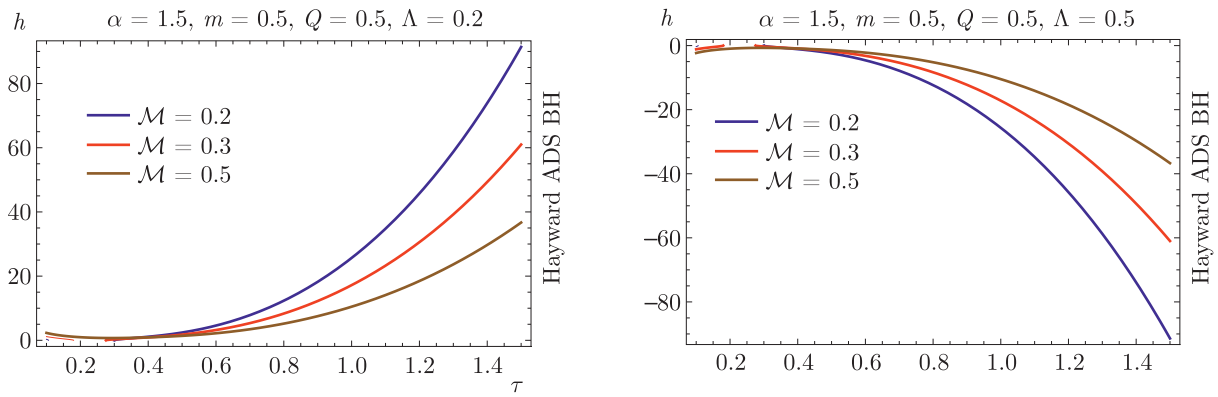


Рис. 6. Динамика гравастаров с тонкой оболочкой, а именно, расширение (левая панель) и коллапс (правая панель) при различном поведении скорости изменения радиуса оболочки для различных значений M

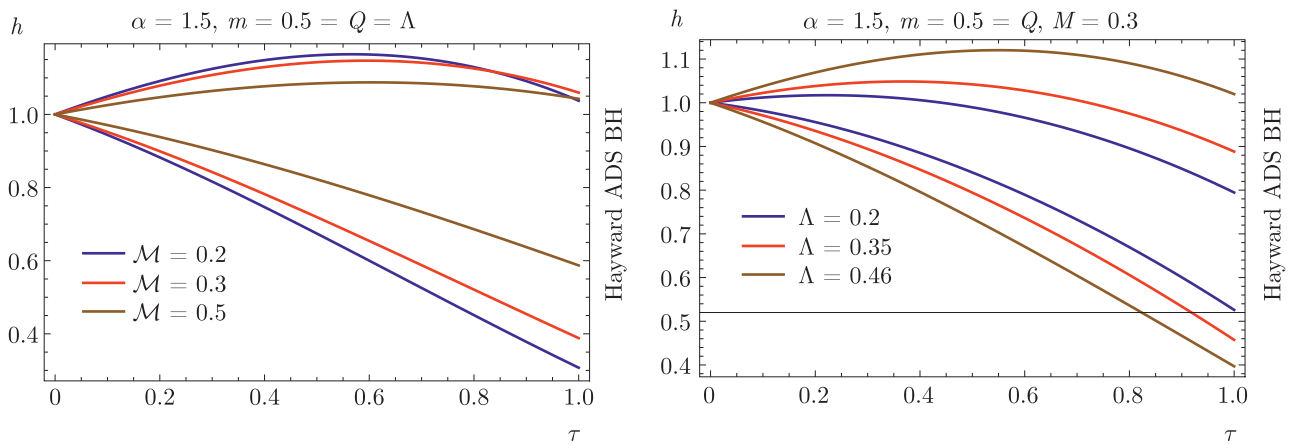


Рис. 7. Динамика гравастаров с тонкой оболочкой, а именно, зависимости радиуса оболочки h от τ при $h(0) = 1$ для различных значений M (левая панель) и Λ (правая панель)

$$\dot{h} = \pm \left\{ \frac{M^2}{4h^2} + \frac{h^6 \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} + \Lambda \right)^2}{36M^2} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} + \frac{3}{\alpha^2} + \Lambda \right) - 1 \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

Соответствующая потенциальная функция материальной поверхности на тонкой оболочке имеет вид

$$\Omega_{hads}(h) = 1 - \frac{M^2}{4h^2} - \frac{h^6 \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} + \Lambda \right)^2}{36M^2} - \frac{h^2}{6} \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} + \frac{3}{\alpha^2} + \Lambda \right). \quad (25)$$

Динамика гравастаров с тонкой оболочкой при различных значениях физических параметров, а именно, скорости изменения радиуса оболочки, радиуса оболочки и эффективного потенциала, показана на рис. 6, 7 и 8. Если скорость изменения радиуса оболочки возрастает, то оболочка гравастара демонстрирует расширение, в противном случае — коллапс (см. рис. 6). Левый рисунок соответствует расширению, а правый — коллапсу тонкой оболочки. На рисунке видно, что с ростом массы оболочки динамика замедляется. Оказалось, что при соответствующем собственном времени тонкая оболочка может одновременно демонстрировать как расширение, так и коллапс (см. рис. 7). На рисунке видно, что скорости как коллапса, так и расширения оболочки гравастаров больше для больших значений Λ .

Потенциальная функция демонстрирует осцилляции при изменении радиуса оболочки граваста-

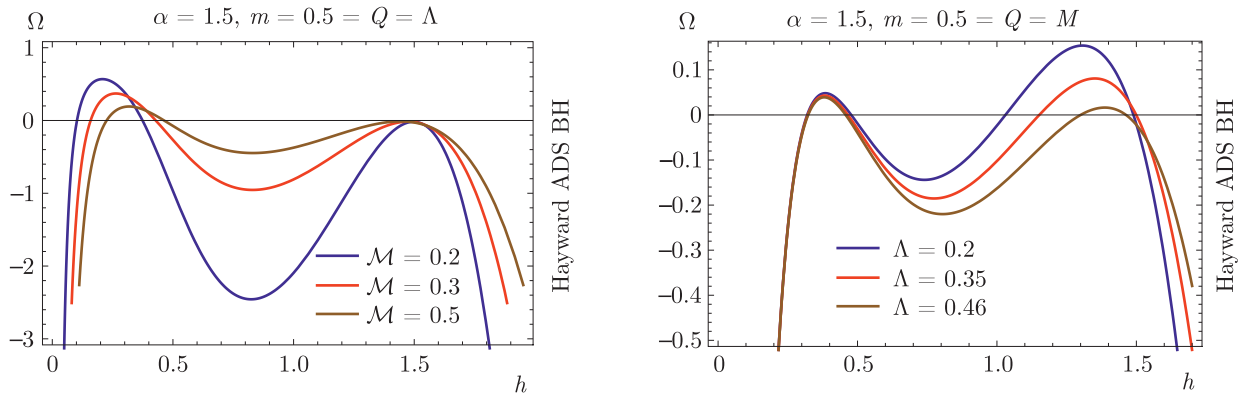


Рис. 8. Осцилляции потенциальной функции при изменении радиуса оболочки для различных значений M (левая панель) и Λ (правая панель)

ров при различных значениях физических параметров, см. рис. 8. Значения потенциальной функции осциллируют между двумя вещественными корнями, h_1, h_2 , при $\Omega(h_1) = 0 = \Omega(h_2)$. Локальные минимумы или локальные максимумы потенциальной функции получены в открытом интервале (h_1, h_2) . На рис. 8 показаны различные пары вещественных корней потенциальной функции с локальными минимумами и локальными максимумами. Если потенциальная функция имеет локальный минимум между своими вещественными корнями, то она демонстрирует устойчивое поведение, в противном случае — неустойчивое. Оболочка демонстрирует коллапс при $\Omega(h) \rightarrow -\infty$ при $h \rightarrow 0$ или $h \rightarrow \infty$, если $h > 1.5$. Оказалось, что скорость расширения и коллапса оболочки гравастаров зависит от космологической постоянной и массы оболочки. Приведенным зависимостям потенциальной функции соответствуют области устойчивых и неустойчивых осцилляций оболочки гравастаров. Для двух значений радиусов оболочки h_1, h_2 , скорость ее изменения обращается в нуль, $\dot{h}(\tau) = 0$, что означает, что оболочка перестает двигаться и возвращается к прежнему состоянию. Как можно видеть, при $\Omega(h) > 0$ оболочка гравастара демонстрирует расширение, при $\Omega(h) < 0$ — коллапс, а $\Omega(h) = 0$ соответствует седловым точкам. Поверхностное давление оболочки максимально при минимальном значении радиуса оболочки и имеет минимальное значение при его максимальном значении. Это означает, что гравитационное притяжение заставляет оболочку сжиматься, что приводит к осцилляциям. Оказалось, что из-за осцилляций оболочка гравастара может иметь как устойчивые, так и неустойчивые конфигурации при разных значениях радиуса.

4.1. Гравастары с тонкой оболочкой в случае скалярного поля

Рассмотрим движение гравастаров с тонкой оболочкой в случае вещественного скалярного поля. Они полезны для понимания динамической конфигурации скалярных тел. Для этого рассмотрим преобразование, связывающее уравнения движения тонкой оболочки, состоящей из идеальной жидкости, в случае скалярного поля. Рассмотрим преобразование

$$u_a = \frac{\psi_{,a}}{\sqrt{\psi_{,b}\psi^{,b}}},$$

устанавливающее линейную зависимость между компонентами тензора энергии-импульса идеальной жидкости с производной скалярного поля ψ по собственному времени, а также скалярной потенциальной функцией $\Omega(\psi)$ [33–35]. С помощью этого преобразования в случае скалярного поля для гравастаров с тонкой оболочкой можно получить уравнения движения, которые описывают поведение оболочки как аналитически, так и численно. В случае скалярного поля соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид [33]

$$S_{ij} = \nabla_i \psi \nabla_j \psi - \eta_{ij} \left(\frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 - \Omega(\psi) \right).$$

Соответствующие компоненты можно выразить как [33, 34]

$$2\sigma = \psi_{,b}\psi^{,b} + 2\Omega(\psi), \quad 2p = \psi_{,b}\psi^{,b} - 2\Omega(\psi), \quad (26)$$

откуда получаем

$$\sigma = \frac{1}{2} (\dot{\psi}^2 + 2\Omega(\psi)), \quad p = \frac{1}{2} (\dot{\psi}^2 - 2\Omega(\psi)). \quad (27)$$

Тогда масса оболочки в случае скалярного поля равна

$$\mathcal{M} = 4\pi h^2 \sigma = 2\pi h^2 (\dot{\psi}^2 + 2\Omega(\psi)). \quad (28)$$

Используя уравнения (24) и (25), из (17) получаем

$$\ddot{\psi} + \frac{2\dot{h}}{h} \dot{\psi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} = 0. \quad (29)$$

Приведенное выше уравнение называется уравнением Клейна–Гордона (КГ). Для ЧД Хейворда и для ЧД Хейворда–ADS потенциальная функция гравастаров с тонкой оболочкой в случае скалярного поля соответственно принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega_h(h) = & 1 - \pi^2 h^2 (2\Omega(\psi) + \dot{\psi}^2)^2 + \\ & + \frac{1}{6} h^2 \left(-\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} \right) - \\ & - \frac{h^2}{144\pi^2} \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} \right)^2 (2\Omega(\psi) + \dot{\psi}^2)^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{hads}(h) = & 1 - \pi^2 h^2 (2\Omega(\psi) + \dot{\psi}^2)^2 + \\ & + \frac{1}{6} h^2 \left(-\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} - \Lambda \right) - \\ & - \frac{h^2}{144\pi^2} \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} + \Lambda \right)^2 (2\Omega(\psi) + \dot{\psi}^2)^{-2}. \end{aligned}$$

Для исследования тонкой оболочки в случае скалярного поля нам необходимо соотношение между плотностью поверхностной энергии σ и давлением p . Однако нет такого УС, которое связывало бы потенциал скалярного поля и кинетические энергии. Поэтому мы будем использовать частный вид $\Omega(\psi)$ с определенным набором физических параметров, что позволяет получить выражения для эффективной массы и напряженности скалярного поля. Чтобы исследовать динамику гравастаров с тонкой оболочкой, рассмотрим два типа скалярного поля, а именно, безмассовое ($\Omega(\psi) = 0$) и массивное ($\Omega(\psi) = m^2 \psi^2$) скалярные поля.

4.1.1. Безмассовое скалярное поле

В этом случае мы получаем прямое соотношение между компонентами тензора энергии-импульса, т. е. $p = \sigma$ при $\Omega(\psi) = 0$. Соответствующее уравнение КГ можно записать как

$$\ddot{\psi} + \frac{2\dot{h}}{h} \dot{\psi} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\dot{\psi} = \frac{\xi}{h^2},$$

где ξ — вещественная константа. Эффективные потенциалы для гравастаров с тонкой оболочкой в случае безмассового скалярного поля для пространства-времени ЧД Хейворда и ЧД Хейворда–ADS принимают вид

$$\begin{aligned} \Omega_h(h) = & 1 - \frac{\pi^2 \xi^4}{h^6} - \frac{h^{10} \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} \right)^2}{144\pi^2 \xi^4} + \\ & + \frac{1}{6} h^2 \left(-\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} \right), \\ \Omega_{hads}(h) = & 1 - \frac{\pi^2 \xi^4}{h^6} - \frac{h^{10} \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} - \frac{3}{\alpha^2} + \Lambda \right)^2}{144\pi^2 \xi^4} - \\ & - \frac{h^2}{6} \left(\frac{6m}{h^3 + Q^3} + \frac{3}{\alpha^2} + \Lambda \right). \end{aligned}$$

Проанализируем расширение и коллапс гравастаров с тонкой оболочкой в случае безмассового скалярного поля с помощью графиков зависимостей радиуса оболочки и эффективного потенциала при различных конкретных значениях физических параметров. Видно, что зависимости радиуса тонкой оболочки указывают как на расширение, так и на коллапс (рис. 9), причем скорость динамических процессов больше для больших значений ξ . Анализируя поведение функции эффективного потенциала в случае безмассовой скалярной оболочки, можно сделать вывод, что при выборе в качестве внешнего многообразия пространства-времени ЧД Хейворда–ADS оболочка демонстрирует менее выраженную динамику, чем при выборе пространства-времени ЧД Хейворда (рис. 10). Зависимости эффективного потенциала указывают на то, что в случае безмассового скалярного поля тонкая оболочка демонстрирует только коллапс, причем скорость коллапса больше для больших значений ξ (рис. 11).

4.1.2. Массивное скалярное поле

Рассмотрим динамику гравастаров с тонкой оболочкой в случае массивного скалярного поля,

$$\Omega(\psi) = M^2 \psi^2.$$

В этом случае соответствующие потенциальная функция и производная по собственному времени в выражениях для σ и p имеют вид

$$2\Omega(\psi) = \sigma - p, \quad \dot{\psi}^2 = \sigma + p. \quad (30)$$

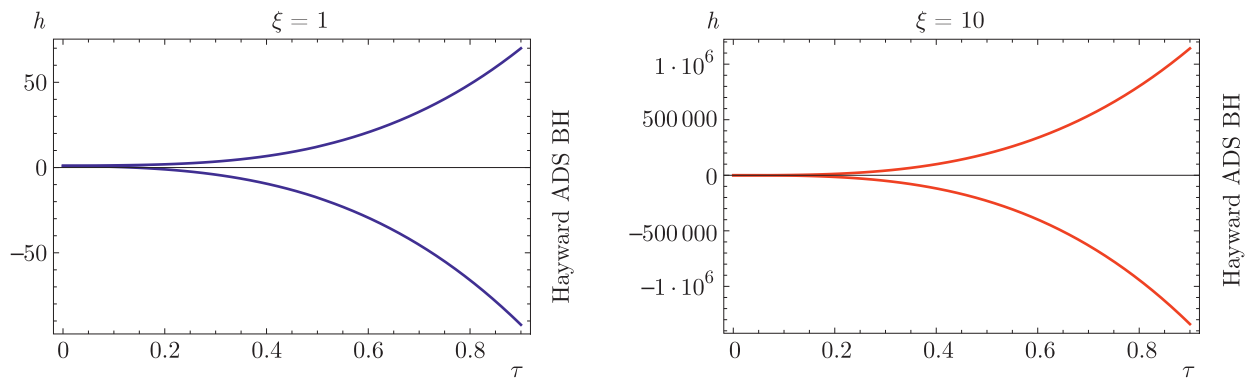


Рис. 9. Динамика гравастаров с тонкой оболочкой в случае безмассового скалярного поля, а именно, зависимости радиуса оболочки h от τ при $h(0) = 1$

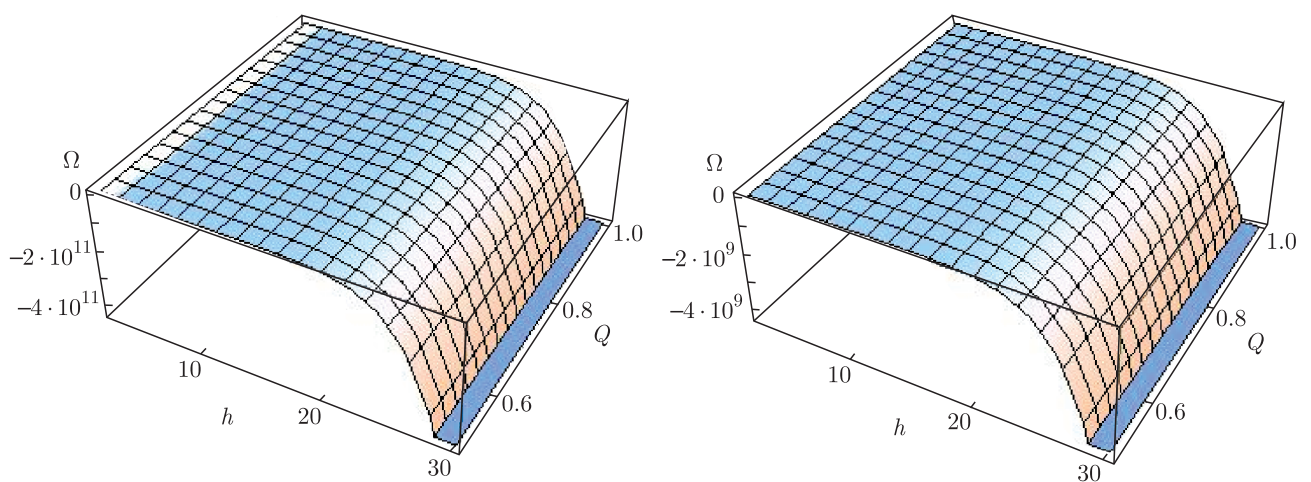


Рис. 10. Динамические конфигурации гравастаров с тонкой оболочкой, а именно, зависимости эффективного потенциала от h и Q для $\Lambda = 0$ (левая панель) и $\Lambda = 1.2$ (правая панель) при $\xi = 1, \alpha = 1.5, m = 0.5$

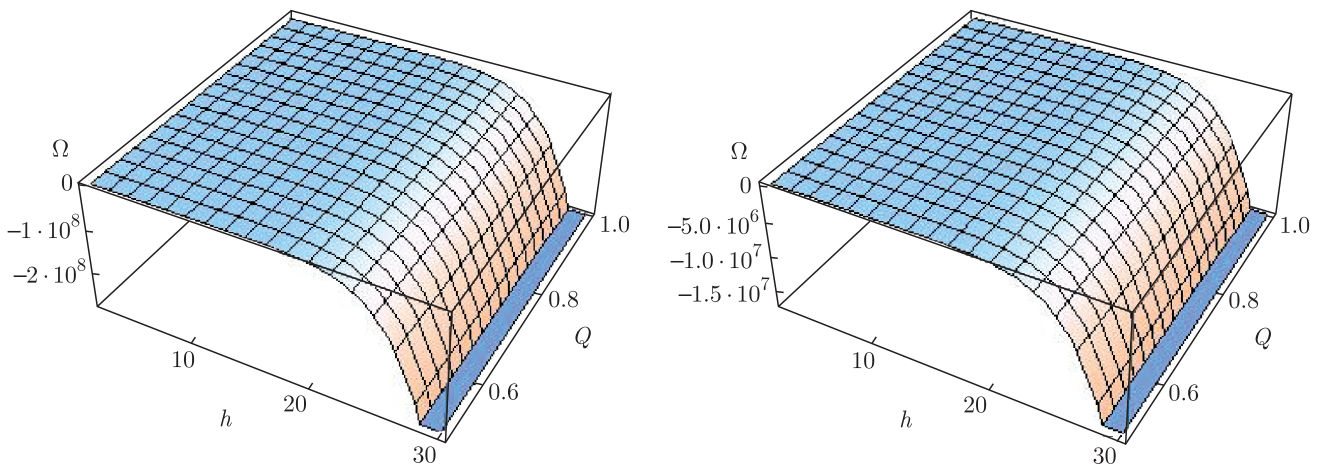


Рис. 11. Динамические конфигурации гравастаров с тонкой оболочкой, а именно, зависимости эффективного потенциала от h и Q для $\xi = 5$ (левая панель) и $\xi = 10$ (правая панель) при $\Lambda = 0.5 = m, \alpha = 1.5$

Будем считать, что поверхностное давление является явной функцией от h , т. е.

$$p = p_0 e^{-\zeta h},$$

где p_0 и ζ — вещественные постоянные. Подставив это выражение для поверхностного давления в уравнение (18), получим выражение для плотности поверхностной энергии:

$$\sigma = \frac{1}{\zeta^2 h^2} (2(1 + \zeta h) p_0 e^{-\zeta h} + \zeta^2 \eta), \quad (31)$$

где η — постоянная интегрирования. Подставляя выражения для σ и p в уравнение (30), получим

$$\psi^2 = \frac{1}{h^2 \zeta^2} (\eta \zeta^2 + p_0 e^{-\zeta h} (\zeta^2 h^2 + 2(1 + \zeta h))), \quad (32)$$

$$\Omega(\psi) = \frac{1}{2h^2 \zeta^2} (\eta \zeta^2 - p_0 e^{-\zeta h} (\zeta^2 h^2 - 2(1 + \zeta h))). \quad (33)$$

Заметим, что приведенные выше выражения согласуются с уравнением КГ. Используя уравнения (32) и (33), для гравастаров с тонкой оболочкой в случае массивного скалярного поля можно получить

$$\Omega(h) = -\frac{h^2 \chi(h)^2}{4M^2} - \frac{M^2}{4h^2} + \frac{\lambda(h)}{2}, \quad (34)$$

где

$$M = \frac{4\pi}{\zeta^2} (\eta \zeta^2 + 2p_0 e^{-\zeta h} (1 + \zeta h)). \quad (35)$$

Проанализируем динамику гравастаров с тонкой оболочкой в случае массивного скалярного поля с помощью графиков зависимостей радиуса оболочки и эффективного потенциала. На рисунках видно, что радиус оболочки может как возрасть (расширение), так и убывать (коллапс) с изменением собственного времени (см. рис. 12). На графиках зависимостей эффективного потенциала видно, что скорость коллапса уменьшается как с ростом η , так и с ростом ζ (см. рис. 13). На графиках зависимостей радиуса оболочки видно, что скорость коллапса увеличивается после перехода через горизонт событий, т. е. при $h = 1.48$ (левая панель на рис. 14) и $h = 4$ (правая панель на рис. 14).

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе с использованием уравнений движения исследованы устойчивые и динамические конфигурации гравастаров с тонкой оболочкой.

Геометрическая структура гравастаров получается сшиванием внешнего регулярного пространства-времени (ЧД Хейворда и ЧД Хейворда–ADS) с внутренним многообразием DS с использованием метода “cut and paste”. Характеристики образованной материей поверхности получены с использованием формализм Израэля и уравнений Ланцоша. Получено, что оболочка гравастара может иметь как устойчивые и неустойчивые конфигурации, а также демонстрировать динамику. В работе получены следующие результаты.

Во-первых, проанализирована устойчивость рассматриваемых структур в рамках подхода, использующего регулярные ЧД с радиальным возмущением на оболочке с равновесным радиусом. Для исследования устойчивости тонкой оболочки рассмотрены экранированные области. Оказалось, что области устойчивости зависят от физических параметров, а именно, они увеличиваются с ростом Q , m и α и убывают с ростом Λ (см. рис. 1–4). Гравастары с тонкой оболочкой Хейворда являются более устойчивыми, чем гравастары с тонкой оболочкой Шварцшильда, Шварцшильда–ADS и Хейворда–ADS (см. рис. 5).

Во-вторых, исследована динамика рассматриваемых структур в случае вещественного скалярного поля, а именно, для безмассового и массивного скалярных полей. В зависимости от скорости оболочки и ее радиуса гравастары демонстрируют как коллапс, так и расширение. Скорость динамических процессов уменьшается с ростом массы оболочки. При изменении радиуса оболочки для конкретных значений физических параметров потенциальная функция демонстрирует осциллирующее поведение (см. рис. 6–8). С использованием уравнений КГ получены и проанализированы графически динамические уравнения для тонкой оболочки в случае безмассового и массивного скалярных полей. Для всех значений физических параметров относительно собственного времени радиус оболочки демонстрирует как коллапс, так и расширение. В то же время зависимости эффективного потенциала в обоих случаях указывают на то, что оболочка коллапсирует (см. рис. 9–14).

Исследованию устойчивости и динамики гравастаров с тонкой оболочкой в случае скалярного поля посвящено множество работ [33–37]. В настоящей работе рассмотрены расширение и коллапс гравастаров с тонкой оболочкой, заполненных безмассовыми и массивными скалярными полями. Получено, что тонкая оболочка, построенная из двух эквивалентных копий ЧД, демонстрирует как рас-

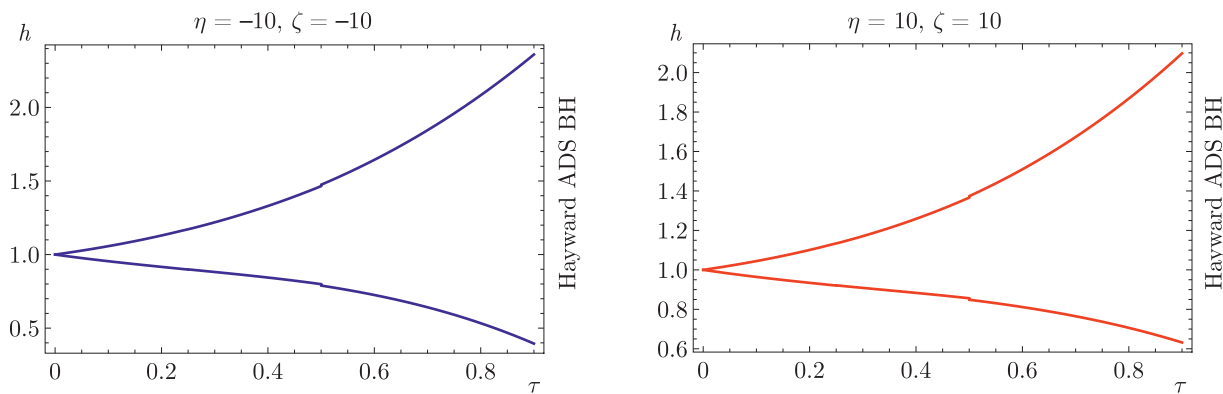


Рис. 12. Динамика гравастаров с тонкой оболочкой в случае массивного скалярного поля, а именно, зависимости радиуса оболочки h от τ при $h(0) = 1$

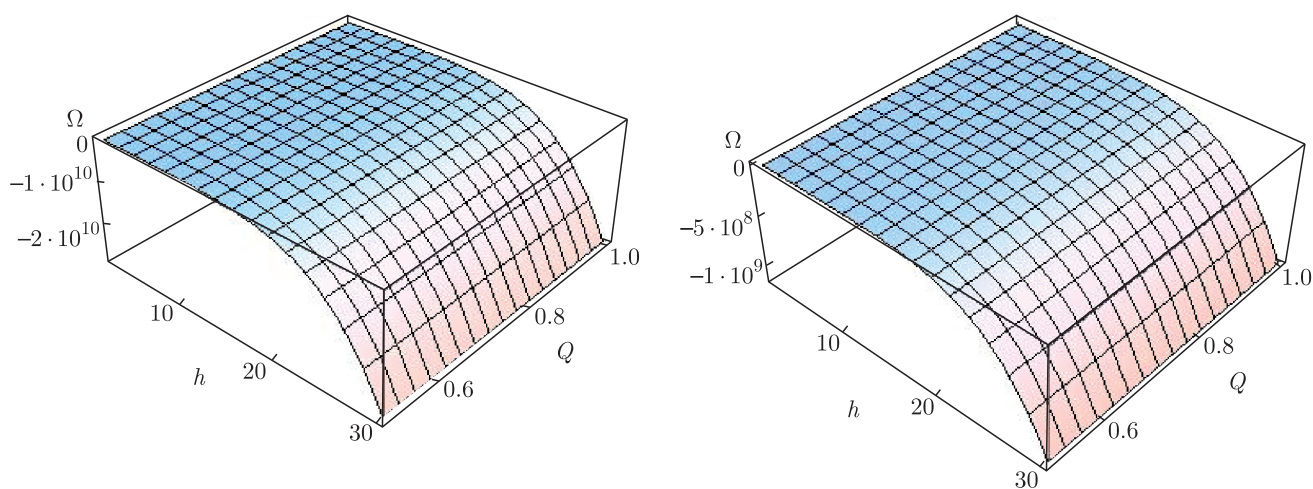


Рис. 13. Динамика гравастаров с тонкой оболочкой, а именно, зависимости эффективного потенциала от h и Q для $\eta = 1 = \zeta$ (левая панель) и $\eta = 5 = \zeta$ (правая панель) при $\Lambda = 0.5 = m$, $\alpha = 1.5$

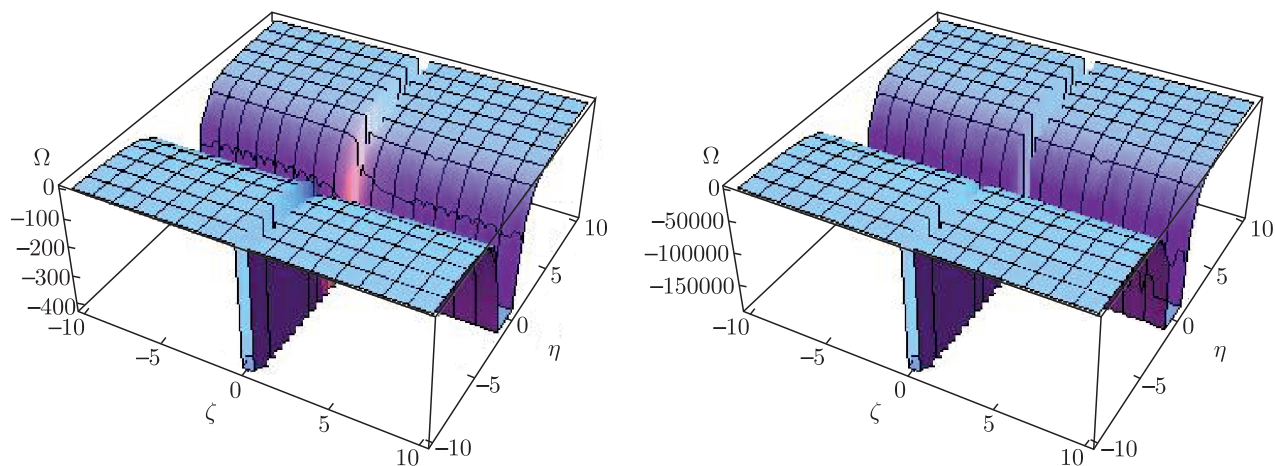


Рис. 14. Динамика гравастаров с тонкой оболочкой, а именно, зависимости эффективного потенциала от ξ и η для $\Lambda = 0.05$ (левая панель) и $\Lambda = 1.5$ (правая панель) при $Q = 0.5 = m$, $\alpha = 1.5$

ширение, так и коллапс для обоих случаев скалярного поля. Для гравастаров с тонкой оболочкой отмечено, что эффективный потенциал рассматриваемой структуры, полученной сшиванием внутреннего пространства-времени ЧД DS и внешнего пространства-времени ЧД Хейворда-ADS, для всех значений физических параметров демонстрирует только коллапс. Поэтому в зависимости от выбора пространства-времени ЧД рассматриваемые структуры ведут себя по-разному. Эти результаты могут оказаться полезными для будущих исследований динамики гравастаров с тонкой оболочкой при различном выборе внутренней и внешней геометрий.

Следует отметить, что гравастары должны быть устойчивыми вблизи ожидаемого горизонта событий [25–27]. Наличие безмассового и массивного скалярных полей на тонкой оболочке для случая эквивалентных копий черных дыр обуславливает как расширение, так и коллапс для различных значений физических параметров. [33–37]. В настоящей работе на основании зависимостей эффективного потенциала мы получили только коллапсирующее поведение оболочки для всех значений физических параметров как для безмассового, так и для массивного поля. Скорость коллапса уменьшается при увеличении космологической постоянной. Поэтому теоретическая модель гравастара могла бы быть полезной для лучшего понимания устойчивых и динамических конфигураций астрономических компактных объектов.

Финансирование. Один из авторов (Ф. Дж.) благодарит Высшую Комиссию по образованию Исламабада за финансовую поддержку (6748/Punjab/NRPU/RD/HEC/2016).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Bardeen, Proc. GR5, Tiflis, USSR (1968), p. 174.
2. E. Ayón-Beato and A. García, Phys. Rev. Lett **80**, 5056 (1998); Gen. Rel. Grav. **629**, 31 (1999); Phys. Lett. B **25**, 464 (1999); Phys. Lett. B **149**, 493 (2000).
3. S. A. Hayward, Phys. Rev. Lett. **96**, 031103 (2006).
4. M. Wen-Juan, C. Rong-Gen, and S. Ru-Keng, Comm. Theor. Phys. **46**, 453 (2006).
5. Z. Y. Fan and X. Wang, Phys. Rev. D **94**, 124027 (2016); Z. Y. Fan, Eur. Phys. J. C **77**, 266 (2017).
6. S. Fernando, Int. J. Mod. Phys. D **26**, 07 (2017).
7. P. Mazur and E. Mottola, arXiv:gr-qc/0109035; Proc. Nat. Acad. Sci. **101**, 9545 (2004).
8. W. Israel, Nuovo Cimento B **44**, 1 (1966).
9. M. Visser, S. Kar, and N. Dadhich, Phys. Rev. Lett. **90**, 201102 (2003).
10. S. H. Mazharimousavi, M. Halilsoy, and Z. Amirabi, Phys. Rev. D **81**, 104002 (2010).
11. F. Rahaman, S. Ray, A. K. Jafry, and K. Chakraborty, Phys. Rev. D **82**, 104055 (2010).
12. M. Sharif and M. Azam, Eur. Phys. J. C **73**, 2407 (2013).
13. M. Sharif and F. Javed, Gen. Relativ. Gravit. **48**, 158 (2016).
14. S. D. Forghani, S. Habib Mazharimousavi, and M. Halilsoy, Eur. Phys. J. C **78**, 469(2018).
15. M. Sharif and F. Javed, Astrophys. Space Sci. **364**, 179 (2019); Chin. J. Phys. **61**, 262 (2019); Int. J. Mod. Phys. D **29**, 2050007(2020); Int. J. Mod. Phys. A **35**, 2040015 (2020); <https://doi.org/10.1142/S0217732320503095>.
16. M. Sharif, S. Mumtaz, and F. Javed, Int. J. Mod. Phys. A **35**, 2050030 (2020).
17. M. Visser and D. L. Wiltshire, Class. Quantum Grav. **21**, 1135 (2004).
18. B. M. N. Carter, Class. Quantum Grav. **22**, 4551 (2005).
19. D. Horvat, S. Ilijic, and A. Marunovic, Class. Quantum Grav. **26**, 025003 (2009).
20. Usmani et al., Phys. Lett. B **701**, 388 (2011).
21. A. Banerjee, A. Rahaman, S. Islam, and M. Govender, Eur. Phys. J. C **76**, 34 (2016).
22. P. Rocha, R. Chan, da M. F. A. Silva, and A. Wang, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2008**, 010 (2008); R. Chan, da M. F. A. Silva, P. Rocha, and A. Wang, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2009**, 10 (2009); *ibid.* **2011**, 13 (2011).
23. D. Horvat, S. Ilijic, and A. Marunovic, Class. Quantum Grav. **28**, 195008 (2011).
24. F. Rahaman, A.A. Usmani, S. Ray, and S. Islam, Phys. Lett. B **707**, 319 (2012); *ibid.* **717**, 1 (2012).
25. F. S. N. Lobo and R. Garattini, J. High Energy Phys. **1312**, 065 (2013).
26. A. Övgün, A. Banerjee, and K. Jusufi, Eur. Phys. J. C **77**, 566 (2017).

27. M. Sharif and F. Javed, *Ann. Phys.* **415**, 168124 (2020).
28. J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **97**, 511 (1955); D. R. Brill, and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **105**, 1662 (1957).
29. Q. Bergmann and R. Leipnik, *Phys. Rev.* **107**, 1157 (1957).
30. D. J. Kaup, *Phys. Rev.* **172**, 1331 (1968).
31. E. Seidel and W. Suen, *Phys. Rev. D* **42**, 384 (1990).
32. M. W. Choptuik, *Phys. Rev. Lett.* **706** 9 (1993); C. R. Evans and J. S. Coleman, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1782 (1994); D. Christodoulou, *Ann. Math.* **140**, 607 (1994); E. Malec, *Class. Quantum Grav.* **13**, 1849 (1995); C. Gundlach, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3214 (1995); P. R. Brady, *Class. Quantum Grav.* **11**, 1255 (1996).
33. D. Núñez, H. Quevedo, and M. Salgado, *Phys. Rev. D* **58**, 083506 (1998).
34. M. Sharif and G. Abbas, *Gen. Relativ. Gravit.* **44**, 2353 (2012).
35. M. Sharif and S. Iftikhar, *Astrophys. Space Sci.* **356**, 89 (2015).
36. M. Sharif and F. Javed, *Int. J. Mod. Phys. D* **28**, 1950046 (2019); *Ann. Phys.* **407**, 198 (2019); *Mod. Phys. Lett. A* **35**, 1950350 (2019); *Ann. Phys.* **416**, 168146 (2020).
37. G. Abbas and M. R. Shahzad, *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, 2050028 (2020).
38. F. Rahaman, A. Banerjee, and I. Radinschi, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 2943 (2013).