

# ПРОВОДИМОСТЬ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РЭЛЕЯ ПРИ КРИТИЧЕСКОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ — ПОРОГЕ ПРОТЕКАНИЯ

*Б. Я. Балагуров\**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 ноября 2020 г.,  
после переработки 14 ноября 2020 г.  
Принята к публикации 14 ноября 2020 г.

Рассмотрена проводимость двумерной модели Рэля (изотропной матрицы с периодическим расположением круговых включений) при критической концентрации — пороге протекания. В рамках бинарного приближения вычислена эффективная проводимость модели с фазовым переходом металл–идеальный проводник. Для альтернативной модели с фазовым переходом металл–диэлектрик соответствующая эффективная проводимость определена соотношением взаимности Келлера–Дыхне.

DOI: 10.31857/S0044451021030160

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная модель композита с регулярным расположением включений круговой формы впервые рассмотрена Рэлеем в работе [1]. Для эффективной проводимости  $\sigma_e$  этой модели в [1] были вычислены первые члены разложения соответствующего вириального ряда по степеням малой концентрации включений. Впоследствии решение, позволяющее найти произвольный член этого ряда, было дано разными методами в работах [2, 3] (см. также [4]). Согласно [2, 3] для вычисления проводимости двумерной модели Рэля необходимо разрешить бесконечную систему алгебраических уравнений. Как показал численный анализ [3], для определения величины  $\sigma_e$  в достаточно широком диапазоне изменения входящих в задачу параметров достаточно ограничиться рассмотрением конечной подсистемы уравнений небольшого размера. В то же время для модели с фазовым переходом этот размер может быть неограниченно большим. Это обстоятельство серьезно затрудняет исследование обсуждаемой задачи численным методом.

В предыдущей работе [5] обсуждаемая задача о проводимости двумерной модели Рэля с фазовым переходом типа металл–идеальный проводник рассмотрена аналитическим методом в рамках бинар-

ного приближения. В этом приближении исходная проблема сводится к изучению протекания тока через пару соседних круговых включений. При этом потенциал задачи выражается через электростатическую функцию Грина для «тела», состоящего из двух кругов. Для вычисления функции Грина в [5] определена система собственных функций (см. [6, 7]) для упомянутого «тела». Использование полученного таким образом потенциала позволило определить эффективную проводимость рассматриваемой модели. Следует отметить, что использованное в работе [5] бинарное приближение тем точнее описывает проводимость рассмотренной двумерной модели, чем ближе она к точке фазового перехода.

В настоящей работе рассмотрена задача о проводимости двумерной модели Рэля при критической концентрации (пороге протекания), когда происходит соприкосновение соседних кругов. В том же бинарном приближении потенциал выражен через функцию Грина, а та, в свою очередь, — через систему собственных функций для пары соприкасающихся включений. Спецификой этого случая является непрерывность спектра собственных значений и дельта-функциональный вид соотношения ортонормированности для поляризационных собственных функций. С помощью найденного потенциала вычислена эффективная проводимость модели в точке фазового перехода типа металл–идеальный проводник. Для альтернативной модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик соответствующая эффективная проводимость определена из со-

\* E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

отношения взаимности Келлера – Дыхне [8, 9]. Сравнение полученного результата с гипотезой подобия [10, 11] позволяет определить соответствующий критический индекс проводимости.

Знание системы собственных функций для какого-либо макроскопического тела позволяет не только находить соответствующую электростатическую функцию Грина, но и давать решение, например, краевых задач Дирихле и Неймана, а также вычислять поляризуемость этого тела. В качестве примера в Приложении найден тензор дипольной поляризуемости двух соприкасающихся кругов (параллельных круговых цилиндров для трехмерной задачи).

## 2. БИНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Двумерная модель Рэлея представляет собой изотропную матрицу проводимости  $\sigma_1$  с системой включений круговой формы радиуса  $R$  и проводимости  $\sigma_2$ . Центры кругов расположены в узлах квадратной решетки с периодом  $2a$ . При критической концентрации  $a = R$  – пороге протекания – каждое из включений касается четырех ближайших соседей. При  $\sigma_2 \gg \sigma_1$  в подобном двумерном композите происходит фазовый переход типа металл–идеальный проводник. В этом случае проводимость модели в целом определяется областью контакта соседних включений, где ток должен преодолевать низкопроводящую прослойку. Следует ожидать при этом, что ток протекает через эту прослойку в виде узкого канала возле точки соприкосновения включений. Для оценки вклада области контакта в эффективную проводимость воспользуемся, как и в [5], бинарным приближением – рассмотрим пару соседних кругов (см. рис. 1), помещенную в неограниченного размера матрицу. Входящий в эту пару и исходящий из нее токи, расположенные «вдали» от области контакта, представим в виде точечных источника и стока.

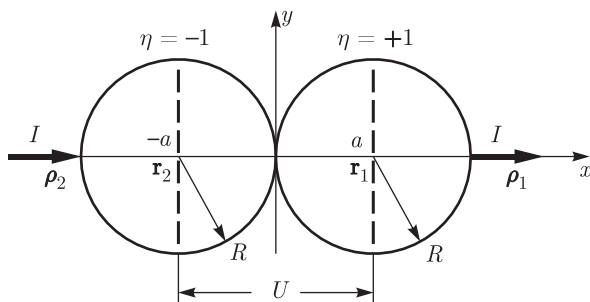


Рис. 1

В данном случае уравнение сохранения тока принимает вид

$$\text{div } \mathbf{j} = I \{ \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_2) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_1) \}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  – плотность тока

$$\mathbf{j} = -\sigma(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

$\sigma(\mathbf{r})$  – проводимость среды,  $\varphi(\mathbf{r})$  – электрический потенциал. Положим

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_1[1 - (1 - h)v(\mathbf{r})], \quad h = \sigma_2/\sigma_1, \quad (3)$$

где  $v(\mathbf{r}) = 1$  внутри включения и  $v(\mathbf{r}) = 0$  вне его. В этом случае уравнение для потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla \{ [1 - (1 - h)v(\mathbf{r})] \nabla \varphi(\mathbf{r}) \} = \\ = \frac{I}{\sigma_1} \{ \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_1) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_2) \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем, следуя ссылкам [6, 7], функцию Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , подчиняющуюся уравнению

$$\nabla_{\mathbf{r}} \{ [1 - (1 - h)v(\mathbf{r})] \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5)$$

С учетом формулы (5) для потенциала  $\varphi(\mathbf{r})$  из уравнения (4) получаем следующее выражение:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{I}{\sigma_1} \{ G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1) - G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_2) \}. \quad (6)$$

Величина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , подчиняющаяся уравнению (5), определена в [6, 7] с помощью метода собственных функций. Для функции Грина  $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ , где  $\boldsymbol{\rho}$  принадлежит поверхности тела, имеет место следующее выражение согласно [6, 7]:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = - \sum_{\nu} \frac{1 + \varepsilon_{\nu}}{h + \varepsilon_{\nu}} \Psi_{\nu}(\boldsymbol{\rho}) \psi_{\nu}(\mathbf{r}) - \\ - \sum_k \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) \bar{\psi}_k(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь вектор  $\mathbf{r}$  произволен и может принадлежать как телу, так и пространству вне его.

В выражении (7)  $\psi_{\nu}(\mathbf{r})$  и  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  – регулярные и обращающиеся в нуль при  $r \rightarrow \infty$  собственные функции, а  $\Psi_{\nu}(\boldsymbol{\rho})$  и  $\bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho})$  – их значения на поверхности тела при  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ . Поляризационные функции  $\psi_{\nu}(\mathbf{r})$ , обладающие мультипольной асимптотикой, удовлетворяют уравнению Лапласа внутри (*i*) и вне (*e*) тела:

$$\nabla^2 \psi_{\nu}^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla^2 \psi_{\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (8)$$

На поверхности  $S$  тела (при  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ ) для функции  $\psi_\nu(\mathbf{r})$  имеем следующие граничные условия:

$$\psi_\nu^{(e)}|_S = \psi_\nu^{(i)}|_S, \quad \frac{\partial \psi_\nu^{(e)}}{\partial n} = -\varepsilon_\nu \frac{\partial \psi_\nu^{(i)}}{\partial n}. \quad (9)$$

Здесь  $\partial/\partial n$  — нормальная производная,  $\varepsilon_\nu > 0$  — собственное значение для поляризационного состояния. Система  $\{\psi_\nu(\mathbf{r})\}$  ортонормирована по соотношению

$$\int (\nabla \psi_\mu(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_\nu(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = \delta_{\mu\nu}, \quad (10)$$

где интегрирование распространяется на все пространство, или

$$\int (\nabla \psi_\mu(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_\nu(\mathbf{r})) [1 - v(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \frac{\varepsilon_\nu}{1 + \varepsilon_\nu} \delta_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Здесь интеграл берется по области вне тела.

Функции зарядовых состояний  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  вне тела также подчиняются уравнению Лапласа и обладают монополярной асимптотикой. Им отвечает одно и то же собственное значение  $\bar{\varepsilon}_k = \infty$ . Для монолитного (неразъемного) тела зарядовая функция  $\bar{\psi}(\mathbf{r})$  одна. На поверхности тела она принимает постоянное значение

$$\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})|_S = \bar{\Psi} = \text{const}. \quad (12)$$

В то же время  $\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}) = \bar{\Psi}$  в любой точке внутри тела.

Разъемному «телу», состоящему из  $n$  частей, отвечает  $n$  зарядовых функций  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Каждая из них принимает постоянные (вообще говоря, разные) значения на поверхностях частей этого тела.

Функции  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$  ортонормированы согласно

$$\int (\nabla \bar{\psi}_k(\mathbf{r}) \cdot \nabla \bar{\psi}_{k'}(\mathbf{r})) [1 - v(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \delta_{kk'}. \quad (13)$$

Подсистемы поляризационных  $\{\psi_\nu(\mathbf{r})\}$  и зарядовых  $\{\bar{\psi}_k(\mathbf{r})\}$  функций взаимно ортогональны:

$$\int (\nabla \psi_\nu(\mathbf{r}) \cdot \nabla \bar{\psi}_k(\mathbf{r})) [1 - v(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, совокупность  $\{\psi_\nu(\mathbf{r}), \bar{\psi}_k(\mathbf{r})\}$  представляет собой ортонормированную систему функций. Заметим, однако, что эта совокупность полной системой не является (см. [6, 7]). Отметим также, что в рассматриваемой в работе двумерной задаче функции с монополярной асимптотикой логарифмически расходятся при  $r \rightarrow \infty$ . В этом случае на зарядовые функции накладывается условие  $\bar{\psi}_k(\mathbf{r}) = 0$  на окружности достаточно большого радиуса. Как будет видно ниже, для соприкасающихся

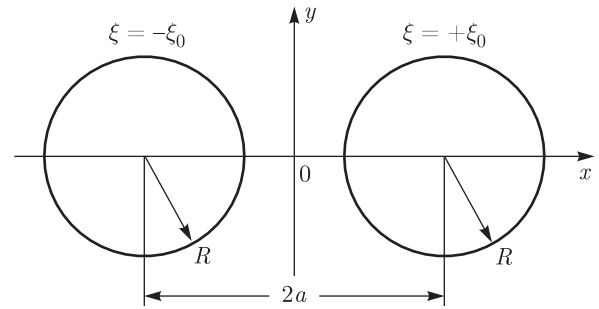


Рис. 2

кругов собственные значения образуют непрерывный спектр, а соотношения ортонормированности для поляризационных собственных функций имеет дельта-функционный вид. В этом случае сумму в формуле (7) следует заменить на соответствующий интеграл.

### 3. КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА

Задачу определения собственных функций для «тела» в виде соприкасающихся кругов будем решать в биполярной системе координат, соответствующим образом преобразованной. Согласно [12] биполярные координаты  $(\xi, \theta)$  связаны с декартовыми  $(x, y)$  с помощью соотношения

$$x + iy = c \operatorname{th} \frac{\xi + i\theta}{2}, \quad (15)$$

здесь  $-\infty \leq \xi \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Из (15) следует, что

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2cy}{c^2 - x^2 - y^2} \quad (16)$$

и

$$\theta = \pi - \operatorname{arctg} \frac{2cy}{r^2 - c^2} \quad (17)$$

при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > c$ . В ситуации, изображенной на рис. 2, имеем

$$c = \sqrt{a^2 - R^2}, \quad \xi_0 = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}. \quad (18)$$

При  $a \rightarrow R$  ( $c \rightarrow 0$ ) из (16) и (17) следует

$$\xi \approx \frac{2cx}{x^2 + y^2}, \quad \theta \approx \pi - \frac{2cy}{x^2 + y^2} \quad (19)$$

и

$$\xi_0 \approx c/R. \quad (20)$$

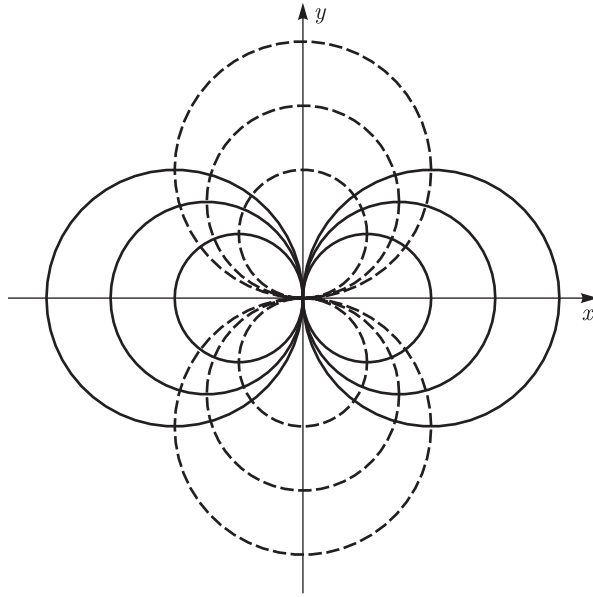


Рис. 3

(Здесь и далее символом  $\approx$  обозначается асимптотическое выражение.)

Положим

$$\xi = \xi_0 \eta, \quad \theta = \pi + \xi_0 \beta, \quad (21)$$

тогда из (15) получаем

$$x + iy = c \operatorname{cth} \frac{\xi_0 (\eta + i\beta)}{2}. \quad (22)$$

Отсюда в пределе  $c \rightarrow 0$  находим

$$x + iy = \frac{2R}{\eta + i\beta}, \quad (23)$$

так что

$$x = 2R \frac{\eta}{\eta^2 + \beta^2}, \quad y = -2R \frac{\beta}{\eta^2 + \beta^2} \quad (24)$$

и, соответственно,

$$\eta = 2R \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \beta = -2R \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (25)$$

Введенные в (23)–(25) величины  $\eta$  и  $\beta$  являются координатами вырожденной биполярной системы.

Координаты  $\eta$  и  $\beta$  изменяются в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом  $\eta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и  $\eta \rightarrow \pm\infty, \beta \rightarrow \pm\infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Значениям  $\eta > 0$  отвечает правая полуплоскость  $x > 0$ , а  $\eta < 0$  — левая ( $x < 0$ ). В то же время значению  $\beta > 0$  соответствует нижняя полуплоскость ( $y < 0$ ), а  $\beta < 0$  — верхняя ( $y > 0$ ).

Координатные линии вырожденной биполярной системы представляют собой два набора взаимно ортогональных окружностей, соприкасающихся в точке  $x = 0, y = 0$  (см. рис. 3). Действительно, исключая из равенств (24) величину  $\beta$  при  $\eta = \text{const}$ , получим уравнение

$$\left(x - \frac{R}{\eta}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{\eta}\right)^2. \quad (26)$$

Согласно (26) постоянным значениям  $\eta = \pm\eta_0$  отвечает пара соприкасающихся окружностей радиуса  $R/\eta_0$  с центрами в точках  $\pm R/\eta_0$  на оси  $x$ . Аналогичным образом постоянным  $\beta = \pm\beta_0$  отвечает пара соприкасающихся окружностей радиуса  $R/\beta_0$  с центрами в точках  $\pm R/\beta_0$  на оси  $y$ .

В вырожденной системе биполярных координат для градиента потенциала  $\varphi$  имеем следующее выражение:

$$\nabla \varphi = \frac{\mathbf{e}_\eta}{H_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{e}_\beta}{H_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad (27)$$

где

$$H_\eta = H_\beta = H(\eta, \beta) = \frac{2a}{\eta^2 + \beta^2} \quad (28)$$

— коэффициент Ламе. В (27)  $\mathbf{e}_\eta$  и  $\mathbf{e}_\beta$  — орты нормалей к координатным линиям  $\eta = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$ :

$$\mathbf{e}_\eta = -\mathbf{i}_x \frac{\eta^2 - \beta^2}{\eta^2 + \beta^2} + \mathbf{i}_y \frac{2\eta\beta}{\eta^2 + \beta^2}, \quad (29)$$

$$\mathbf{e}_\beta = -\mathbf{i}_x \frac{2\eta\beta}{\eta^2 + \beta^2} - \mathbf{i}_y \frac{\eta^2 - \beta^2}{\eta^2 + \beta^2}. \quad (30)$$

Здесь  $\mathbf{i}_x$  и  $\mathbf{i}_y$  — орты декартовых осей  $x$  и  $y$  соответственно. Отметим, что  $\mathbf{e}_\eta$  является единичным вектором внутренней к границе правого круга нормали и внешней — к границе левого.

Уравнение Лапласа в координатах  $(\eta, \beta)$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0. \quad (31)$$

В данном случае при решении этого уравнения методом разделения переменных отсутствует, в отличие от работы [5], требование периодичности по одной из координат. Поэтому соответствующая константа разделения принимает произвольные значения, образуя непрерывный спектр.

Регулярные частные решения уравнения (31) для правого включения, конечные при  $x \rightarrow +0$  ( $\eta \rightarrow +\infty$ ), имеют следующий вид:

$$e^{-\nu\eta} \sin \nu\beta, \quad e^{-\nu\eta} \cos \nu\beta. \quad (32)$$

Здесь величина  $\nu$  положительна и меняется в пределах от 0 до  $\infty$ . Для левого включения аналогичные решения отличаются от (32) заменой  $e^{-\nu\eta}$  на  $e^{\nu\eta}$ .

Для исчезающих при  $r \rightarrow \infty$  ( $\eta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ ) регулярных решений с мультипольной асимптотикой имеем соответственно

$$\begin{aligned} & \text{sh } \nu\eta \sin \nu\beta, \quad \text{sh } \nu\eta \cos \nu\beta, \\ & \text{ch } \nu\eta \sin \nu\beta, \quad \text{ch } \nu\eta \cos \nu\beta - 1 \end{aligned} \quad (33)$$

с тем же параметром  $\nu$ .

Отметим, наконец, что решением уравнения (31) с монопольной (логарифмической) асимптотикой является функция

$$\ln(\eta^2 + \beta^2), \quad (34)$$

или  $2 \ln(2R/r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , в декартовых координатах.

#### 4. СИСТЕМА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С рассматриваемым включением в виде пары соприкасающихся кругов связаны четыре типа поляризационных собственных функций  $\psi_{\lambda\nu}(\mathbf{r}) = \psi_{\lambda\nu}(\eta, \beta)$  ( $\lambda = 1, 2, 3, 4$ ), которым отвечают двукратно вырожденные собственные значения  $\varepsilon_{1\nu} = \varepsilon_{3\nu}$  и  $\varepsilon_{2\nu} = \varepsilon_{4\nu}$ .

Нормированные функции первого типа  $\psi_{1\nu}(\mathbf{r})$  с собственными значениями

$$\varepsilon_{1\nu} = \text{th } \nu \quad (35)$$

имеют вид

$$\psi_{1\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = A_\nu \text{ch } \nu\eta \sin \nu\beta, \quad |\eta| \leq 1, \quad (36)$$

вне включения и

$$\psi_{1\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = A_\nu \text{ch } \nu e^{-\nu\eta} \sin \nu\beta, \quad \eta \geq 1, \quad (37)$$

$$\psi_{1\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = A_\nu \text{ch } \nu e^{\nu\eta} \sin \nu\beta, \quad \eta \leq -1, \quad (38)$$

внутри правого (1) и левого (2) кругов соответственно. Здесь

$$A_\nu = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_{1\nu}}{2\pi\nu}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu} \frac{e^{-\nu}}{\text{ch } \nu}}. \quad (39)$$

Функции  $\psi_{1\nu}(\mathbf{r})$  симметричны по координате  $x$  и антисимметричны по  $y$ .

Функции второго типа  $\psi_{2\nu}(\mathbf{r})$ , которым отвечают собственные значения

$$\varepsilon_{2\nu} = \text{cth } \nu, \quad (40)$$

антисимметричны по  $x$  и симметричны по  $y$ :

$$\psi_{2\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = B_\nu \text{sh } \nu\eta \cos \nu\beta, \quad |\eta| \leq 1, \quad (41)$$

$$\psi_{2\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = B_\nu \text{sh } \nu e^{-\nu(\eta-1)} \cos \nu\beta, \quad \eta \geq 1, \quad (42)$$

$$\psi_{2\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = -B_\nu \text{sh } \nu e^{\nu(\eta+1)} \cos \nu\beta, \quad \eta \leq -1, \quad (43)$$

где

$$B_\nu = \sqrt{\frac{\varepsilon_{2\nu} - 1}{2\pi\nu}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu} \frac{e^{-\nu}}{\text{sh } \nu}}. \quad (44)$$

Функции третьего типа  $\psi_{3\nu}(\mathbf{r})$  с собственными значениями  $\varepsilon_{3\nu} = \varepsilon_{1\nu} = \text{th } \nu$  симметричны и по  $x$ , и по  $y$ :

$$\psi_{3\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = A_\nu (\text{ch } \nu\eta \cos \nu\beta - 1), \quad |\eta| \leq 1, \quad (45)$$

$$\psi_{3\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = A_\nu [\text{ch } \nu e^{-\nu(\eta-1)} \cos \nu\beta - 1], \quad \eta \geq 1, \quad (46)$$

$$\psi_{3\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = A_\nu [\text{ch } \nu e^{\nu(\eta+1)} \cos \nu\beta - 1], \quad \eta \leq -1. \quad (47)$$

Нормировочный коэффициент  $A_\nu$  определен в формуле (39).

Функции четвертого типа с собственными значениями  $\varepsilon_{4\nu} = \varepsilon_{2\nu} = \text{cth } \nu$  антисимметричны и по  $x$ , и по  $y$ :

$$\psi_{4\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = B_\nu \text{sh } \nu\eta \sin \nu\beta, \quad |\eta| \leq 1, \quad (48)$$

$$\psi_{4\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = B_\nu \text{sh } \nu e^{-\nu(\eta-1)} \sin \nu\beta, \quad \eta \geq 1, \quad (49)$$

$$\psi_{4\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = -B_\nu \text{sh } \nu e^{\nu(\eta+1)} \sin \nu\beta, \quad \eta \leq -1. \quad (50)$$

Коэффициент  $B_\nu$  определен в формуле (44).

Зарядовая собственная функция одна:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) = \bar{A} \left\{ 2 \ln \frac{L}{2a} + \ln(\eta^2 + \beta^2) + \right. \\ \left. + 2 \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{\text{ch } \nu\eta \cos \nu\beta - 1}{\text{ch } \nu} \frac{d\nu}{\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\bar{A} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \ln \frac{L}{2a} + I \right]^{-1/2}, \quad (52)$$

$$J = \int_0^\infty e^{-\nu} \frac{\text{ch } \nu - 1}{\text{ch } \nu} \frac{d\nu}{\nu}. \quad (53)$$

Выражение (51) принимает постоянное значение при  $\eta = \pm 1$ , в чем можно убедиться, используя соотношение

$$\ln \frac{\eta^2 + \beta^2}{\eta^2} = 2 \int_0^\infty e^{-\nu|\eta|} (1 - \cos \nu\beta) \frac{d\nu}{\nu} \quad (54)$$

при  $\eta = \pm 1$ . Функция  $\bar{\psi}(\mathbf{r})$  обращается в нуль при  $r = L$ , где  $L \gg R$ . Действительно, в случае больших  $r$  имеем

$$r \gg R: \quad \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) \approx 2\bar{q} \ln \frac{L}{r}. \quad (55)$$

Здесь

$$\bar{q} = \bar{A} \quad (56)$$

— полный заряд рассматриваемого включения.

### 5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Как отмечено в работах [6, 7], собственные функции образуют полную систему на поверхности  $S$  соответствующего тела. Для формулировки соотношения полноты наряду с поверхностным значением функций (аналогами потенциалов)

$$\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \quad \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) = \bar{\psi}_k^{(e)}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}} \quad (57)$$

необходимо ввести сопряженные с ними величины

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(\boldsymbol{\rho}) &= (\mathbf{n} \nabla \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})) \Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \\ \bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho}) &= (\mathbf{n} \nabla \bar{\psi}_k^{(e)}(\mathbf{r})) \Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \end{aligned} \quad (58)$$

имеющие смысл плотности поверхностного заряда. В формуле (58)  $\mathbf{n}$  — орт внешней к поверхности тела нормали.

Введение системы поверхностных функций позволяет, прежде всего, упростить соотношения ортонормированности:

$$\int_S \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) \Phi_{\nu'}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = -\frac{\varepsilon_\nu}{1 + \varepsilon_\nu} \delta_{\nu\nu'}, \quad (59)$$

$$\int_S \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) \bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = 0, \quad (60)$$

$$\int_S \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) \Phi_\nu(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = 0, \quad (61)$$

$$\int_S \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) \bar{\Phi}_{k'}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = -\delta_{kk'}. \quad (62)$$

Здесь  $d\boldsymbol{\rho} = dS$  — элемент площади, а интегрирование в (59)–(62) проводится по всей поверхности  $S$  тела.

Соотношение полноты для системы поверхностных функций имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_\nu \frac{1 + \varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu} \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) \Phi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \sum_k \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) \bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho}') = \\ = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'). \end{aligned} \quad (63)$$

Отметим, что в случае непрерывного спектра собственных значений  $\varepsilon_\nu$  в правой части равенства (59) символ Кронекера  $\delta_{\nu\nu'}$  заменяется на дельта-функцию  $\delta(\nu - \nu')$ , а сумма по  $\nu$  в соотношении (63) — на соответствующий интеграл.

2. Для рассматриваемого в работе включения поляризационные поверхностные функции выражаются через  $\psi_{\lambda\nu}^{(e)}(\eta, \delta)$  следующим образом:

$$\Psi_{\lambda\nu}^{(1)}(\beta) = \psi_{\lambda\nu}^{(e)}(+1, \beta), \quad \Psi_{\lambda\nu}^{(2)}(\beta) = \psi_{\lambda\nu}^{(e)}(-1, \beta), \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda\nu}^{(1)}(\beta) &= -\frac{1}{H_0} \frac{\partial \psi_{\lambda\nu}^{(e)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=+1}, \\ \Phi_{\lambda\nu}^{(2)}(\beta) &= \frac{1}{H_0} \frac{\partial \psi_{\lambda\nu}^{(e)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1}, \end{aligned} \quad (65)$$

где  $H_0 = H(1, \beta)$  — коэффициент Ламе. Выбор знаков в (65) обусловлен тем, что единичный вектор  $\mathbf{e}_\eta$  является ортом внутренней нормали для правой окружности и внешней для левой. Зарядовые поверхностные функции  $\Psi^{(1)}(\beta)$ ,  $\Psi^{(2)}(\beta)$ ,  $\Phi^{(1)}(\beta)$  и  $\Phi^{(2)}(\beta)$  выражаются через  $\bar{\psi}^{(e)}(\eta, \beta)$  аналогичным образом.

Используя приведенные в предыдущем разделе выражения для функций  $\psi_{\lambda\nu}^{(e)}(\eta, \beta)$  и  $\bar{\psi}^{(e)}(\eta, \beta)$ , найдем

$$\Psi_{1\nu}^{(1)}(\beta) = \Psi_{1\nu}^{(2)}(\beta) = A_\nu \operatorname{ch} \nu \sin \nu\beta, \quad (66)$$

$$\Psi_{2\nu}^{(1)}(\beta) = -\Psi_{2\nu}^{(2)}(\beta) = B_\nu \operatorname{sh} \nu \cos \nu\beta, \quad (67)$$

$$\Psi_{3\nu}^{(1)}(\beta) = \Psi_{3\nu}^{(2)}(\beta) = A_\nu (\operatorname{ch} \nu \cos \nu\beta - 1), \quad (68)$$

$$\Psi_{4\nu}^{(1)}(\beta) = -\Psi_{4\nu}^{(2)}(\beta) = B_\nu \operatorname{sh} \nu \sin \nu\beta; \quad (69)$$

$$\Phi_{1\nu}^{(1)}(\beta) = \Phi_{1\nu}^{(2)}(\beta) = -\frac{\nu A_\nu}{H(1, \beta)} \operatorname{sh} \nu \sin \nu\beta, \quad (70)$$

$$\Phi_{2\nu}^{(1)}(\beta) = -\Phi_{2\nu}^{(2)}(\beta) = -\frac{\nu B_\nu}{H(1, \beta)} \operatorname{ch} \nu \cos \nu \beta, \quad (71)$$

$$\Phi_{3\nu}^{(1)}(\beta) = \Phi_{3\nu}^{(2)}(\beta) = -\frac{\nu A_\nu}{H(1, \beta)} \operatorname{sh} \nu \cos \nu \beta, \quad (72)$$

$$\Phi_{4\nu}^{(1)}(\beta) = -\Phi_{4\nu}^{(2)}(\beta) = -\frac{\nu B_\nu}{H(1, \beta)} \operatorname{ch} \nu \sin \nu \beta. \quad (73)$$

Зарядовые функции равны

$$\bar{\Psi} = 2\bar{A} \left[ \ln \frac{R}{2a} + I \right], \quad (74)$$

$$\bar{\Phi}(\beta) = -\frac{\bar{A}}{H(1, \beta)} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi\beta}{2}} \quad (75)$$

с коэффициентом  $\bar{A}$  из формулы (52) и величиной  $J$  из (53). При выводе выражения (75) использовано равенство

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\operatorname{ch} ax} dx = \frac{\pi}{2a \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}}. \quad (76)$$

Найденная система поверхностных функций (66)–(75) ортонормирована по соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\lambda\nu}^{(\sigma)}(\beta) \Phi_{\lambda'\nu'}^{(\sigma)}(\beta) H(1, \beta) d\beta = \\ = -\frac{\varepsilon_{\lambda\nu}}{1 + \varepsilon_{\lambda\nu}} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\nu - \nu'), \end{aligned} \quad (77)$$

$$\sum_{\sigma=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}^{(\sigma)} \Phi_{\lambda\nu}^{(\sigma)}(\beta) H(1, \beta) d\beta = 0, \quad (78)$$

$$\sum_{\sigma=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\lambda\nu}^{(\sigma)}(\beta) \bar{\Phi}^{(\sigma)}(\beta) H(1, \beta) d\beta = 0, \quad (79)$$

$$\sum_{\sigma=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}^{(\sigma)} \bar{\Phi}^{(\sigma)}(\beta) H(1, \beta) d\beta = -1. \quad (80)$$

Из равенств (77) и (80) определялись нормировочные коэффициенты  $A_\nu$ ,  $B_\nu$  и  $\bar{A}$ , приведенные в предыдущем разделе.

Соотношение полноты в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^4 \int_0^\infty \frac{1 + \varepsilon_{\lambda\nu}}{\varepsilon_{\lambda\nu}} \Psi_{\lambda\nu}^{(\sigma)}(\beta) \Phi_{\lambda\nu}^{(\sigma')}(\beta') d\nu + \\ + \bar{\Psi}^{(\sigma)}(\beta) \bar{\Phi}^{(\sigma')}(\beta') = -\delta_{\sigma\sigma'} \frac{\delta(\beta - \beta')}{H(1, \beta)}. \end{aligned} \quad (81)$$

Нетрудно убедиться, что подстановка выражений (66)–(75) обращает это равенство в тождество.

## 6. ПОТЕНЦИАЛ

1. Искомый потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  рассматриваемой задачи находим подстановкой общего выражения для функций Грина  $G(\rho, \mathbf{r})$ , имеющей в данном случае вид

$$\begin{aligned} G(\rho, \mathbf{r}) = -\sum_{\lambda=1}^4 \int_0^\infty d\nu \frac{1 + \varepsilon_{\lambda\nu}}{h + \varepsilon_{\lambda\nu}} \Psi_{\lambda\nu}(\rho) \psi_{\lambda\nu}(\mathbf{r}) - \\ - \bar{\Psi}(\rho) \bar{\psi}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (82)$$

в формулу (6). В результате получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2\frac{I}{\sigma_1} \int_0^\infty d\nu \frac{1 + \varepsilon_{2\nu}}{h + \varepsilon_{2\nu}} \Psi_{2\nu}(\rho_1) \psi_{2\nu}(\mathbf{r}). \quad (83)$$

Здесь вектор  $\mathbf{r}$  — любой, а вектор  $\rho_1$  равен  $(2R, 0)$  в декартовых координатах и  $(1, 0)$  в вырожденных биполярных.

Для потенциалов вне включений ( $|\eta| \leq 1$ ) и внутри правого круга ( $\eta \geq 1$ ) имеем соответственно

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{1}{h + \operatorname{cth} \nu} \frac{\operatorname{sh} \nu \eta}{\operatorname{sh} \nu} \cos \nu \beta, \quad (84)$$

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{e^{-\nu(\eta-1)}}{h + \operatorname{cth} \nu} \cos \nu \beta. \quad (85)$$

Как следует из формул (84), (85), потенциал непрерывен на границе ( $\eta = +1$ ) правого круга. Кроме того, выполняется граничное условие

$$\left. \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \eta} \right|_{\eta=+1} - h \left. \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta} \right|_{\eta=+1} = -\frac{I}{\sigma_1} \delta(\beta), \quad (86)$$

следующее из уравнения (4).

2. Используя формулу (84), для плотности тока на оси  $y$  (при  $\eta = 0$ ) имеем

$$j(0, y) = -\sigma_1 \left[ \frac{1}{H(\eta, \beta)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}. \quad (87)$$

С учетом  $H(0, \beta) = 2R/\beta^2$  из (87) получим выражение

$$j(0, y) = \frac{I}{2\pi R} \beta^2 \int_0^\infty d\nu \frac{\text{cth } \nu}{h + \text{cth } \nu} \cos \nu \beta. \quad (88)$$

При  $h \gg 1$  в интеграле из (88) существенны  $\nu \ll 1$ :

$$j(0, y) = \frac{I}{2\pi R} \beta^2 \int_0^\infty d\nu \frac{\cos \nu \beta}{1 + h\nu}. \quad (89)$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$j(0, y) = \langle j \rangle \frac{h}{\pi} g(\gamma), \quad \langle j \rangle = \frac{I}{2R}, \quad (90)$$

где

$$j(\gamma) = \gamma^2 \int_0^\infty \frac{\cos \gamma t}{1+t} dt, \quad \gamma = \frac{2R}{hy}. \quad (91)$$

Здесь  $\langle j \rangle$  — средняя плотность тока и учтено, что при  $\eta = 0$  величина  $\beta = -2R/y$ .

Для упрощения анализа выражения (91) преобразуем величину  $g(\gamma)$  следующим образом. Введем функцию

$$F(\gamma) = \gamma^2 \int_0^\infty \frac{\cos \gamma t}{1+t} e^{-x(1+t)} dt, \quad (92)$$

так что

$$F(0) = g(\gamma), \quad F(\infty) = 0. \quad (93)$$

Для производной  $F'(x)$  соответствующий интеграл может быть вычислен в явном виде:

$$F'(x) = -\gamma^2 e^{-x} \frac{x}{x^2 + \gamma^2}, \quad (94)$$

откуда с учетом определений (93) находим

$$g(\gamma) = \gamma^2 \int_0^\infty e^{-x} \frac{x dx}{x^2 + \gamma^2}. \quad (95)$$

Отсюда при больших значениях параметра  $\gamma$  получаем

$$\gamma \gg 1 : \quad g(\gamma) \approx 1 - \frac{6}{x^2} + \dots \quad (96)$$

При малых значениях  $\gamma$  проведем в выражении (95) интегрирование по частям. В результате получим

$$g(\gamma) = \gamma^2 \left\{ \ln \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} \ln(x^2 + \gamma^2) dx \right\}, \quad (97)$$

откуда следует

$$\gamma \ll 1 : \quad g(\gamma) \approx \ln \frac{1}{\gamma} - \mathbb{C}, \quad (98)$$

где

$$\mathbb{C} = - \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = 0.577 \dots \quad (99)$$

— постоянная Эйлера.

Согласно (96)–(98) при рассматриваемых значениях  $h \gg 1$  плотность тока имеет острый пик высотой  $j(0, 0) = \langle j \rangle h/\pi \gg \langle j \rangle$  (в точке контакта включений) шириной приблизительно  $R/h \ll R$ .

Этот результат подтверждает справедливость обсуждавшейся в разд. 2 картины протекания тока в модели с фазовым переходом типа металл–идеальный проводник. При этом в пределе  $h \rightarrow \infty$  плотность тока  $j \approx h \rightarrow \infty$  при  $y = 0$  и  $j = 0$  при  $y \neq 0$ . Следовательно, величина  $j$  в этом пределе принимает дельта-функционный вид:  $j(0, y) = \text{const} \cdot \delta(y)$ . Определяя обычным образом эту константу, получим, что

$$j(0, y) = I \delta(y) \quad (100)$$

в пределе  $h \rightarrow \infty$ . Последний результат означает, что использованное в работе бинарное приближение в пределе  $h \rightarrow \infty$  становится точным.

### 7. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Так как эффективная проводимость  $\sigma_e$  модели в целом совпадает с проводимостью отдельной ячейки, то

$$\sigma_e = \frac{I}{U}. \quad (101)$$

Здесь  $I$  — полный ток, текущий через ячейку,  $U$  — приложенная к ней разность потенциалов и учтено, что  $a \approx R$ . В соответствии с рис. 2 величина  $U$  выражается через потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  следующим образом:

$$U = \varphi^{(2)}(\mathbf{r}_2) - \varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1) = -2 \varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1) \quad (102)$$

с  $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$  из формулы (85) при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = (R, 0)$ . Точке  $x = R, y = 0$  соответствуют вырожденные биполярные координаты  $(\eta_1, 0)$ , где, как следует из определений (25),  $\eta_1 = 2$ .



Вычисляя с помощью выражения (85) для  $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$  разность потенциалов  $U$ , найдем величину  $\sigma_e$ , которую представим в виде

$$\frac{1}{\sigma_e} = \frac{2}{\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{e^{-\nu}}{h + \text{cth } \nu}. \quad (103)$$

Выражением (103) для  $\sigma_e$ , справедливым при  $h = \sigma_2/\sigma_1 \gg 1$ , дается эффективная проводимость исследуемой модели с фазовым переходом металл–идеальный проводник при критической концентрации — пороге протекания.

Величину  $\sigma_e$  как функцию ее аргументов запишем в виде

$$\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2), \quad (104)$$

где  $p$  — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты матрицы,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — проводимости матрицы и включений соответственно. Отметим, что в выражении (103) концентрация  $p$  равна критической  $p_c = 1 - \pi/4$ . Эффективная проводимость альтернативной модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик может быть найдена из полученных выше результатов с помощью так называемого соотношения взаимности Келлера – Дыхне [8, 9]. Как отмечено в этих работах (см. также книгу [4]), в двумерном случае имеет место соотношение, связывающее эффективные проводимости взаимных, отличающихся друг от друга заменой  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ , систем:

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \sigma_e(p; \sigma_2, \sigma_1) = \sigma_1 \sigma_2. \quad (105)$$

Введя безразмерную эффективную проводимость  $f$  согласно

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(p, h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (106)$$

приведем равенство (105) к следующему виду:

$$f(p, h) f(p, 1/h) = 1. \quad (107)$$

Из этого соотношения, используя выражение (103), после замены  $h \rightarrow 1/h$  находим безразмерную эффективную проводимость модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик при критической концентрации:

$$f(p_c, h) = \frac{2}{\pi} h \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{\text{th } \nu}{h + \text{th } \nu} e^{-\nu}. \quad (108)$$

Выражение (108) справедливо при  $h \ll 1$ .

Для оценки  $f(p_c, h)$  при малых  $h$  разобьем интеграл из (108) на две части, введя величину  $\nu_0$  такую, что  $h \leq \nu_0 \leq 1$ :

$$f(p_c, h) = \frac{2}{\pi} h \left\{ \int_0^{\nu_0} \frac{d\nu}{\nu} \frac{\text{th } \nu}{h + \text{th } \nu} e^{-\nu} + \int_{\nu_0}^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{\text{th } \nu}{h + \text{th } \nu} e^{-\nu} \right\}. \quad (109)$$

Для первого интеграла имеем

$$\int_0^{\nu_0} \frac{d\nu}{\nu} \frac{\text{th } \nu}{h + \text{th } \nu} e^{-\nu} \simeq \int_0^{\nu_0} \frac{d\nu}{h + \nu} \simeq \ln \frac{\nu_0}{h}. \quad (110)$$

Для второго интеграла получаем

$$\int_{\nu_0}^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{\text{th } \nu}{h + \text{th } \nu} e^{-\nu} \simeq \int_{\nu_0}^\infty e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu}. \quad (111)$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$\int_{\nu_0}^\infty e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu} = e^{-\nu} \ln \nu \Big|_{\nu_0}^\infty + \int_{\nu_0}^\infty e^{-\nu} \ln \nu d\nu \simeq -\ln \nu_0 - \mathbb{C}, \quad (112)$$

где  $\mathbb{C}$  — постоянная Эйлера, определенная согласно (99). В результате получаем окончательно

$$f(p_c, h) = \frac{2}{\pi} h \left( \ln \frac{1}{h} - \mathbb{C} \right). \quad (113)$$

В соответствии со сказанным в предыдущем разделе, следует ожидать, что в пределе  $h \rightarrow 0$  выражение (113) является точным.

В рамках гипотезы подобия [10, 11] величина  $f(p_c, h)$  описывается степенной функцией:

$$f(p_c, h) \sim h^s, \quad (114)$$

где  $s$  — второй критический индекс проводимости. В выражении (114) пренебрегается возможной логарифмической зависимостью. Поэтому следует считать, что в (113)  $s = 1$ . Отметим, что численные исследования проводимости двумерной модели Рэля [3] дает оценку  $s \approx 0.95$ .

**Благодарности.** Автор выражает благодарность Д. А. Головневой и Н. А. Хлопотуновой за помощь в подготовке рукописи статьи к печати.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Знание системы собственных функций для некоторого макроскопического тела дает возможность определить его дипольную поляризуемость.

В случае тела, помещенного в однородное электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}_0$ , соответствующий потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  имеет следующую асимптотику (двумерный случай):

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi(\mathbf{r}) \approx -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + 2 \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^2} + \dots \quad (\text{A.1})$$

Здесь

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0 \quad (\text{A.2})$$

— дипольный момент тела,  $\hat{\Lambda}$  — его тензор дипольной поляризуемости. Для составляющих этого тензора согласно [6, 7] имеем

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -4\pi(1 - \varepsilon) \sum_{\nu} \frac{d_{\nu\alpha} d_{\nu\beta}}{\varepsilon + \varepsilon_{\nu}}, \quad (\text{A.3})$$

где  $\mathbf{d}_{\nu}$  — аналог дипольного момента в асимптотике поляризационной собственной функции:

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_{\nu}(\mathbf{r}) \approx 2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_{\nu})}{r^2} + \dots \quad (\text{A.4})$$

В формуле (A.3)  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость тела. В случае непрерывного спектра собственных значений  $\varepsilon_{\nu}$  в (A.3) вместо суммы должен стоять интеграл.

Для пары соприкасающихся кругов дипольным поведением при  $r \rightarrow \infty$  обладают функции  $\psi_{2\nu}^{(e)}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{1\nu}^{(e)}(\mathbf{r})$ . Для соответствующих дипольных моментов имеем

$$\mathbf{d}_{2\nu} = \nu B_{\nu} R \dot{\mathbf{i}}_x, \quad \mathbf{d}_{1\nu} = \nu A_{\nu} R \dot{\mathbf{i}}_y. \quad (\text{A.5})$$

Для составляющих тензора дипольной поляризуемости  $\hat{\Lambda}$  получаем

$$\Lambda_{xx} = -2R^2 \int_0^{\infty} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon + \text{ch } \nu} \frac{e^{-\nu}}{\text{sh } \nu} \nu d\nu, \quad (\text{A.6})$$

$$\Lambda_{yy} = -2R^2 \int_0^{\infty} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon + \text{th } \nu} \frac{e^{-\nu}}{\text{ch } \nu} \nu d\nu. \quad (\text{A.7})$$

Отметим, что выражения (A.6), (A.7) удовлетворяют равенствам

$$\Lambda_{xx}(\varepsilon) = -\Lambda_{yy}(1/\varepsilon), \quad \Lambda_{yy}(\varepsilon) = -\Lambda_{xx}(1/\varepsilon), \quad (\text{A.8})$$

являющихся следствием соотношения взаимности (см. [4]).

В двух частных случаях, используя формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (\text{A.9})$$

получим

$$\Lambda_{xx} = -\frac{\pi^2 R^2}{12}, \quad \Lambda_{yy} = -\frac{\pi^2 R^2}{6} \quad (\text{A.10})$$

при  $\varepsilon = 0$  и

$$\Lambda_{xx} = \frac{\pi^2 R^2}{6}, \quad \Lambda_{yy} = \frac{\pi^2 R^2}{12} \quad (\text{A.11})$$

при  $\varepsilon = \infty$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, Phil. Mag. S. 34, № 211, 481 (1892).
2. W. T. Perrins, D. B. McKenzie, and B. C. McPhedran, Proc. Roy. Soc. Lond. A 369, 207 (1979).
3. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ 117, 978 (2000).
4. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS, Москва (2015).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ 157, 669 (2020).
6. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ 94, 95 (1988).
7. Б. Я. Балагуров, *Метод собственных функций в макроскопической электростатике*, URSS, Москва (2016).
8. J. B. Keller, J. Math. Phys. 5, 548 (1964).
9. А. М. Дыхне, ЖЭТФ 59, 110 (1970).
10. A. L. Efros and B. I. Shrlivskii, Phys. Stat. Sol. (b) 76, 475 (1976).
11. J. P. Straley, J. Phys. C 9, 783 (1976).
12. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. II, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).