

НУЛИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА НА ЛИНИИ $z = 1/2 + it_0$ II

Ю. Н. Овчинников*

Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems
01187, Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 19 ноября 2020 г.,
после переработки 19 ноября 2020 г.
Принята к публикации 19 ноября 2020 г.

Показано, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана расположены на линии $z = 1/2 + it_0$ и могут быть поделены на две группы: нормальные, номер которых однозначно восстанавливается по величине корня, и аномальные номера, для однозначного восстановления номера которых требуется знание величины еще двух соседних корней (левого и правого). Используемые методы анализа могут быть полезны при исследовании физики явлений, связанных с проскальзыванием фазы.

DOI: 10.31857/S0044451021030184

1. ВВЕДЕНИЕ

Дзета-функция Римана возникает во многих задачах физики низких температур, связанных с аналитическим продолжением с целочисленных точек в температурной технике (техника Мадубары) [1], а также при исследовании динамических процессов, приводящих к проскальзыванию фазы (эффект Джозефсона, диссипация тока в квазиодномерных сверхпроводниках). Поведение дзета-функции в полосе $0 < x < 1$ весьма сложное и используемые методы исследования могут быть полезны во многих физических задачах. Равно как и при рассмотрении физических задач могут возникнуть нетривиальные соотношения между функциями Эйлера и дзета-функцией Римана [2]. Возможность установления точного номера любого нетривиального корня дзета-функции по его значению означает сильную корреляцию нулей на больших расстояниях при сохранении сравнительно больших отклонений расстояний между соседними нулями от квазисреднего.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для исследования мы воспользуемся методом, изложенным в работе [3]. Следуя ему, мы определя-

ем аналитические функции $\{\phi, \eta\}$, связанные с двумя функциями: гамма-функцией Эйлера $\Gamma(z)$ и дзета-функцией Римана ζ . Положим

$$z = 1/2 + it = 1/2 + \nu + it_0. \quad (1)$$

Аналитическая функция ϕ в полосе $|\nu| < 1/2$, $t_0 \gg 1$ имеет следующее асимптотическое разложение [3]:

$$\phi(t) = \frac{t}{2} \left(\ln \frac{t}{2} - \ln \pi - 1 \right) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t}. \quad (2)$$

На линии Стокса ($\nu = 0$) выполняется уравнение [3]

$$2e^{-\eta_2(t_0)} \cos(\phi(t_0) + \eta_1(t_0)) = e^{i\phi(t_0)} \frac{D_1 + iD_2}{1 - \sqrt{2} \cos(t_0 \ln 2) + i\sqrt{2} \sin(t_0 \ln 2)} + e^{-i\phi(t_0)} \frac{D_1 - iD_2}{1 - \sqrt{2} \cos(t_0 \ln 2) - i\sqrt{2} \sin(t_0 \ln 2)}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + i\eta_2, \\ D_1 &= (1 - 2^{-1/2-\nu} \cos(t_0 \ln 2)) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\cos(t_0 \ln(2k-1))}{(2k-1)^{1/2+\nu}} - \frac{\cos(t_0 \ln(2k))}{(2k)^{1/2+\nu}} \right), \\ D_2 &= 2^{-1/2-\nu} \sin(t_0 \ln 2) - \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\sin(t_0 \ln(2k-1))}{(2k-1)^{1/2+\nu}} - \frac{\sin(t_0 \ln(2k))}{(2k)^{1/2+\nu}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

* E-mail: ovc@itp.ac.ru

На линии Стокса функция η_1 удовлетворяет условию

$$|\eta_1| < \pi. \tag{5}$$

В нуле дзета-функции с номером N на линии Стокса выполняются следующие два уравнения:

$$\frac{1}{\pi}(\phi(t_0^{(N)}) + \eta_1(t_0^{(N)})) = N - \frac{3}{2}, \tag{6}$$

$$\left. \frac{\partial \eta_1(t_0)}{\partial t_0} \right|_{t_0^{(N)}} = 0. \tag{7}$$

Из уравнений (3), (6) находим значение функции η_2 в нулях дзета-функции $t_0^{(N)}$:

$$\eta_2(t_0^{(N)}) = -\ln \left((-1)^{(N+1)} \frac{\partial \mu}{\partial t_0} / \frac{\partial \phi}{\partial t_0} \right) \Big|_{t_0^{(N)}}, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \mu(t_0) = & \frac{1}{2} \left\{ e^{i\phi(t_0)} \frac{D_1 + iD_2}{1 - \sqrt{2} \cos(t_0 \ln 2) + i\sqrt{2} \sin(t_0 \ln 2)} + \right. \\ & \left. + e^{-i\phi(t_0)} \frac{D_1 - iD_2}{1 - \sqrt{2} \cos(t_0 \ln 2) - i\sqrt{2} \sin(t_0 \ln 2)} \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (5), (6) существенно улучшают классический результат, приведенный в [4]. Неравенство (5) позволяет разделить все нетривиальные нули дзета-функции на два подмножества: нормальные нули, если $|\eta_1| < \pi/2$, и аномальные при $\pi/2 < \eta_1 < \pi$. Слева и справа от аномального нуля находятся нормальные нули, поэтому легко установить, является ли данный нуль нормальным или нет. Для этого достаточно найти номера левого (правого) нулей в приближении $|\eta| < \pi/2$. Если номера левого (правого) нуля окажутся равными $\{N - 2, N\}$ или $\{N, N + 2\}$, то данный нуль является аномальным и имеет номер $\{N - 1\}$ в первом случае и $\{N + 1\}$ во втором. В противном случае данный номер является нормальным и имеет номер $\{N\}$.

Значения функций $(\eta_1, \eta_2)|_{t_0 \neq t_0^{(N)}}$ могут быть найдены из уравнения

$$\begin{aligned} \text{tg}(\phi(t_0) + \eta_1(t_0)) = & \frac{\partial \mu / \partial t_0}{\mu \partial \phi / \partial t_0} - \frac{1}{\partial \phi / \partial t_0} \times \\ & \times \left[\frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} \exp(-\eta_2) \frac{\sin(\phi + \eta_1)}{\mu} \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Используя банк данных для нулей дзета-функции Римана, мы приводим в таблице значения функций η_1, η_2, δ , где δ — расстояние между нулями с номерами $\{N - 1, N\}$.

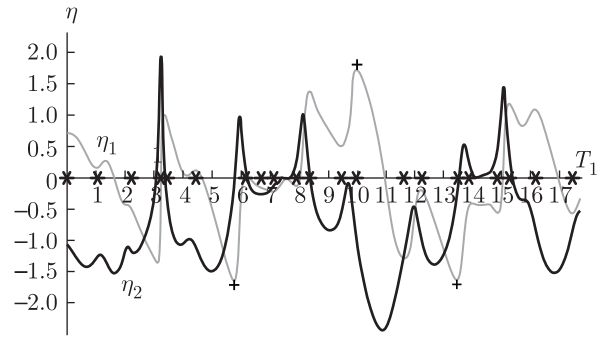


Рис. 1. Функции $\{\eta_1(t_0), \eta_2(t_0)\}$ — решения уравнений (3), (10) в интервале $0 \leq T_1 \leq 17.7$; $t_0 = 9860.360205325 + T_1$. Точки с одиночными звездочками указывают положение нулей дзета-функции с номерами $N = \{9980-10000\}$. Крестики указывают положение аномальных нулей

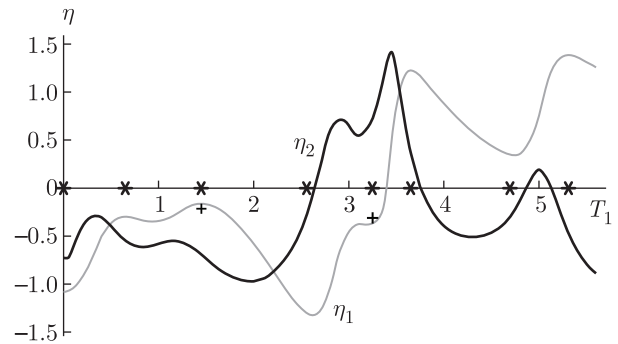


Рис. 2. Функции $\{\eta_1(t_0), \eta_2(t_0)\}$ в интервале $0 \leq T_1 \leq 5.6$; $t_0 = 9882.192215966 + T_1$. Точки с одиночными звездочками указывают положение нулей дзета-функции с номерами $N = \{10005-10012\}$. Все нули являются нормальными. Номера двух нулей $N = \{10007, 10009\}$ являются простыми числами

Существуют точная верхняя и точная нижняя границы функции η_1 на множестве $\{t_0^{(N)}\}$. Их значения неизвестны. Неизвестно также, достигаются они или нет.

На рис. 1 мы приводим функции $\{\eta_1(t_0), \eta_2(t_0)\}$ — решения уравнений (3), (10) в интервале $0 \leq t_0 - 9860.360205325 \leq 17.8$, полученные по теории возмущений относительно второго члена в правой части уравнения (10). Все номера нулей дзета-функции на этом интервале не являются простыми числами. Аномальными являются нули с номерами $N = \{9986, 9992, 9995\}$. На рис. 1 они отмечены крестиками.

На рис. 2 приведены графики функций $\{\eta_1(t_0), \eta_2(t_0)\}$ в интервале $0 \leq t_0 - 9882.192215966 \leq 5.6$, полученные в том же приближении, что и на рис. 1. Все нули дзета-функции в этом интервале

Таблица. Номера N нулей; значения корней t_0 дзета-функции из банка данных; значения функций η_1 , η_2 ; расстояние δ между нулями с номерами $\{N - 1, N\}$. Номера аномальных нулей помечены звездочкой

N	t_0	η_1	η_2	δ
995	1413.843148788569	-0.3347787	-1.439698	
996*	1415.585784795495	-1.913157	0.7729658	1.742636
997	1415.781581303283	0.6981624	0.8390399	0.1957965
998	1417.102822933823	0.2604094	-0.7057182	1.32124163
999	1418.696963852452	-0.9173339	-0.2697894	1.5941409
1000	1419.422480945996	0.2581943	$-2.734378 \cdot 10^{-2}$	0.7255171
9995*	9873.802220903648	-1.622723	-0.2933259	
9996	9874.323957629064	-0.4010518	$8.274927 \cdot 10^{-2}$	0.5217367
9997	9875.218994098847	-0.554381	0.5169054	0.8950364
9998	9875.600956248757	1.182915	0.4075229	0.3819621
9999	9876.479017063784	1.092085	-0.7418838	0.8780608
10000	9877.782654005501	-0.5631968	-0.8569397	1.3036369
99995	74 917.71941582848	-0.8112433	-0.7327937	
99996	74 918.37058022667	-0.7321506	0.3116081	0.6511644
99997	74 918.69143345370	0.909442	0.6422741	0.3208532
99998*	74 919.07516112077	2.238535	-0.2387409	0.3837276
99999	74 920.25979325889	-0.1823727	-1.530978	1.1846321
100000	74 920.82749899419	0.30297	-1.534634	0.5677057
999995*	600 267.1935613822	-1.766762		
999996	600 267.5137087857	-0.3751698		0.3201474
999 997	600 267.9045547598	0.5164229		0.39084598
999 998	600 268.4774001423	0.4080155		0.5728454
999 999	600 269.0055602490	0.5496082		0.5281601
1000000	600 269.6770124450	-0.3087992		0.6714522
9 999 995	$4.992378736958099 \cdot 10^6$	0.1155457		
9 999 996	$4.992379318476746 \cdot 10^6$	-0.7428616		0.58151865
9 999 997*	$4.992380078878498 \cdot 10^6$	-1.601269		0.76040175
9 999 998	$4.992380229898413 \cdot 10^6$	-0.4596763		0.1510199
9 999 999	$4.992380724410680 \cdot 10^6$	-1.318084		0.49451227
10 000 000	$4.992381014003179 \cdot 10^6$	-0.1764911		0.2895925

являются нормальными. Номера двух нулей с $N = \{10007, 10009\}$ являются простыми числами. Они обозначены крестиками. Рассматривая рис. 1, 2 данной работы и рис. 5 из работы [3], можно предположить, что существует корреляция между формой функции $\{\eta_1, \eta_2\}$ и наличием близкого нуля с номером, являющимся простым числом.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Распределение нулей дзета-функции представляет собой хороший пример системы, в которой имеется дальний порядок при отсутствии ближнего порядка. В результате оказывается возможным установить номер любого заданного нуля с точностью ± 1 . Если известно положение трех нулей подряд, то их номера восстанавливаются однозначно с указанием, к какому подмножеству (нормальному или аномальному) принадлежит каждый из этих нулей. При этом даже на больших расстояниях общие фор-

мулы восстановления положения хотя бы ближайшего нуля к данному неизвестны. Вполне возможно, что разбиение задачи на две: установление дальнего порядка (нумерация с установлением интервалов без перекрытия) при отсутствии ближнего, может быть эффективным и в других задачах как физических, так и математических.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматлит, Москва (1962).
2. Yu. N. Ovchinnikov, *ЖЭТФ* **123**, 838 (2016).
3. Yu. N. Ovchinnikov, *J. Supercond. Novel Magnetism* **32**, 3363 (2019).
4. H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Acad. Press, New York, London (1974).