ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 4, стр. 740–754

СКОБКИ ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

А. Я. Мальцев [a*], ***С. П. Новиков*** [a,b]

[a] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

[b] *Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 октября 2020 г.,
после переработки 20 октября 2020 г.
Принята к публикации 21 октября 2020 г.

Рассматриваются гамильтоновы структуры гидродинамического типа и некоторые их обобщения. Обсуждаются вопросы о структуре и специальных формах соответствующих скобок Пуассона и связь таких структур с теорией интегрирования систем гидродинамического типа.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского

DOI: 10.31857/S0044451021040180

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа будет посвящена гамильтоновым структурам, играющим в настоящее время важнейшую роль во многих областях математики и математической физики. А именно, мы будем, главным образом, рассматривать здесь гамильтоновы структуры гидродинамического типа и некоторые их важные обобщения. Традиционно, гамильтоновы структуры гидродинамического типа связаны со скобками Пуассона, возникающими в гидродинамике и представляющими собой скобки для соответствующих гидродинамических плотностей. Скобки такого типа представляют собой, как правило, выражения первого порядка по пространственным производным и могут быть представлены в следующем общем виде:

$$\{U^{\nu}(\mathbf{x}), U^{\mu}(\mathbf{y})\} == g^{\nu\mu i}\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\,\delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + b^{\nu\mu i}_{\lambda}\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\,U^{\lambda}_{x^i}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ — полный набор гидродинамических плотностей в рассматриваемой задаче.

Скобки (1.1) в гидродинамике обычно связаны с гамильтонианами гидродинамического типа, т. е. гамильтонианами вида

$$H = \int P_H\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\;d^n x, \quad (1.2)$$

где n — размерность рассматриваемой задачи. Нетрудно видеть, что гамильтонианам (1.2) в гамильтоновой структуре (1.1) соответствуют системы вида

$$U^{\nu}_t = V^{\nu i}_{\mu}\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\;U^{\mu}_{x^i}, \\ \nu,\,\mu = 1,\ldots,N\,, \quad i = 1,\ldots,n. \quad (1.3)$$

Скобка (1.1) и система (1.3) записаны в наиболее общей форме, не отражающей никакой специфики гидродинамических переменных $\mathbf{U}(\mathbf{x})$. Нетрудно видеть, что приведенная форма является инвариантной по отношению к любым "точечным" заменам переменных $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{U})$ при соответствующих преобразованиях величин $g^{\nu\mu i}(\mathbf{U})$, $b^{\nu\mu i}_{\lambda}(\mathbf{U})$ и $V^{\nu i}_{\mu}(\mathbf{U})$. Вместе с тем, конечно, в реальной гидродинамике каждая переменная, как правило, имеет свой особый физический смысл, а соответствующие скобки (1.1) и системы (1.3) обладают связанной с этим дополнительной структурой. Как хорошо известно [1], в наиболее простом случае баротропного течения идеальной жидкости скобки Пуассона плотности жидкости $\rho(\mathbf{x})$ и компонент ее скорости $v^i(\mathbf{x})$ могут быть записаны в виде

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

$$\{\rho(\mathbf{x}),\rho(\mathbf{y})\}=0,\quad \{v^i(\mathbf{x}),\rho(\mathbf{y})\}=\nabla_{x^i}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$
$$\{v^i(\mathbf{x}),v^k(\mathbf{y})\}=\frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\left(\frac{\partial v^k}{\partial x_i}-\frac{\partial v^i}{\partial x^k}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{1.4}$$

а соответствующий такому течению гамильтониан имеет при этом вид

$$H=\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\epsilon(\rho)\right)d^3x.$$

Чрезвычайно важным свойством скобки (1.4) является то, что условие

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x})=0 \tag{1.5}$$

сохраняется при любой гамильтоновой динамике жидкости. Определяя при этом потенциал течения $\Phi(\mathbf{x})$ согласно стандартной формуле

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})=\nabla\Phi(\mathbf{x}),$$

легко проверить, что переменные $\rho(\mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{x})$ задают каноническую скобку Пуассона

$$\{\rho(\mathbf{x}),\rho(\mathbf{y})\}=0,\quad \{\Phi(\mathbf{x}),\Phi(\mathbf{y})\}=0,$$
$$\{\Phi(\mathbf{x}),\rho(\mathbf{y})\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{1.6}$$

Можно отметить также, что по своему физическому смыслу переменные $\rho(\mathbf{x})$ могут быть отнесены к переменным типа действия, а переменные $\Phi(\mathbf{x})$ — к угловым (фазовым) переменным. Как также хорошо известно, введение канонических переменных для скобки (1.4) в более общем случае завихренных течений является более сложным и связано с определением переменных Клебша для таких течений (см. [2]).

Гамильтоновы структуры (1.1) возникают также и для более общего случая небаротропных течений, а также уравнений магнитной гидродинамики [3]. Можно показать, что как в баротропном, так и в более общем небаротропном случае, введение канонических переменных (переменных Клебша) для гамильтоновых структур связано с представлением соответствующих уравнений в виде лагранжевой системы со связями (см. [4,5]). Более того, данный подход оказывается плодотворным и при описании неизэнтропических течений классической жидкости, а также сверхтекучести [6]. Можно отметить, что в последнем случае лагранжев и гамильтонов подходы часто оказываются важной составляющей не только в описании определенных аспектов динамики сверхтекучей жидкости, но и в установлении уравнений такой динамики в целом (см. [7–11]). В общем случае построение канонических переменных для гамильтоновых структур в гидродинамике является весьма важной задачей, связанной с описанием многих особенностей соответствующих течений, включая их топологические особенности (см. [12,13]).

Ниже мы покажем, что во многих случаях для скобок гидродинамического типа естественным является более расширенное определение канонической формы. Кроме того, помимо канонической формы скобки (1.1) чрезвычайно важной при исследовании соответствующих гамильтоновых систем является также другая (диагональная) форма этой скобки. Последнее обстоятельство будет наиболее очевидно в случае одной пространственной размерности, где теория таких скобок (и их обобщений) является основой теории интегрируемых систем гидродинамического типа. Часто бывают важны и другие структуры скобок Пуассона (1.1), в частности, их ли-алгебраическая структура (см. [14–16]).

К обобщениям гамильтоновых структур гидродинамического типа можно отнести структуры, содержащие одновременно гидродинамические и фазовые переменные, структуры, объединяющие гидродинамическую и ли-алгебраическую части, структуры, содержащие высшие производные и нелокальные добавки и т. п. Огромное многообразие чрезвычайно важных структур такого типа было рассмотрено Дзялошинским и Воловиком в работе [17]. В частности, как было показано в [17], к огромному множеству приложений гамильтоновых структур, обобщающих структуры гидродинамического типа, относятся описание упругой динамики кристаллов с примесями и дефектами, динамики жидких кристаллов, динамики магнетиков самых различных типов, а также спиновых стекол.

2. ОДНОМЕРНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

В случае одной пространственной переменной системы гидродинамического типа имеют вид

$$U^\nu_t=V^\nu_\mu(\mathbf{U})\,U^\mu_x. \tag{2.1}$$

Матрица $V^\nu_\mu(\mathbf{U})$ является матрицей линейного преобразования на касательном пространстве многообразия с координатами $\mathbf{U}$, в частности, она обладает соответствующим законом преобразования при точечных заменах $\tilde{\mathbf{U}}=\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{U})$.

Система (2.1) является гиперболической в некоторой области значений $\mathbf{U}$, если в каждой точке этой области все собственные значения $V^{\nu}_{\mu}(\mathbf{U})$ являются вещественными, а соответствующие собственные векторы образуют базис в касательном пространстве. Система (2.1) называется строго гиперболической в некоторой области, если в каждой точке этой области собственные значения $V^{\nu}_{\mu}(\mathbf{U})$ вещественны и попарно различны.

В случае двухкомпонентных систем (т. е. $\mathbf{U} = (U^1, U^2)$) каждая строго гиперболическая система (2.1) может быть приведена к диагональному виду

$$R^{\nu}_t = v^{\nu}(\mathbf{R})\, R^{\nu}_x \tag{2.2}$$

с помощью вещественной замены переменных $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{U})$. В случае $N \geq 3$, однако, такое приведение, вообще говоря, не всегда возможно. В общем случае строго гиперболическая система (2.1) может быть локально приведена к диагональной форме (с помощью вещественной замены координат), если соответствующий ей тензор Хантьеса тождественно равен нулю. В координатной форме компоненты тензора Хантьеса могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} &H^{\nu}_{\mu\lambda}(\mathbf{U}) = \\ &= V^{\nu}_{\sigma}(\mathbf{U})\, V^{\sigma}_{\tau}(\mathbf{U})\, N^{\tau}_{\mu\lambda}(\mathbf{U}) - V^{\nu}_{\sigma}(\mathbf{U}) N^{\sigma}_{\tau\lambda}(\mathbf{U}) V^{\tau}_{\mu}(\mathbf{U}) - \\ &- V^{\nu}_{\sigma}(\mathbf{U}) N^{\sigma}_{\mu\tau}(\mathbf{U}) V^{\tau}_{\lambda}(\mathbf{U}) + N^{\nu}_{\sigma\tau}(\mathbf{U}) V^{\sigma}_{\mu}(\mathbf{U}) V^{\tau}_{\lambda}(\mathbf{U}), \end{aligned}$$

где $N^{\nu}_{\mu\lambda}(\mathbf{U})$ — тензор Нейенхейса оператора $V^{\nu}_{\mu}(\mathbf{U})$:

$$\begin{aligned} N^{\nu}_{\mu\lambda}(\mathbf{U}) &= V^{\sigma}_{\mu}(\mathbf{U})\, \frac{\partial V^{\nu}_{\lambda}}{\partial U^{\sigma}} - V^{\sigma}_{\lambda}(\mathbf{U})\, \frac{\partial V^{\nu}_{\mu}}{\partial U^{\sigma}} + \\ &+ V^{\nu}_{\sigma}(\mathbf{U})\, \frac{\partial V^{\sigma}_{\mu}}{\partial U^{\lambda}} - V^{\nu}_{\sigma}(\mathbf{U})\, \frac{\partial V^{\sigma}_{\lambda}}{\partial U^{\mu}}. \end{aligned}$$

В общем случае функции $R(\mathbf{U})$, удовлетворяющие в силу системы (2.1) уравнению

$$R_t = v(\mathbf{U})\, R_x$$

для какой-либо функции $v(\mathbf{U})$, называются инвариантами Римана системы (2.1). При этом система (2.1) может обладать некоторым набором независимых инвариантов Римана, количество которых, однако, недостаточно для полной диагонализации системы.

Гамильтонова теория систем (2.1) связана, прежде всего, с локальными одномерными скобками Пуассона гидродинамического типа, введенными Дубровиным и Новиковым [18]. Скобка Дубровина–Новикова на пространстве полей $(U^1(x), \ldots, U^N(x))$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\{U^{\nu}(x), U^{\mu}(y)\} = \\ &\quad = g^{\nu\mu}(\mathbf{U}) \delta'(x-y) + b^{\nu\mu}_{\lambda}(\mathbf{U})\, U^{\lambda}_x\ \delta(x-y). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Как было показано Дубровиным и Новиковым, выражение (2.3) с невырожденным тензором $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет скобку Пуассона на пространстве полей $\mathbf{U}(x)$ в том и только том случае, если:

1) Тензор $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет симметричную псевдориманову метрику нулевой кривизны с верхними индексами на пространстве параметров $(U^1, \ldots, U^N)$;

2) Величины

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = -g_{\mu\sigma} b^{\sigma\nu}_{\lambda},$$

где $g^{\nu\sigma}(\mathbf{U})\, g_{\sigma\mu}(\mathbf{U}) = \delta^{\nu}_{\mu}$, являются символами Кристоффеля для соответствующей метрики $g_{\nu\mu}(\mathbf{U})$.

Как следует из приведенных выше утверждений, любая скобка Дубровина–Новикова может быть записана в канонической форме [18]

$$\{n^{\nu}(x), n^{\mu}(y)\} = \epsilon^{\nu} \delta^{\nu\mu} \delta'(x-y), \quad \epsilon^{\nu} = \pm 1 \tag{2.4}$$

после перехода к плоским координатам $n^{\nu} = n^{\nu}(\mathbf{U})$ метрики $g_{\nu\mu}(\mathbf{U})$. Естественно ввести при этом группу точечных канонических преобразований скобки (2.4), которая, как легко видеть, совпадает в этом случае с соответствующей группой $O(K, N-K)$.

Функционалы

$$N^{\nu} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} n^{\nu}(x)\, dx$$

являются аннуляторами скобки Дубровина–Новикова, в то время как функционал

$$P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} \epsilon^{\nu} (n^{\nu})^2(x)\, dx$$

представляет функционал импульса для скобки (2.3).

Часто бывает удобно также записывать каноническую форму скобки Дубровина–Новикова в более общем виде:

$$\{n^{\nu}(x), n^{\mu}(y)\} = \eta^{\nu\mu}\, \delta'(x-y),$$

где $\eta^{\nu\mu}$ — произвольная постоянная (невырожденная) симметрическая матрица. Нетрудно видеть, что группа (точечных) канонических преобразований скобки Пуассона расширяется при этом до $GL_N(\mathbb{R})$.

В случае если N — четное, $N = 2K$, и метрика $g_{\nu\mu}(\mathbf{U})$ имеет сигнатуру (K, K), можно выбрать плоские координаты $(a^1, \ldots, a^K, b^1, \ldots, b^K)$ таким образом, что соответствующие ненулевые скобки Пуассона примут вид

$$\{a^{\alpha}(x), b^{\beta}(y)\} = \delta^{\alpha\beta}\,\delta'(x-y).$$

В этом случае, проводя вещественное нелокальной преобразование

$$\Phi^{\alpha}(x) = \int a^{\alpha}(x)\,dx,$$

мы получаем скобку Пуассона в канонической форме

$$\{b^{\alpha}(x), b^{\beta}(y)\} = 0, \quad \{\Phi^{\alpha}(x), \Phi^{\beta}(y)\} = 0,$$

$$\{\Phi^{\alpha}(x), b^{\beta}(y)\} = \delta^{\alpha\beta}\,\delta(x-y).$$

В некоторой степени особенную роль играют также скобки Пуассона, являющие линейными по координатам $\mathbf{U}(x)$:

$$\begin{aligned}\{U^{\nu}(x), U^{\mu}(y)\} = \\ = \Big((b^{\nu\mu}_{\lambda} + b^{\mu\nu}_{\lambda})\,U^{\lambda} + g^{\nu\mu}_{0} \Big)\,\delta'(x-y) + \\ + b^{\nu\mu}_{\lambda}\,U^{\lambda}_{x}\;\delta(x-y),\end{aligned} \quad (2.5)$$

$$b^{\mu\nu}_{\lambda} = \mathrm{const}, \quad g^{\nu\mu}_{0} = \mathrm{const}.$$

Координаты $\mathbf{U}(x)$ при этом, как правило, естественно связаны с рассматриваемой задачей, а сами скобки (2.5) описываются ли-алгебраическими структурами. В случае одной пространственной переменной классификация соответствующих алгебр Ли, а также допустимых коциклов на них была построена в работе [19], где в частности, была открыта связь таких скобок с теорией фробениусовых и квазифробениусовых алгебр.

Скобка (2.3) имеет также две другие важные формы на пространстве полей $\mathbf{U}(x)$. Первая из них — «лиувиллева» форма [16, 18], имеющая вид

$$\begin{aligned}\{U^{\nu}(x), U^{\mu}(y)\} = \\ = \Big(\gamma^{\nu\mu}(\mathbf{U}) + \gamma^{\mu\nu}(\mathbf{U})\Big)\,\delta'(x-y) + \frac{\partial\gamma^{\nu\mu}}{\partial U^{\lambda}}\,U^{\lambda}_{x}\,\delta(x-y)\end{aligned}$$

для некоторых функций $\gamma^{\nu\mu}(\mathbf{U})$.

Лиувиллева форма скобки Дубровина – Новикова называется также физической и соответствует случаю, когда интегралы от координат U^{ν}

$$I^{\nu} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U^{\nu}(x)\,dx$$

коммутируют друг с другом.

Другая важная форма скобки Дубровина – Новикова — диагональная форма. Она соответствует случаю, когда координаты U^{ν} являются ортогональными координатами для метрики $g_{\nu\mu}(\mathbf{U})$, и, соответственно, тензор $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ в определении (2.3) имеет диагональную форму. Такая форма скобки Дубровина – Новикова тесно связана с теорией интегрируемых систем гидродинамического типа.

Новиковым была высказана гипотеза, что все системы гидродинамического типа, приводимые к форме (2.2) и являющиеся гамильтоновыми по отношению к какой-либо скобке (2.3), являются интегрируемыми. Эта гипотеза была доказана Царевым в работе [20], где был предложен метод интегрирования таких систем (обобщенный метод годографа).

Построение решений системы (2.2) методом Царева состоит в нахождении коммутирующих с ней систем (коммутирующих потоков), имеющих такой же вид, характеристические скорости $w^{\nu}(\mathbf{R})$ которых удовлетворяют при этом системе уравнений

$$\frac{\partial_{\mu} w^{\nu}}{w^{\mu} - w^{\nu}} = \frac{\partial_{\mu} v^{\nu}}{v^{\mu} - v^{\nu}}, \quad \mu \neq \nu \qquad (2.6)$$

$(\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial R^{\mu})$.

Каждое из решений $\mathbf{w}(\mathbf{R}) = (w^{1}(\mathbf{R}), \ldots, w^{N}(\mathbf{R}))$ системы (2.6) порождает решение $\mathbf{R}(x,t)$ системы (2.2), определяемое из алгебраической системы

$$w^{\nu}(\mathbf{R}) = t\,v^{\nu}(\mathbf{R}) + x, \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Система (2.6) для функции $w^{\nu}(\mathbf{R})$ представляет собой переопределенную систему линейных уравнений с переменными коэффициентами, условия совместности которой имеют вид

$$\partial_{\lambda}\left(\frac{\partial_{\mu} v^{\nu}}{v^{\mu} - v^{\nu}}\right) = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial_{\lambda} v^{\nu}}{v^{\lambda} - v^{\nu}}\right), \qquad (2.7)$$

$$\nu \neq \mu, \quad \mu \neq \lambda, \quad \lambda \neq \nu.$$

Как можно показать (см. [20, 21]), выполнение условий (2.7) обеспечивает в случае общего положения полноту решений системы (2.6), достаточную для (локального) решения общей задачи Коши соответствующей системы (2.2).

Как было показано в работе [20], условие гамильтоновости системы (2.2) по отношению к любой скобке Дубровина – Новикова влечет за собой соотношения (2.7) и, таким образом, позволяет проинтегрировать эту систему методом Царева. В действительности, множество диагональных систем, удовлетворяющих условию (2.7), заметно шире, чем совокупность таких же систем, гамильтоновых по отношению к локальной скобке Пуассона, поэтому все диагональные системы, удовлетворяющие условиям (2.7), были названы Царевым полугамильтоновыми. Как оказалось позднее, в класс полугамильтоновых систем попадают также системы, являющиеся гамильтоновыми по отношению к обобщениям скобки Дубровина–Новикова — слабонелокальной скобке Мохова–Ферапонтова и скобке Ферапонтова. Дадим здесь соответствующие определения:

Скобкой Мохова–Ферапонтова [22] на пространстве полей $\mathbf{U}(x)$ называется скобка, представимая в виде

$$\{U^\nu(x), U^\mu(x)\} = g^{\nu\mu}(\mathbf{U})\,\delta'(x-y) + \\ + b^{\nu\mu}_\lambda(\mathbf{U})\,U^\lambda_x\,\delta(x-y) + \frac{1}{2}\,c\,U^\nu_x\,\mathrm{sgn}\,(x-y)\,U^\mu_y. \quad (2.8)$$

Общей скобкой Ферапонтова [23–26] на пространстве полей $\mathbf{U}(x)$ называется скобка вида

$$\{U^\nu(x), U^\mu(y)\} = \\ = g^{\nu\mu}(\mathbf{U})\,\delta'(x-y) + b^{\nu\mu}_\lambda(\mathbf{U})U^\lambda_x\delta(x-y) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{g} e_k\,w^\nu_{(k)\lambda}(\mathbf{U})\,U^\lambda_x\,\mathrm{sgn}\,(x-y)\times \\ \times w^\mu_{(k)\delta}(\mathbf{U})\,U^\delta_y, \quad e_k = \pm 1. \quad (2.9)$$

Аналогично сформулированным ранее условиям для функций $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ и $b^{\nu\mu}_\lambda(\mathbf{U})$ для скобки Дубровина–Новикова, можно сформулировать условия для коэффициентов в выражениях (2.8) и (2.9), при выполнении которых соответствующие выражения определяют скобки Пуассона на пространстве полей $\mathbf{U}(x)$. Именно, выражение (2.8) с невырожденным тензором $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет скобку Пуассона на пространстве полей $\mathbf{U}(x)$ в том и только том случае, если [22]:

1) Тензор $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет симметричную псевдориманову метрику постоянной кривизны c (с верхними индексами) на пространстве параметров $(U^1,\ldots,U^N)$;

2) Величины

$$\Gamma^\nu_{\mu\gamma} = -g_{\mu\lambda}\,b^{\lambda\nu}_\gamma$$

являются символами Кристоффеля для соответствующей метрики $g_{\nu\mu}(\mathbf{U})$.

Выражение (2.9) с невырожденным тензором $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет скобку Пуассона на пространстве полей $\mathbf{U}(x)$ в том и только том случае, если [23]:

1) Тензор $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ определяет симметричную псевдориманову метрику с верхними индексами на пространстве параметров $(U^1,\ldots,U^N)$;

2) Величины

$$\Gamma^\nu_{\mu\gamma} = -g_{\mu\lambda}\,b^{\lambda\nu}_\gamma$$

являются символами Кристоффеля для соответствующей метрики $g_{\nu\mu}(\mathbf{U})$;

3) Аффиноры $w^\nu_{(k)\lambda}(\mathbf{U})$ и тензор кривизны метрики $R^{\nu\tau}_{\mu\lambda}(\mathbf{U})$ удовлетворяют условиям

$$g_{\nu\tau}w^\tau_{(k)\mu} = g_{\mu\tau}w^\tau_{(k)\nu}, \quad \nabla_\nu w^\mu_{(k)\lambda} = \nabla_\lambda w^\mu_{(k)\nu}, \quad (2.10)$$

$$R^{\nu\tau}_{\mu\lambda} = \sum_{k=1}^{g} e_k\left(w^\nu_{(k)\mu}w^\tau_{(k)\lambda} - w^\tau_{(k)\mu}w^\nu_{(k)\lambda}\right), \quad (2.11)$$

$$[w_k, w_{k'}] = 0$$

(коммутативность).

Ферапонтовым было указано также, что соотношения (2.10), (2.11) являются соотношениями Гаусса–Кодацци для подмногообразия $\mathcal{M}^N$ с плоской нормальной связностью в псевдоевклидовом пространстве E^{N+g}. При этом тензор $g_{\nu\mu}$ играет роль первой квадратичной формы $\mathcal{M}^N$, а $w_{(k)}$ — роль операторов Вейнгартена, соответствующих «параллельным» полям единичных нормалей $\mathbf{n}_k$ [23–26]. Кроме того, Ферапонтовым было показано, что скобка (2.9) получается как результат ограничения по Дираку скобки Дубровина–Новикова, определенной в пространстве E^{N+g} для подмногообразия $\mathcal{M}^N$ [24].

Каноническая форма скобки Мохова–Ферапонтова, записанная в плотностях аннуляторов, а также выражение для функционала импульса этой скобки были предложены в работе [27].

Канонические формы (а также канонические функционалы) общих слабонелокальных скобок Ферапонтова были исследованы в работе [28]. По определению, скобка (2.9) имеет в переменных $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{U})$ каноническую форму, если выполняются соотношения

$$\{n^\nu(x), n^\mu(y)\} = \\ = \left(\epsilon^\nu\delta^{\nu\mu} - \sum_{k=0}^{g} e_k\,f^\nu_{(k)}(\mathbf{n})\,f^\mu_{(k)}(\mathbf{n})\right)\delta'(x-y) - \\ - \sum_{k=0}^{g} e_k\left(f^\nu_{(k)}(\mathbf{n})\right)_x f^\mu_{(k)}(\mathbf{n})\,\delta(x-y) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{g} e_k\left(f^\nu_{(k)}(\mathbf{n})\right)_x\,\mathrm{sgn}(x-y)\left(f^\mu_{(k)}(\mathbf{n})\right)_y$$

($\epsilon^\nu = \pm 1$) для некоторых функций $f^\nu_{(k)}(\mathbf{n})$, таких что $f^\nu_{(k)}(0,\ldots,0) = 0$.

Здесь можно отметить, что каноническая форма скобки Ферапонтова в общем случае определена неоднозначно. Наиболее естественно связывать каноническую форму скобки (2.9) с какой-либо фиксированной точкой $\mathbf{U}_0$ на многообразии параметров $\mathbf{U}$. С точкой $\mathbf{U}_0$ естественно при этом связать пространство «петель», начинающихся и заканчивающихся в точке $\mathbf{U}_0$, т. е. пространство $\mathcal{L}_{\mathbf{U}_0}$ отображений

$$\mathbb{R} \to \{\mathbf{U}\},$$

таких что

$$\mathbf{U}(x) \to \mathbf{U}_0, \quad x \to \pm\infty.$$

С геометрической точки зрения, построение канонических координат, отвечающих точке $\mathbf{U}_0$, связано с упомянутым выше вложением многообразия параметров $\mathcal{M}^N$ в псевдоевклидово пространство E^{N+g}, определяемое скобкой (2.9). А именно, рассмотрим соответствующее вложение

$$\mathcal{M}^N \to E^{N+g}$$

и выберем (псевдо)евклидову систему координат в E^{N+g} с началом в точке $\mathbf{U}_0 \in \mathcal{M}^N \subset E^{N+g}$ так, чтобы первые N координат касались подмногообразия $\mathcal{M}^N$ в точке $\mathbf{U}_0$, а оставшиеся g были ортогональны $\mathcal{M}^N$ в этой точке. Ограничение первых N координат в E^{N+g} на $\mathcal{M}^N$ и задают в этом случае набор канонических координат $n^\nu(\mathbf{U})$, отвечающих точке $\mathbf{U}_0$. Ограничение оставшихся g координат на подмногообразие $\mathcal{M}^N$ задает еще g дополнительных функций $h^k(\mathbf{U})$, также играющих важную роль.

Значения (вектор)функций $\mathbf{f}_{(k)}(\mathbf{n})$ в приведенной выше канонической форме совпадают со значениями проекций базисных параллельных полей нормалей к $\mathcal{M}^N$ в пространстве E^{N+g} на плоскость, касательную к $\mathcal{M}^N$ в точке $\mathbf{U}_0$. В частности, для скобки Мохова – Ферапонтова, соответствующей случаю (псевдо)сферы в E^{N+1}, мы имеем $f^\nu = \sqrt{|c|}\, n^\nu$.

Как можно показать (см. [28]), соответствующие функционалы

$$N^\nu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} n^\nu(x)\, dx$$

задают аннуляторы скобки (2.9) на пространстве $\mathcal{L}_{\mathbf{U}_0}$. Функционалы

$$H^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h^k(x)\, dx$$

являются при этом гамильтонианами, порождающими потоки

$$U^\nu_t = w^\nu_{(k)\mu}(\mathbf{U})\, U^\mu_x$$

на пространстве $\mathcal{L}_{\mathbf{U}_0}$ в силу скобки (2.9).

Любая скобка (2.9) с невырожденным тензором $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ имеет также локальный функционал импульса P на пространствах $\mathcal{L}_{\mathbf{U}_0}$, имеющий форму

$$P = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \epsilon^\nu n^\nu n^\nu + \sum_{k=1}^{g} e_k\, h^k h^k \right) dx,$$

где функции $\mathbf{n}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{U})$ отвечают точке $\mathbf{U}_0$ [29].

В работе [28] была также предложена Лиувиллева (физическая) форма общих скобок Ферапонтова, имеющая вид

$$\begin{aligned} \{U^\nu(x), U^\mu(y)\} &= \\ &= \left(\gamma^{\nu\mu} + \gamma^{\mu\nu} - \sum_{k=1}^{g} e_k f^\nu_{(k)} f^\mu_{(k)} \right) \delta'(x-y) + \\ &+ \left(\frac{\partial \gamma^{\nu\mu}}{\partial U^\lambda}\, U^\lambda_x - \sum_{k=1}^{g} e_k\, (f^\nu_{(k)})_x\, f^\mu_{(k)} \right) \delta(x-y) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{g} e_k\, (f^\nu_{(k)})_x\, \mathrm{sgn}\,(x-y) (f^\mu_{(k)})_y \end{aligned}$$

с некоторыми функциями $\gamma^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ и $f^\nu_{(k)}(\mathbf{U})$.

Скобка (2.9) имеет физическую форму в координатах U^μ в том и только том случае, если интегралы

$$J^\nu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U^\nu(x)\, dx$$

порождают набор локальных коммутирующих потоков в силу скобки (2.9).

Скобка Ферапонтова (2.9) представляет собой наиболее общий вид (одномерной) слабонелокальной скобки гидродинамического типа. С другой стороны, скобки Ферапонтова, как правило, связаны лишь с интегрируемыми системами гидродинамического типа, поскольку содержат интегрируемые структуры внутри себя. Согласно гипотезе Ферапонтова [26], все диагонализуемые полугамильтоновы системы являются гамильтоновыми по отношению к скобкам (2.9), если допустить наличие бесконечного числа членов в их нелокальной части. Эта гипотеза была, в частности, подтверждена в работе [30] для довольно широкого класса полугамильтоновых систем. Данная гипотеза рассматривалась также в работах [31, 32]. Надо сказать, однако, что в общей формулировке строгое доказательство этой гипотезы пока не получено.

В то же время, скобки (2.3) и (2.8) связаны со значительно более широким классом систем, не предполагающих интегрируемости, и являются, в этом смысле, более распространенными в реальных приложениях.

Как в случае скобки Дубровина – Новикова, так и в случае слабонелокальных скобок Мохова – Ферапонтова и Ферапонтова, диагональная форма метрики $g_{\nu\mu}$ является наиболее тесно связанной с теорией интегрирования систем (2.1). При этом проблема диагональных координат для плоских метрик, являлась, как известно, классической проблемой дифференциальной геометрии на протяжении многих лет. Нельзя не сказать здесь, что в последнее время в решении этой проблемы получены новые весьма важные достижения [33, 34], связанные с методом обратной задачи рассеяния. При этом можно отметить, что теория скобок Пуассона также послужила стимулирующим фактором при рассмотрении этой классической задачи.

Надо сказать, однако, что диагональная форма скобок Пуассона не является, конечно, единственно важной при рассмотрении вопросов интегрируемости систем гидродинамического типа. Так, например, канонические координаты скобок играют наиболее важную роль при рассмотрении бигамильтоновых структур (см. [35]), имеющихся у подавляющего большинства интегрируемых иерархий. Напомним здесь, что основу бигамильтоновой структуры составляет пара согласованных скобок Пуассона, $\{\ldots,\ldots\}_1$ и $\{\ldots,\ldots\}_2$, т. е. скобок, любая линейная комбинация которых

$$\{\ldots,\ldots\}_1 + \lambda\,\{\ldots,\ldots\}_2 \tag{2.12}$$

также определяет скобку Пуассона. Построение бигамильтоновых иерархий, как правило, начинается при этом с аннуляторов или некоторых канонических функционалов, связанных с одной из гамильтоновых структур и играющих роль «родоначальников» соответствующих иерархий. Как мы видели выше, в случае скобок гидродинамического типа такие функционалы связаны именно с каноническими координатами скобки. Можно добавить, что канонические координаты $n^\nu(\lambda)$ для всего пучка (2.12) являются производящими функциями для всех плотностей гамильтонианов рассматриваемой иерархии, производящих высшие потоки.

Нельзя не упомянуть здесь о важной роли согласованных локальных гамильтоновых структур для квантовой теории поля, открытой Дубровиным в 1990-х. Как было показано Дубровиным, специальные пары согласованных скобок Дубровина – Новикова дают классификацию топологических теорий поля, возникающих в качестве приближений в различных теоретико-полевых моделях. Так, пара согласованных скобок Дубровина – Новикова лежит в основе определения фробениусовых многообразий [36, 37], параметризующих решения уравнения ВДВВ, описывающие топологические теории. Более того, дальнейшим развитием теории фробениусовых многообразий стала теория «слабодисперсионных» деформаций таких гамильтоновых структур, дающих поправки к топологическим теориям [38, 39].

Кроме того, во множестве примеров важнейшую роль играют координаты, в которых скобка Пуассона становится линейной по полям, где явно проявляются ли-алгебраические аспекты рассматриваемой задачи.

Еще одним важным обобщением локальных скобок гидродинамического типа являются неоднородные скобки Пуассона, имеющие в общем случае вид

$$\begin{aligned}\{U^\nu(\mathbf{x}), U^\mu(\mathbf{y})\} = g^{\nu\mu i}\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\ \delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + \left[b^{\nu\mu i}_\lambda\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\,U^\lambda_{x^i} + h^{\nu\mu}(\mathbf{U})\right]\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Скобки (2.13) представляют собой в действительности пары согласованных скобок, поскольку как ее гидродинамическая часть (т. е. (1.1)), так и конечномерная часть $h^{\nu\mu}(\mathbf{U})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ определяют самостоятельные скобки Пуассона на пространстве полей $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, согласованные между собой. Можно видеть, кроме того, что тензор $h^{\nu\mu}(\mathbf{U})$ должен определять простую конечномерную скобку на пространстве с координатами $\mathbf{U}$.

Скобки (2.13), как нетрудно видеть, связаны прежде всего с неоднородными системами гидродинамического типа:

$$U^\nu_t = V^{\nu i}_\mu\,(\mathbf{U})\ U^\mu_{x^i} + f^\nu(\mathbf{U})$$

на пространстве полей $\mathbf{U}(\mathbf{x})$.

Теория скобок (2.13) также в значительной мере нетривиальна и содержит множество интересных геометрических и алгебраических структур. Так, в частности, для одномерных скобок Пуассона

$$\begin{aligned}\{U^\nu(x), U^\mu(y)\} = g^{\nu\mu}\,(\mathbf{U}(x))\ \delta'(x-y) + \\ + \left[b^{\nu\mu}_\lambda\,(\mathbf{U})\,U^\lambda_x + h^{\nu\mu}(\mathbf{U})\right]\ \delta(x-y)\end{aligned} \tag{2.14}$$

верно следующее утверждение [40]:

Если метрика $g^{\nu\mu}\,(\mathbf{U})$ невырождена, то преобразованием координат $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{n})$ скобка (2.14) приводится к виду

$$\begin{aligned}\{n^\nu(x), n^\mu(y)\} = \eta^{\nu\mu}\ \delta'(x-y) + \\ + \left[c^{\nu\mu}_\lambda\,n^\lambda + d^{\nu\mu}\right]\ \delta(x-y),\end{aligned}$$

где коэффициенты $\eta^{\nu\mu}$, $c^{\nu\mu}_\lambda$, $d^{\nu\mu}$ постоянны, $c^{\nu\mu}_\lambda$ представляют собой структурные константы полупростой алгебры Ли с метрикой Киллинга $\eta^{\nu\mu}$, а

$d^{\nu\mu} = -d^{\mu\nu}$ — произвольный коцикл на этой алгебре.

В качестве важного примера системы, связанной со скобкой (2.14), можно привести задачу n-волн

$$M_t - \varphi\,(M_x) = [M, \varphi\,(M)]\,, \tag{2.15}$$

где $M = (M_{ij}) - (n \times n)$ — матрица с нулевым следом (возможно, с дополнительными симметриями), $\varphi\,(M) = (\lambda_{ij} M_{ij})$, являющаяся гамильтоновой по отношению к скобке вида (2.14) с $d^{\nu\mu} = 0$, с квадратичным гамильтонианом.

Как хорошо известно (см. [41]), система (2.15) интегрируема методом обратной задачи рассеяния при $\lambda_{ij} = (a_i - a_j)/(b_i - b_j)$.

Заметим здесь также, что гамильтоновы структуры (2.14) имеют и дальнейшие обобщения. Так, в частности, в работе [42] были рассмотрены неоднородные скобки Пуассона, отвечающие метрикам постоянной кривизны (скобкам Мохова – Ферапонтова).

В заключение данного раздела, можно отметить, что скобки (2.3), а также (2.8), (2.9), (2.14) представляют выделенные классы более общих локальных одномерных теоретико-полевых скобок

$$\{\varphi^i(x), \varphi^j(y)\} = \\ = \sum_{k\geq 0} B^{ij}_{(k)}(\varphi, \varphi_x, \dots)\, \delta^{(k)}(x-y) \tag{2.16}$$

и слабонелокальных скобок

$$\{\varphi^i(x), \varphi^j(y)\} = \sum_{k\geq 0} B^{ij}_{(k)}(\varphi, \varphi_x, \dots)\, \delta^{(k)}(x-y) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^{g} \kappa_{ks}\, S^i_{(k)}(\varphi, \varphi_x, \dots)\, \mathrm{sgn}\,(x-y) \times \\ \times S^j_{(s)}(\varphi, \varphi_y, \dots)\,, \tag{2.17}$$

где κ_{ks} — некоторая произвольная (постоянная) квадратичная форма, $i = 1, \dots, n$, $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$.

Как и в случае скобок гидродинамического типа, скобки (2.16) могут быть связаны с весьма широким многообразием систем эволюционного типа, в то время как скобки (2.17) возникают, как правило, при изучении интегрируемых иерархий (см. [28,43]).

3. ГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ И ТЕОРИЯ МЕДЛЕННЫХ МОДУЛЯЦИЙ

Развитие теории интегрирования одномерных систем гидродинамического типа в действительности происходило в тесной связи с развитием теории медленных модуляций (метода Уизема) многофазных решений интегрируемых иерархий. Как впервые было показано Уиземом [44], усредненные уравнения, описывающие эволюцию медленно модулированных параметров однофазных решений уравнения КдФ представляют собой систему гидродинамического типа, приводимую к диагональной форме. Как было затем показано в работе [45], это замечательное свойство присуще также и уравнениям медленных модуляций (уравнениям Уизема) для многофазных решений КдФ. Можно здесь сразу отметить, что построение многофазных решений для интегрируемых иерархий тесно связано с методами алгебраической геометрии в теории обратной задачи рассеяния (см. [46–52]). Как следствие этого, методы теории медленных модуляций для интегрируемых систем также связаны самым тесным образом с алгебро-геометрическими конструкциями. В частности, именно методы алгебраической геометрии позволили установить диагонализуемость уравнений Уизема для многофазных решений КдФ в работе [45]. Будучи универсальным подходом в теории интегрируемых систем, методы алгебраической геометрии позволяют в действительности установить также аналогичный факт для большинства иерархий, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Таким образом, системы уравнений медленных модуляций для интегрируемых иерархий представляют собой важнейший класс диагонализуемых систем гидродинамического типа.

Как мы уже сказали, для интегрирования диагональных систем гидродинамического типа, как правило, требуется их гамильтоновость. В ряде случаев гамильтоновость систем уравнений может быть связана с их лагранжевым формализмом, что, как правило, позволяет определить соответствующую гамильтонову структуру в канонической форме. Вместе с процедурой построения уравнений медленных модуляций Уиземом [44] была также предложена процедура усреднения локальных лагранжианов (в том числе и при наличии «псевдофаз») и получения локального лагранжева формализма для «усредненной системы». Надо сказать, однако, что локальные лагранжевы структуры имеются далеко не у всех интересных систем эволюционного типа

$$\varphi^i_t = Q^i(\varphi, \varphi_x, \dots), \tag{3.1}$$

и наиболее общим для таких систем является, как правило, наличие более общего гамильтонова формализма со скобкой Пауссона (2.16) (или (2.17)) и гамильтонианом

$$H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi, \varphi_x, \ldots)\, dx. \qquad (3.2)$$

Для построения гамильтоновых структур уравнений медленных модуляций в общем случае Дубровиным и Новиковым [16, 18] была предложена процедура «усреднения» локальных скобок Пуассона (2.16), дающая скобку вида (2.3) для системы Уизема. Дадим здесь краткое описание этой процедуры.

В методе Уизема мы предполагаем, что система (3.1) имеет конечно-параметрическое семейство квазипериодических решений

$$\varphi^i(x,t) = \Phi^i\left(\mathbf{k}(\mathbf{U})\, x + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{U})\, t + \boldsymbol{\theta}_0,\, \mathbf{U}\right), \qquad (3.3)$$

где $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^m)$, $\mathbf{k}(\mathbf{U}) = (k^1(\mathbf{U}), \ldots, k^m(\mathbf{U}))$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{U}) = (\omega^1(\mathbf{U}), \ldots, \omega^m(\mathbf{U}))$ и $\Phi^i(\theta, \mathbf{U})$ задают семейство 2π-периодических по всем θ^α функций, зависящих от дополнительных параметров $\mathbf{U} = (U^1, \ldots, U^N)$.

В методе Уизема мы производим растяжение $X = \epsilon\, x$, $T = \epsilon\, t$ ($\epsilon \to 0$) обеих координат x и t и считаем параметры $\mathbf{U}$ функциями «медленных» координат X и T.

Метод Дубровина и Новикова основывается на существовании N (равного числу параметров U^ν семейства m-фазных решений (3.1)) локальных интегралов

$$I^\nu = \int \mathcal{P}^\nu(\varphi, \varphi_x, \ldots)\, dx,$$

коммутирующих с гамильтонианом и друг с другом:

$$\{I^\nu, H\} = 0, \quad \{I^\nu, I^\mu\} = 0, \qquad (3.4)$$

и может быть описан ниже следующим образом.

Вычислим попарные скобки Пуассона плотностей $\mathcal{P}^\nu$, имеющие форму

$$\{\mathcal{P}^\nu(x), \mathcal{P}^\mu(y)\} = \sum_{k\geq 0} A_k^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \ldots)\, \delta^{(k)}(x-y),$$

где

$$A_0^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \ldots) \equiv \partial_x Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \ldots)$$

согласно (3.4). Соответствующая скобка Дубровина – Новикова на пространстве функций $U(X)$ имеет вид

$$\{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = \langle A_1^{\nu\mu}\rangle(U)\, \delta'(X-Y) + \\ + \frac{\partial \langle Q^{\nu\mu}\rangle}{\partial U^\lambda}\, U^\lambda_X\, \delta(X-Y), \qquad (3.5)$$

где $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение на семействе m-фазных решений (3.1), задаваемое формулой

$$\langle F\rangle = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi}\!\!\ldots\!\int\limits_0^{2\pi} F(\Phi, k^\alpha(U)\Phi_{\theta^\alpha}, \ldots)\, d^m\theta.$$

При этом мы выбираем параметры U^ν в виде $U^\nu = \langle P^\nu\rangle$ на соответствующих решениях рассматриваемого нами семейства.

Можно видеть, что метод Дубровина и Новикова в описанной форме связан с консервативной формой системы уравнений медленных модуляций, а именно с формой

$$U^\nu_T = \langle Q^\nu\rangle_X, \quad \nu = 1, \ldots, N, \qquad (3.6)$$

где

$$\mathcal{P}^\nu_t \equiv \frac{\partial}{\partial x}\, Q^\nu(\varphi, \varphi_x, \ldots)$$

в силу системы (3.1). Можно показать также, что скобка (3.5) имеет в общем случае лиувиллеву форму. Интегралы от координат $U^\nu(X)$ дают в рассматриваемом случае набор N коммутирующих интегралов системы (3.6), а плотностью гамильтониана для системы (3.6) является усредненная плотность гамильтониана исходной системы $\langle h\rangle(X)$.

Здесь можно также отметить, что все интегралы I^μ порождают коммутирующие потоки к системе (3.1) в силу соответствующей скобки (2.16), так что можно, наряду со временем t, рассматривать также зависимость всех решений от дополнительных времен t^μ ($\mu = 1, \ldots, N$). При этом также верны соотношения

$$\mathcal{P}^\nu_{t^\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\, Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \ldots)$$

для некоторых функций $Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \ldots)$, а соответствующее семейство решений (3.3) представляет также семейство m-фазных решений для коммутирующих потоков с некоторыми другими значениями величин

$$\boldsymbol{\omega}^\mu(\mathbf{U}) = (\omega^{1\mu}(\mathbf{U}), \ldots, \omega^{m\mu}(\mathbf{U})).$$

Системы Уизема для коммутирующих потоков

$$U^\nu_{T^\mu} = \langle Q^{\nu\mu}\rangle_X$$

представляют при этом коммутирующие потоки для системы (3.6) и являются гамильтоновыми по отношению к скобке (3.5) с гамильтонианами

$$H^\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U^\mu(X)\, dX.$$

В общем случае обоснование метода Дубровина – Новикова требует определенных условий полноты и регулярности соответствующего семейства m-фазных решений (3.1) [53].

Отметим здесь, что процедура Дубровина – Новикова допускает также обобщение на случай слабо-нелокальных гамильтоновых структур, позволяющее получать скобки (2.9) для системы Уизема путем усреднения скобок (2.17) для исходной системы [54]. В целом, эта процедура является довольно удобной как для случая интегрируемых иерархий, так и в более общей ситуации.

Запись усредненных скобок Пуассона в диагональной форме для интегрируемых иерархий, так же как и запись в этой форме соответствующих систем Уизема, связана с алгебро-геометрическими методами обратной задачи рассеяния [18, 21, 55, 56]. Более детально, как и в случае диагонализации самих систем Уизема, диагональные координаты для усредненных скобок Пуассона для таких иерархий связаны с точками ветвления римановых поверхностей, определяющих соответствующие m-фазные решения исходной системы. Как уже было отмечено выше, диагональная форма таких скобок наиболее тесно связана с процедурой интегрирования соответствующих систем гидродинамического типа. Можно отметить также, что и построение наиболее интересных решений усредненных уравнений также опирается на алгебро-геометрические методы (см., например, [57–68]).

Остановимся здесь также на канонических формах усредненных скобок.

Одной из особенностей канонической формы усредненных скобок Пуассона [44, 53, 69, 70] является то, что все величины $k^\alpha(X)$ являются частью канонических координат усредненной скобки и, таким образом, представляют часть плоских координат для соответствующей метрики $g^{\nu\mu}(\mathbf{U})$, удовлетворяющих соотношениям

$$\{k^\alpha(X), k^\beta(Y)\} = 0. \tag{3.7}$$

Кроме того, можно показать, что скобки Пуассона $k^\alpha(X)$ с плотностями $U^\nu(Y)$ могут быть записаны в виде

$$\{k^\alpha(X), U^\nu(Y)\} = \Big(\omega^{\alpha\nu}(X)\,\delta(X-Y)\Big)_X. \tag{3.8}$$

Как было показано в работе [71], соотношения (3.7), (3.8) позволяют также модифицировать процедуру Дубровина – Новикова, уменьшив требуемое количество коммутирующих интегралов исходной системы до $N-m$ и представляя усредненную скобку в координатах $(k^1,\ldots,k^m,U^1,\ldots,U^{N-m})$ в форме (3.7), (3.8) и

$$\{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = \langle A_1^{\nu\mu}\rangle(U)\,\delta'(X-Y) + \\ + \frac{\partial\langle Q^{\nu\mu}\rangle}{\partial U^\lambda} U^\lambda_X \delta(X-Y), \quad \nu,\mu = 1,\ldots,N-m. \tag{3.9}$$

Представление усредненной скобки в виде (3.7)–(3.9) связано в действительности еще с одним важным (эквивалентным) представлением системы уравнений медленных модуляций, разделяющим уравнения эволюции фаз

$$S^\alpha_T = \omega^\alpha(\mathbf{S}_X, \mathbf{U})$$

($S^\alpha_X \equiv k^\alpha$) и уравнения переноса, которые могут быть записаны в виде баланса части законов сохранения

$$U^\nu_T = \langle Q^\nu\rangle_X, \quad \nu = 1,\ldots,N-m.$$

Представление скобки в виде (3.7)–(3.9) можно также назвать смешанным представлением усредненной скобки, в котором частично используются канонические и частично — лиувиллевы переменные. В одномерном случае, как уже было сказано, скобка может быть полностью приведена к постоянному виду, при этом можно подобрать переменные $\mathbf{J} = (J_1,\ldots,J_m)$, $\mathbf{n} = (n^1,\ldots,n^{N-2m})$, такие что

$$\{k^\alpha(X), J_\beta(Y)\} = \delta^\alpha_\beta\,\delta'(X-Y),$$

$$\{n^q(X), n^p(Y)\} = \epsilon^q\,\delta^{qp}\;\delta'(X-Y)$$

(остальные скобки равны нулю).

Соотношения

$$\{S^\alpha(X), J_\beta(Y)\} = \delta^\alpha_\beta\,\delta(X-Y),$$

$$\{n^q(X), n^p(Y)\} = \epsilon^q\,\delta^{qp}\;\delta'(X-Y),$$

приближаясь к обычной терминологии в теории скобок Пуассона, можно было бы назвать также псевдоканонической формой скобок гидродинамического типа.

Как было отмечено в [71], использование модифицированной процедуры Дубровина – Новикова и представление усредненной скобки в виде (3.7)–(3.9) является особенно удобным в случае нескольких пространственных переменных. В следующем разделе мы более подробно обсудим «многомерные» скобки Пуассона.

4. МНОГОМЕРНЫЕ СКОБКИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Мы перейдем теперь к более общим многомерным скобкам вида (1.1)

$$\{U^{\nu}(\mathbf{x}), U^{\mu}(\mathbf{y})\} = \\ = g^{\nu\mu i}\left(\mathbf{U}(\mathbf{x})\right)\,\delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + b^{\nu\mu i}_{\lambda}\left(\mathbf{U}(\mathbf{x})\right) U^{\lambda}_{x^i}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

наиболее полная теория которых была построена в работах [40, 72, 73].

Мы рассмотрим случай невырожденных скобок (1.1), а именно, потребуем, чтобы все тензоры $g^{\nu\mu i}(\mathbf{U})$ были невырожденными:

$$\det g^{\nu\mu i}(\mathbf{U}) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Как и в одномерном случае, здесь также можно утверждать, что все тензоры $g^{\nu\mu i}(\mathbf{U})$ представляют собой плоские метрики на пространстве параметров $\mathbf{U}$, в то время как величины

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda i} = -g_{\mu\sigma i} b^{\sigma\nu i}_{\lambda}$$

задают соответствующие символы Кристоффеля. В общем случае, для определения корректной скобки Пуассона коэффициенты $g^{\nu\mu i}(\mathbf{U})$ и $b^{\nu\mu i}_{\lambda}(\mathbf{U})$ должны удовлетворять целому ряду нетривиальных соотношений [40, 73], в частности, все выражения

$$\{U^{\nu}(x), U^{\mu}(y)\}^{(i)} = \\ = g^{\nu\mu i}\left(\mathbf{U}(x)\right)\,\delta'(x-y) + b^{\nu\mu i}_{\lambda}\left(\mathbf{U}(x)\right) U^{\lambda}_{x}\,\delta(x-y)$$

определяют в этом случае одномерные скобки Пуассона, согласованные друг с другом.

По аналогии с одномерным случаем можно определить каноническую форму невырожденной скобки Пуассона (1.1) как скобку постоянного вида:

$$\{n^{\nu}(\mathbf{x}), n^{\mu}(\mathbf{y})\} = \eta^{\nu\mu i}\,\delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

где все $\eta^{\nu\mu i} = \mathrm{const}$.

Как нетрудно видеть, все функционалы

$$N^{\nu} = \int n^{\nu}(\mathbf{x})\, d^n x$$

являются в этом случае аннуляторами скобки (1.1).

В отличие от одномерного случая, однако, невырожденности скобки (1.1) здесь оказывается в общем случае недостаточно для возможности ее приведения к каноническому виду с помощью некоторой точечной замены координат, и требуется наложение еще некоторых дополнительных условий общего положения. В частности (см. [73]), невырожденная скобка (1.1) может быть приведена к постоянному виду в некоторых координатах $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{U})$, если хотя бы одна из метрик $g^{\nu\mu i_0}(\mathbf{U})$ образует неособые пары со всеми остальными метриками, т. е. корни любого из уравнений

$$\det\left(g^{\nu\mu i_0}(\mathbf{U}) - \lambda\, g^{\nu\mu i}(\mathbf{U})\right) = 0, \quad i \neq i_0$$

отличны друг от друга.

Приведенное выше условие является условием общего положения, тем не менее, оно часто нарушается в важных примерах. В частности, скобки Пуассона, отвечающие алгебрам Ли векторных полей в $\mathbb{R}^n$ ($N = n$, $n \geq 2$):

$$\{p^i(\mathbf{x}), p^j(\mathbf{y})\} = p^i(\mathbf{x})\,\delta_{x^j}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - p^j(\mathbf{y})\,\delta_{y^i}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

и описывающие n-мерную гидродинамику, не могут быть приведены к постоянному виду. То же самое верно и в отношении ряда других важных примеров скобок гидродинамического типа.

Можно утверждать [40, 72, 73], что в общем случае любая невырожденная скобка (1.1) может быть приведена к линейной (неоднородной) форме

$$\{U^{\nu}(\mathbf{x}), U^{\mu}(\mathbf{y})\} = \\ = \left(\left(b^{\nu\mu i}_{\lambda} + b^{\mu\nu i}_{\lambda}\right) U^{\lambda} + g^{\nu\mu i}_{0}\right)\delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + b^{\nu\mu i}_{\lambda} U^{\lambda}_{x^i}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (4.1)$$

$$b^{\mu\nu i}_{\lambda} = \mathrm{const}, \quad g^{\nu\mu i}_{0} = \mathrm{const}$$

с помощью точечной замены координат.

Можно видеть, что теория невырожденных скобок Пуассона в случае нескольких пространственных переменных связана в самом общем случае с теорией бесконечномерных алгебр Ли. Ряд важных классификационных результатов, относящихся к теории многомерных скобок (4.1) и соответствующим им ли-алгебраических структур, был получен в работе [72]. В целом, однако, полная задача классификации таких скобок пока окончательно не решена.

Надо сказать, что диагональная форма скобки Пуассона в случае многих пространственных переменных уже не играет той важной роли, какую она играет в одномерном случае. Как следует из результатов работы [73], в случае двух пространственных переменных обе метрики, $g^{\nu\mu 1}(\mathbf{U})$ и $g^{\nu\mu 2}(\mathbf{U})$, могут быть приведены к диагональному виду преобразованием координат, если они образуют неособую пару. В случае $n \geq 3$ одновременное приведение всех метрик $g^{\nu\mu i}(\mathbf{U})$ к диагональному виду, вообще говоря, невозможно.

Так же, как и в одномерном случае, для многомерных скобок (1.1) можно определить лиувиллеву форму, имеющую вид

$$\{U^{\nu}(\mathbf{x}), U^{\mu}(\mathbf{y})\} = \\ = \Big(\gamma^{\nu\mu i}(\mathbf{U}) + \gamma^{\mu\nu i}(\mathbf{U})\Big)\, \delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + \Big(\gamma^{\nu\mu i}(\mathbf{U})\Big)_{x^i}\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

и соответствующую ситуации, когда все функционалы

$$I^{\nu} = \int U^{\nu}(\mathbf{x})\, d^n x$$

коммутируют друг с другом.

В заключение, нам бы хотелось рассмотреть еще одно обобщение скобок гидродинамического типа, а именно, скобки, содержащие фазовые переменные

$$\{S^{\alpha}(\mathbf{x}), S^{\beta}(\mathbf{y})\} = 0,$$
$$\{S^{\alpha}(\mathbf{x}), U^{\nu}(\mathbf{y})\} = \omega^{\alpha\nu}(\mathbf{U}, \mathbf{S}_{\mathbf{x}})\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad (4.2)$$

$$\{U^{\nu}(\mathbf{x}), U^{\mu}(\mathbf{y})\} = g^{\nu\mu i}(\mathbf{U}, \mathbf{S}_{\mathbf{x}})\, \delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + b^{\nu\mu i}_{\lambda}(\mathbf{U}, \mathbf{S}_{\mathbf{x}})\, U^{\lambda}_{x^i}\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + f^{\nu\mu ij}_{\alpha}(\mathbf{U}, \mathbf{S}_{\mathbf{x}})\, S^{\alpha}_{x^i x^j}\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Как уже было указано выше, скобки такого типа возникают, например, при усреднении локальных гамильтоновых структур в многомерном случае. В действительности, такие скобки встречаются и во многих других случаях, где переменные $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ могут иметь самый различный смысл (классические или квантовые фазы, фазы параметра порядка и т. п.). В частности, скобки такого вида неоднократно встречаются в работе [17]. К еще более общим скобкам подобного типа можно отнести также скобки, где фазовые переменные не коммутируют между собой, а отвечают некоторой ли-алгебраической структуре (см. [17]). Как было также отмечено выше, скобки описанного вида могут встречаться также и в «чистой» гидродинамике, например, при описании потенциальных течений. Довольно часто в качестве переменных $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ выбираются плотности законов сохранения, а гидродинамическая часть скобки (4.2) имеет «лиувиллеву» форму.

Нас будет интересовать здесь общая структура скобок (4.2), и в частности, возможность приведения таких скобок к некоторым каноническим формам, близким к рассматривавшимся выше. С физической точки зрения, фазовые переменные $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ являются выделенными, поэтому естественно в действительности рассматривать замены координат, сохраняющие неизменными переменные $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ и преобразующие лишь оставшиеся координаты $\mathbf{U}(\mathbf{x})$. Надо сказать при этом, что величины $S^{\alpha}_{\mathbf{x}}$ («сверхтекучие скорости») являются уже переменными гидродинамического типа и могут естественно использоваться при заменах «гидродинамических переменных»

$$U^{\nu} \to \tilde{U}^{\nu}(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{U}).$$

Мы здесь рассмотрим в некотором смысле невырожденный случай, когда матрица частот $\omega^{\alpha\nu}$ имеет полный ранг:

$$\mathrm{rank}\, ||\, \omega^{\alpha\nu}(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{U})\, || = m$$

$(N-m \geq m)$. Как можно показать [74], в этом случае всегда можно перейти к новым гидродинамическим переменным

$$\mathbf{U} \;\to\; \big(\mathbf{Q}(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{U}), \mathbf{N}(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{U})\big),$$

$$Q_{\alpha}(\mathbf{x}) = Q_{\alpha}(\mathbf{S}_{x^1}, \ldots, \mathbf{S}_{x^d}, \mathbf{U}(\mathbf{x})), \quad \alpha = 1, \ldots, m,$$
$$N^{l}(\mathbf{x}) = N^{l}(\mathbf{S}_{x^1}, \ldots, \mathbf{S}_{x^d}, \mathbf{U}(\mathbf{x})), \quad l = 1, \ldots, N-2m,$$

в которых скобка (4.2) примет вид

$$\begin{gathered} \{S^{\alpha}(\mathbf{x}), S^{\beta}(\mathbf{y})\} = 0, \\ \{S^{\alpha}(\mathbf{x}),\, Q_{\beta}(\mathbf{y})\} =, \delta^{\alpha}_{\beta}\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ \big\{S^{\alpha}(\mathbf{x}),\, N^{l}(\mathbf{y})\big\} = 0, \\ \{Q_{\alpha}(\mathbf{x}),\, Q_{\beta}(\mathbf{y})\} = J_{\alpha\beta}[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}](\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \big\{Q_{\alpha}(\mathbf{x}),\, N^{l}(\mathbf{y})\big\} = J^{l}_{\alpha}[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}](\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \big\{N^{l}(\mathbf{x}),\, N^{q}(\mathbf{y})\big\} = J^{lq}[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}](\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{gathered} \qquad (4.3)$$

Коммутаторы $J_{\alpha\beta}[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}](\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $J^{l}_{\alpha}[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}](\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $J^{lq}[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}](\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задаются при этом выражениями гидродинамического типа, аналогичными представленным в (4.2), здесь, однако, они зависят лишь от переменных $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{N}(\mathbf{x})$. Нетрудно показать также, что величины $J^{lq}[\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}](\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определяют при этом скобку Пуассона на пространстве полей $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ при любых фиксированных значениях $\mathbf{S}(\mathbf{x})$.

Как нетрудно видеть, переменные $Q_{\alpha}(\mathbf{x})$ и $N^{l}(\mathbf{x})$ определены с точностью до преобразований

$$Q_{\alpha}(\mathbf{x}) \to Q_{\alpha}(\mathbf{x}) + f_{\alpha}(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}(\mathbf{x})),$$

$$N^{l}(\mathbf{x}) \to N'^{l}(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}, \mathbf{N}(\mathbf{x})),$$

где

$$\det \left|\left|\frac{\partial N'^{l}}{\partial N^{k}}\right|\right| \neq 0.$$

Довольно часто бывает интересна ситуация, когда переменные $N^{l}(\mathbf{x})$ не возникают $(N = 2m)$, и скобка (4.2) приводится к виду

$$\{S^{\alpha}(\mathbf{x}), S^{\beta}(\mathbf{y})\} = 0,$$

$$\{S^{\alpha}(\mathbf{x})\,,\,Q_{\beta}(\mathbf{y})\} = \delta^{\alpha}_{\beta}\;\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad (4.4)$$

$$\{Q_{\alpha}(\mathbf{x})\,,\,Q_{\beta}(\mathbf{y})\} = \Omega^{i}_{\alpha\beta}(\mathbf{S_x})\;\;\delta_{x^i}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + \Gamma^{ij}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{S_x})\;S^{\gamma}_{x^i x^j}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

$(\Gamma^{ij}_{\alpha\beta\gamma} \equiv \Gamma^{ji}_{\alpha\beta\gamma})$.

Тождества Якоби

$$\{\{Q_{\alpha}(\mathbf{x})\,,\,Q_{\beta}(\mathbf{y})\}\;,\,Q_{\gamma}(\mathbf{z})\} + c.p. \equiv 0$$

дают теперь соотношения

$$\frac{\delta J_{\alpha\beta}[\mathbf{S_x}](\mathbf{x},\mathbf{y})}{\delta S^{\gamma}(\mathbf{z})} + \frac{\delta J_{\beta\gamma}[\mathbf{S_x}](\mathbf{y},\mathbf{z})}{\delta S^{\alpha}(\mathbf{x})} + \frac{\delta J_{\gamma\alpha}[\mathbf{S_x}](\mathbf{z},\mathbf{x})}{\delta S^{\beta}(\mathbf{y})} \equiv 0$$

для функционалов $J_{\alpha\beta}[\mathbf{S_x}](\mathbf{x},\mathbf{y})$, означающих замкнутость 2-формы

$$\int J_{\alpha\beta}[\mathbf{S_x}]\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\delta S^{\alpha}(\mathbf{x}) \wedge \delta S^{\beta}(\mathbf{y})\,d^n x\,d^n y$$

на пространстве полей $(S^1(\mathbf{x}),\ldots,S^m(\mathbf{x}))$.

Скобки (4.4) принадлежат к общему классу скобок, названных в [75] «вариационно допустимыми». Вариацинно допустимая форма скобок Пуассона непосредственно связана с возможностью лагранжева описания соответствующих динамических систем и, как было показано в [75], такие скобки приводят в общем случае к нетривиальному лагранжеву представлению гамильтоновых систем, где функционал Лагранжа представляет собой 1-форму, обладающую нетривиальными топологическими свойствами.

В нашем случае надо помнить, что при приведении скобки (4.4) к каноническому виду мы ограничены лишь преобразованиями «гидродинамического типа», представленными выше. Как было показано в работе [74], любая скобка (4.4) может быть локально приведена к каноническому виду

$$\{S^{\alpha}(\mathbf{x}), S^{\beta}(\mathbf{y})\} = 0,$$

$$\{S^{\alpha}(\mathbf{x})\,,\,Q_{\beta}(\mathbf{y})\} = \delta^{\alpha}_{\beta}\;\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$\{Q_{\alpha}(\mathbf{x})\,,\,Q_{\beta}(\mathbf{y})\} = 0$$

с помощью преобразования

$$Q_{\alpha}(\mathbf{x}) \to Q_{\alpha}(\mathbf{x}) + f_{\alpha}\,(\mathbf{S_x})\,.$$

Как следствие, в этом случае соответствующая гамильтонова система может быть записана также в лагранжевой форме с лагранжианом «гидродинамического типа»:

$$\delta\int\Big[Q_{\alpha}(\mathbf{X})\,S^{\alpha}_t \;-\; \langle P_H\rangle\,(\mathbf{S_x},\,\mathbf{Q}(\mathbf{X}))\Big]\,d^n x\,dt \;=\; 0,$$

Что касается общих скобок (4.3), здесь также можно поставить вопрос о дальнейшем приведении их к канонической форме и, в частности, о разделении скобок для переменных $(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}))$ и $\mathbf{N}(\mathbf{x})$. В действительности, такая возможность нередко возникает в конкретных примерах и, в частности, в теории медленных модуляций для многомерных систем. Можно показать, однако, что в самом общем случае приведение скобок (4.3) к такой канонической форме с помощью преобразования «гидродинамического типа» невозможно [74].

В завершение отметим, что скобки (4.2) часто имеют естественное продолжение и на расширенное фазовое пространство, в котором переменные $v^{\alpha}_i = S^{\alpha}_{x^i}$ могут считаться полностью независимыми. Продолжения такого типа до некоторой степени естественно называть «завихрениями» скобок (4.2). Такие продолжения естественно возникают не только, к примеру, в гидродинамике, при переходе от потенциальных течений к завихренным, но и, например, при описании движения сверхтекучих жидкостей, несущих квантовые вихревые структуры внутри своего объема, и др. Важные примеры таких «завихрений» скобок типа (4.2) приведены в работе [17].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен краткий обзор скобок Пуассона гидродинамического типа и их специальных обобщений. Рассмотрены вопросы, связанные с различными формами таких скобок и, в частности, с представлениями, обобщающими канонические формы скобок Пуассона в рассматриваемой ситуации. Рассмотрена связь скобок гидродинамического типа с теорией алгебр Ли в случаях одной и нескольких пространственных переменных. Особенно подробно описана связь рассматриваемых структур с теорией интегрирования систем гидродинамического типа в одномерном случае.

Финансирование. Исследование С. П. Н. выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00157).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).

2. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ, Москва (1947).

3. P. J. Morrison and J. M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980).

4. Б. И. Давыдов, ДАН СССР **69**, 165 (1949).

5. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 169 (1952).

6. В. Л. Покровский, И. М. Халатников, Письма в ЖЭТФ **23**, 653 (1976).

7. В. В. Лебедев, И. М. Халатников, ЖЭТФ **73**, 1537 (1977).

8. I. M. Khalatnikov and V. V. Lebedev, Phys. Lett. A **61**, 319 (1977).

9. В. В. Лебедев, И. М. Халатников, ЖЭТФ **75**, 2312 (1978).

10. Г. Е. Воловик, В. С. Доценко (мл.), Письма в ЖЭТФ **29**, 630 (1979).

11. Г. Е. Воловик, В. С. Доценко (мл.), ЖЭТФ **78**, 132 (1980).

12. E. A. Kuznetsov and A. V. Mikhailov, Phys. Lett. A **77**, 37 (1980).

13. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).

14. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1974).

15. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, в сб. *Итоги науки и техники*, Сер. Современные проблемы математики, Т. 3, ВИНИТИ, Москва (1985).

16. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, УМН **44**, 29 (1989).

17. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovik, Ann. Phys. **125**, 67 (1980).

18. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ДАН СССР **270**, 781 (1983).

19. А. А. Балинский, С. П. Новиков, ДАН СССР **283**, 1036 (1985).

20. С. П. Царев, ДАН СССР **282**, 534 (1985).

21. С. П. Царев, Изв. АН СССР, Сер. матем. **54**, 1048 (1990).

22. О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов, УМН **45**, 191 (1990).

23. Е. В. Ферапонтов, Функциональный анализ и его приложения **25**, 37 (1991).

24. Е. В. Ферапонтов, Функциональный анализ и его приложения **26**, 83 (1992).

25. Е. В. Ферапонтов, ТМФ **91**, 452 (1992).

26. E. V. Ferapontov, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **170**, 33 (1995).

27. М. В. Павлов, Докл. РАН **339**, 21 (1994).

28. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Physica D **156**, 53 (2001).

29. A. Ya. Maltsev, Int. J. Math. Math. Sci. **32**, 587 (2002).

30. Л. В. Богданов, Е. В. Ферапонтов, ТМФ **116**, 113 (1998).

31. V. Zakharov, In the book: Monographs AMS/MAA Series, The Legacy of the Inverse Scattering Transform in Applied Mathematics, Contemporary Mathematics, Vol. 301 (2002), DOI:http://dx.doi.org/10.1090/conm/301.

32. О. И. Мохов, Фундамент. и прикл. матем. **21**, 171 (2016).

33. V. E. Zakharov, Duke. Math. J. **94**, 103 (1998).

34. И. М. Кричевер, Функц. анализ и его прил. **31**, 32 (1997).

35. F. Magri, J. Math. Phys. **19**, 1156 (1978).

36. B. A. Dubrovin, Nucl. Phys. B **379**, 627 (1992).

37. B. A. Dubrovin, arXiv: math.AG/9807034.

38. B. A. Dubrovin and Y. Zhang, arXiv:math.DG/0108160.

39. B. Dubrovin, Si-Qi Liu, and Youjin Zhang, arXiv: math.DG/0410027.

40. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ДАН СССР **279**, 294 (1984).

41. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*: *метод обратной задачи*, под ред. С. П. Новикова, Наука, Москва (1980).

42. О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов, Функц. анализ и его прил. **28**, 60 (1994).

43. B. Enriquez, A. Orlov, and V. Rubtsov, Письма в ЖЭТФ **58**, 677 (1993).

44. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).

45. H. Flaschka, M. G. Forest, and D. W. McLaughlin, Comm. Pure Appl. Math. **33**, 739 (1980).

46. С. П. Новиков, Функциональный анализ и его приложения **8**:3, 54 (1974).

47. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ЖЭТФ **67**, 2131 (1974).

48. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ДАН СССР **219**, 531 (1974).

49. А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, ТМФ **23**, 51 (1975).

50. А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Функц. анализ и его прил. **9**, 69 (1975).

51. Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, УМН **31**, 55 (187) (1976).

52. Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, ДАН СССР **229**, 15 (1976).

53. A. Ya. Maltsev, SIGMA **8**, 103 (2012).

54. A. Ya. Maltsev, Int. J. Math. Math. Sci. **30**, 399 (2002).

55. Б. А. Дубровин, Функц. анализ и его прил. **24**, 25 (1990).

56. В. Л. Алексеев, УМН **50**, 165 (1995).

57. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **65**, 590 (1973).

58. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **93**, 871 (1987).

59. В. В. Авилов, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, ДАН СССР **295**, 345 (1987).

60. И. М. Кричевер, Функц. анализ и его прил. **22**, 37 (1988).

61. Г. В. Потёмин, УМН **43**, 211 (1988).

62. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, Письма в ЖЭТФ **54**, 104 (1991).

63. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, ЖЭТФ **101**, 1797 (1992).

64. Fei Ran Tian, Comm. Pure Appl. Math. **46**, 1093 (1993).

65. Т. Грава, УМН **54**, 169 (1999).

66. Т. Грава, ТМФ **122**, 58 (2000).

67. T. Grava, Math. Phys. Anal. Geom. **4**, 65 (2001).

68. T. Grava and Fei-Ran Tian, Comm. Pure Appl. Math. **55**, 1569 (2002).

69. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УМН **48**, 155 (1993).

70. А. Я. Мальцев, М. В. Павлов, Функц. анализ и его прил. **29**, 7 (1995).

71. A. Ya. Maltsev, J. Math. Phys. **56**, 023510 (2015).

72. О. И. Мохов, Функциональный анализ и его приложения **22**, 92 (1988).

73. О. И. Мохов, Функциональный анализ и его приложения **42**, 39 (2008).

74. A. Ya. Maltsev, J. Math. Phys. **57**, 053501 (2016).

75. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).