ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 4, стр. 755–760

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ ДИКЕ В СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ ДИПОЛЬНОЙ ФАЗЕ В СОСТОЯНИИ «СВЯЗАННОГО СИЯНИЯ»

С. И. Мухин[*], *А. Мукерджи*, *С. С. Сеидов*

Кафедра теоретической физики и квантовых технологий,
Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
119049, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 ноября 2020 г.,
после переработки 6 декабря 2020 г.
Принята к публикации 6 декабря 2020 г.

Найдено аналитическое решение квазиклассических уравнений движения модели Дике в сверхизлучательном состоянии. Зависимости от времени колебаний амплитуд сверхизлучательного фотонного конденсата и когерентной заселенности массива двухуровневых атомов в микроволновой полости выражены через эллиптические функции Якоби и свидетельствуют о существовании адиабатического инварианта в системе с сильной связью. Периодические биения амплитуд фотонного и когерентного атомного состояний сдвинуты во времени, представляя собой эффект «связанного сияния», когда энергия, заключенная в двухуровневых системах, во время «темноты» внезапно переходит в энергию фотонного конденсата, «освещающего» полость на время полупериода колебаний перед тем, как она вновь погрузится в «темноту».

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского

DOI: 10.31857/S0044451021040192

1. ВВЕДЕНИЕ

Предсказанный ранее сверхизлучательный фазовый переход в модели Дике [1] цепочки из $N \gg 1$ двухуровневых систем (ДУС), связанных с одной бозонной модой в резонансной полости [2, 3], был представлен как [4] самосогласованный поворот на конечный угол операторов псевдоспина в представлении Гольштейна–Примакова [5, 6], описывающих когерентные состояния ДУС. Мы рассматриваем гамильтониан модели Дике [1] в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2\right) + g\hat{p}\hat{S}^y - E_J\,\hat{S}^z, \qquad (1)$$

где введены операторы $\hat{S}^\alpha = \sum_i \hat{s}_i^\alpha$ суммарных компонент псевдоспина, описывающих ДУС. Для определенности можно рассмотреть систему из N сверхпроводящих островков, каждый из которых разделен пополам джозефсоновским контактом, в представлении куперовского ящика [7]. Цепочка помещена в резонансную полость с частотой ω — частотой единственной фотонной моды. Вторично квантованные операторы фотонной моды есть

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right), \quad \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right), \qquad (2)$$

где $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Полный квадрат псевдоспина $\hat{S}^2$ сохраняется, так как он коммутирует с (1): $[\hat{S}^2, H] = 0$. Туннелирование куперовских пар представлено членом $-E_J\hat{S}^z$. Член $g\hat{p}\,\hat{S}^y$ описывает дипольную связь между куперовскими парами и фотонным полем с константой связи g. В работе [2] показано, что квантовый фазовый переход переводит систему (1) в дважды вырожденное дипольно-упорядоченное состояние. В данной работе мы приводим аналитическое решение, описывающее динамику джозефсоновских контактов в микроволновой полости и демонстрирующее существование метастабильного состояния «связанного сияния» с когерентными периодическими биениями диполей, которое связано с дважды вырожденной дипольно-упорядоченной фазой, найденной ранее. Первые два члена в (1) соответству-

[*] E-mail: i.m.sergei.m@gmail.com

ют энергии гармонического осциллятора фотонной моды. Расщепление уровней ДУС представлено членом $-E_J\hat{S}^z$, а член $g\hat{p}\hat{S}^y$ описывает дипольную энергию связи фотонов с ДУС. В работе [4] было показано, что самосогласованный поворот представления Гольштейна–Примакова операторов $\hat{S}_{x,y,z}$ позволяет достаточно прозрачно описать квантовый фазовый переход второго рода в модели Дике (1). А именно, когда константа связи g становится больше критического значения g_c, суперспин $S = N/2$ постепенно поворачивается от оси z к оси y на угол $|\theta| \le \pi/2$, где верхний предел соответствует максимуму дипольного момента $\langle\hat{S}_y\rangle \propto S\sin\theta$ ДУС. Одновременно с этим фотонный оператор $\hat{p}$ приобретает внедиагональное среднее значение $\langle\hat{p}\rangle \propto -gS\sin\theta$, говорящее о возникновении макроскопического когерентного («сверхизлучательного») фотонного конденсата, связанного с дипольным моментом ДУС с энергией $\propto g\langle\hat{S}_y\rangle\langle\hat{p}\rangle$. Очевидно, что одновременная смена знаков: $\langle\hat{S}_y\rangle, \langle\hat{p}\rangle \to -\langle\hat{S}_y\rangle, -\langle\hat{p}\rangle$, приводит систему в новое состояние с той же самой энергией спин-фотонной связи, тем самым свидетельствуя о существовании дважды вырожденного основного состояния. Нами найдено аналитическое решение уравнений движения, описывающих «медленное» блуждание системы между двумя вырожденными основными состояниями: хранящаяся в ДУС энергия $\propto \langle S_z\rangle$ периодически закачивается в фотонный конденсат, в то время как амплитуда суммарного дипольного момента ДУС $\propto \langle S_y\rangle$ и амплитуда сверхизлучательного конденсата $\propto \langle p\rangle$ меняют знак на противоположный, как функции времени. Найдены два первых интеграла для медленного движения когерентных амплитуд в квазиклассическом пределе.

Квазиклассические уравнения движения средних значений импульса фотона и декартовых проекций суммарного псевдоспина в основном состоянии могут быть получены согласно [8], начиная с уравнений Гейзенберга, в виде

$$\ddot{\hat{A}} = -\frac{1}{\hbar^2}\left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{A}\right]\right], \tag{3}$$

где $\hat{A} = \hat{p}, \hat{S}_\alpha$ и $\alpha = x, y, z$. Далее, используем гамильтониан модели Дике (1), уравнение (3) и коммутационные отношения между компонентами спина, координатой и импульсом гармонического осциллятора. Получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\hat{S}}_z = -g^2\hat{p}^2\hat{S}_z - gE_J\hat{p}\hat{S}_y, \tag{4}$$

$$\ddot{\hat{S}}_y = -{E_J}^2\hat{S}_y - gE_J\hat{p}\hat{S}_z, \tag{5}$$

$$\ddot{\hat{S}}_x = -{E_J}^2\hat{S}_x - g^2\hat{p}^2\hat{S}_x, \tag{6}$$

$$\ddot{\hat{p}} = -\omega^2\left\{\hat{p} + g\hat{S}_y\right\}. \tag{7}$$

Для перехода от операторов к их средним значениям в основном состоянии необходимо сделать следующее. Сначала введем амплитуду сверхизлучательного фотонного конденсата λ_R [2] как сдвиг бозонных операторов в (2):

$$\hat{a}^\dagger = \hat{c}^\dagger - i\lambda_R, \quad \hat{a} = \hat{c} + i\lambda_R, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \sqrt{2\hbar\omega}\lambda_R + i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\left(\hat{c}^\dagger - \hat{c}\right), \\ \hat{q} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{c}^\dagger + \hat{c}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Как показано в [4], одновременно с появлением конденсата λ_R происходит поворот псевдоспина на угол θ вокруг оси x. Далее мы совершаем поворот полного спина на угол θ вокруг оси x и на угол $\phi - \pi/2$ вокруг оси z, где θ, ϕ зависят от времени:

$$\begin{aligned} \hat{S}^z &= \hat{J}^z\cos\theta - \hat{J}^y\sin\theta, \\ \hat{S}^y &= \hat{J}^z\sin\theta\sin\phi + \hat{J}^y\cos\theta\sin\phi - \hat{J}^x\cos\phi, \\ \hat{S}^x &= \hat{J}^z\sin\theta\cos\phi + \hat{J}^y\cos\theta\cos\phi + \hat{J}^x\sin\phi, \end{aligned} \tag{10}$$

операторы декартовых проекций суммарного спина $\hat{J}^{x,y,z}$ определены через представление Гольштейна–Примакова:

$$\begin{aligned} \hat{J}^z &= S - \hat{b}^\dagger\hat{b}, \\ \hat{J}^y &= i\sqrt{\frac{S}{2}}\left(\hat{b}^\dagger\sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}} - \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}}\,\hat{b}\right) \simeq \\ &\simeq i\sqrt{\frac{S}{2}}\left(\hat{b}^\dagger - \hat{b}\right), \\ \hat{J}^x &= \sqrt{\frac{S}{2}}\left(\hat{b}^\dagger\sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}} + \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}}\,\hat{b}\right) \simeq \\ &\simeq \sqrt{\frac{S}{2}}\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

и $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$.

Поворот объясняется просто: в основном состоянии с малой константой связи g угол поворота $\theta = 0$ и оператор $\hat{S}_z = \hat{J}^z$ в гамильтониане Дике (1) почти диагонален, следовательно, диагональные элементы $\langle\hat{S}^y\rangle = \langle\hat{J}^y\rangle$ стремятся к нулю. Поэтому «дипольный момент», пропорциональный $\langle \hat{S}^y \rangle$, равен нулю и фотоны квазиклассически расцепляются со спинами. С другой стороны, когда угол поворота θ ненулевой, возникает конечный «дипольный момент» спиновой подсистемы, пропорциональный $\langle \hat{S}^y \rangle = \langle \hat{J}^z \rangle \sin\theta$, который связан с когерентным фотонным конденсатом $\langle \hat{p} \rangle = \lambda_R$. Последнее приводит к нестабильности основного состояния системы. Мы заменяем операторы в (4)–(7) их средними по основному состоянию в представлении Гейзенберга: $\hat{A} \to \langle \hat{A} \rangle$, используя соотношения (9)–(11). Далее рассматриваем резонансный случай: $\hbar\omega = E_J$.

В отличие от [2] сдвиг бозонных операторов в (11) не проводился, так как его роль на себя взял поворот на угол θ. Тогда из (4)–(6) очевидно, что система уравнений описывает нелинейную эволюцию полного спина $\mathbf{S}$ в системе отсчета, вращающейся вокруг оси z в фазовом пространстве псевдоспина с частотой E_J. Поскольку мы рассматриваем резонансный случай $\omega = E_J$, угол ϕ в (10) меняется во времени как $\phi = \omega t$, следовательно, полный спин $\mathbf{S}$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z, а фотонная переменная p в (7) осциллирует с частотой ω и при этом линейно связана со спином через последний член в правой части (7). Удобно ввести следующие обозначения для средних значений как функций от времени ($\hbar = 1$):

$$p = \sqrt{2\omega}\lambda_R(t) \equiv -\sqrt{2\omega} g_0(t)\cos(\omega t), \tag{12}$$

$$S_z = S\cos\theta(t), \tag{13}$$

$$S_y = S\sin\theta(t)\sin(\omega t), \tag{14}$$

$$S_x = S\sin\theta(t)\cos(\omega t). \tag{15}$$

Поскольку в сверхизлучательном состоянии [2, 4] фотонный сдвиг в термодинамическом пределе $\lambda_R \propto \propto S = N/2 \gg 1$, можно использовать квазиклассическое приближение для основного состояния: $\langle \hat{p}^2 \rangle \approx \langle \hat{p} \rangle^2$ в (4)–(7).

2. ДИПОЛЬНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В «ЗАМОРОЖЕННЫХ» СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Примечательно, что в статическом пределе, т. е. при $\lambda_R, \theta, \phi \equiv \mathrm{const}$ в уравнениях (12)–(15), три уравнения (4), (5) и (7) становятся алгебраическими и остаются только два из них, так как уравнение (4) обращается в тождество. Это означает, что дважды вырожденное решение говорит о фазовом переходе в спонтанно упорядоченную дипольную фазу ДУС с замороженными электрическим и магнитным полями в резонансной полости. Очевидно, что подобное основное состояние системы возможно, если скрещенные электрическое и магнитное поля подчиняются статическим граничным условиям на границе полости, т. е. поверхностный заряд должен быть статичен и (сверх)ток должен быть постоянен. Мы также подчеркиваем, что, как следует из правых частей уравнений (5) и (7), действительно существуют два решения, отличающиеся одновременной сменой знаков: $\theta \to -\theta$ и $\lambda_R \to -\lambda_R$ (ср. с [2]).

3. «СВЯЗАННОЕ СИЯНИЕ» СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ ДИКЕ В ПРЕДЕЛЕ АДИАБАТИЧЕСКИХ ДУС

В этом разделе получим аналитическое решение уравнений (4)–(7), используя подход с двумя временными масштабами [8] в пределе адиабатической эволюции ДУС. Мы опускаем уравнение (6), так как $\hat{S}_x$ не входит в гамильтониан Дике (1) и в уравнения (4), (5), (7). Также мы разбиваем временную эволюцию на «быструю», пропорциональную $\exp(i\omega t)$, и «медленную», описываемую функциями $g_0(t)$ и $\theta(t)$, которые определены формулами (12)–(15). Тогда, подставляя (12)–(15) в (5) и (7) и усредняя левую и правую части по быстрым осцилляциям ω, получим следующую систему уравнений для изменяющихся адиабатически функций:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{g\sqrt{2\omega}}{2}\, g_0(t), \tag{16}$$

$$\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{gS\sqrt{\omega}}\, \dot{g}_0(t). \tag{17}$$

Процедура усреднения по быстрым осцилляциям, приводящая к (16) и (17), проста. А именно, необходимо подставить (12)–(15) в (5) и умножить обе части уравнения на $\cos(\omega t)$. Затем надо вычислить среднее по «быстрым» осцилляциям за короткий период времени ($\sim \omega^{-1}$), считая переменные, содержащие «медленные» члены, константами (адиабатическая эволюция ДУС). Интегрируя по короткому временному периоду, получим (16). Аналогично, умножая обе части уравнения (7) на $\sin(\omega t)$ и повторяя ту же самую процедуру, получим (17). По той же причине уравнение (4) вновь обращается в тождество, как в «замороженном» случае, рассмотренном выше, после пренебрежения второй производной по времени от «медленной» функции $\cos\theta$ в левой части (4). Для упрощения обозначений далее будем пользоваться единицами $\hbar = 1$. Умножая левую часть (16) на $\sin\theta$ и используя (17), получим первый адиабатический интеграл динамических уравнений, усредненных по быстрым осцилляциям:

$$\cos\theta(t) - \frac{{g^2}_0(t)}{S} = \mathrm{const} \equiv C\,, \tag{18}$$

где C — полная энергия системы, усредненная по быстрым осцилляциям, $C \propto \langle \hat{H} \rangle$. Далее, дифференцируя (17) единожды по времени и выражая $\cos\theta(t)$ через $g_0(t)$ с использованием (18), получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции $g_0(t)$:

$$\frac{2\ddot{g}_0(t)}{gS\sqrt{\omega}} + \frac{g\sqrt{\omega}}{2}\, g_0(t)\left(C + \frac{{g^2}_0(t)}{S}\right) = 0. \tag{19}$$

Решение данного уравнения точно выражается через функции Якоби. Если выбрать $C = 1 - 2k^2$ с $0 \le k \le 1$ [9], то решение уравнения (19) имеет вид

$$\begin{gathered} g_0(t) = \sqrt{2S}k\ \mathrm{cn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right), \\ \lambda_R = \sqrt{2S}k\ \mathrm{cn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\cos(\omega t), \end{gathered} \tag{20}$$

где k — модуль эллиптического интеграла. Используя решение (20), оставшиеся переменные можно выразить алгебраически из (16), (17) как (ср. с [8])

$$\begin{gathered} S_z = S\cos\theta = S\left\{1 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\right\}, \\ S_y = -S\sin\theta\sin(\omega t) = 2kS\times \\ \times\,\mathrm{sn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\mathrm{dn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\sin(\omega t). \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь sn, dn, cn — эллиптические функции Якоби. С другой стороны, при выборе $C = k^2 - 2$, решения имеют вид

$$\begin{gathered} g_0(t) = \sqrt{2S}\,\mathrm{dn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right), \\ \lambda_R = \sqrt{2S}\,\mathrm{dn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\cos(\omega t), \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} S_z = S\cos\theta = \\ = Sk^2\left\{1 - 2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\right\}, \\ S_y = -S\sin\theta\sin(\omega t) = \\ = 2k^2\,\mathrm{sn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\times \\ \times\,\mathrm{cn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\sin(\omega t). \end{gathered} \tag{23}$$

Эффективная частота Ω, характеризующая биения эллиптических функций Якоби в (20)–(23), выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ [9] (расходится при $k = 1$) следующим образом:

$$\begin{gathered} g_0\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) = g_0(t), \quad \Omega \equiv \omega\frac{\pi}{K(k)}\,\frac{g}{2g_c}\,, \\ g_c \equiv \sqrt{\frac{E_J}{S}}. \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь g_c — критическая константа связи, при которой сверхизлучательное состояние стабильно [2]. Следовательно, в пределе $k \to 1$ предположение о «медленной» эволюции $\theta(t)$, т. е. $\Omega \ll \omega$, которое мы приняли в начале вычислений, выполняется, если

$$\begin{gathered} \Omega \equiv \omega\frac{\pi}{K(k)}\,\frac{g}{2g_c} \ll \omega\,, \ \ \text{т. е.}\ \ K(k) \gg \frac{\pi}{2}\,\frac{g}{g_c}, \\ \text{следовательно,}\ \ 1 - 2\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\,\frac{g}{g_c}\right\} \le k \le 1. \end{gathered} \tag{25}$$

Таким образом, физическое явление фазы «связанного сияния» описывается решениями (20)–(23). Выражения для электрического поля и суммарного дипольного момента, создаваемых в камере, которые колеблются между двумя вырожденными основными состояниями модели Дике, записываются как

$$\hat{\mathbf{E}} = i\sqrt{\frac{1}{V}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\boldsymbol{\epsilon}, \tag{26}$$

$$\hat{\mathbf{d}} = -2e\,l\boldsymbol{\epsilon}\hat{S}_y, \tag{27}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}, V, l$ — вектор поляризации, объем полости и эффективная толщина джозефсоновского контакта соответственно, $2e$ — элементарный заряд куперовской пары. Для двух возможных выборов адиабатического инварианта C, приведенных выше, представлены два следующих набора решений для электрического поля $\mathbf{E}$ и суммарного дипольного момента ДУС $\mathbf{d}$.

1. Случай 1. $C = 1 - 2k^2$:

$$\begin{gathered} \mathbf{E}(t) = \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{V}}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\sqrt{2S}k\,\mathrm{cn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\times \\ \times\cos(\omega\,t), \end{gathered} \tag{28}$$

$$\mathbf{d}(t) = 2elS\boldsymbol{\varepsilon} \cdot 2k \,\mathrm{sn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right) \times \times \mathrm{dn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\sin(\omega\, t), \quad (29)$$

$$E_J S_z(t) = E_J S\left[1 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\right]. \quad (30)$$

2. Случай 2. $C = k^2 - 2$:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{V}}\,\varepsilon\,\sqrt{2S}\,\mathrm{dn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right) \times \times \cos(\omega\, t), \quad (31)$$

$$\mathbf{d}(t) = 2elS\boldsymbol{\varepsilon} \cdot 2k^2 \,\mathrm{sn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right) \times \times \mathrm{cn}\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\sin(\omega\, t), \quad (32)$$

$$E_J S_z(t) = E_J S k^2\left[1 - 2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\,t\,,k\right)\right]. \quad (33)$$

Следует отметить интересный факт. В обоих случаях выражение для дипольной энергии ДУС, т. е. $-\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}$, одинаково. Различие в фотонной части $\hat{p}^2/2$ и зеемановской части $-E_J S_z$. Однако мы рассматривали «медленную эволюцию», что означает $k \to 1$. В данном пределе выражения для всех энергетических вкладов совпадают.

Используя уравнения, записанные выше для двух случаев, построим графики зависимости электрического поля фотонного конденсата от времени $E(t)$, а также распределение энергии системы. Энергия распределена между энергией связи двухуровневых систем электромагнитным полем в полости $-\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}$ и «зеемановской» энергией $-E_J\hat{S}_z$, т. е. джозефсоновской энергией туннелирования куперовских пар в гамильтониане (1). Для $C = 1-2k^2$ на рис. 1 показаны зависящие от времени осцилляции когерентного электрического поля фотонного конденсата (сплошная линия) вместе с «медленной» огибающей кривой (штриховая линия), которая обозначает периодическое изменение фазы быстрых колебаний на π, т. е. двойное вырождение основного

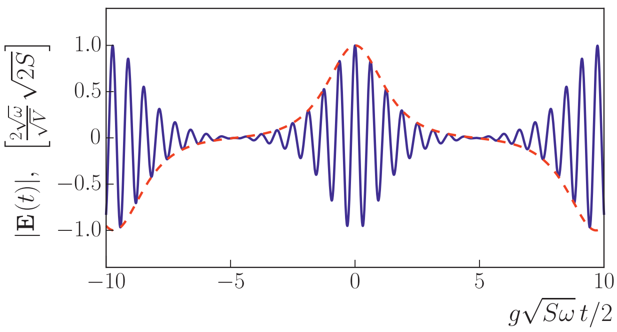

Рис. 1. Зависимость от времени осцилляций когерентного электрического поля фотонного конденсата (сплошная линия) с «медленной» огибающей (штриховая линия), которая свидетельствует о периодическом изменении фазы осцилляций на π

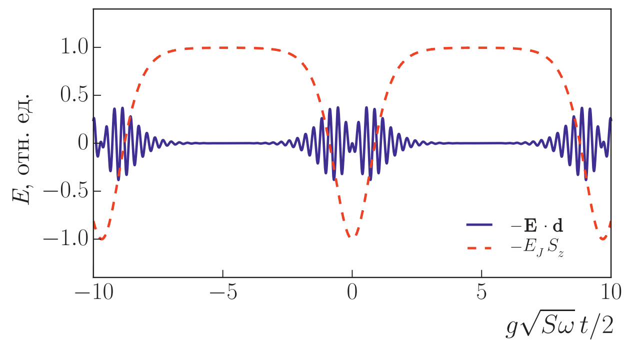

Рис. 2. Зависимости от времени дипольной энергии в поле фотонного конденсата, пропорциональной $-\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}$ (сплошная линия), и «зеемановской» энергии, пропорциональной $-E_J S_z$ (штриховая линия)

состояния снимается динамическим образом. График на рис. 2 ясно демонстрирует, что энергия основного состояния проявляет периодическое внезапное превращение «энергии нулевых колебаний» куперовских пар (штриховая линия) в энергию «сияния» фотонного конденсата, связанного с диполями ДУС (сплошная линия), правда, модель не включает диссипацию.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена модель Дике с N псевдоспинами 1/2, взаимодействующими с единственной модой фотонного поля в резонаторе в квазиклассическом сверхизлучательном режиме. С использованием недавно предложенного теоретического метода [4] вращающегося представления Гольштейна – Примакова декартовых компонент полного спина была рассмотрена квазиклассическая динамика системы операторных уравнений Гейзенберга. С помощью подхода двух временных масштабов («короткий» и «длинный») впервые получены аналитические выражения для электрического поля и дипольного момента (среднего значения компоненты псевдоспина $\langle S_y \rangle$) в резонансной полости. Решения выражаются через эллиптические функции Якоби, описывая внутреннее сверхизлучательное состояние «связанного сияния». Множество других задач, связанных с данной, таких как бифуркации и хаос в асимптотическом пределе, область интегрируемости и т. д., представляет интерес для дальнейшего исследования.

Благодарности. С. И. М. благодарит Карло Бейнаккера, Константина Ефетова, Бернарда ван Хека и Николая Гнездилова за полезные дискуссии во время работы над статьей, а также коллег из Института теоретической физики им. Лоренца за гостеприимство во время его пребывания в Лейдене.

Финансирование. Работа проведена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности по гранту НИТУ «МИСиС» К4-2018-061, выполненной по государственному постановлению от 16 марта 2013, № 211.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. C. Emary and T. Brandes, Phys. Rev. E **67**, 066203 (2003).
3. K. Hepp and E. H. Lieb, Ann. Phys. **76**, 360 (1973).
4. S. I. Mukhin and N. V. Gnezdilov, Phys. Rev. A **97**, 053809 (2018).
5. T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
6. В. П. Карасев, ТМФ **95**(1), 3 (1993).
7. A. Shnirman, G. Schön, and Z. Hermon, Phys. Rev. Lett. **79**, 2371 (1997).
8. S. I. Mukhin and N. V. Gnezdilov, arXiv:1711.00348.
9. E. T. Wittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).