ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 4, стр. 794–805

СИММЕТРИЙНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ О РАСШИРЕНИИ ГАЗОВ В ВАКУУМ

Е. А. Кузнецов [a,b,c*], *М. Ю. Каган* [d,e]

[a] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

[b] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

[c] *Сколковский Институт науки и технологий 121205, Сколково, Московская обл., Россия*

[d] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» 109028, Москва, Россия*

[e] *Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук 119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 января 2021 г.,
после переработки 7 января 2021 г.
Принята к публикации 7 января 2021 г.

Представлен краткий обзор результатов о разлете квантовых и классических газов в вакуум на основе использования симметрий. Для квантовых газов в приближении Гросса – Питаевского дополнительные симметрии возникают для газов с химическим потенциалом μ, зависящим от плотности n степенным образом с показателем $\nu = 2/D$, где D — размерность пространства. Для газовых конденсатов бозе-атомов при температурах $T \to 0$ эта симметрия возникает для двумерных систем. При $D = 3$ и, соответственно, $\nu = 2/3$ такая ситуация реализуется для взаимодействующего ферми-газа при низких температурах в так называемом унитарном пределе [1]. Эта же симметрия для классических газов в трехмерной геометрии возникает для газов с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$. Оба эти факта были обнаружены в 1970 году независимо Талановым [2] для двумерного нелинейного Шредингера (совпадающего с уравнением Гросса – Питаевского), описывающего стационарную самофокусировку света в средах с керровской нелинейностью, а для классических газов — Анисмовым и Лысиковым [3]. В квазиклассическом пределе уравнения Гросса – Питаевского совпадают с уравнениями гидродинамики идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1+2/D$. Автомодельные решения в этом приближении описывают на фоне расширяющегося газа угловые деформации газового облака в рамках уравнений типа Ермакова. Такого рода изменения формы расширяющегося облака наблюдаются в многочисленных экспериментах как при разлете газа после воздействия мощного лазерного излучения, например, на металл, так и при разлете квантовых газов в вакуум.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского

DOI: 10.31857/S0044451021040222

1. ВВЕДЕНИЕ: ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Симметрии в физике всегда играли ключевую роль при получении точных соотношений и результатов, на них основанных. Вряд ли имеет смысл перечислять много различных физических примеров, где используются симметрии. Нам кажется достаточным сослаться на курс Ландау – Лифшица [4], где их великое множество. В данном кратком обзоре мы рассмотрим, как симметрии реализуются в задаче разлета в вакуум квантовых и классических газов в рамках соответственно уравнений Гросса – Питаевского (ГП) и уравнений газовой динамики (уравнения непрерывности и уравнения Эйле-

* E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

ра для одноатомных газов с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$). Если говорить о квантовых газах, то мы будем рассматривать такие, для которых химический потенциал μ зависит от плотности n степенным образом с показателем $\nu = 2/D$, где D — размерность пространства. Именно только для таких значений показателя ν возникает дополнительная симметрия. Отметим, что в приближении ГП при температуре $T \to 0$ для конденсата слабонеидеального бозе-газа главным взаимодействием является s-рассеяние. Если длина рассеяния a_s положительна, то между атомами имеется отталкивание и состояние такого газа в магнитооптических ловушках оказывается устойчивым. При этом химический потенциал $\mu = gn$, где $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$. Таким образом, только для двумерного бозе-газа появляется симметрия, о которой пойдет речь ниже. В случае отрицательной длины рассеяния между бозе-атомами возникает притяжение. В нелинейной оптике такого рода притяжение приводит к самофокусировке света для сред с керровской нелинейностью. Отталкивание, в свою очередь, приводит к дефокусировке светового пучка, которая приводит к тем же самым эффектам, что и дифракция в поперечном направлении к пучку. В случае $a_s < 0$ бозе-конденсаты оказываются неустойчивыми, что приводит к формированию сжимающихся областей газа — коллапсу (см. обзор [5] и ссылки там), наблюдаемому в эксперименте [6, 7]. Чтобы получить неустойчивое значение длины рассеяния в экспериментах, используют резонанс Фешбаха [8, 9], позволяющий изменять a_s в больших пределах: от очень больших положительных значений до сильно отрицательных. Если для бозе-атомов в случае отрицательных a_s возникает коллапс, то для ферми-газов s-притяжение обеспечивает образование куперовских пар, которые при $T \to 0$ образуют сверхтекучий бозе-конденсат. Варьируя длину рассеяния с помощью резонанса Фешбаха, можно создать бозе-конденсат в так называемом унитарном пределе [1], который реализуется при условии $(|a_s|k_F)^{-1} \to 0$, где $p_F = \hbar k_F$ — импульс Ферми. В этом режиме положительный химический потенциал $\mu(n) = 2(1+\beta)\varepsilon_F$, где в соответствии с работами [10–13] $\beta = -0.63$ есть универсальная константа, а

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(6\pi^2 n\right)^{2/3}$$

— локальная энергия Ферми. Величина m представляет собой удвоенную массу ферми-атома. В унитарном пределе, таким образом, химический потенциал имеет степенную зависимость от плотности с показателем $\nu = 2/3$.

Наиболее простая симметрия в случае степенной зависимости химического потенциала от плотности — это симметрия относительно растяжений пространственных координат и времени вида

$$\mathbf{r} \to \alpha\mathbf{r}, \quad t \to \alpha^2 t, \tag{1}$$

где α — скейлинговый параметр. Этот факт легко проверить исходя из уравнения ГП [14] для волновой функции бозе-конденсата ψ:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \mu(n)\psi, \tag{2}$$

где $n = |\psi|^2$. Сохранение числа частиц $N = \int|\psi|^2 d\mathbf{r}$ и степенная зависимость $\mu \propto n^{2/D}$ обеспечивают одинаковые зависимости от скейлингового параметра α кинетического члена и химического потенциала (определяющего нелинейность в (2)): они пропорциональны α^{-2}.

В нелинейной оптике и физике плазмы уравнение ГП (2) имеет название нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Стандартный вид НУШ возникает после приведения к безразмерному виду уравнения (2):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi - (\nu+1)|\psi|^{2\nu}\psi = 0, \tag{3}$$

которое представимо в гамильтоновом виде [5]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi^*}$$

с гамильтонианом

$$H = \int\left[\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + |\psi|^{2(\nu+1)}\right]d\mathbf{r}. \tag{4}$$

Следует отметить, что скейлинговая симметрия (1) есть также в уравнении Шредингера для движения квантовомеханической частицы в потенциале $U = \beta r^{-2}$ независимо от знака β и при любой размерности D. Эта же симметрия присутствует и для гидродинамики идеального газа с показателями адиабаты $\gamma = 5/3$ для потенциальных трехмерных течений [3] и $\gamma = 2$ в случае двумерных течений. Последнее, в частности, связано с тем, что уравнение ГП (2) в квазиклассическом пределе (приближение Томаса–Ферми) совпадает с уравнениями гидродинамики для потенциальных течений газа [15, 16], и поэтому данная симметрия сохраняется в случае газовой динамики с $\gamma = 1 + 2/D$. На это обстоятельство внимание авторов [3] обратил Дзялошинский [17].

Однако скейлиговое преобразование не исчерпывает всех симметрий уравнений (2) и (3). Более общей является симметрия относительно преобразований Таланова [2] — преобразований конформного типа, которые включают в себя как скейлинговые преобразования амплитуды, так и изменения фазы волновой функции ψ. Это преобразование было найдено для двумерного НУШ, описывающего стационарную самофокусировку света в среде с керровской нелинейностью. Роль времени в уравнении (3) играет координата z вдоль направления распространения пучка света.

При преобразованиях Таланова общего вида (для всех $\nu = 2/D$) уравнение (3) остается инвариантным при замене волновой функции ψ, координат $\mathbf{r}$ и времени t на новую волновую функцию $\tilde{\psi}$ и новые координаты $\mathbf{r}'$ и время t' [18]:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\tau}{\tau + t} \exp\left[\frac{ir^2}{4(\tau + t)}\right] \tilde{\psi}(\mathbf{r}', t'), \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}\tau}{\tau + t}, \quad t' = \frac{t\tau}{\tau + t}. \tag{5}$$

В линейной оптике эти соотношения известны как линзовые преобразования.

Важно отметить, что суперпозиция преобразований с $\lambda_1 = \tau_1^{-1}$ и $\lambda_2 = \tau_2^{-1}$ представляет преобразование (5) с $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, преобразования (5) образуют абелеву группу [18].

Прямым следствием этой симметрии является теорема вириала, полученная Власовым, Петрищевым, Талановым [19] для двумерного НУШ с кубической нелинейностью:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 4H, \tag{6}$$

Впервые эта теорема была установлена в работе [19] для фокусирующей нелинейности. Легко видеть, что уравнение (6) справедливо и в случая отталкивания (дефокусирующей нелинейности) [15, 16]. Важно, что теорема вириала (6) верна при любом значении $\nu = 2/D$ [18, 20]. Отметим, что, с точки зрения классификации, НУШ с $\nu = 2/D$ относится к так называемым критическим моделям [5, 18, 20].

Простое интегрирование уравнения (6) дает, что средний квадрат размера облака $R^2 = \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r}/N$ меняется во времени квадратично:

$$NR^2 = 2Ht^2 + C_1 t + C_2. \tag{7}$$

В случае отталкивания (дефокусирующей нелинейности) гамильтониан H положителен. Поэтому при больших временах, $t \to \infty$, средний размер R растет со временем линейно. Соотношение (7) содержат две константы, C_1 и C_2, которые являются новыми по сравнению с H и N интегралами движения. Однако они отличаются от гамильтониана и числа частиц наличием явной зависимости от времени t:

$$C_1 = \frac{d}{dt} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} - 4Ht, \quad C_2 = \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} - 2Ht^2 - C_1 t. \tag{8}$$

Такого рода интегралы относятся к неавтономным, что, как будет видно далее, не позволяет установить полную интегрируемость при автомодельной редукции квазиклассических уравнений. Примером таких неавтономных интегралов движения служит закон сохранения центра масс, явно содержащий время t.

В случае газовой динамики впервые, по-видимому, эта симметрия была найдена Овсянниковым [21], а эффективно была использована Анисимовым и Лысиковым [3] для построения точного осесимметричного автомодельного решения, описывающего нелинейные угловые деформации газового облака на фоне его расширения в вакуум. Впоследствии было выяснено, что такого рода деформации наблюдаются в различных физических задачах, например, при воздействии мощного лазерного излучения на твердое вещество, в результате чего на фоне расширяющегося газового облака его первоначальная форма в виде диска преобразуется в сигарообразную форму (см. монографию [22] и содержащиеся там ссылки). Для квантовых газов при их расширении в вакуум такие трансформации являются типичными как для бозе-газов, так и для ферми-газов (см. соответственно работы [23] и [24, 25] и ссылки в них). Следует отметить, что первые масштабно-инвариантные, зависящие от времени решения для бозе-конденсатов в гидродинамическом режиме для анизотропной ловушки были найдены Каганом, Сурковым и Шляпниковым [26]; в частности, ими был определен спектр дыхательных мод осциллирующего типа. Позднее автомодельные режимы наблюдались в экспериментах группы Томаса [24, 25] при анизотропном расширении из оптической ловушки в вакуум сильновзаимодействующего вырожденного ферми-газа атомов ^{6}Li.

Хотелось бы отметить, что в шестидесятых годах прошлого века эта задача — задача о разлете газа в вакуум — была весьма популярна. Первые классические результаты в этом направлении были получены Овсянниковым (1956 г.) [21] и Дайсоном (1968 г.) [27]. Эти работы имели множество различных приложений не только в гидродинамике, но также и в астрофизике (см., например, оригинальную статью Зельдовича [28]).

В данном небольшом обзоре мы в основном ограничимся рассмотрением квазиклассического расширения квантовых газов в вакуум, что совпадает с разлетом идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1 + 2/D$. С помощью автомодельного решения будет показано, каким образом эволюционирует форма разлетающегося облака для квантовых газов в квазиклассическом пределе и для разлета идеального газа. Динамика автомодельного разлета в этом случае описывается в рамках системы обыкновенных дифференциальных уравнений ермаковского типа. Следует отметить, что впервые рассматриваемая симметрия была использована Ермаковым в 1880 г. [29] при построении решений для ряда механических систем, включая движение классической частицы в потенциале, представляющем сумму осцилляторного потенциала и потенциала $V(r) = \beta/r^2$. Следует отметить, что эта же симметрия помогает в нахождении спектра в квантовом случае для систем N частиц, двигающихся в плоскости и взаимодействующих между собой с потенциалом $V(r_{ij}) = \beta/r_{ij}^2$ (r_{ij} — расстояние между частицами) в присутствии внешнего осцилляторного потенциала [30, 31]. Отметим также, что в семидесятые годы прошлого века результаты Ермакова были переоткрыты Рейем и Рейдом [32]. Сейчас все такого рода уравнения принято называть системами Ермакова – Рея – Рейда (см., например, работу [33] и ссылки в ней). В Заключении этой статьи мы обсудим, в чем состоит различие между разлетом квантового и классического газов, а также экспериментальные данные по разлету квантовых газов в вакуум.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КВАЗИКЛАССИКА

Рассмотрим уравнения ГП для волновой функции ψ бозе-конденсата [14]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \mu(n)\psi. \tag{9}$$

Здесь m — масса бозона. В случае бозе-атомов m — масса атома, для ферми-атомов m — масса куперовской пары, т. е. равна удвоенной массе атома. Химический потенциал μ для бозе-атомов равен

$$\mu = gn, \tag{10}$$

где $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ — константа взаимодействия, пропорциональная длине s-рассеяния a_s. Для положительных значений длины рассеяния между бозонами имеет место отталкивание, а при $a_s < 0$ — притяжение. В последнем случае конденсат неустойчив — развитие этой неустойчивости ведет к коллапсу (см., например, обзор [5]).

Для ферми-атомов отрицательное значение a_s при уменьшении температуры, $T \to 0$, способствует сначала формированию куперовского спаривания атомов, впоследствии образующих бозе-конденсат. Как уже отмечалось во Введении, предел $(|a_s|k_F)^{-1} \to 0$, где $p_F = \hbar k_F$ — импульс Ферми, соответствует так называемому унитарному режиму, для которого

$$\mu(n) = 2(1+\beta)\varepsilon_F, \tag{11}$$

где $\beta = -0.63$, а

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(6\pi^2 n\right)^{2/3}$$

— локальная энергия Ферми. В этом случае уравнение движения для волновой функции конденсата ψ ($T \to 0$) представляет собой обобщенное уравнение ГП (2) с $\mu(n)$ (11).

После простого приведения к безразмерному виду уравнения ГП при $\nu = 2/D$ получаем стандартное НУШ (3) с гамильтонианом (4), в котором первый член совпадает с полной кинетической энергией, а второе слагаемое ответственно за отталкивание между бозе-частицами.

Вводя стандартным образом амплитуду и фазу, $\psi = A\exp\left(i\varphi(r,t)\right)$ ($n = A^2$), НУШ (3) переписывается в виде двух уравнений — уравнения непрерывности для n и уравнения эйконала для фазы φ:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\nabla\cdot n\nabla\varphi) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \mu(n) + T_{QP} = 0, \tag{13}$$

где $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ представляет собой скорость (предполагается отсутствие вихрей, $\nabla\times\mathbf{v} = 0$). Во втором уравнении слагаемое

$$T_{QP} = -\frac{\Delta\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \tag{14}$$

ответственно за квантовое давление.

Уравнения для плотности n и фазы φ сохраняют гамильтонову форму:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\varphi}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta n}, \tag{15}$$

где гамильтониан совпадает с (4). В переменных n и φ гамильтониан H имеет вид

$$H=\int\left[\frac{n\left(\nabla\varphi\right)^2}{2}+\frac{\left(\nabla\sqrt{n}\right)^2}{2}+n^{\nu+1}\right]d\mathbf{r}. \qquad (16)$$

Как уже отмечалось во Введении, НУШ (3) при $\nu = 2/D$ обладает дополнительной симметрией относительно преобразований Таланова [2]. Преобразования Таланова содержат как скейлинговые преобразования вида $t\to\alpha^2 t$ и $\mathbf{r}\to\alpha\mathbf{r}$ благодаря сохранению полного числа частиц $N=\int|\psi|^2 d\mathbf{r}$, так и преобразования фазы. Обе эти симметрии — нетеровского типа, они приводят к появлению двух дополнительных интегралов движения, C_1 и C_2 (7), следующих из интегрирования соотношения вириала (6).

Квазиклассическое приближение (нестационарное приближение Томаса–Ферми) для уравнения ГП соответствует пренебрежению квантовым давлением в уравнении (13):

$$\mu(n)\gg|T_{QP}|. \qquad (17)$$

В результате уравнения движения превращаются в уравнения гидродинамики для потенциального течения идеального газа с показателем адиабаты $\gamma=1+2/D$:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+(\nabla\cdot n\nabla\varphi)=0, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}+\mu(n)=0. \qquad (19)$$

Следует подчеркнуть, что все симметрии в этих уравнениях сохраняются. Для этой системы остается справедливой также и теорема вириала; в этом случае в гамильтониане (16) необходимо пренебречь вторым слагаемым, ответственным за квантовое давление.

В основном далее мы будем пренебрегать квантовым давлением. Пренебрежение квантовым давлением предполагает более быстрые пространственные и временные изменения фазы (большие фазовые градиенты и производные по времени) по сравнению с пространственно-временными вариациями модуля ψ-функции в уравнении ГП. Подчеркнем, что все указанные симметрии не зависят от характера взаимодействия — отталкивания или притяжения. Это же относится и к теореме вириала (6). Для отталкивания из теоремы вириала следует, что асимптотически при больших t средний размер облака квантового газа, расширяющегося в вакуум, вне зависимости от того, учитывается или не учитывается квантовое давление, растет линейно со временем, т. е. имеет место выход на баллистический режим [34, 35].

Рассмотрим, каким образом происходит разлет квантовых газов в вакуум в квазиклассическом приближении. В этом случае уравнения движения, как отмечалось, совпадают с уравнениями гидродинамики для идеального газа с $\gamma=1+2/D$. В трехмерном случае, таким образом, речь идет о разлете в вакуум одноатомного газа (напомним, что для идеального газа $\gamma=(i+2)/i$, где i — число степеней свободы).

В 1970 году Анисимов и Лысиков [3] открыли очень интересное явление, связанное с нелинейными деформациями формы газового облака, расширяющегося в вакуум. Такое поведение непосредственно следует из найденного ими решения для газа с $\gamma = 5/3$ (см. также работы [22,36,37]). В данном разделе мы воспользуется теоремой вириала и построим анизотропное квазиклассическое решение, которое совпадает с решением Анисимова–Лысикова при $D=3$.

Будем искать решение уравнений (12) и (13) в автомодельном виде:

$$n=\frac{1}{V(\mathbf{a})}f(\xi), \qquad (20)$$

где скейлинговые параметры $\mathbf{a}$ являются функциями времени t, $\xi_l=x_l/a_l$ — автомодельные переменные, а $V(\mathbf{a})=\prod_{l=1}^{D}a_l$ — объем в пространстве скейлинговых параметров. Отметим, что анзац (20) сохраняет полное число частиц.

Подстановка (20) в уравнение непрерывности (12) допускает интегрирование, в результате чего фаза φ находится с точностью до произвольной функции $\varphi_0(t)$:

$$\varphi=\varphi_0(t)+\sum_l\frac{\dot{a}_l a_l}{2}\xi_l^2. \qquad (21)$$

Функция $\varphi_0(t)$ определяется из уравнения эйконала. Подстановка (21) в (13) дает D уравнений движения для параметров a_l:

$$\ddot{a}_l a_l=\frac{\lambda}{V(\mathbf{a})^{2/D}}, \qquad (22)$$

где λ — произвольная положительная константа, определяемая из начальных условий. Для $f(\xi)$ в результате имеем

$$f\left(\xi\right)=\left[1-\frac{D\lambda}{2(2+D)}\xi^2\right]^{D/2}. \qquad (23)$$

Таким образом, плотность в переменных ξ зависит только от модуля $|\xi|$. При

$$|\xi|>|\xi|_{max}=\sqrt{\frac{2(2+D)}{D\lambda}}$$

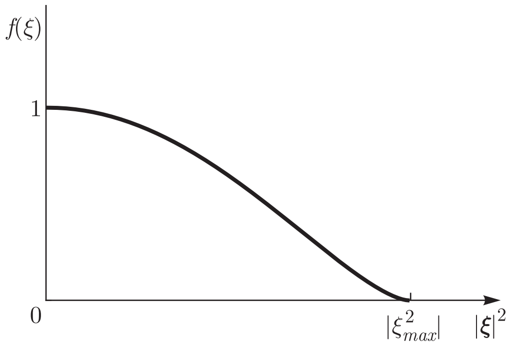

Рис. 1. Поведение $f(\xi)$ для ферми-газа в унитарном пределе (произвольные единицы)

плотность n следует положить равной нулю (см. рис. 1 для $D = 3$). В соответствии с уравнениями (22) динамика параметров $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, D)$ представляет собой уравнения Ньютона для движения частицы в D-мерном пространстве,

$$\ddot{a}_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i}, \tag{24}$$

в потенциале

$$U(\mathbf{a}) = \frac{D\lambda}{2V(\mathbf{a})^{2/D}}. \tag{25}$$

Отметим, что эти уравнения относятся к так называемым системам ермаковского типа [29] (см. также работу [33] и ссылки там).

Очевидно, что уравнения (24) должны иметь ту же симметрию, что и исходное уравнение ГП (2). Во-первых, уравнения (24) сохраняют энергию

$$E = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{D} \dot{a_l}^2 + U(\mathbf{a}). \tag{26}$$

Во-вторых, для уравнений (24) прямым вычислением легко устанавливается вириальное соотношение (6), записанное в терминах a_i. Для $\sum a_i^2$ имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i a_i^2 = 2\sum_i \left[\left(\frac{da_i}{dt}\right)^2 + a_i\frac{d^2a_i}{dt^2}\right].$$

Подстановка (24) в это соотношение дает

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i a_i^2 = 2\sum_i \left(\frac{da_i}{dt}\right)^2 + \frac{2D\lambda}{V(\mathbf{a})^{2/D}} = 4E,$$

что совпадает с (6). Дважды интегрируя, получаем два интеграла, C_1 и C_2:

$$\sum_i a_i^2 = 2Et^2 + C_1 t + C_2. \tag{27}$$

Казалось бы, наличие трех интегралов для системы (24) — E, C_1 и C_2 — гарантирует ее интегрируемость для всех физических размерностей, включая $D = 3$. Однако это не так в силу того, что интегралы C_1 и C_2 как функционалы от a_i явно зависят от времени:

$$C_1 = \frac{d}{dt}\sum_i a_i^2 - 4Et, \tag{28}$$

$$C_2 = \sum_i a_i^2 - 2Et^2 - C_1 t, \tag{29}$$

и по этой причине являются неавтономными, хотя и находятся в инволюции с другими интегралами движения, ср. с (8).

2.1. Разлет двумерного газа

Вначале рассмотрим более подробно разлет двумерного газа (см. работу [16]). В цилиндрической системе координат с $a^2 = a_1^2 + a_2^2$ и полярным углом ϕ интеграл энергии записывается в виде

$$E = \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{a^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{2\lambda}{a^2\sin 2\phi}.$$

Домножая далее E на $a^2 = 2Et^2 + C_1 t + C_2$, легко получить, что комбинация

$$\widetilde{E} = Ea^2 - \frac{1}{2}a^2\dot{a}^2 = EC_2 - \frac{1}{8}\,C_1^2$$

является константой (интеграл Ермакова). В результате мы приходим к закону сохранения новой «энергии»

$$\widetilde{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + U_{eff}(\phi) \tag{30}$$

с новым временем τ:

$$d\tau = \frac{dt}{r^2}, \quad \tau = \int_0^t \frac{dt'}{2E(t')^2 + C_1 t' + C_2}, \tag{31}$$

где

$$U_{eff}(\phi) = \frac{2\lambda}{\sin 2\phi} \tag{32}$$

играет роль потенциальной энергии. Величина U_{eff} всегда положительна и стремится к бесконечности при $\phi \to 0$ и $\phi \to \pi/2$. Минимальное значение $U_{eff} = 2\lambda$ при $\phi = \pi/4$ соответствует изотропному случаю. В изотропном случае меняется только величина a^2, определяемая из соотношения вириала:

$$a^2 = 2Et^2 + C_1 t + C_2.$$

Новое время τ (31) может быть легко выражено через t:

$$\sqrt{2\widetilde{E}}\,\tau = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2E}(t+t_0)}{\chi} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2E}\,t_0}{\chi},$$

где $\chi^2 = \widetilde{E}/E$ и $t_0 = C_1/4E$, так что $\tau = 0$ при $t = 0$. Если начальная скорость газа равна нулю (что типично для эксперимента), то константа $C_1 = 0$ и

$$\sqrt{2\widetilde{E}}\,\tau = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\widetilde{E}}\,t}{C_2}.$$

В этом случае асимптотически при $t \to \infty$

$$\tau \to \tau_\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2\widetilde{E}}}. \qquad (33)$$

Траектория $\phi(\tau)$ находится из интегрирования выражения (30):

$$\tau = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\left[\widetilde{E} - U_{eff}(\phi)\right]}}.$$

Отсюда τ-период в потенциале $U_{eff}(\phi)$ (32) выражается через интеграл

$$T = 2\int\limits_{\phi^{(-)}}^{\phi^{(+)}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\left[\widetilde{E} - U_{eff}(\phi)\right]}},$$

где $\phi^{(\pm)}$ — корни уравнения $\widetilde{E} = U_{eff}(\phi)$ (точки остановки). При больших значениях $\widetilde{E}$ колебания слабо зависят от деталей потенциала $U_{eff}(\phi)$. Асимптотически угловая «скорость» $d\phi/d\tau \to \pm\sqrt{2\widetilde{E}}$, а τ-период $T \to \pi/\sqrt{2\widetilde{E}}$, т. е. в этом пределе T превосходит в два раза τ_∞ (33). Отметим также, что зависимость $T(\widetilde{E})$ является монотонной для $U_{eff}(\phi)$ с максимумом, соответствующим минимуму потенциала $U_{eff}(\pi/4)$. Это означает, что при $C_1 = 0$ вторая точка остановки является недостижимой при $t \to \infty$. В частности, если стартовать с левой точки остановки, то система не достигает правой точки остановки. И наоборот: если стартовая точка правая, то левая недостижима. Такая ситуация, как мы увидим далее, является типичной и для трехмерного цилиндрически-симметричного случая.

2.2. Разлет трехмерного газа

Для разлета ферми-газа в унитарном пределе, когда $\nu = 2/3$, уравнения для скейлинговых параметров интегрируются тем же самым способом, что и в двумерном случае. При $D = 3$ энергию (26) следует записать, вводя сферическую систему координат (a, θ, ϕ):

$$E = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + a^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] + \\ + \frac{3\lambda}{2^{1/3}a^2}\frac{1}{\left(\sin^2\theta\cos\theta\sin 2\phi\right)^{2/3}}.$$

Соответственно вводим снова энергию

$$\widetilde{E} = Ea^2 - \frac{1}{2}a^2\dot{a}^2 = EC_2 - \frac{1}{8}C_1^2$$

— ермаковский интеграл, сохранение которого является следствием симметрии относительно растяжений, и новое время τ с помощью той же формулы (31). В результате имеем

$$\widetilde{E} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + U_{eff}, \qquad (34)$$

где эффективный потенциал выражается через сферические углы:

$$U_{eff} = \frac{3\lambda}{2^{1/3}\left(\sin^2\theta\cos\theta\sin 2\phi\right)^{2/3}}. \qquad (35)$$

Таким образом, мы приходим к системе с двумя степенями свободы, θ и ϕ.

Для цилиндрически-симметричных решений, когда $\cos\phi = \sin\phi = \sqrt{2}/2$, т. е. при $\phi = \pi/4$, энергия $\widetilde{E}$ записывается в виде

$$\widetilde{E} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{3\lambda}{2^{1/3}\left(\sin^2\theta\cos\theta\right)^{2/3}}, \qquad (36)$$

аналогичном (30) для двумерного случая. Разница состоит только в виде эффективного потенциала U_{eff}. Интегрирование этого уравнения приводит к результату Анисимова–Лысикова [3].

В общем случае (при учете зависимости от обеих углов) одного интеграла $\widetilde{E}$ недостаточно. Как было показано Гафе [38], данная система имеет еще один дополнительный интеграл движения (помимо $\widetilde{E}$), который следует из теста Пенлеве. Существование уже двух интегралов движения гарантирует полную интегрируемость этой системы. Важно отметить, как и в предыдущем случае, что движение в потенциале (35) сохраняет свой нелинейный квазиосцилляционный характер.

2.3. Учет квантового давления

Обсудим теперь, какова роль квантового давления при расширении квантовых газов в вакуум. Отметим, что в точке $\xi = \xi_{max}$ для полученных выше решений критерий квазиклассичности (17) нарушается — в этой точке вторая производная амплитуды A по ξ обращается в бесконечность, соответственно член квантового давления становится бесконечно большим. Это типичная ситуация для квазиклассических решений в квантовой механике, когда требуется решить задачу о сшивке решений в точке остановки [39]. В данном случае роль точки остановки играет $\xi = \xi_{max}$. В окрестности точки $\xi = \xi_{max}$ необходимо сшивать построенное решение при $\xi < \xi_{max}$ (внутренняя область) с внешней областью $\xi > \xi_{max}$. Вдали от ξ_{max} во внутренней области решение должно переходить в найденное квазиклассическое, а во внешней области ψ должна подчиняться линейному уравнению Шредингера. Следует сказать, что эта задача обсуждалась детально в работе [40] для режима сильного трехмерного коллапса в кубическом НУШ ($\nu = 1$). Задача сшивки в данном случае может быть рассмотрена аналогичным образом.

Далее будем предполагать $\Delta\xi \ll \xi_{max}$, т. е. представляя переходную область $\Delta\xi$ достаточно узкой. Легко понять, что задача может быть рассмотрена как одномерная в направлении, нормальном к поверхности $\xi = \xi_{max}$.

Начнем с изотропного разлета двумерного бозе-газа, когда химический потенциал $\mu(n) = n$. Обратимся к уравнению (13) для фазы φ. Для автомодельного квазиклассического решения фаза, напомним, находится из интегрирования уравнения непрерывности, т. е. φ не чувствительна к изменению амплитуды в области сшивки. Это означает, что всюду в переходной области можно считать, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} \approx -2A_0^2,$$

где $A_0^2 = a^{-2}(1 - \lambda\xi^2/4)$ есть решение квазиклассических уравнений. В результате уравнение для амплитуды A в области сшивки записывается в виде

$$\frac{1}{2}\nabla^2 A - 2(A^2 - A_0^2)A = 0.$$

Поскольку $A_0(\xi_{max}) = 0$ ($\xi_{max} = 2/\sqrt{\lambda}$), в этом уравнении в слагаемом A_0^2 нужно удержать линейные отклонения по $\chi = \xi - \xi_{max}$: $A_0^2 = -\chi a^{-2}\sqrt{\lambda}$, а в операторе Лапласа ∇^2 в силу узости переходного слоя оставить вторую производную по χ. В результате приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции $g = A/a$:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2g}{d\chi^2} - 2(g^2 + \sqrt{\lambda}\chi)\, g = 0,$$

с граничными условиями $g \to 0$ при $\chi \to \infty$ и $g \to \sqrt{-\lambda^{1/2}\chi}$ при $\chi \to -\infty$. Это уравнение представляет собой уравнение Пенлеве второго типа [40]. При больших положительных χ это уравнение превращается в уравнение Эйри с экспоненциально затухающим решением. При меньших $|\chi|$ решение будет близко к функции Эйри, оно осциллирующего характера. При дальнейшем отходе от границы $\xi = \xi_{max}$ во внутреннюю область в решении будут сохраняться осцилляции, но их амплитуда будет убывать. Само решение при $\chi \to -\infty$ будет выходить на нужную асимптотику.

Появление этих осцилляций является главным проявлением квантовой природы бозе-конденсата при его расширении в вакуум. Эти осцилляции имеют дифракционное происхождение, они подобны кольцам Ньютона.

Хотелось бы отметить, что в одномерной задаче о разлете бозе-газа в вакуум, как показано в работе [41] (см. в ней рис. 3*e*), вообще нет никаких осцилляций на краю. Причина состоит в том, что плотность в этом случае в окрестности крайней точки ведет себя квадратично, и поэтому никакого нарушения квазиклассики в этой точке не наблюдается. Однако при других условиях [42] осцилляции на краю наблюдаются. Подчеркнем, что задача о сшивке в пределе малых $\Delta\xi \ll \xi_{max}$ сводится к одномерной задаче, но она по построению существенным образом отличается от задачи разлета в рамках одномерного НУШ, интегрируемого с помощью метода обратной задачи рассеяния [43].

В анизотропном случае, очевидно, осцилляции сохранятся. Во-первых, в операторе Лапласа наибольшая производная будет по нормали к поверхности $\xi = \xi_{max}$. Во-вторых, угловая скорость $v_\Omega = r\dot{\Omega}$ при достаточно больших временах $t \to \infty$, когда размер R газового облака значительно превосходит начальный размер R_0, оказывается значительно меньше $\dot{R}$. Согласно теореме вириала (6), $\dot{R} \approx v_\infty$, а

$$v_\Omega = r|\dot{\Omega}| = \frac{|d\Omega/d\tau|}{r} \le \frac{2\sqrt{E}}{v_\infty t}.$$

Это означает, что главные изменения будут происходить по нормали к границе $\xi = \xi_{max}$, а временными изменениями по углу можно пренебречь. Если в начальный момент выполнено условие квазаклассичности, то оно будет выполнено всюду за исключением узкой области $\delta\xi \ll |\xi|_{max}$. При этом отношение $\delta\xi$ и $|\xi|_{max}$ в силу автомодельности можно считать неизменным, что справедливо по крайней мере при больших t. Таким образом, асимптотически задачу о сшивке следует считать одномерной по $|\xi|$ с локально-замороженным направлением нормали. Отсюда становится ясным, что вокруг поверхности $\xi = \xi_{max}$ формируется пояс осцилляций плотности дифракционного характера.

Аналогичным образом анализируется поведение квантового ферми-газа в унитарном пределе в окрестности поверхности $\xi = \xi_{max}$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы показали, как симметрии для уравнения ГП, когда химический потенциал зависит от плотности n степенным образом с показателем $\nu = 2/D$ и D — размерность пространства, влияют на расширение квантовых газов в вакуум. Вследствие теоремы вириала, независимо от соотношения между квантовым давлением и химическим потенциалом, средний размер расширяющегося облака растет асимптотически при больших временах линейно с t, так что скорость расширения стремится к постоянному значению $v_\infty = (2H/N)^{1/2}$. Наиболее общая симметрия уравнения ГП — симметрия относительно преобразований Таланова, совокупность которых образует абелеву группу. Эта же симметрия имеет место для потенциальных течений газов с показателем адиабаты $\gamma = 1 + 2/D$, описываемых с помощью уравнений газовой динамики: уравнения непрерывности и уравнения Эйлера. Важно, что эта гидродинамическая система совпадает с уравнением ГП в квазиклассическом пределе и наследует тем самым симметрии уравнения ГП.

Мы показали также, что в квазиклассическом приближении уравнение ГП имеет автомодельные анизотропные решения, описывающие на фоне разлета нелинейные угловые квазиосцилляции формы облака квантового газа. В трехмерном случае эти решения совпадают с решениями Анисимова–Лысикова для расширения в вакуум классического одноатомного газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ за исключением области, где в квазиклассике плотность обращается в нуль. Это целая поверхность, которая играет ту же самую роль, что и точка остановки в квазиклассическом приближении в обычной квантовой механике. Задача сшивки решения во внутренней и во внешней областях показывает, что в окрестности этой поверхности возникают пространственные осцилляции плотности дифракционного характера. Именно этим различаются квантовый и классические газы при их разлете.

В заключение обсудим, в какой мере экспериментальные данные соответствуют полученным аналитическим результатам. В экспериментах [24] наблюдалось автомодельное расширение сильновзаимодействующего ферми-газа из ловушки сигарообразной формы. На рис. 2, взятом из работы [24], представлены изображения расширяющегося ферми-газа. В начальный момент времени газовое облако имело форму сильно вытянутого эллипсоида в виде сигары (время $t = 100$ мкс), затем при $t = 600$ мкс — почти сферическую и на конечной стадии облако имело форму диска. Общее время наблюдения было 2000 мкс, которое можно взять в качестве полупериода (или меньше) угловых осцилляций формы газового облака, $t \le t_{osc}/2$, в соответствии с результатами предыдущего раздела. Таким образом, все эти стадии качественно отвечают автомодельному решению.

На рис. 3 представлены результаты измерений среднего размера облака как функции времени для трех значений $(k_F a_s)^{-1}$ [25]. Все три зависимости $\tau^2(t)$ с хорошей точностью представляют собой параболические зависимости в полном соответствии с соотношением (7), следующим из теоремы вириала (6).

Строго в резонансе, $(k_F a_s)^{-1} = 0$, средний размер облака $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ может быть выражен через начальный потенциал ловушки $U(\mathbf{r})$ в виде [25]

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{t=0} + \frac{t^2}{m} \langle \mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) \rangle_{t=0}. \qquad (37)$$

Вычисления, представленные в работе [44], показывают, что закон расширения (37) совпадает с квазиклассической зависимостью $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ (27) в унитарном пределе. Следует отметить, что, согласно выражению (27), величина $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ действительно зависит линейно от энергии, что было проверено в экспериментах [25].

Подчеркнем, что эти зависимости опираются на квазиклассическую теорию, которая ничем не отличается от гидродинамики идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$. Как мы показали, отличие квантового газа от классического в задаче о расширении в вакуум состоит в учете квантового давления, что приводит к появлению осцилляций плотности на границе расширяющегося облака. Судя по всему, в экспериментах [24, 25] наблюдается расши-

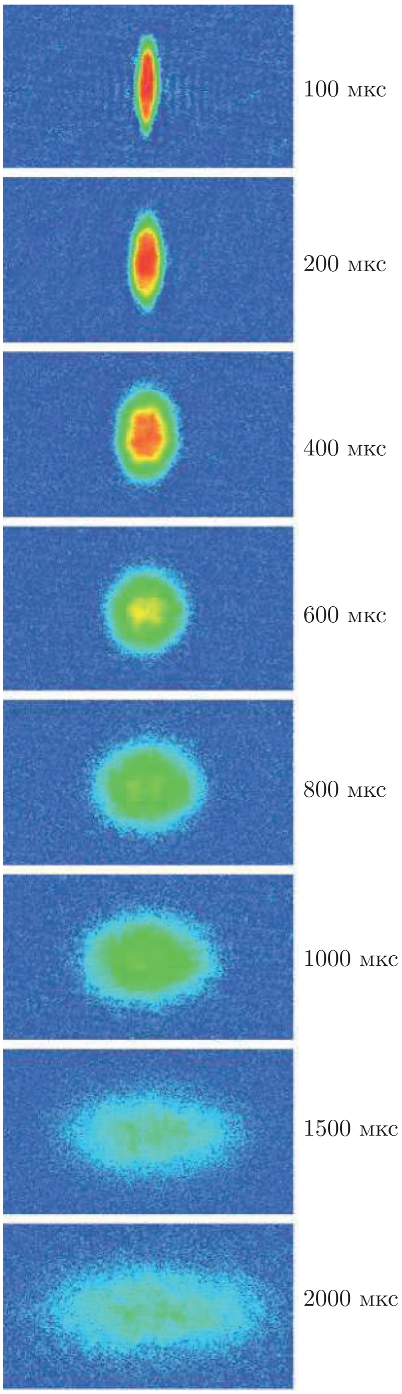

Рис. 2. (В цвете онлайн) Изображения расширяющегося сильновзаимодействующего ферми-газа во времени. Начальная форма в виде сигары

рение скорее нормального ферми-газа, чем сверхтекучего.

Что касается разлета бозе-атомов, то в эксперименте [23] наблюдалась примерно та же самая последовательность изменения формы облака, что

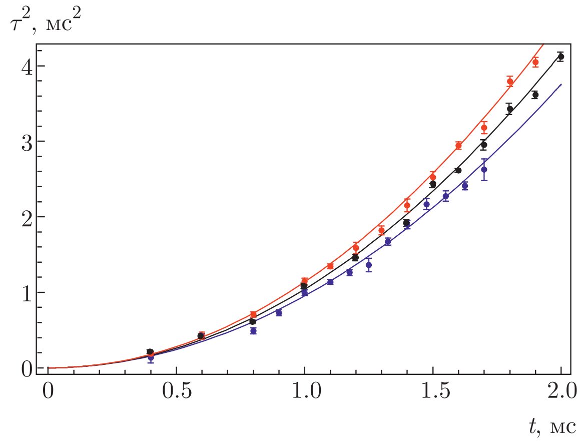

Рис. 3. Зависимость $\tau^2(t)$: по вертикальной оси отложены экспериментальные значения $\tau^2(t) \equiv m[\langle \mathbf{r}^2\rangle - \langle \mathbf{r}^2\rangle_{t=0}]/\langle \mathbf{r}\cdot\nabla U\rangle_{t=0}$, измеренные при расширении сильновзаимодействующего ферми-газа в зависимости от времени t ($U(\mathbf{r})$ — начальное значение потенциала ловушки). Черные символы соответствуют газу в резонансе, $(k_F a_s)^{-1} = 0$, красные и синие — соответственно $(k_F a_s)^{-1} = 0.59$ и $(k_F a_s)^{-1} = -0.61$, сплошные кривые — результаты расчета [25]

и в трехмерной задаче Анисимова–Лысикова. Это свидетельствует о том, что нормальная компонента играет в этом эксперименте более существенную роль, чем сверхтекучая компонента. Напомним, что одним из ключевых экспериментов по открытию бозе-эйнштейновских конденсатов газов щелочных элементов ^{7}Li, ^{23}Na, ^{87}Rb [45–47] было определение функции распределения бозе-атомов при расширении газа в вакуум после выключения оптической ловушки. Функция распределения имела бимодальную форму, которая соответствовала нормальной и сверхтекучей компонентам. Для нормальной компоненты распределение по скоростям было широким — тепловым — максвелловского вида, а сверхтекучая компонента обладала более узким распределением с шириной, определяемой параметром взаимодействия (в смысле ГП). При малых, но конечных температурах из-за уменьшения плотности при разлете температура бозе-конденсации падает, что неминуемо должно приводить к росту числа атомов нормальной компоненты. По этой причине форма облака должна определяться нормальной компонентой, которую можно считать одноатомным газом. Холодная сверхтекучая компонента будет сосредоточена внутри расширяющегося облака. Для ферми-газов эта ситуация, по-видимому, также имеет место. В отличие от бозе-газов, переход к нормальной компоненте при разлете ферми-газа будет сопровождаться также и разрушением куперовских пар. Таким образом, разлет квантового газа должен приводить к появлению колец Ньютона, что в экспериментах как [23], так и [24, 25] не наблюдалось. Наблюдение таких осцилляций, по крайней мере на начальной стадии разлета, было бы свидетельством того, что газ находится в квантовом состоянии.

Благодарности. Авторы благодарны А. В. Турлапову и А. М. Камчатнову за ряд полезных обсуждений.

Финансирование. Работа одного из авторов (Е. А. К.) выполнялась при поддержке Российского научного фонда (грант №19-72-30028). Другой автор (М. Ю. К.) благодарит за поддержку Программу фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (грант №20-02-00015). Авторы внесли равные вклады в выполнение этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Питаевский, УФН **178**, 633 (2008) [L. P. Pitaevskii, Physics-Uspekhi **51**, 603 (2008)].
2. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **11**, 303 (1970) [V. I. Talanov, Sov. Phys. JETP Lett. **11**, 199 (1970)].
3. С. И. Анисимов, Ю. И. Лысиков, ПММ **34**, 926 (1970) [S. I. Anisimov and Yu. I. Lysikov, J. Appl. Math. Mech. **34**, 882 (1970)].
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика* в 10 тт., Физматлит, Москва (2002).
5. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012) [V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, Physics-Uspekhi **55**, 535 (2012)].
6. S. L. Cornish, S. T. Thompson, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **96**, 170401 (2006).
7. C. Eigen, A. L. Gaunt, A. Suleymanzade, N. Navon, Z. Hadzibabic, and R. P. Smith, Phys. Rev. X **6**, 041058 (2016).
8. H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
9. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
10. J. Joseph, B. Clancy, L. Luo, J. Kinast, A. Turlapov, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **98**, 170401 (2007).
11. M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **92**, 120401 (2004).
12. M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, and M. W. Zwierlein, Science **335**, 563 (2012).
13. G. Zürn, T. Lompe, A. N. Wenz, S. Jochim, P. S. Julienne, and J. M. Hutson, Phys. Rev. Lett. **110**, 135301 (2013).
14. E. P. Gross, Nuovo Cim. **20**, 454 (1961); L. P Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
15. E. A. Kuznetsov, M. Yu. Kagan, and A. V. Turlapov, Phys. Rev. A **101**, 043612 (2020).
16. Е. А. Кузнецов, М. Ю. Каган, ТМФ **202**, 458 (2020).
17. И. Е. Дзялошинский, частное сообщение (1970).
18. E. A. Kuznetsov and S. K. Turitsyn, Phys. Lett. A **112**, 273 (1985).
19. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов, Радиофизика **14**, 1353 (1971) [S. N. Vlasov, V. A. Petrishchev, and V. I. Talanov, Radiophys. Quant. Electr. **14**, 1062 (1971)].
20. K. Rypdal and J. J. Rasmussen, Phys. Scripta **33**, 498 (1986).
21. Л. В. Овсянников, ДАН СССР **111**, 47 (1956).
22. S. I. Anisimov and V. A. Khokhlov, *Instabilities in Laser-Matter Interaction*, CRC Press Inc., Boca Raton (1995).
23. Ю. В. Лиханова, С. Б. Медведев, М. П. Федорук, П. Л. Чаповский, Письма в ЖЭТФ **103**, 452 (2016) [Yu. V. Likhanova, S. B. Medvedev, M. P. Fedoruk, and P. L. Chapovsky, JETP Lett. **103**, 403 (2016)].
24. K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, Science **298**, 2179 (2002).
25. E. Elliott, J. A. Joseph, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **112**, 040405 (2014).
26. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).
27. F. J. Dyson, J. Math. Mech. **91**, 18 (1968).
28. Я. Б. Зельдович, Астроном. ж. **41**, 873 (1964) [Ya. B. Zel'dovich, Sov. Astron. J. **8**, 700 (1964)].
29. В. П. Ермаков, *Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде: из лекций по интегрированию дифференциальных уравнений* [V. P. Ermakov,

Differential Equations of the Second Order. Integrability Conditions in the Closed Form, University Izv., Kiev (1880)].

30. F. Calogero, J. Math. Phys. **10**, 2191 (1969).

31. L. P. Pitaevskii and A. Rosch, Phys. Rev. A **55**, R853 (1997).

32. J. R. Ray and J. L. Reid, Phys. Lett. A **71**, 317 (1979).

33. C. Rogers and W. K. Schief, J. Math. Anal. and Appl. **198**, 194 (1996).

34. A. V. Turlapov and M. Yu. Kagan, J. Phys.: Condens. Matter **29**, 383004 (2017).

35. М. Ю. Каган, А. В. Турлапов, УФН **189**, 225 (2019) [M. Yu. Kagan and A. V. Turlapov, Physics-Uspekhi **188**, 225 (2019)].

36. O. I. Bogoyavlensky, in *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1979), p. 151.

37. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин, Нелинейная динамика **4**, 363 (2008).

38. B. Gaffet, J. Fluid Mech. **325**, 113 (1996).

39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*: *Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press (1965)].

40. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986) [V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, Sov. Phys. JETP **64**, 773 (1986)].

41. G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, Physica D **87**, 186 (1995).

42. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. A **99**, 013609 (2019).

43. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971) [V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Sov. Phys. JETP **34**, 62 (1972)].

44. E. A. Kuznetsov, M. Yu. Kagan, and A. V. Turlapov, arXiv:1903.04245 [cond-mat.quant-gas].

45. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).

46. Cl. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).

47. K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrew, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).