ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 4, стр. 822–844

К ВОПРОСУ О НАПЕРСТКАХ ЛЕФШЕЦА В СИГМА-МОДЕЛЯХ, I

И. Кричевер [a,b,c*], ***Н. Некрасов*** [d,e,f**]

[a] *Сколковский институт науки и технологий*
143026, Москва, Россия

[b] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*
101000, Москва, Россия

[c] *Columbia University, New York*
10027, New York, NY, USA

[d] *Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook University*
11794-3636, Stony Brook, NY, USA

[e] *Центр перспективных исследований Сколтеховского института*
143026, Москва, Россия

[f] *Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича*
127051, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 ноября 2020 г.,
после переработки 3 ноября 2020 г.
Принята к публикации 3 ноября 2020 г.

Исследуются наперстки Лефшеца как возможные контуры континуального интегрирования. Точнее, в двумерных $O(N)$- и $\mathbb{CP}^{N-1}$-сигма-моделях найден широкий класс комплексных критических точек, важный для теории конечного объема и конечных температур с различными химпотенциалами. В настоящей работе рассмотрен случай $O(2m)$-модели и $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели в секторе нулевого инстантонного заряда. Построены также некоторые решения $O(2m+1)$-модели. Результаты исследований $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели с произвольным инстантонным зарядом и $O(N)$-модели с нечетным N будут представлены в следующей работе.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского

DOI: 10.31857/S0044451021040258

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории статистическая сумма формально определяется функциональным интегралом

$$Z_\hbar(\mathbf{t}) = \int\limits_{\mathcal{F}} [D\Phi]\, e^{-\frac{S_{\mathbf{t}}(\Phi)}{\hbar}} \tag{1.1}$$

по некоторому пространству $\mathcal{F}$ полей. Корреляционные функции даются интегралом такого же типа:

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\ldots\mathcal{O}_r(x_r)\rangle_{\mathbf{t}} = \\ = \frac{1}{Z_\hbar(\mathbf{t})}\int\limits_{\mathcal{F}} [D\Phi]\, e^{-\frac{S_{\mathbf{t}}(\Phi)}{\hbar}}\, \mathcal{O}_1(x_1)\ldots\mathcal{O}_s(x_s). \tag{1.2}$$

Для изучения аналитических свойств этих величин при изменении параметров t модели оказывается полезным деформировать область интегрирования так, чтобы она представляла собой цикл средней размерности в комплексифицированном пространстве полей $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$. При этом возможно, что имеется множество циклов, для которых интеграл (1.1) сходится. Для конечномерных интегралов такие циклы классифицируются группой относительных гомологий $H_{\text{middle}}(\mathcal{F}^{\mathbb{C}}, \mathcal{F}^{\mathbb{C}}_{-}; \mathbb{Z})$, где $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}_{-}$ — такие поля $\Phi \in \mathcal{F}^{\mathbb{C}}$, для которых $\mathrm{Re}(S_t(\Phi)/\hbar) \gg 0$. Для общих значений параметров t существует базис $(\gamma_{\mathbf{a}})$ в

* E-mail: krichev@math.columbia.edu
** E-mail: nnekrasov@scgp.stonybrook.edu

$H_{\mathrm{middle}}(\mathcal{F}^{\mathbb{C}}, \mathcal{F}^{\mathbb{C}}_{-}; \mathbb{Z})$ так называемых наперстков Лефшеца. Наперсток $\gamma_{\mathbf{a}}$, соответствующий критической точке $\mathbf{a}$ функцонала $S_t(\Phi)$, является объединением градиентных траекторий $\mathrm{Re}\,(S_t(\Phi)/\hbar)$, выходящих из $\mathbf{a}$. Исходный функциональный интеграл равен сумме

$$Z_\hbar(t) = \sum_{\mathbf{a}} n_{\mathbf{a}} I^{\mathbf{a}}_\hbar(t), \tag{1.3}$$

где

$$I^{\mathbf{a}}_\hbar(t) = \int\limits_{\gamma_{\mathbf{a}}} [D\Phi]\, e^{-\frac{S_t(\Phi)}{\hbar}} \tag{1.4}$$

— интеграл по наперстку Лефшеца, соответствующему *комплексной критической точке* $\mathbf{a}$. Кратности $n_{\mathbf{a}}$ являются целыми числами. При малых вариациях t они остаются постоянными, но при пересечении t некоторых гиперповерхностей (стенок маргинальной стабильности) кратности $n_{\mathbf{a}}$ могут скачкообразно меняться. Это называется явлением Стокса.

Настоящая работа посвящена изучению критических точек в некоторых полевых теориях.

1.1. Поля и симметрии

Пространство полей $\mathcal{F}$ в каждой из моделей является пространством отображений некоторого исходного многообразия Σ в риманово многообразие X. Мы не будем затрагивать деликатный вопрос о гладкости отображений, имеющий отношение к проблеме точного определения меры в функциональном интеграле. Безусловно, для более строгого подхода необходимо рассмотреть обрезанную версию меры, а в определении функционального интеграла заменить микроскопическое действие $S_t(\Phi)$ на действие $S_{t(\wedge)}(\Phi_\wedge)$, в котором характеристические импульсы полей $\Phi_\wedge$ не превосходят параметра $\wedge$, а константы $t(\wedge)$ зависят таким образом от $\wedge$, чтобы в переделе $\wedge \to \infty$ корреляционные функции (1.2) имели конечное значение при макроскопическом различии точек $x_1, \ldots, x_s$. Мы надеемся, что для задачи классификации возможных интегральных контуров для асимптотически свободных теорий, таких как сигма-модели, более строгий подход даст такой же результат.

Для учета симметрий теории часто оказывается полезным рассматривать интегралы по пространствам $\mathrm{Maps}_h(\Sigma, X)$ твистованных полей. Здесь $h : \pi_1(\Sigma) \to H$ обозначает гомоморфизм фундаментальной группы Σ в группу симметрий пространства X (и дополнительных структур X). h-твистованные отображения являются $\pi_1(\Sigma)$-эквивариантными отображениями $f : \tilde{\Sigma} \to X$ универсального накрытия Σ, такими что

$$f(\gamma \cdot p) = h(\gamma) \cdot f(p). \tag{1.5}$$

Другими словами, если зафиксировать точку $\xi \in \Sigma$ и представителя $f(\xi) \in X$, то твистованное отображение f в окрестности U точки ξ будет хорошо определенным отображением $U \to X$. Тем не менее, его продолжение на все многообразие Σ является многозначным с точностью до действия $h(\pi_1(\Sigma)) \subset G$ на X.

Еще одно явление, связанное с наличием симметрий X, это операторы дефекта, связанные со всеми гомотопическими группами $\pi_k(H)$. Например, элементы групп $\pi_{\dim(\Sigma)-1}(H)$ классифицируют локальные твистованные операторы, которые дают возможность определить функциональный интеграл по пространству $\Gamma(\Sigma, X \times_H \mathbf{H})$ сечений расслоения, ассоциированного с главным H-расслоением $\mathbf{H}$ над Σ, задаваемым

$$c \in H^{\dim\Sigma}\left(\Sigma, \pi_{\dim(\Sigma)-1}(H)\right)\ . \tag{1.6}$$

1.2. Квантовая механика

Случай $\Sigma = \mathbf{S}^1$, соответствующий конечномерным квантовым моделям (в которых Σ одномерно), был рассмотрен в работе [1]. В этом случае (X, ω) является симплектическим многообразием, чья комплексификация $(X^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}})$ является алгебраической интегрируемой системой

$$\pi : X^{\mathbb{C}} \to U^{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C}^r,$$

лагранжевы слои которой $J_u = \pi^{-1}(u)$ над общими $u \in U^{\mathbb{C}}$ являются поляризованными абелевыми многообразиями. Действие моделей $S_t(\Phi)$ дается выражением

$$S_{\mathbf{t}}(\Phi) = \oint\limits_{\Sigma} d^{-1}\omega^{\mathbb{C}} - \sum_{k=1}^{r} t_k \oint u_k\,(s)\; ds, \tag{1.7}$$

в котором $s \sim s+1$ — параметр на Σ, u_k — глобальные координаты на U, являющиеся гамильтонианами интегрируемой системы, $\mathbf{t}$ – набор *времен*, или обобщенных обратных температур. Функциональный интеграл (1.1) представляет след комплексифицированного оператора эволюции:

$$Z_\hbar(\mathbf{t}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \exp -\frac{1}{\hbar} \sum_k t_k \hat{H}_k. \tag{1.8}$$

Обозначим через $\Xi \subset U$ дискриминант системы, т. е. множество сингулярных слоев J_u. Зафиксируем некоторую начальную точку $u_* \in U \backslash \Xi$ и обозначим через Γ группу монодромии, т. е. образ фундаментальной группы, отвечающей выбору отмеченной точки $\pi_1\left(U^{\mathbb{C}} \backslash \Xi, u_*\right)$ в группу $Sp(2r, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^f$ аффинных преобразований слоя $H_1(J_{u_*}, \mathbb{Z})$, сохраняющих симплектическую структуру, заданную формой пересечения (определяемой поляризацией).

В этом случае критические точки $\mathbf{a}$ классифицируются орбитами $[c]$ группы монодромии Γ классов гомологий $c \in H_1\left(\pi^{-1}(u_*), \mathbb{Z}\right)$. Обозначим через $\Gamma_{[c]} \subset \Gamma$ стабилизатор c, а через $\tilde{U}_{[c]} = \tilde{U}/\Gamma_{[c]}$ — соответствующий фактор универсальной накрывающей. Очевидно, что для любого целого $n \neq 0$ имеет место $\tilde{U}_{n[c]} = \tilde{U}_{[c]}$. Обозначим через $P := PH_1(J_{u_*}, \mathbb{Z})$ множество примитивных классов гомологий (т. е. классов гомологий, которые не являются целыми кратными других классов). Пусть $\mathcal{U}_\rho = \tilde{U}_\rho$, $\rho \in P$. Тогда для $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^r$ определим *суперпотенциал*, являющийся голоморфной функцией на $\mathcal{U}_\rho$, с помощью формулы

$$\mathcal{W}_{n,\mathbf{t}} = n \oint_\rho d^{-1}\omega^{\mathbb{C}} - \sum_{k=1}^{r} t_k u_k \ . \tag{1.9}$$

Множество

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{\rho \in P} \mathcal{C}_\rho \ , \quad \mathcal{C}_\rho \subset \mathcal{U}_\rho, \tag{1.10}$$

наперстков Лефшеца квантованной алгебраической интегрируемой системы можно представлять себе как дискретное подмножество в

$$\mathcal{U} = \bigsqcup_{\rho \in P} \mathcal{U}_\rho. \tag{1.11}$$

Для $\rho \neq 0$ множество $\mathcal{C}_\rho$ является множеством критических точек *суперпотенциала* (1.9) на $\mathcal{U}_\rho$. Для $\rho = 0$, когда $\mathcal{U}_0 \approx U$, имеется тонкость. В этом случае суперпотенциал является линейной комбинацией координатных функций u_k, а значит, не имеет критических точек. Тем не менее, из физических соображений мы должны включить в $\mathcal{C}$ множество $\Xi_{\max} \subset \Xi$ максимально вырожденных слоев, которые соответствуют вырожденным орбитам гамильтонова векторного поля, отвечающего сумме $\sum_k t_k u_k$, которая рассматривается как функция на всем фазовом пространстве $X^{\mathbb{C}}$.

Имеется простая модификация задачи в случае систем с симметриями, сохраняющими гамильтонианы h_k. Вместо пространства петель $\mathcal{F} = LX$ и его комплексификации $\mathcal{F}^{\mathbb{C}} = LX^{\mathbb{C}}$ надо, так же, как и в (1.5), рассмотреть пространство твистованных петель

$$\mathcal{F}_{[h]} = \{\, x(s) \,|\, 0 \leq s \leq 1 \ , \ x(1) = h \cdot x(0)\}$$

и его комплексификацию $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}_{[h_c]}$. Здесь $[h]$ — класс сопряженности в группе H симплектических симметрий X, $[h_c]$ — класс сопряженности в комплексной группе $H^{\mathbb{C}}$ симплектических голоморфных симметрий $X^{\mathbb{C}}$. Поскольку действие группы сохраняет гамильтонианы, группа действует на слоях J_u. В случае, когда H является группой Ли, порожденной гамильтонианами, твистованный случай эквивалентен нетвистованному с точностью до переопределения времен $\mathbf{t}$. Случай дискретной группы H очень интересен и не полностью описан в существующих публикациях. Он может быть сведен к (1.9) с P, являющимся пространством классов эквивалентноси h-подкрученных петель на J_u.

1.3. Структура статьи

Мы рассматриваем двумерные полевые теории со значениями в нечетномерных сферах $\mathbf{S}^{2m-1}$ или их фактор-пространствах по действию группы $U(1)$, являющихся комплексными проективными пространствами $\mathbb{CP}^{n-1}$. Комплексификация этих пространств содержит, в качестве вещественных сечений, другие интересные симметрические пространства такие, как пространства Лобачевского, анти-де Ситтера и де Ситтера.

В разд. 2 мы вводим лагранжианы двумерных сигма-моделей и их реализацию в терминах (линейной) сигма-модели со связями и калибровочными группами. Затем мы обсуждаем твистованные граничные условия и их комплексификацию. После этого мы представляем первые свидетельства возможности существования в двумерных сигма-моделях аналога (1.9): в специальном классе *неймановских струнных решений* предъявляются алгебраически интегрируемые модели, а именно, модель Годена, т. е. система Хитчина в роде нуль с проколами, как в работе [2], но с иррегулярными сингулярностями.

В разд. 3 вводится основной инструмент нашего анализа: комплексные ферми-кривые. Вначале мы проанализируем построение ферми-кривой для малого возмущения постоянного потенциала уравнения Шредингера и покажем, как резонансные двойные точки разрешаются коэффициентами фурье потенциала $u(z, \bar{z})$.

В разд. 4 решается обратная задача восстановления потенциала $u(z, \bar{z})$ оператора Шредингера по ферми-кривой конечного рода. Последние характеризуются как кривые с дополнительной структурой: голоморфной инволюцией, имеющей по крайней мере две неподвижные точки, и набором мероморфных дифференциалов Ω, $\Omega^{\pm}$ с заданными свойствами.

В разд. 5 оператор Шредингера $-\Delta + u$ связывается со своими решениями ψ, $\Delta\psi = u\psi$, так, как предписывается уравнениями движения сигма-модели. Мы показываем, что наличие такой связи обеспечивается дополнительной структурой на ферми-кривой: наличием некоторой мероморфной функции E. Более того, мы находим *суперпотенциал* $\mathcal{W}$, критические точки которого соответствуют дважды-периодическим решениям уравнений движения сигма-модели, и явно прослеживаем аналогию этого суперпотенциала с суперпотенциалом (1.9) в квантово-механических моделях.

Раздел 6 содержит заключение и описание направления будущих исследований. В частности, мы обсуждаем возможности конечномерных приближений конфигурационного пространства полевых теорий, мотивированных теорией алгебро-геометрических (или, что то же самое, конечнозонных) решений.

2. СИГМА-МОДЕЛИ

Предположим, что многообразие X, в котором принимают значения поля модели, является римановым многообразием с метрикой

$$g = g_{mn}(X)dX^m dX^n.$$

Тогда действие $S_t(\Phi)$ сигма-модели задается как

$$S_t(\Phi) = \int\limits_{\Sigma} \sqrt{h}h^{\alpha\beta}\, g_{mn}\partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n, \qquad (2.1)$$

где $(X^m(z,\bar{z}))$ — координатная параметризация отображения $\Phi : \Sigma \to X$, а t обозначает параметры, которые описываются ниже. Лагранжиан модели зависит лишь от конформного класса метрики

$$ds^2_\Sigma = h_{ab}d\xi^a d\xi^b, \quad h_{ab} \sim e^{2\psi}h_{ab}.$$

Пусть Σ — двумерный тор $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Обозначим через x, y вещественные координаты на Σ с периодами 1, т. е. $x \sim x + m$, $y \sim y + n$ при $m, n \in \mathbb{Z}$. Конформные структуры на Σ параметризуются комплексным числом $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ с $\tau_2 > 0$ с помощью равенства

$$ds^2_\Sigma \propto (dx + \tau dy)(dx + \bar{\tau} y) = dz d\bar{z}, \qquad (2.2)$$

в котором $z = x + \tau y$, $\bar{z} = x + \bar{\tau} y$ обозначают, соответственно, голоморфную и антиголоморфную координаты на Σ.

Ниже мы будем часто использовать обозначения $\omega_x = 1$, $\omega_y = \tau$ для периодов и $\bar{\omega}_x = 1, \bar{\omega}_y = \bar{\tau}$ для сопряженных величин.

Параметры t модели — это параметры конформной структуры $\sqrt{h}h^{\alpha\beta}$ на Σ, параметры метрики g и параметры твистов. Последние возникают в тех случаях, когда метрика g допускает изометрии. Обозначим через H группу симметрий g. Продеформируем теорию с помощью плоской H-связности A:

$$S_t(\Phi; A) = \int\limits_{\Sigma} dz\, d\bar{z}\; g_{mn}(\partial_z X^m + A_z^{\mathbf{a}} V_{\mathbf{a}}^m) \times \\ \times (\partial_{\bar{z}} X^n + A_{\bar{z}}^{\mathbf{a}} V_{\mathbf{a}}^n), \quad (2.3)$$

где $A^{\mathbf{a}}dz + \bar{A}^{\mathbf{a}}d\bar{z}$ — форма H-связности с $\mathbf{a} = 1, \ldots, \dim H$, а $V_{\mathbf{a}} \in \mathrm{Vect}(X)$ — образующие H, действующие изометриями X. Из инвариантности меры функционального интеграла относительно локальных преобразований отображения $\Phi : \Sigma \to X$, заданных изометриями H, следует, что корреляционные функции зависят только от классов эквивалентности

$$A \sim h^{-1}Ah + h^{-1}dh.$$

В координатах x, y на Σ действие (2.3) имеет вид

$$\begin{gathered} S_t(\Phi; A) = \frac{1}{\tau_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2} dx\, dy\, \mathcal{L}\,, \\ \mathcal{L} = g_{mn}(X)\,(\tau\nabla_x X^m - \nabla_y X^m) \times \\ \times (\bar{\tau}\nabla_x X^n - \nabla_y X^n)\,, \end{gathered} \qquad (2.4)$$

где

$$\nabla_\alpha X^m = \partial_\alpha X^m + A_\alpha^{\mathbf{a}} V_{\mathbf{a}}^m(X), \quad \alpha = x, y\,. \qquad (2.5)$$

Для плоских H-связностей A,

$$dA^{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} f^{\mathbf{a}}_{\mathbf{bc}} A^{\mathbf{b}} \wedge A^{\mathbf{c}} = 0\,, \qquad (2.6)$$

статсумма (1.1) может быть представлена в гамильтоновой форме:

$$\mathcal{Z}(A; \tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{g_x-\mathrm{twisted}}}\left(g_y\, q^{H_+}\bar{q}^{H_-}\right), \qquad (2.7)$$

где

$$\begin{gathered} q = e^{2\pi i\tau}, \\ \bar{q} = e^{-2\pi i\bar{\tau}}, \\ H_\pm = \frac{1}{4\pi}\left(\hat{H} \pm \hat{P}\right), \\ g_x = P\exp\int\limits_0^1 dx\, A_x, \\ g_y = P\exp\int\limits_0^1 dy\, A_y \end{gathered} \qquad (2.8)$$

— гамильтонианы и H-твисты, соответственно, а $\mathcal{H}_{g_x-\mathrm{twisted}}$ обозначает пространство состояний системы, полученное квантованием пространства g_x-твистованных петель в пространстве X.

Интересным аспектом теорий с группой симметрий H, имеющей нетривиальную фундаментальную группу $\pi_1(H)$, является возможность наличия топологически нетривиальных фонов при сохранении условия плоскости фоновой связности A. Они находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами $c \in H_2(\Sigma, \pi_1(H))$ (ср. (1.6)), известными для конечных $\pi_1(H)$ как обобщенные классы Штифеля–Уитни. Для простой группы Ли H фундаментальная группа $\pi_1(H)$ отождествляется с подгруппой центра $Z(\tilde{H})$ ее односвязного накрытия $\tilde{H}$. Топологически нетривиальный фон возникает при исследовании функционального интеграла по пространству $\mathcal{F}_c$ сечений X-расслоений над Σ, ассоциированных с главным H-расслоением P над Σ. Последнее может быть тривиализовано над дополнением $\Sigma\backslash U_p$ малой окрестности U_p точки $p \in \Sigma$ и над самой окрестностью U_p. Класс гомотопии $c \in \pi_1(H)$ задается петлей в H, т. е. отображением $\partial U_p \to H$, определяемым переходом между двумя тривиализациями

$$P|_{\Sigma\backslash U_p} \times H \times \Sigma\backslash U_p$$

и

$$P|_{U_p} \approx H \times U_p.$$

Таким образом, с одной стороны, функциональный интеграл по $\mathcal{F}_c$ может быть интерпретирован как 1-точечная функция на торе для локального оператора беспорядка $\mathcal{O}_c$:

$$\mathcal{Z}_c(A; \tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{g_x-\mathrm{twisted}}} \left(\mathcal{O}_c \, g_y \, q^{H_+} \bar{q}^{H_-} \right). \quad (2.9)$$

С другой стороны P_c поднимается до тривиального расслоения $\tilde{\Sigma} \times \tilde{H}$ для некторой изогении $\tilde{\Sigma} \to \Sigma$. Плоская H-связность на Σ может рассматриваться как плоская $\tilde{H}$-связность на $\tilde{\Sigma}$, эквивариантная относительно действия $\pi_1(H)$.

Классически, в качестве группы симметрий проявляется только группа H, поскольку она является группой симметрий пространства X, в котором принимают значения поля. Тем не менее, квантово-механически, группа H может действовать на гильбертовом пространстве теории проективно, т. е. $\mathcal{H}$ является на самом деле представлением группы $\tilde{H}$. Уравнение (2.9) является важным инструментом для исследования этого расширения симметрии.

Например, таким образом можно явно продемонстрировать существование BPS солитонов в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $\mathbb{CP}^{N-1}$-сигма-модели (см. [3]), которые преобразуются в фундаментальном представлении $\wedge^l \mathbb{C}^N$ группы $\tilde{H} = SU(N)$, а значит, гильбертово пространство теории содержит возбуждения, симметрия которых расширена.

2.1. Комплексификация

Статистическая сумма (2.7) допускает аналитическое продолжение по параметрам $q, \bar{q}, g_y$. Это продолжение соответствует взятию того же функционального интеграла по (твистованным) отображениям $\Phi : \Sigma \to X$, но при соответствующей деформации действия (2.4), при которой параметры τ и $\bar{\tau}$ не являются комплексно сопряженными друг другу, а компонента связности A_y фонового поля становится комплексной. При этом модулярная инвариантность требует, чтобы компонента A_x также рассматривалась как комплексное клибровочное поле. Координаты X^m полей в (2.4), естественно, также становятся комплексными.

Мы продолжим называть периоды ω_α и $\bar{\omega}_\alpha$ для $\alpha = x, y$ сопряженными периодами. Сопряжение, которое имеется в виду, соответствует симметрии $(x, y) \mapsto (x, -y)$ физического тора, а не (искусственному в данном контексте) комплексному сопряжению.

Ниже мы обсудим геометрические аспекты комплексификации полей Φ. Они являются отображениями Σ в комплексификацию $X_{\mathbb{C}}$ исходного многообразия. В дальнейшем мы обсудим также аналитическое продолжение лагранжианов $\mathcal{L}$ сигма-моделей, подкрученные граничные условия и уравнения движения. В заключение, мы проанализируем интересную редукцию уравнений движения $O(N)$- и $\mathbb{CP}^{N-1}$-моделей, так называемый *анзац Неймана*. Значимость этого аназаца заключена в его алгебраической интегрируемости. Мы покажем, что такие решения для $O(N)$- и $\mathbb{CP}^{N-1}$-моделей описываются в терминах «иррегулярной версии» модели Хитчина рода нуль и $\mathfrak{gl}_2$-модели Годена с нулевым спином.

2.1.1. Комплексификация сфер и проективных пространств

Хорошо известная тройка пространств $\mathbb{RP}^m$, $\mathbb{CP}^m$, $\mathbb{HP}^m$ с симметриями $O(m)$, $U(m)$, $Sp(m)$ имеет интересные комплексификации.

Для векторного пространства L над полем k обозначим двойственное векторное пространство через $L^\vee$. Для $l \in L$, $p \in L^\vee$ обозначим значение p на l через $p \cdot l \in k$.

Пусть $V \approx \mathbb{C}^{m+1}$ — комплексное евклидово пространство, т. е. комплексное векторное пространство с невырожденной симметрической формой $g(\cdot,\cdot)$. Пусть $W\approx\mathbb{C}^{n+1}$ — комплексное векторное пространство и, наконец, пусть $U\approx\mathbb{C}^{2(n+1)}$ — комплексное симплектическое пространство, т. е. комплексное векторное пространство с невырожденной анти-симметрической формой $\omega(\cdot,\cdot)$.

Имеют место (неканонические) изоморфизмы $U=W\oplus W^\vee$ для любого лагранжева подпространства $W\subset U$ и $V=W\oplus W^\vee$ для любого максимально изотропного подпространства $W\subset V$ в случае четного $n+1$.

Пространство $S(V)$ векторов $x\in V$, таких что $g(x,x)=1$, является комплексификацией сферы S^m.

Комплексификацией $\mathbb{PR}(V)$ пространства $\mathbb{RP}^m$ является фактор-пространство векторов $x\in V$, таких что $g(x,x)=1$, по действию $\mathbb{Z}_2$ симметрии $x\mapsto -x$.

Комплексификацией $\mathbb{PC}(W)$ пространства $\mathbb{CP}^m$ является фактор-пространство пар (ψ,ψ^σ), $\psi\in W,\psi^\sigma\in W^\vee$, таких что

$$\psi^\sigma\cdot\psi=1\ , \tag{2.10}$$

по действию $\mathbb{C}^\times$

$$(\psi,\,\psi^\sigma)\mapsto(t\psi,\,t^{-1}\psi^\sigma),\quad t\in\mathbb{C}^\times\ . \tag{2.11}$$

Другими словами, $\mathbb{PC}(W)$ является голоморфным симплектическим фактором $T^*W//\mathbb{C}^\times$, соответствующим отображению моментов (2.10).

Комплексификацией $\mathbb{PH}(U)$ пространства $\mathbb{HP}^m$ является фактор-пространство пар (u_1,u_2) в $u_{1,2}\in\in U$, таких что

$$\omega(u_1,u_2)=1, \tag{2.12}$$

по действию группы $SL(2,\mathbb{C})$

$$\begin{gathered}(u_1,u_2)\mapsto(au_1+bu_2,cu_1+du_2),\\ ad-bc=1\ .\end{gathered} \tag{2.13}$$

2.1.2. Комплексификация: лагранжианы

Соответствующие лагранжианы, записанные в терминах приведенных выше геометрических структур, имеют вид

$$\begin{gathered}
L_{\mathbb{RP}^m}=\frac12\int\limits_{\mathbb{T}^2}\sqrt{h}\,\big(\,h^{\alpha\beta}g(\partial_\alpha x,\partial_\beta x)+\\
+\,(g(x,x)-1)\,U\,\big)\,,\\
L_{\mathbb{CP}^m}=\\
=\frac12\int\limits_{\mathbb{T}^2}\sqrt{h}\,\big(h^{\alpha\beta}D_\alpha\psi^\sigma\cdot D_\beta\psi+(\psi^\sigma\cdot\psi-1)\,U\,\big)\,,\\
D_\alpha\psi^\sigma=\partial_\alpha\psi^\sigma-A_\alpha\psi^\sigma\,,\\
D_\alpha\psi=\partial_\alpha\psi+A_\alpha\psi\,,\\
L_{\mathbb{HP}^m}=\frac{\varepsilon^{AB}}{4}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\sqrt{h}\,\big(\,h^{\alpha\beta}\omega\,(\mathfrak{D}_\alpha u_A,\mathfrak{D}_\beta u_B)+\\
+\,(\omega(u_A,u_B)-\varepsilon_{AB})\,U\,\big)\,,\\
\mathfrak{D}_\alpha u_1=\partial_\alpha u_1+A_\alpha u_1+B_\alpha u_2\,,\\
\mathfrak{D}_\alpha u_2=\partial_\alpha u_2+C_\alpha u_1-A_\alpha u_2\,,
\end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$\varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=1.$$

Лагранжиан

$$\begin{gathered}L_{\mathbb{RP}^n}=\\ =\int\limits_{\mathbb{T}^2}\sqrt{h}\left(\frac12 h^{ab}g(\partial_a x,\partial_b x)+(g(x,x)-1)\,U\right)\end{gathered} \tag{2.15}$$

$S(V)$-модели, которую мы в дальнейшем будем называть $O(n+1)$-моделью, идентичен лагранжиану $\mathbb{RP}^m$-модели. Различие моделей в калибровке. В $\mathbb{RP}^n$-модели решения $(x(z,\bar z))$ и $(-x(z,\bar z))$ отождествляются. Необходимо также включить в модель твистованные секторы [4], в которых

$$x(z+\omega_\alpha,\bar z+\bar\omega_\alpha)=u_\alpha x(z,\bar z),$$

где $u_\alpha=\pm1$, $\alpha=1,2$.

Для классической $\mathbb{CP}^{m-1}$-модели требуется решить уравнения Эйлера–Лагранжа для $L_{\mathbb{CP}^{m-1}}$. Требуется определенная аккуратность для формулировки условий периодичности.

Пространство полей в $\mathbb{CP}^{m-1}$-модели — это пространство отображений

$$\begin{gathered}\mathcal{F}=\mathrm{Maps}(\Sigma,\mathbb{CP}^{m-1})=\\ =\mathrm{Maps}\left(\Sigma,\mathbf{S}^{2m-1}/U(1)\right),\end{gathered} \tag{2.16}$$

которое является фактор-пространством $U(1)$ эквивариантных отображений

$$\mathcal{F}=\mathrm{Maps}\left(P,\mathbf{S}^{2m-1}\right)^{U(1)}/\mathcal{G}_P \tag{2.17}$$

$U(1)$-расслоений P над Σ в сферу $\mathbf{S}^{2m-1}$ по действию калибровочной группы $\mathcal{G}_P=\mathrm{Maps}(\Sigma,U(1))$.

Множество связных компонент $\pi_0 \mathrm{Maps}(\Sigma, \mathbb{CP}^{m-1})$ является множеством топологических классов расслоений P, которое при $n \geq 2$ изоморфно $\mathbb{Z}$. В настоящей работе мы рассматриваем только случай нулевого класса в $\mathbb{Z}$, а именно, $P = \Sigma \times U(1)$.

Соответствующее комплексифицированное пространство — это пространство отображений

$$\psi : \Sigma \to W, \quad \psi^\sigma : \Sigma \to W^\vee,$$

удовлетворяющих подкрученным граничным условиям

$$\psi(z + \omega_\alpha, \bar{z} + \bar{\omega}_\alpha) = u_\alpha(z, \bar{z})\psi(z, \bar{z}),$$

$$\psi^\sigma(z + \omega_\alpha, \bar{z} + \bar{\omega}_\alpha) = u_\alpha(z, \bar{z})^{-1}\psi^\sigma(z, \bar{z})$$

для $\alpha = 1, 2$, где $u_\alpha(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^\times$, профакторизованное по соотношению

$$(\psi, \psi^\sigma) \sim \left(t\psi, t^{-1}\psi^\sigma\right)$$

для любых двумерных периодических функций $t : \Sigma \to \mathbb{C}^\times$. Калибровочные поля $\mathfrak{A}_\alpha$ должны удовлетворять подкрученным условиям периодичности

$$A_\alpha(z + \omega_\beta, \bar{z} + \bar{\omega}_\beta) = \\ = A_\alpha(z, \bar{z}) + u_\beta(z, \bar{z})^{-1}\partial_\alpha u_\beta(z, \bar{z}) \ . \quad (2.18)$$

Определение комплексификации $\mathbb{HP}^n$-модели мы оставляем в качестве упражнения.

2.1.3. Модели главного кирального поля

С общей точки зрения представляет интерес случай, когда многообразие $X = \mathcal{G}$ является компактной группой Ли. В этом случае так называемой модели главного кирального поля в качестве римановой метрики на X берется $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ инвариантная метрика

$$G = \mathrm{tr}(g^{-1}dg)^2 \ . \quad (2.19)$$

Группой симметрии модели главного кирального поля является $H = \mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

2.1.4. Твистованные граничные условия и комплексификация

Как отмечалось во Введении (см. также (2.3)), простейший твист граничных условий соответствует выбору плоской связности в главном H-расслоении P_c над Σ. Для случая $\Sigma \approx \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ это соответствует выбору двух коммутирующих элементов $h_x, h_y \in H$, $h_x h_y = h_y h_x$, с точностью до общего сопряжения

$$(h_x, h_y) \equiv (h^{-1}h_x h, h^{-1}h_y h), \quad h \in H.$$

Для главного кирального поля $X = \mathcal{G}$ твистованные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} g(z+1, \bar{z}+1) &= a_L g(z, \bar{z}) a_R^{-1}, \\ g(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) &= b_L g(z, \bar{z}) b_R^{-1}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $a_{L,R}, b_{L,R} \in \mathcal{G}$ могут быть одновременным сопряжением переведены в максимальный тор $T \subset \mathcal{G}$.

Для $X = \mathbf{S}^{2m-1}$ коммутирующая пара общих твистов $h_x, h_y \in O(V)$ задает разложение

$$V \otimes \mathbb{C} = W \oplus W^\vee,$$

при котором h_x, h_y представляются унитарными коммутирующими операторами $a, b \in GL(W)$, $[a, b] = 0$:

$$\begin{aligned} & h_x\left(\psi \oplus \psi^\sigma\right) = a \cdot \psi \oplus \psi^\sigma a^{-1}\,, \\ & h_y\left(\psi \oplus \psi^\sigma\right) = b \cdot \psi \oplus \psi^\sigma b^{-1}\,, \\ & \psi \in W\,,\ \psi^\sigma \in W^\vee, \\ & g(\psi_1 \oplus \psi_1^\sigma, \psi_2 \oplus \psi_2^\sigma) = \psi_2^\sigma \cdot \psi_1 + \psi_1^\sigma \cdot \psi_2\,. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В случае $X = \mathbf{S}^{2m}$ коммутирующая пара твистов общего положения $h_x, h_y \in O(2n+1)$, $h_x h_y = h_y h_x$, задает разложение

$$V \otimes \mathbb{C} = W \oplus W^\vee \oplus \mathbb{C},$$

такое что h_x, h_y могут быть представлены унитарными операторами $a, b \in U(W)$, как в (2.21), и действуют на $\mathbb{C}$ умножением на ± 1. В этом случае метрика на V имеет вид

$$\|\psi \oplus \psi^\sigma \oplus \chi\|_g^2 = 2\psi^\sigma \cdot \psi + \chi^2. \quad (2.22)$$

При комплексификации мы полагаем, что ψ, ψ^σ и χ являются независимыми полями со значениями в W, $W^\vee$ и $\mathbb{C}$, соответственно. При этом a, b становятся общими коммутирующими элементами $GL(W)$. В настоящей работе мы рассматриваем только случай, когда

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n), \\ b &= \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)\,, \end{aligned} \quad (2.23)$$

хотя случай жордановых клеток также представляет интерес.

Для $X = \mathbb{CP}^{m-1}$ граничные условия классифицируются элементами

$$c = e^{\frac{2\pi i p}{m}} \in \mathbb{Z}_m,$$

вторым классом Штифеля–Уитни $SU(m)/\mathbb{Z}_m$ расслоения и парой h_x, h_y матриц из $SU(m)$, таких что

$$h_x h_y = c h_y h_x \tag{2.24}$$

с точностью до общего сопряжения

$$h_\alpha \sim h^{-1} h_\alpha h, \quad \alpha = x,\, y, \quad h \in SU(m).$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\psi(z+\omega_\alpha, \bar z + \bar\omega_\alpha) = h_\alpha e^{i\varphi_\alpha(z,\bar z)} \psi(z,\bar z)\,,\\ \psi^\sigma(z+\omega_\alpha, \bar z + \bar\omega_\alpha) = e^{-i\varphi_\alpha(z,\bar z)} \psi^\sigma(z,\bar z) h_\alpha^{-1}\,,\\ A_a(z+\omega_\alpha, \bar z + \bar\omega_\alpha) = A_a(z,\bar z) + i\partial_a \varphi(z,\bar z),\end{gathered} \tag{2.25}$$

в котором $e^{i\varphi_\alpha(z,\bar z)}$ является $U(1)$-значной функцией. Обозначим $l = gcd(p,m)$ и $k = m/l$. Тогда $h_1 h_2^k = h_2^k h_1$, а значит, на k-листном накрытии $\tilde\Sigma$ тора Σ мы получим обычные твистованные граничные условия. При комплексификации h_x, h_y становятся обычными элементами $GL(W)$, коммутирующими с точностью до элемента c центра, как в (2.24).

2.2. Уравнения движения при комплексификации

Для $O(N)$-модели с четным N имеем

$$\begin{gathered}\partial_z\partial_{\bar z}\psi = U\psi,\\ \partial_z\partial_{\bar z}\psi^\sigma = U\psi^\sigma\,,\\ U = -\frac{1}{2}\left(\partial_z\psi^\sigma\cdot\partial_{\bar z}\psi + \partial_{\bar z}\psi^\sigma\cdot\partial_z\psi\right)\,,\\ \psi^\sigma\cdot\psi = 1\,,\end{gathered} \tag{2.26}$$

а для нечетного N

$$\begin{gathered}\partial_z\partial_{\bar z}\psi = U\psi, \quad \partial_z\partial_{\bar z}\psi^\sigma = U\psi^\sigma,\\ \partial_z\partial_{\bar z}\chi = U\chi\,,\\ U = -\frac{1}{2}\left(\partial_z\psi^\sigma\cdot\partial_{\bar z}\psi + \partial_{\bar z}\psi^\sigma\cdot\partial_z\psi\right) - \partial_z\chi\partial_{\bar z}\chi\,,\\ \psi^\sigma\cdot\psi + \chi^2 = 1\,.\end{gathered} \tag{2.27}$$

В случае $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели комплексифицированные уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2}\left(D_{\bar z}D_z + D_z D_{\bar z}\right)\psi + U\,\psi = 0\,,\\ -\frac{1}{2}\left(D_{\bar z}D_z + D_z D_{\bar z}\right)\psi^\sigma + U\,\psi^\sigma = 0\,,\end{gathered} \tag{2.28}$$

где

$$\begin{gathered}D_{z,\bar z}\psi = \partial_{z,\bar z}\psi + A_{z,\bar z}\psi,\\ D_{z,\bar z}\psi^\sigma = \partial_{z,\bar z}\psi^\sigma - A_{z,\bar z}\psi^\sigma\,.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Калибровочные поля A_α и потенциал U выражаются в терминах решений ψ, ψ^σ, удовлетворяющих условиям связи

$$\psi^\sigma\cdot\psi = 1\,, \tag{2.30}$$

с помощью формул

$$\begin{gathered}A_{z,\bar z} = -\psi^\sigma\cdot\partial_{z,\bar z}\psi\,,\\ U = -\frac{1}{2}\left(D_z\psi^\sigma\cdot D_{\bar z}\psi + D_{\bar z}\psi^\sigma\cdot D_z\psi\right)\,.\end{gathered} \tag{2.31}$$

Уравнения (2.31) калибровочно инвариантны. Ниже мы часто будем использовать калибровку, в которой $A_{\bar z} = 0$.

2.3. Первые признаки алгебраической интегрируемости

Пусть (x, y) — вещественные координаты на Σ. Введем для $O(N)$-модели *анзатц Неймана*

$$\begin{gathered}\psi(x,y) = e^{ix\theta} f(y),\\ \psi^\sigma(x,y) = f^\sigma(y) e^{-ix\theta},\end{gathered} \tag{2.32}$$

где $f(y) \in W$, $f^\sigma(y) \in W^\vee$ для четных N, а для нечетных N дополнительно $\chi(x,y) = \chi(y) \in \mathbb{C}$. Для $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели мы будем использовать тот же анзац (2.32). Твист a имеет вид

$$a = e^{i\theta}\,. \tag{2.33}$$

В случае $O(N)$-модели с четным N и в случае $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели поля $f(y)$ и $f^\sigma(y)$ связаны соотношением

$$f^\sigma\cdot f = 1. \tag{2.34}$$

Для $O(N)$-модели с нечетным N связь имеет вид

$$\chi^2(y) + f^\sigma(y)\cdot f(y) = 1. \tag{2.35}$$

Подстановка анзаца в уравнения движения (ниже производные $\partial_y\Xi$ по y обозначаются через $\dot\Xi$) для $O(N)$-модели с четным N дает

$$\begin{gathered}\ddot f = \left(\bar\tau\tau\theta^2 - u(y)\right) f + 2i\tau_1\theta\dot f,\\ \ddot f^\sigma = f^\sigma\left(\bar\tau\tau\theta^2 - u(y)\right) - 2i\tau_1\dot f^\sigma\theta,\end{gathered} \tag{2.36}$$

где

$$u(y) \equiv -4\tau_2^2 U = i\tau_1\left(f^\sigma\theta\dot f - \dot f^\sigma\theta f\right) + \\ + \tau\bar\tau f^\sigma\cdot\theta^2 f + \dot f^\sigma\cdot\dot f\,. \tag{2.37}$$

Уравнения (2.36), (2.37) являются обобщением системы Неймана [5], которая линеаризуется на якобиане спектральной кривой [6]. Система (2.36) допускает представление Лакса со спектральным параметром, являющимся вариантом $\mathfrak{gl}_2$-системы Хитчина в роде нуль с регулярными [2] и иррегулярными особенностями. Похожий анзац существует и для $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели, которому также можно сопоставить систему Хитчина для рода нуль.

Можно сделать два заключения. Во-первых, существуют решения сигма-моделей, которые описываются линейным движением на некоторых абелевых многообразиях и которые аналогичны решениям, возникающим в квантово-механическом случае. Во-вторых, соответствующие абелевы многообразия являются якобианами или приммианами некоторых спектральных кривых. К сожалению, не видно никакого простого обобщения анзаца Неймана для получения более общих решений сигма-моделей. Необходим другой подход.

Для $N = 4$ имеет место совпадение $O(N)$-модели и модели главного кирального поля с группой $SU(2)$. Последняя, как и любая модель главного кирального поля, допускает представление нулевой кривизны, которое будет рассмотрено в работе [7]. Подход, который мы используем в настоящей работе для решения $O(N)$-модели, не использует представления нулевой кривизны. Он представляет собой развитие подхода, предложенного в работе [8] и развитого в работе [9]. Этот подход естественно назвать построением *интегрируемых линейных операторов с самосогласованными потенциалами.*

3. КОМПЛЕКСНАЯ ФЕРМИ-КРИВАЯ

Построение состоит из двух шагов. Сначала мы параметризуем периодический линейный оператор $-\Delta+u$ в терминах *спектральной кривой и линейного расслоения (дивизора) на ней.* Спектральная кривая $\mathcal{C}_u$, которая называется *комплексной ферми-кривой*, параметризует блоховские решения линейного уравнения. Второй шаг состоит из характеризации спектральных кривых, на которых существует набор таких точек, что соответствующий им набор блоховских решений удовлетворяет определенным квадратичным соотношениям.

3.1. Периодические линейные операторы

В этом разделе мы представим первый шаг построения. Для двумерной периодической функции $u : \Sigma \to \mathbb{C}$ рассмотрим блоховские решения уравнения Шредингера, т. е. решения уравнения

$$\partial\bar{\partial}\psi = u(z,\bar{z})\psi \,, \tag{3.1}$$

такие что

$$\begin{aligned} \psi(z+1,\bar{z}+1) &= a\,\psi(z,\bar{z})\,, \\ \psi(z+\tau,\bar{z}+\bar{\tau}) &= b\,\psi(z,\bar{z})\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для заданного $u = u(z,\bar{z})$ обозначим через

$$C_u \subset \mathcal{M} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$$

множество величин (a,b), для которых имеются решения уравнения (3.1), (3.2).

В работе [10] было доказано, что для общего гладкого периодического потенциала множество C_u является гладкой римановой поверхностью бесконечного рода. Более того, было доказано, что *алгебро-геометрические потенциалы* плотны в пространстве всех периодических потенциалов. Алгебро-геометрическими называются потенциалы, для которых нормализация $\mathcal{C}_u$ аналитической кривой C_u, называемая *ферми-кривой*, имеет конечный род. Для таких потенциалов $\mathcal{C}_u$ компактифицируется двумя бесконечными точками $P_\pm$. Уравнение Шредингера с любым комплексным потенциалом является *формально самосопряженным.* Поэтому для любого блоховского решения с множителями $(a,b) \in \mathcal{C}_u$ существует двойственное решение ψ^σ с множителями $(a^{-1},b^{-1}) \in \mathcal{C}_u$. Другими словами, любая ферми-кривая инвариантна относительно голоморфной инволюции $\sigma : \mathcal{C}_u \to \mathcal{C}_u$:

$$\sigma(a,b) := (a^{-1},b^{-1}). \tag{3.3}$$

Отметим, что неподвижные точки инволюции, отличные от бесконечных, существуют только тогда, когда уровень $E = 0$ является собственным для (анти)периодической задачи для оператора H.

3.1.1. Модельный пример

Для мотивировки дальнейшего начнем с разбора простейшего примера, в котором потенциал постоянен, $u(z,\bar{z}) = u_0 = \text{const} \neq 0$. Обозначим через $\Lambda, \bar{\Lambda} \subset \mathbb{C}$ решетки периодов, которые в рамках комплексифицированной постановки не предполагаются комплексно-сопряженными:

$$\begin{aligned} &\Lambda = \{\, \mathsf{m} + \mathsf{n}\tau \mid \mathsf{m},\mathsf{n} \in \mathbb{Z} \}\,, \\ &\bar{\Lambda} = \{\, \mathsf{m} + \mathsf{n}\bar{\tau} \mid \mathsf{m},\mathsf{n} \in \mathbb{Z} \}\,, \\ &\Lambda^0 = \Lambda \backslash \{0\}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Для $\kappa = \mathsf{m} + \mathsf{n}\tau \in \Lambda^0$ определим

$$\begin{aligned} \bar\kappa &= \mathsf{m} + \mathsf{n}\bar\tau\,, \\ \kappa_1 &= \mathsf{m} + \mathsf{n}\tau_1\,, \\ \kappa_2 &= \mathsf{n}\tau_2\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

и

$$\Lambda^{0,\kappa} = \Lambda \backslash \{\, 0, \kappa\,\}. \tag{3.6}$$

Для постоянного потенциала общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\psi(z,\bar z,\zeta) = \Upsilon_{\zeta,u_0} \equiv \exp\left(\zeta z + u_0\zeta^{-1}\bar z\right). \tag{3.7}$$

Явная параметризация кривой C_{u_0} дается формулами

$$\begin{aligned} a(\zeta) &= \exp(\zeta + u_0\zeta^{-1})\,, \\ b(\zeta) &= \exp(\zeta\tau + u_0\zeta^{-1}\bar\tau). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Кривая инвариантна относительно инволюции

$$\begin{aligned} \sigma &: \zeta \to -\zeta\,, \\ a(-\zeta) &= a^{-1}(\zeta)\,, \\ b(-\zeta) &= b^{-1}(\zeta). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Отображение (3.8) ферми-кривой $\mathcal{C}_{u_0} = \mathbb{C}^*$ в кривую C_{u_0} является отображением нормализации: оно взаимно-однозначно вне бесконечного числа пар точек $\left(\zeta^-_{\kappa,u_0}, \zeta^+_{\kappa,u_0}\right)$ для $\kappa \in \Lambda^0$, которые отображаются в двойные точки

$$(a_{\kappa,u_0}, b_{\kappa,u_0}) = \left(a(\zeta^\pm_{\kappa,u_0}), b(\zeta^\pm_{\kappa,u_0})\right)$$

кривой C_{u_0}. Здесь $\zeta^\pm_{\kappa,u_0}$ — решения уравнений

$$\begin{aligned} \zeta^+_{\kappa,u_0} - \zeta^-_{\kappa,u_0} &= \frac{\pi\bar\kappa}{\tau_2}\,, \\ \zeta^+_{\kappa,u_0}\zeta^-_{\kappa,u_0} &= \frac{\bar\kappa}{\kappa}u_0\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

В явном виде

$$\begin{aligned} a_{\kappa,u_0} &= (-1)^m \exp\frac{\pi\kappa_1}{\tau_2} D_{\kappa,u_0}\,, \\ b_{\kappa,u_0} &= (-1)^n \exp\frac{\pi(\kappa\bar\tau)_1}{\tau_2} D_{\kappa,u_0}\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned} D_{\kappa,u_0} &= \sqrt{1 + \frac{4u_0}{\mathsf{u}_\kappa}}, \\ \zeta^\pm_{\kappa,u_0} &= \frac{\pi\bar\kappa}{2\tau_2}\left(D_{\kappa,u_0} \pm 1\right), \\ \mathsf{u}_\kappa &= \frac{\pi^2\kappa\bar\kappa}{\tau\bar\tau} \end{aligned} \tag{3.12}$$

и

$$\begin{aligned} \kappa_1 &:= \mathsf{m} + \mathsf{n}\tau_1\,, \\ (\kappa\bar\tau)_1 &:= \mathsf{m}\tau_1 + \mathsf{n}\tau\bar\tau\,, \\ (\kappa\bar\tau)_2 &:= -\mathsf{m}\tau_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.1.2. Возмущение кривой

Обозначим через e_κ, $\kappa \in \Lambda$, базисные дважды периодические функции:

$$\mathsf{e}_\kappa = \exp\left(\frac{\pi}{\tau_2}\left(\bar\kappa z - \kappa\bar z\right)\right) = \exp(2\pi i(\mathsf{m}x + \mathsf{n}y)). \tag{3.14}$$

Тогда общий периодический потенциал может быть представлен в виде

$$u = u_0 + \varepsilon v = \sum_{\lambda\in\Lambda} u^{(\lambda)}\mathsf{e}_\lambda, \tag{3.15}$$

где $u^{(\lambda)} \in \mathbb{C}$. Будем считать, что $\varepsilon v = \varepsilon v(z,\bar z)$ — маленькое периодическое возмущение, т. е. $u^{(\lambda)} = \varepsilon v^{(\lambda)}$ для $\lambda \in \Lambda^0$ и $u^{(0)} = u_0 + \varepsilon v^{(0)}$ для постоянной моды.

Обозначая $\mathrm{H}_{u_0} = -\partial\bar\partial + u_0$, получаем

$$\mathrm{H}_{u_0}\left(\mathsf{e}_\kappa\Upsilon_{\zeta,u_0}\right) = E_\kappa(\zeta,u_0)\left(\mathsf{e}_\kappa\Upsilon_{\zeta,u_0}\right), \tag{3.16}$$

где

$$E_\kappa(\zeta,u_0) = \frac{\pi\kappa}{\tau_2\zeta}(\zeta + \zeta^+_{\kappa,u_0})(\zeta - \zeta^-_{\kappa,u_0}). \tag{3.17}$$

То, что правая часть уравнения (3.17) равна нулю в точках $\zeta = \mp\zeta^\pm_{\kappa,u_0}$, отражает равенство

$$\mathsf{e}_\kappa\Upsilon_{\zeta^-_{\kappa,u_0},u_0} = \Upsilon_{\zeta^+_{\kappa,u_0},u_0}. \tag{3.18}$$

Будем искать решения уравнения Шредингера

$$\left(\mathrm{H}_{u_0} + \varepsilon v\right)\Psi_{\zeta,u_0} = 0 \tag{3.19}$$

в виде

$$\Psi_{\zeta,u_0} = \Upsilon_{\zeta,u_0} + \sum_{\lambda\in\Lambda^0}\psi^{(\lambda)}_{\zeta,u_0}\left(\mathsf{e}_\lambda\Upsilon_{\zeta,u_0}\right). \tag{3.20}$$

Уравнение (3.19) эквивалентно системе квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned} v^{(\kappa)} + \Big(v^{(0)} + \varepsilon^{-1}E_\kappa(\zeta,u_0)\Big)\psi^{(\kappa)}_{\zeta,u_0} &+ \\ + \sum_{\lambda\in\Lambda^{0,\kappa}} v^{(\lambda)}\psi^{(\kappa-\lambda)}_{\zeta,u_0} &= 0\,, \\ v^{(0)} + \sum_{\kappa\in\Lambda^0} v^{(\kappa)}\psi^{(-\kappa)}_{\zeta,u_0} &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Будем решать уравнения (3.21) по теории возмущений для малых ε. Имеется два типа решений.

1. Вне двойных точек, т. е. $\varepsilon \ll |\zeta - \zeta^\pm_{\kappa,u}|$ для всех $\kappa \in \Lambda$. В этом случае решение (3.20) доминируется единственной плоской волной Υ_{ζ,u_0}, поправки к которой имеют порядок ε:

$$\psi^{(\lambda)}_{\zeta,u_0} = -\varepsilon\frac{v^{(\lambda)}}{E_\lambda(\zeta,u_0)} + \ldots, \quad \lambda \in \Lambda^0\,, \tag{3.22}$$

а нулевая мода $u^{(0)}$ отличается от u_0 на члены порядка ε^2:

$$u^{(0)} = u_0 - \varepsilon^2 \sum_{\kappa \in \Lambda^0} \frac{v^{(\kappa)} v^{(-\kappa)}}{E_\kappa(\zeta, u)} + \ldots \tag{3.23}$$

Здесь и далее "…" обозначает члены более высокого порядка по ε. Соответствующая часть кривой C_{u_0} деформируется в кривую C_u:

$$\begin{aligned} a(\zeta) \;&=\; \exp\Bigg(\zeta + \frac{u^{(0)}}{\zeta} + \frac{\tau_2}{\pi} \times \\ &\times \sum_{\kappa \in \Lambda^0} \frac{u^{(\kappa)} u^{(-\kappa)}}{(\zeta + \zeta^+_{\kappa,u_0})(\zeta - \zeta^-_{\kappa,u_0})} + \ldots\Bigg), \\ b(\zeta) \;&=\; \exp\Bigg(\tau\zeta + \bar\tau \frac{u^{(0)}}{\zeta} + \frac{\tau_2 \bar\tau}{\pi} \times \\ &\times \sum_{\kappa \in \Lambda^0} \frac{u^{(\kappa)} u^{(-\kappa)}}{(\zeta + \zeta^+_{\kappa,u_0})(\zeta - \zeta^-_{\kappa,u_0})} + \ldots\Bigg). \end{aligned} \tag{3.24}$$

2. В окрестности одной из двойных точек, т. е. для выбранного $\kappa \in \Lambda^0$ и выбранного знака "+" или "−", $\zeta = \zeta_+$ или $\zeta = \zeta_-$, где $\zeta_\pm$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \zeta_+ - \zeta_- &= \frac{\pi \bar\kappa}{\tau_2}, \\ \frac{u_-}{\zeta_-} - \frac{u_+}{\zeta_+} &= \frac{\pi \kappa}{\tau_2}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

эквивалентных

$$\Upsilon_{\zeta_+, u_+} = \mathsf{e}_\kappa \Upsilon_{\zeta_-, u_-}. \tag{3.26}$$

Явным образом, при

$$u_\pm = u \pm \varepsilon y, \quad u = u^{(0)} - \varepsilon x,$$

имеем

$$\zeta_\pm = \frac{\pi \bar\kappa}{2\tau_2} \left(\sqrt{D^2_{\kappa,u} + \frac{4\varepsilon^2 y^2}{\mathsf{u}^2_\kappa}} - \frac{2\varepsilon y}{\mathsf{u}_\kappa} \pm 1 \right). \tag{3.27}$$

Решение уравнения $\mathrm{H}\Psi = 0$ может быть найдено в виде

$$\begin{aligned} \Psi = \psi^+ \Upsilon_{\zeta_+, u_+} + \psi^- \Upsilon_{\zeta_-, u_-} + \\ + \varepsilon \sum_{\lambda \in \Lambda^{0,\kappa}} \chi^\lambda \mathsf{e}_\lambda \Upsilon_{\zeta_-, u_-}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

причем коэффициенты

$$\begin{aligned} \psi^\pm &= \psi^\pm_0 + \varepsilon \psi^\pm_1 + \ldots, \\ \chi^\lambda &= \chi^{(\lambda)}_0 + \varepsilon \chi^{(\lambda)}_1 + \ldots \end{aligned}$$

определяются из билинейных уравнений, которые в пределе $\varepsilon \to 0$ сводятся к

$$x^2 - y^2 = v^{(\kappa)} v^{(-\kappa)} \tag{3.29}$$

и

$$\begin{aligned} \psi^+ &= t\, v^{(\kappa)} \;=\; \tilde t\,(x + y), \\ \psi^- &= t\,(y - x) \;=\; -\tilde t\, v^{(-\kappa)}, \\ \chi^{(\lambda)} &= t\, \frac{(x - y) v^{(\lambda)} - v^{(\lambda-\kappa)} v^{(\kappa)}}{\mathcal{E}_\lambda(\kappa)} \;= \\ &= \tilde t\, \frac{v^{(\lambda)} v^{(-\kappa)} - (x + y) v^{(\lambda-\kappa)}}{\mathcal{E}_\lambda(\kappa)}, \\ \lambda &\in \Lambda^{0,\kappa}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где t или $\tilde t$ — произвольные нормирующие множители,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\kappa) = \frac{\mathsf{u}_\kappa}{2\lambda\bar\lambda} \big(2\lambda\bar\lambda - \\ - \kappa\bar\lambda \left(1 + D_{\kappa,u^{(0)}}\right) - \bar\kappa\lambda \left(1 - D_{\kappa,u^{(0)}}\right)\big). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Часть кривой C_u в окрестности точки $(a_{\kappa,u_0}, b_{\kappa,u_0})$ в параметрах (x, y) имеет вид (ср. (3.5), (3.13))

$$\begin{aligned} \frac{a(x,y)}{a_{\kappa,u^{(0)}}} &= 1 + \frac{2\pi i \varepsilon}{\tau_2 \mathsf{u}_\kappa D_{\kappa,u^{(0)}}} \times \\ &\times \left(\kappa_2\, D_{\kappa,u^{(0)}}\, y - \kappa_1\, x \right) + \ldots, \\ \frac{b(x,y)}{b_{\kappa,u^{(0)}}} &= 1 + \frac{2\pi i \varepsilon}{\tau_2 \mathsf{u}_\kappa D_{\kappa,u^{(0)}}} \times \\ &\times \left((\kappa\bar\tau)_2 D_{\kappa,u^{(0)}}\, y - (\kappa\bar\tau)_1 x \right) + \ldots \end{aligned} \tag{3.32}$$

Это параметрическое представление несингулярной квадрики, которая при $v^{(\kappa)} v^{(-\kappa)} \to 0$ вырождается в пару прямых, пересекающихся в двойной точке $(x, y) = (0, 0)$. Для

$$v^{(\kappa)} v^{(-\kappa)} \neq 0$$

двойная точка разрешается.

Отметим, что разрешение двойных точек происходит одновременно для κ и $-\kappa$, поскольку параметр в правой части (3.29) четен по κ. Можно проверить, что симметрия $\zeta \mapsto -\zeta$ сохраняется во всех порядках теории возмущений.

Замечание 3.1. Теория возмущений, развитая в работе [10], имеет другую природу и применима к конечным возмущениям. Для конечных возмущения кривая C_u оказывается «склеенной» из областей трех, а не двух, как выше, типов. Третий тип отвечает резонансам более высокого порядка, которые приходится рассматривать для конечных возмущений.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИ-ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Напомним, что алгебраически-интегрируемые потенциалы были определены выше как потенциалы, для которых соответствующая ферми-кривая $\mathcal{C}_u$ имеет конечный род.

Теория двумерных операторов, интегрируемых *на одном уровне энергии*, восходит к работе [11], в которой была предложена алгебро-геометрическая конструкция интегрируемых двумерных операторов Шредингера *в магнитном поле*

$$H = -\frac{1}{2}\left(D_z D_{\bar{z}} + D_{\bar{z}} D_z\right) + U(z,\bar{z}). \tag{4.1}$$

Сдвиг потенциала $U \to U - E$ преобразует уравнение $H\psi = E\psi$ к виду $H\psi = 0$. Поэтому без ограничения общности мы будем считать, что уровень энергии *нулевой.*

Построения работы [11] основывались на понятии *двухточечной, двухпараметрической* функции Бейкера – Ахиезера $\psi(z,\bar{z},p)$, которая однозначно определялась гладкой алгебраической кривой Γ рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$ и эффективным дивизором $D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_g$ степени g. Для функции Бейкера – Ахиезера и для потенциала оператора H были найдены явные формулы в терминах тэта-функции Римана Γ.

В работах [12, 13] были найдены *достаточные* условия, выделяющие среди общих алгебро-геометрических данных$\{\Gamma, P_\pm, D\}$ данные, соответствующие *потенциальным* операторам

$$H = -\partial_z \partial_{\bar{z}} + U(z,\bar{z})\,, \tag{4.2}$$

т. е. операторам с нулевым магнитным полем. Соответствующие кривые — это кривые с голоморфной инволюцией $\sigma : \Gamma \to \Gamma$, имеющие в точности *две* точки $P_\pm = \sigma(P_\pm)$. Требование на число неподвижных точек было крайне существенным и для другого замечательного результата Новикова и Веселова: соответсвующие функции Бейкера – Ахиезера допускают явные выражения в терминах тэта-функций Прима.

В работе [14] конструкция Новикова и Веселова была обобщена на случай, в котором выделенный уровень энергии является собственным для (анти)переиодической задачи для оператора Шредингера.

Пусть Γ является гладкой алгебраической кривой рода g с инволюцией

$$\sigma : \Gamma \longmapsto \Gamma, \quad \sigma \circ \sigma = Id\,, \tag{4.3}$$

имеющей $n+1$ пару

$$\Gamma^\sigma = \{P_\pm\} \cup \{p_\pm^{(i)} \,|\, i = 1,\ldots,n\}$$

неподвижных точек

$$\begin{aligned} \sigma(P_\pm) &= P_\pm, \\ \sigma(p_\pm^{(i)}) &= p_\pm^{(i)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Зафиксируем в окрестности двух из этих неподвижных точек $P_\pm$ локальные координаты $k_\pm^{-1}(p)$, такие что $k_\pm^{-1}(P_\pm) = 0$, которые предполагаются нечетными относительно σ, т. е.

$$k_\pm(\sigma(p)) = -k_\pm(p). \tag{4.5}$$

В дальнейшем фактор-кривая Γ/σ будет обозначаться через Γ_0. Проекция

$$\pi : \Gamma \longmapsto \Gamma_0 = \Gamma/\sigma \tag{4.6}$$

представляет кривую Γ как двулистное накрытие кривой Γ_0, ветвящееся в точках Γ^σ. В таком представлении инволюция σ соответствует перестановке листов накрытия. Из формулы Римана – Гурвица следует, что род кривой Γ равен

$$g = 2g_0 + n, \tag{4.7}$$

где g_0 — род кривой Γ_0.

Рассмотрим абелев интеграл третьего рода $d\Omega$ на Γ_0 с полюсами только в неподвижных точках инволюции, вычеты в которых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{P_\pm} d\Omega = \pm 1, \\ &\mathrm{Res}_{p_+^{(i)}} d\Omega = -\,\mathrm{Res}_{p_-^{(i)}} d\Omega. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Число нулей дифференциала $d\Omega$ равно $2(g_0+n) = g+n$. Обозначим их через γ_s^0, $s = 1,\ldots,g+n$, т. е.

$$d\Omega(\gamma_s^0) = 0. \tag{4.9}$$

Выберем для каждого s точку γ_s на Γ такую, что

$$\pi(\gamma_s) = \gamma_s^0, \quad s = 1,\ldots,g+n \tag{4.10}$$

(число таких выборов равно 2^{g+n}). Ниже $\gamma_1,\ldots,\gamma_{g+n}$ будет называться допустимым дивизором.

Лемма 4.1. (см. [14]) *Для допустимого дивизора общего положения D существует единственная функция Бейкера – Ахиезера $\psi(z,\bar{z},p), p \in \Gamma$, такая что*

(i) ψ *мероморфна на* $\Gamma \setminus P_\pm$ *и имеет не более чем простые полюса в точках* γ_s *(если они различны)*;

(ii) *в окрестности точки* $P_\pm$ *функция* ψ *имеет вид*

$$\psi = \exp\left(\frac{1}{2}k_\pm(z+\bar z \pm z \mp \bar z)\right) \times \\ \times \left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^\pm(z,\bar z)k_\pm^{-s}\right), \quad k_\pm = k_\pm(p); \tag{4.11}$$

(iii) *ее значения в точках* $p_\pm^{(i)}$ *удовлетворяют уравнению*

$$\psi(z,\bar z, p_+^{(i)}) = \psi(z,\bar z, p_-^{(i)}). \tag{4.12}$$

Напомним стандартные факты об многообразии Прима и тэта-функции Прима.

Существует базис a- и b-циклов на Γ с канонической матрицей пересечений:

$$a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0,$$

$$a_i \cdot b_j = \delta_{ij},$$

на котором действие σ имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma(a_i) = a_{i+g_0},\\ \sigma(b_i) = b_{i+g_0},\\ i=1,\ldots,g_0,\end{gathered} \tag{4.13}$$

и

$$\begin{gathered}\sigma(a_i) = -a_i,\\ \sigma(b_i) = -b_i,\\ i = 2g_0+1,\ldots,2g_0+n = g\ .\end{gathered} \tag{4.14}$$

Рассмотрим базис голоморфных дифференциалов $d\omega_i$ на Γ, нормированных так, что

$$\oint_{a_j} d\omega_i = \delta_i^j, \quad 1\le i,j,\le g, \tag{4.15}$$

и определим базис нечетных дифференциалов

$$du_i = d\omega_i - d\omega_{i+g_0}, \quad i=1,\ldots,g_0\,, \tag{4.16}$$

$$du_i = 2d\omega_{i+g_0}\,, \quad i = g_0+1,\ldots,g_0+n\,, \tag{4.17}$$

$\sigma^*(du_j) = -du_j$. Они называются *нормированными голоморфными дифференциалами Прима.* Заметим, что при $n>0$ число g_0+n этих дифференциалов больше, чем половина рода g кривой Γ. Обозначим вектор нормированных дифференциалов Прима через

$$d\mathbf{u} = (du_j)_{j=1}^{g_0+n}. \tag{4.18}$$

Матрица $\mathbf{\Pi} \in \mathrm{Mat}_{(g_0+n)\times(g_0+n)}(\mathbb{C})$ b-периодов дифференциалов Прима

$$\Pi_{kj} = \oint_{b_k} du_j, \quad 1\le k,j\le g_0+n\,, \tag{4.19}$$

симметрична, имеет положительно-определенную мнимую часть и определяет тэта-функцию Прима

$$\theta(\mathbf{z}) = \theta(\mathbf{z}|\mathbf{\Pi}) := \\ = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{g_0+n}} \exp\left(2\pi i(\mathbf{z},\mathbf{m}) + \pi i(\Pi\mathbf{m},\mathbf{m})\right), \tag{4.20}$$

где для $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^{g_0+n}$

$$(\mathbf{z},\mathbf{m}) = m_1z_1+\ldots+m_{g_0+n}z_{g_0+n}\ . \tag{4.21}$$

Тэта-функция имеет следующие свойства монодромии:
для

$$\mathbf{m},\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^{g_0+n} \tag{4.22}$$

выполняется

$$\theta(\mathbf{z}+\mathbf{m}+\mathbf{\Pi}\mathbf{n}|\mathbf{\Pi}) = \\ = \theta(\mathbf{z}|\mathbf{\Pi})\exp\left(-2\pi i(\mathbf{z},\mathbf{n}) - \pi i(\mathbf{n},\mathbf{\Pi}\mathbf{n})\right)\,. \tag{4.23}$$

Лемма 4.2. (см. [14]) *Функция Бейкера – Ахиезера в Лемме 4.1 равна*

$$\psi(z,\bar z,p) = \frac{\theta(\mathbf{A}(p)+z\mathbf{U}_+ + \bar z\mathbf{U}_- + \mathbf{Z})\,\theta(\mathbf{Z})}{\theta(z\mathbf{U}_+ + \bar z\mathbf{U}_- + \mathbf{Z})\,\theta(\mathbf{A}(p)+\mathbf{Z})} \times \\ \times \exp\left(z\,\Omega_+(p) + \bar z\,\Omega_-(p)\right). \tag{4.24}$$

Здесь

(i)

$$\mathbf{A}(p) = \int_{P_-}^{p} d\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{g_0+n}/\mathbb{Z}^{g_0+n}\oplus\mathbf{\Pi}\mathbb{Z}^{g_0+n};$$

(ii)

$$\Omega_\pm(p) = \int_{P_\mp}^{p} d\Omega_\pm,$$

где $d\Omega_\pm$ *— единственный мероморфный дифференциал на* Γ, *нормированный условиями*

$$\oint_{a_j} d\Omega_\pm = 0\,, \quad j=1,\ldots,g_0+n\,, \tag{4.25}$$

с единственным полюсом (второго порядка) в $P_\pm$ *вида*

$$d\Omega_\pm = \left(1+O(k_\pm^{-2})\right)dk_\pm\,, \quad p\to P_\pm\ ; \tag{4.26}$$

(iii) *координаты векторов*

$$\mathbf{U}_\pm = (U^j_\pm)^g_{j=1} \in \mathbb{C}^g$$

равны

$$U^j_\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{b_j} d\Omega_\pm\ , \quad j = 1, \ldots, g_0 + n\,; \qquad (4.27)$$

(iv) *вектор*

$$\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{g_0+n}/\mathbb{Z}^{g_0+n} \oplus \mathbf{\Pi}\mathbb{Z}^{g_0+n}$$

параметризует допустимые дивизоры,

$$\sum_{s=1}^{g+n} \mathbf{A}(\gamma_s) + \mathbf{Z} \in \mathbb{Z}^{g_0+n} \oplus \mathbf{\Pi}\mathbb{Z}^{g_0+n}\,, \qquad (4.28)$$

(*напомним, что* $d\Omega(\pi(\gamma_s)) = 0$).

Замечание 4.3. Определение абелева интеграла Ω_- нуждается в уточнении, поскольку дифференциал $d\Omega_-$ имеет полюс в точке P_-. Под интегралом $d\Omega_-$ мы подразумеваем выбор в окрестности P_- ветви $\Omega_- = k_- + O(k_-^{-1})$, а затем ее аналитическое продолжение вдоль пути. Предполагается, что пути в определении $\mathbf{A}(p)$ и $\Omega_\pm(p)$ одни и те же.

Теорема 4.4. (см. [14]) *Функция Бейкера – Ахиезера $\psi(z,\bar z,p)$, заданная формулой (4.24), удовлетворяет уравнению*

$$(\partial_z\partial_{\bar z} - u(z,\bar z))\psi(z,\bar z,p) = 0 \qquad (4.29)$$

с потенциалом

$$u(z,\bar z) = \partial_{\bar z}\xi_1^+ = \partial_z\xi_1^- = \\ = 2\partial_z\partial_{\bar z}\ln\theta(z\mathbf{U}^+ + \bar z\mathbf{U}^- + \mathbf{Z}). \qquad (4.30)$$

Таким образом, данные $(\Gamma, \sigma, P_\pm, k_\pm, \Omega)$ определяют потенциал $u(z,\bar z)$ оператора Шредингера. В случае, когда этот потенциал периодичен, его ферми-кривая и кривая Γ совпадают, $\mathcal{C}_u = \Gamma$.

5. УСЛОВИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

5.1. Самосогласованные потенциалы: появление функции E

Предположим, что на кривой Γ_0 существует мероморфная функция $E(q)$ с m простыми полюсами. Обозначим их через

$$q^{(j)} \in \Gamma_0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

а их прообразы на Γ — через

$$\{q_+^{(j)}, q_-^{(j)} = \sigma(q_+^{(j)})\} = \pi^{-1}(q^{(j)}).$$

Прообраз π^*E функции E является четной относительно σ мероморфной функцией на Γ, которую мы будем также обозначать через E: $E\circ\sigma = E$. Введем «времена» $T_n^\pm$, разлагая E в точке $P_\pm$ по локальной координате $k_\pm^{-1}$:

$$E(p) = E_\pm + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^\pm k_\pm(p)^{-2n}, \quad p \to P_\pm\ . \qquad (5.1)$$

Пусть $\psi(z,\bar z,p)$ — функция Бейкера – Ахиезера (4.24) на Γ. Определим $(N = n + 2m)$-мерный вектор

$$x(z,\bar z) = \chi \oplus \psi \oplus \psi^\sigma,$$

$$\chi \in \mathbb{C}^n, \quad \psi \in \mathbb{C}^m, \quad \psi^\sigma \in \mathbb{C}^m,$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(z,\bar z) &= \Big(r_i\,\psi(z,\bar z,p_\pm^{(i)})\Big)_{i=1}^n\,, \\ \psi(z,\bar z) &= \Big(r_j\,\psi(z,\bar z,q_+^{(j)})\Big)_{j=1}^m\,, \\ \psi^\sigma(z,\bar z) &= \Big(r_j\,\psi(z,\bar z,q_-^{(j)})\Big)_{j=1}^m\,, \end{aligned} \qquad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} r_i^2 &:= -\frac{E(p_+^{(i)}) - E(p_-^{(i)})}{E_+ - E_-}\operatorname{Res}_{p_+^{(i)}} d\Omega, \\ &\qquad i = 1, \ldots, n, \\ r_j^2 &:= -\frac{1}{2(E_+ - E_-)}\operatorname{Res}_{q^{(j)}} E\,d\Omega\,, \\ &\qquad j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Замечание 5.1. Заметим, что первое из уравнений (5.3) может быть записано в виде

$$r_i^2 := -\frac{\operatorname{Res}_{p_+^{(i)}} E\,d\Omega + \operatorname{Res}_{p_-^{(i)}} E\,d\Omega}{E_+ - E_-}\,, \qquad (5.4)$$

подчеркивающем роль дифференциала $E\,d\Omega$.

Теорема 5.2. *Вектор $x(z,\bar z) \in \mathbb{C}^N$ удовлетворяет уравнениям*

$$g(x,x) \equiv \sum_{i=1}^n \chi_i^2 + \sum_{j=1}^m \psi_j\psi_j^\sigma \;=\; 1\,, \qquad (5.5)$$

$$g\,(\partial_z x, \partial_{\bar z} x) = -u(z,\bar z), \qquad (5.6)$$

где u — потенциал соответствующего оператора Шредингера. Кроме того, для компонент $T_{zz}, T_{\bar z\bar z}$ классического тензора напряжений имеют место равенства

$$\begin{aligned} g\,(\partial_z x, \partial_z x) &= T_1^+, \\ g\,(\partial_{\bar z} x, \partial_{\bar z} x) &= T_1^-, \end{aligned} \qquad (5.7)$$

а для токов высших спинов — равенства

$$g\left(\partial_z^2 x, \partial_z^2 x\right) = T_2^+ + T_1^+ v^+,\\ g\left(\partial_{\bar z}^2 x, \partial_{\bar z}^2 x\right) = T_2^- + T_1^- v^-, \tag{5.8}$$

где

$$\partial_{\bar z} v^+ = u_z, \quad \partial_z v^- = u_{\bar z}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциал

$$d\Omega^{[0,0]} := \psi\psi^\sigma E\, d\Omega\,, \tag{5.10}$$

где

$$\psi^\sigma(z, \bar z, p) = \psi(z, \bar z, \sigma(p))\,. \tag{5.11}$$

Так как, по предположению, локальные координаты $k_\pm^{-1}$ в окрестностях точек $P_\pm$ нечетны относительно σ, то экспоненциальные особенности первых двух множителей в (5.10) сокращают друг друга. Более того, из определения допустимых дивизоров следует, что полюса ψ и $\psi^\sigma = \sigma^*\psi$ сокращаются нулями $d\Omega$. Следовательно, дифференциал $d\Omega^{[0,0]}$ является четным относительно σ мероморфным дифференциалом на Γ с полюсами в точках, где $d\Omega$ или функция E имеют полюса, т. е. в точках

$$\Gamma^\sigma \cup \{\, q_\pm^{(j)} \,|\, j = 1, \ldots, m \,\}\,. \tag{5.12}$$

Сумма вычетов $d\Omega^{[0,0]}$ равна нулю. Явно выписывая выражения для вычетов $d\Omega^{[0,0]}$, получим (5.5). Уравнение (5.6) является прямым следствием (5.5) и (4.29). Его можно получить непосредственно, рассматривая вычеты дифференциала

$$(\partial_z\psi\partial_{\bar z}\psi^\sigma + \partial_{\bar z}\psi\partial_z\psi^\sigma)\, E\, d\Omega.$$

Для доказательства (5.7) достаточно воспользоваться равенством нулю вычетов дифференциала

$$d\Omega^{[1,1]} = \partial_z\psi\partial_z\psi^\sigma E\, d\Omega.$$

Уравнение (5.8) следует из рассмотрения вычетов дифференциала

$$d\Omega^{[2,2]} = (\partial_z^2\psi)(\partial_z^2\psi^\sigma) E\, d\Omega.$$

□

5.2. Условия периодичности

Алгебро-геометрический потенциал $u(z, \bar z)$ периодичен по обеим переменным тогда и только тогда, когда дополнительно выполнены $g + n = 2(g_0 + n)$ условий:

$$\mathbf{U}^+ + \mathbf{U}^- = \mathbf{m} + \mathbf{\Pi}\cdot\tilde{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}} \in \mathbb{Z}^{g_0+n}\,,\\ \tau\mathbf{U}^+ + \bar\tau\mathbf{U}^- = \mathbf{l} + \mathbf{\Pi}\cdot\tilde{\mathbf{l}}, \quad \mathbf{l}, \tilde{\mathbf{l}} \in \mathbb{Z}^{g_0+n}\,. \tag{5.13}$$

Если эти условия выполнены, то кривая Γ отображается в $\mathcal{M} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$, (ср. (3.2)):

$$\mu : \Gamma \to C_u \subset \mathcal{M}\,,\ \mu : p \mapsto (a(p), b(p)),\\ a(p) = \exp\left(\Omega_+(p) + \Omega_-(p) - 2\pi i(\mathbf{A}(p), \tilde{\mathbf{m}})\right),\\ b(p) = \exp\left(\tau\Omega_+(p) + \bar\tau\Omega_-(p) - 2\pi i(\mathbf{A}(p), \tilde{\mathbf{l}})\right). \tag{5.14}$$

Выражения (5.14) хорошо определены (однозначны на кривой), поскольку A-периоды дифференциалов $d\Omega_\pm$ нулевые, а дифференциалов $(d\mathbf{A}(p), \tilde{\mathbf{m}})$, $(d\mathbf{A}(p), \tilde{\mathbf{l}})$ — целочисленны. В то же время B-периоды дифференциалов

$$d\alpha := d\Omega_+(p) + d\Omega_-(p) - 2\pi i(d\mathbf{A}(p), \tilde{\mathbf{m}})\,, \tag{5.15}$$

$$d\beta := \tau d\Omega_+(p) + \bar\tau d\Omega_-(p) - 2\pi i(d\mathbf{A}(p), \tilde{\mathbf{l}}) \tag{5.16}$$

являются координатами векторов $2\pi i\mathbf{m}$ и $2\pi i\mathbf{l}$, соответственно.

Отметим, что в том случае, когда дифференциал $u(z, \bar z)$ дважды периодичен, соответствующая функция Бейкера – Ахиезера является блоховским решением уравнения Шредингера, т. е.

$$\psi(z+1, \bar z+1, p) = a(p)\psi(z, \bar z, p)\,, \tag{5.17}$$

$$\psi(z+\tau, \bar z+\bar\tau, p) = b(p)\psi(z, \bar z, p). \tag{5.18}$$

Для доказательства этих равенств достаточно проверить, что их правые и левые части имеют одинаковые аналитические свойства на Γ.

Локально гладкая алгебраическая кривая рода g с инволюцией, имеющая $2n+2$ неподвижных точек, однозначно определяется фактор-кривой и набором $2n+2$ точек на ней. Следовательно, размерность пространства таких кривых равна $3g_0 + 2n - 1$. Векторы $\mathbf{U}^\pm$, определенные выше, зависят от выбора первого ростка локальных координат $k_\pm^{-1}$ в окрестностях отмеченных точек $P_\pm$. Таким образом, общее число параметров равно $3g_0 + 2n + 1$. При фиксированных целочисленных векторах $\mathbf{l}, \tilde{\mathbf{l}}, \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}}$ уравнения (5.13), число которых равно $2(g_0+n)$, определяют (локально) подмногообразие размерности g_0+1, если оно непусто.

Множество $\mathcal{S}^{g_0,n}$ кривых Γ, удовлетворяющих условиям периодичности для некоторых целочисленных векторов $\mathbf{l}, \tilde{\mathbf{l}}, \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}}$, является объединением связных компонент:

$$\mathcal{S}^{g_0,n} = \bigcup_I \mathcal{S}_I^{g_0,n}. \tag{5.19}$$

Локальные координаты на $\mathcal{S}^{g_0,n}$ могут быть определены аналогично тем, которые используются для кривых Зайберга – Виттена, а именно

$$A_0 = \operatorname{Res}_{P_+} \alpha\, d\beta, \quad A_i = \oint\limits_{a_i + a_{g_0+i}} \alpha\, d\beta\,, \quad i = 1, \ldots, g_0. \tag{5.20}$$

Отметим, что, хотя абелев интеграл $\alpha(p)$ многозначен, выражения (5.20) хорошо определены. Действительно, сдвиг α на константу не меняет A_0, так как вычеты $d\beta$ нулевые. Этот сдвиг не меняет и величины A_i, так как дифференциал $d\beta$ нечетен относительно σ, в то время как $a_i + a_{g_0+i}$ является четным циклом.

Из определения (4.16) дифференциалов Прима следует (ср. (5.14))

$$a(p_+^{(i)}) = a(p_-^{(i)})\,, \quad b(p_+^{(i)}) = b(p_-^{(i)}). \tag{5.21}$$

При выполнении условий периодичности координаты вектора $x = \chi \oplus \psi \oplus \psi^\sigma$ имеют следующие свойства монодромии:

$$\begin{gathered} \chi_i(z+1, \bar z + 1) = a_i \chi_i(z, \bar z), \\ a_i^2 = a^2(p_\pm^{(i)}) = 1, \\ \chi_i(z+\tau, \bar z + \bar\tau) = b_i \chi_i(z, \bar z), \\ b_i^2 = b^2(p_\pm^{(i)}) = 1, \end{gathered} \tag{5.22}$$

здесь $i = 1, \ldots, n$, в то время как

$$\begin{aligned} &\psi(z+1, \bar z+1) = a\, \psi(z, \bar z)\,, \\ &\psi^\sigma(z+1, \bar z+1) = \psi^\sigma(z, \bar z)\, a^{-1}, \\ &\psi(z+\tau, \bar z+\bar\tau) \;=\; b\, \psi(z, \bar z)\,, \\ &\psi^\sigma(z+\tau, \bar z+\bar\tau) \;=\; \psi^\sigma(z, \bar z)\, b^{-1}\,, \end{aligned} \tag{5.23}$$

где

$$\begin{aligned} a^{\pm 1} &= \operatorname{diag}\left(a(q_\pm^{(1)}), \ldots, a(q_\pm^{(m)})\right)\,, \\ b^{\pm 1} &= \operatorname{diag}\left(b(q_\pm^{(1)}), \ldots, b(q_\pm^{(m)})\right)\,. \end{aligned} \tag{5.24}$$

5.3. Почему функция E существует?

Существование мероморфной функции E с определенными аналитическими свойствами на спектральной кривой Γ оператора $-\Delta + u$ приводит к тому, что потенциал u оператора может быть квадратичным образом выражен в терминах решений.

Целью настоящего раздела является доказательство того, что для случая гладких спектральных кривых существование функции E является не только достаточным, но и необходимым. Другими словами, доказательство того, что предложенное построение дает все решения рассматриваемой проблемы, для которых спектральная кривая является гладкой.

Напомним, что линейное уравнение (3.1) получается при вариации лагранжиана (2.15) по переменной x. Твистованные граничные условия накладывают ограничения на множитель Лагранжа $U = u(z, \bar z)$: соответствующая ферми-кривая в пространстве $\mathcal{M}$ блоховских множителей (известного также как пространство модулей плоских $\mathbb{C}^\times$-связностей) должна проходить через набор точек $M_j^\pm = \left(a_j^{\pm 1}, b_j^{\pm 1}\right)$, определяемых параметрами твистов.

В отсутствие твистов ($a_i = b_i = 1$) это эквивалентно нетривиальному нелокальному условию того, что нуль является собственным значением оператора Шредингера кратности не менее N.

Зафиксируем параметры твистов:

$$a = (a_j)_{j=1}^{n+m}\,, \quad b = (b_j)_{j=1}^{n+m}\,, \tag{5.25}$$

где

$$a_i^2 = b_i^2 = 1, \quad i = m+1, \ldots, n+m, \tag{5.26}$$

и обозначим через $\mathcal{U}_{a,b}$ $u(z, \bar z)$ множество потенциалов, для которых сформулированное выше условие выполнено, т. е.

$$\mathcal{U}_{a,b} := \left\{\, u \,|\; \left(a(q_j^\pm), b(q_j^\pm)\right) = = (a_j^{\pm 1}, b_j^{\pm 1}) \in \mathcal{C}_u\,,\; j = 1, \ldots, n+m \right\}. \tag{5.27}$$

Оно стратифицировано конечномерными многообразиями $\mathcal{U}_{a,b}^{n,g_0}$, открытые области которых образуют потенциалы, построенные выше, где g_0 — род фактор-кривой $\Gamma_0 := \Gamma/\sigma$, а $\#\Gamma^\sigma = 2(n+1)$ — число неподвижных точек инволюции.

Размерность многообразия $\mathcal{U}_{a,b}^{n,g_0}$ равна

$$\dim \mathcal{U}_{a,b}^{n,g_0} = (g_0 + 1 - m) + (g_0 + n). \tag{5.28}$$

Первое слагаемое в правой части (5.28) — размерность многообразия спектральных кривых $\mathcal{S}^{g_0,n}$, проходящих через $2m$ нетривиальных параметра подкрутки $a_j^{\pm 1}, b_j^{\pm}, j = 1, \ldots, m$. Второе слагаемое — это размерность соответствующего многообразия Прима.

Характеризация касательного пространства к бесконечномерному пространству $\mathcal{U}_{a,b}$ в пространстве всех потенциалов u операторов Шредингера на Σ дается следующей леммой.

Лемма 5.3. *Вариация $\delta u(z,\bar z)$ принадлежит касательному пространству $T_u\mathcal{U}_{a,b}$ к потенциалу $u \in \mathcal{U}_{a,b}$ тогда и только тогда, когда выполнены уравнения*

$$\int\limits_{\Sigma} \delta u(z,\bar z)\,\psi_j(z,\bar z)\psi_j^\sigma(z,\bar z)dz\,d\bar z = 0, \tag{5.29}$$

где

$$\psi_j(z,\bar z) := \psi(z,\bar z, q_+^{(j)}),$$
$$\psi_j^\sigma(z,\bar z) := \psi(z,\bar z, q_-^{(j)}).$$

Доказательство. Варьируя уравнение (3.1), получим

$$(\partial\bar\partial - u)\delta\psi_j = \delta u \psi_j\,. \tag{5.30}$$

По предположению, вариация $\delta\psi_j$ имеет те же блоховские множители (a_j, b_j), что и ψ_j. Умножая обе части (5.30) на двойственное решение ψ_j^σ уравнения (3.1), которое имеет блоховские множители (a_i^{-1}, b_i^{-1}), и усредняя потом по Σ, мы получим (5.29). □

Вариация лагранжиана по u дает уравнение

$$\int\limits_{\Sigma} \delta u(z,\bar z)\left(1 - \sum_j \psi_j\psi_j^\sigma\right) dz\,d\bar z = 0. \tag{5.31}$$

Учитывая (5.29), мы приходим к выводу, что решения сигма-модели соответствуют критическим точкам функционала

$$\langle u\rangle := \int\limits_{\Sigma} u(z,\bar z)\,dz\,d\bar z\,, \tag{5.32}$$

ограниченного на множество $\mathcal{U}_{a,b}$.

Теорема 5.4. *Потенциал $u(z,\bar z) \in \mathcal{U}_{a,b}$ с гладкой ферми-кривой $\mathcal{C}_u \in \mathcal{S}^{g_0,n}$ является критической точкой функционала (5.32), ограниченного на $\mathcal{U}_{a,b}$ тогда и только тогда, когда на фактор-кривой $\mathcal{C}_{u,0} = \mathcal{C}_u/\sigma$ существует мероморфная функция E с простыми полюсами в точках $q_j \in \mathcal{C}_{u,0}$, $j = 1,\ldots,m$.*

Доказательство. Начнем с доказательства того, что функционал (5.32) совпадает с первой координатой A_0 на $\mathcal{S}^{g_0,n}$, определенной (5.20). Точнее,

$$\langle u\rangle = A_0 = \mathrm{Res}_{P_+}\alpha\,d\beta. \tag{5.33}$$

Из (5.17) непосредственно следуют выражения для первых коэффициентов разложения дифференциалов $d\alpha$ и $d\beta$ в точке P_+,

$$\begin{aligned} d\alpha &= dk_+\left(1 + \sum_{s=1}^\infty \alpha_s\, k_+^{-s-1}\right), \\ d\beta &= dk_+\left(\tau + \sum_{s=1}^\infty \beta_s\, k_+^{-s-1}\right), \end{aligned} \tag{5.34}$$

в терминах первых коэффициентов разложения (4.11) функции Бейкера – Ахиезера

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \xi_1(z,\bar z) - \xi_1(z+1,\bar z+1)\,, \\ \beta_1 &= \xi_1(z,\bar z) - \xi_1(z+\tau,\bar z+\bar\tau). \end{aligned} \tag{5.35}$$

По определению, коэффициенты α_1, β_1 не зависят от $(z,\bar z)$. Тогда из (5.35) следует равенство

$$A_0 = \tau\alpha_1 - \beta_1 = \oint\limits_{\partial\Sigma}\xi_1 dz = \int\limits_{\Sigma}\partial_{\bar z}\xi_1 dz\wedge d\bar z\,, \tag{5.36}$$

из которого, в силу (4.30), следует (5.33).

Рассмотрим теперь дифференциал $\delta\alpha\,d\beta$. Поскольку периоды $d\alpha$ постоянны, этот дифференциал является однозначным четным мероморфным дифференциалом на ферми-кривой с не более чем простыми полюсами в отмеченных точках $P_\pm$. Из (5.20) следует, что он имеет вид

$$\delta\alpha d\beta \;=\; \delta A_0\,\pi^*(d\Omega_\pm) + \sum_{i=1}^{g_0}\delta A_i\,\pi^*(d\omega_i), \tag{5.37}$$

где $d\omega_i$ — нормированные голоморфные дифференциалы на $\mathcal{C}_u^{(0)} = \mathcal{C}_u/\sigma$, $\Omega_\pm$ — нормированный дифференциал третьего рода с простыми полюсами и вычетами ±1 в отмеченных точках, а $\pi : \mathcal{C}_u \to \mathcal{C}_u^{(0)}$ проекция.

Предположим, что $u(z,\bar z)$ является критической точкой функционала (5.32). Тогда из (5.33) и (5.37) следует, что $\delta\alpha d\beta$ является голоморфным дифференциалом на $\mathcal{C}_u$. Он равен нулю в точках q_j для всех вариаций касательных к многообразию спектральных кривых $\mathcal{S}_{a,b}^{g_0,n}$ потенциалов $u \in \mathcal{U}_{ab}^{g_0,n}$, так как при таких вариациях (a_j, b_j) остаются постоянными. Отсюда следует, что размерность пространства голоморфных дифференциалов на $\mathcal{C}_u$, равных нулю в m точках q_j, равна размерности $\mathcal{S}_{a,b}^{g_0,n}$, т. е. равна $g_0 + 1 - m$. Тогда из теоремы Римана – Роха следует, что размерность пространства функций, имеющих не более чем простые полюсы в точках q_j, равна

$$m + (g_0 + 1 - m) - g_0 + 1 = 2.$$

Это пространство всегда содержит константы. Следовательно, на $\mathcal{C}_u$ существует непостоянная функция E с полюсами в точках q^j. □

5.4. Суперпотенциал и черты геометрии Зайберга – Виттена

Переформулируем доказанное выше утверждение в форме, аналогичной (1.9). Множества $\mathcal{S}_I^{g_0,n}$ аналогичны компонентам $\mathcal{U}_\rho$ в квантово-механическом случае. Функционал

$$\langle u\rangle = A_0 = \mathrm{Res}_{P_+}\alpha\, d\beta$$

является аналогом суперпотенциала $\mathcal{W}$. Более того, деформируя контур вокруг P_+ таким образом, что он обходит разрезы и сингулярности $\alpha d\beta$, его можно сделать еще более похожим на (1.9).

5.5. Обсуждение: от $O(3)$-модели к приводимым спектральным кривым

Приведенное выше построение дает решения подкрученной $O(N)$-сигма-модели с $N = n+2m$, где m — число полюсов мероморфной функции E на Γ_0. По предположению, E не является постоянной, т. е. $m \geq 1$. При фиксированных $m > 1$ и n решения индексируются родом g_0 фактор-кривой и точкой I множества связных компонент соответствующих спектральных кривых (5.19). При этом мы получаем все решения для случая четных N и некоторые классы решений для нечетных N.

Случай $N = 3$ выделен. Для него имеется только одна возможность: $n = 1$ и $m = 1$. Равенство $m = 1$ означает что фактор-кривая является рациональной, т. е. $\Gamma_0 = \mathbb{CP}^1$, а значит, g_0 в этом случае принимает только одно значение, $g_0 = 0$. Поскольку $n = 1$, кривая Γ является двулистным накрытием Γ_0 с четырьмя точками ветвления. Значит, Γ является эллиптической кривой. Следовательно, соответствующие решения одномерны: они зависят только от линейной комбинации $Uz + \bar{U}\bar{z}$, где $U, \bar{U}$ — константы.

Это наблюдение привело авторов к необходимости дальнейших обобщений конструкции Новикова – Веселова на случай приводимых спектральных кривых. Как показано в работе [7], такое обобщение позволяет построить для любого нечетного N аналоги инстантонных решений $O(3)$-модели, для которых компоненты T_{zz}, $T_{\bar{z}\bar{z}}$ тензора энергии-импульса равны нулю. Точнее, в работе [7] доказывается, что построенные по приводимым спектральным кривым потенциалы оператора Шредингера удовлетворяют условиям самосогласования для $O(2m+n)$-модели с нечетным n и любым m. Более того, показано, что для соответствующих потенциалов задача выделения периодических решений эффективно решается в терминах спектральных кривых эллиптической системы Калоджеро – Мозера.

5.6. Ферми-кривые в $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели

Понятие комплексной ферми-кривой для периодического двумерного оператора Шредингера в магнитном поле (см. [11]) может быть введено аналогично потенциальному случаю, если *поток магнитного поля нулевой*, т. е. в случае тривиального главного $U(1)$-расслоения P или $\mathbb{C}^\times$-расслоения $P_\mathbb{C}$.

Пусть Γ — гладкая алгебраическая кривая рода g с фиксированными локальными координатами $k_\pm^{-1}$ двух отмеченных точек $P_\pm$. Тогда для каждого неспециального эффективного дивизора $D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_g$ на Γ существует единственная функция Бейкера – Ахиезера $\psi(z,\bar{z},p)$, такая что:

(i) как функция $p \in \Gamma$ она мероморфна на Γ вне отмеченных точек $P_\pm$ с дивизором полюсов D;

(ii) в окрестностях отмеченных точек она имеет вид (4.11), т. е.

$$\psi = \exp\left(\frac{1}{2}k_\pm(z + \bar{z} \pm z \mp \bar{z})\right) \times \\ \times \left(\sum_{s=0}^\infty \xi_s^\pm(z,\bar{z})k_\pm^{-s}\right),$$

$$k_\pm = k_\pm(p);$$

(iii) она нормирована условием

$$\xi_0^+(z,\bar{z}) = 1. \qquad (5.38)$$

Теорема 5.5. (см. [11]) *Определенная выше функция Бейкера – Ахиезера удовлетворяет уравнению*

$$(-\partial_z\partial_{\bar{z}} + A_z(z,\bar{z})\partial_{\bar{z}} + U(z,\bar{z}))\,\psi(z,\bar{z},p) = 0, \qquad (5.39)$$

где

$$\begin{aligned} A_z &= \partial_z \ln \xi_0^-,\\ U &= \partial_{\bar{z}}\xi_1^+. \end{aligned} \qquad (5.40)$$

Замечание 5.6. Нормировка (5.38) функции Бейкера – Ахиезера соответствует выбору калибровки, при которой $A_{\bar{z}} = 0$.

5.6.1. Двойственная функция Бейкера – Ахиезера

Для эффективного неспециального дивизора D степени g определим двойственный дивизор $\check{D}$ с помощью уравнения

$$D + \check{D} = \mathcal{K} + P_+ + P_-, \tag{5.41}$$

где $\mathcal{K}$ — канонический класс. Другими словами, для неспециального дивизора D степени g существует единственный мероморфный дифференциал $d\Omega$ с простыми полюсами в точках $P_\pm$, вычеты в которых равны ∓ 1, такой что $d\Omega(\gamma_s) = 0$. Общее число нулей $d\Omega$ равно $2g$. Точки γ_s^+ — это дополнительные нули $d\Omega$.

По определению, двойственная функция Бейкера – Ахиезера — это единственная функция $\psi^\sigma(z, \bar{z}, p)$, такая что:

(i) как функция $p \in \Gamma$ она мероморфна на Γ вне отмеченных точек $P_\pm$ с дивизором полюсов $\check{D}$;

(ii) в окрестностях отмеченных точек она имеет вид

$$\psi^\sigma = \exp\left(-\frac{1}{2}k_\pm(z + \bar{z} \pm z \mp \bar{z})\right) \times \times \left(\sum_{s=0}^{\infty} \check{\xi}_s^{\pm}(z, \bar{z}) k_\pm^{-s}\right), \quad k_\pm = k_\pm(p); \tag{5.42}$$

(iii) она нормирована условием

$$\check{\xi}_0^+(z, \bar{z}) = 1. \tag{5.43}$$

Аргументы, аналогичные использованным в работе [11], доказывают, что двойственная функция Бейкера – Ахиезера удовлетворяет уравнению

$$\left(-\partial_z\partial_{\bar{z}} + \check{A}_z(z, \bar{z})\partial_{\bar{z}} + \check{U}(z, \bar{z})\right)\psi^\sigma(z, \bar{z}, p) = 0, \tag{5.44}$$

где

$$\begin{aligned} \check{A}_z &= \partial_z \ln \check{\xi}_0^-, \\ \check{U} &= -\partial_{\bar{z}}\check{\xi}_1^+. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Из определения двойственной функции Бейкера – Ахиезера следует, что дифференциал $\psi\check{\psi}\, d\Omega$ мероморфен на Γ с простыми полюсами в точках $P_\pm$ и с вычетами

$$\mathrm{Res}_{P_+}\, \psi\check{\psi} d\Omega = -1, \quad \mathrm{Res}_{P_-}\, \psi\check{\psi} d\Omega = \xi_0^-\, \check{\xi}_0^-. \tag{5.46}$$

Из того, что сумма вычетов мероморфного дифференциала равна нулю, следует

$$\xi_0^- = (\check{\xi}_0^-)^{-1}. \tag{5.47}$$

Аналогично доказываются равенства

$$\begin{aligned} (\xi_1^+ + \check{\xi}_1^+) &= -\,\mathrm{Res}_{P_+}(\partial_z\psi)\psi^\sigma d\Omega = \\ &= \mathrm{Res}_{P_-}(\partial_z\psi)\psi^\sigma d\Omega = \\ &= (\partial_z\xi_0^-)\check{\xi}_0^-. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Следствием уравнений (5.44), (5.47) и (5.48) является то, что двойственная функция Бейкера – Ахиезера является решением формально сопряженного уравнения

$$(-\partial_z\partial_{\bar{z}} - A_z(z, \bar{z})\partial_{\bar{z}} + U(z, \bar{z})\partial_z A_z(z, \bar{z})) \times \times \check{\psi}(z, \bar{z}, p) = 0. \tag{5.49}$$

5.6.2. Условия самосогласования для $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели

Пусть $E(p)$ — мероморфная функция на Γ с простыми полюсами в точках q_i, $i = 1, \ldots, N$. Тогда $\psi\psi^\sigma\, E\, d\Omega$ является мероморфным дифференциалом на Γ с полюсами в точках $P_\pm$ и q_i. Сумма его вычетов равна нулю. Отсюда следует равенство

$$1 = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \psi_i \psi_i^\sigma, \tag{5.50}$$

в котором

$$\begin{aligned} \psi_i &= \psi(z, \bar{z}, q_i), \\ \psi_i^\sigma &= \psi^\sigma(z, \bar{z}, q_i) \end{aligned} \tag{5.51}$$

и

$$\begin{aligned} r_i^2 &= \frac{1}{E_+ - E_-}\mathrm{Res}_{q_i} E\, d\Omega, \\ E_\pm &= E(P_\pm). \end{aligned} \tag{5.52}$$

Дополнительно предположим, что дифференциал dE равен нулю в точках $P_\pm$, т. е. в окрестностях отмеченных точек:

$$dE(P_\pm) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E_\pm + O(k_\pm^2). \tag{5.53}$$

Тогда дифференциал $(\partial_z\psi)\psi^\sigma\, E d\Omega$ голоморфен в точке P_+, а его вычет в точке P_- равен

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{P_-}(E - E_+)(\partial_z\psi)\psi^\sigma d\Omega = \\ &\qquad = (E_- - E_+)A_z(z, \bar{z}). \end{aligned} \tag{5.54}$$

Следовательно,

$$\sum_i r_i^2 (\partial_z\psi_i)\psi_i^\sigma = A_z. \tag{5.55}$$

Аналогично, из равенства

$$\mathrm{Res}_{P_\pm}(E - E_-)\psi\partial_{\bar{z}}\psi^+ d\Omega = 0 \tag{5.56}$$

следует, что

$$0 = \sum_i r_i^2 \psi_i\, (\partial_{\bar{z}}\psi_i^\sigma) = -\sum_i r_i^2\, (\partial_{\bar{z}}\psi_i)\, \psi_i^\sigma. \tag{5.57}$$

5.6.3. Условия вещественности

Предположим, что кривая Γ является вещественной, т. е. на ней имеется антиголоморфная инволюция $\tau : \Gamma \longmapsto \Gamma$. Предположим, что эта антиинволюция переставляет отмеченные точки, $\tau(P_\pm) = P_\mp$, и что локальные координаты в окрестностях этих точек сопряжены относительно τ, т. е.

$$k_\pm(\tau(p)) = -\bar{k}_\mp(p).$$

Если дивизор D вещественен, $\tau(D) = D$, то из единственности функции Бейкера – Ахиезера следует равенство

$$\psi^\sigma(p) = \left(\bar{\xi}_0^-\right)^{-1} \bar{\psi}(\tau(p)). \qquad (5.58)$$

Из уравнений (5.58) и (5.47) следует

$$\xi_0^- = \overline{\xi_0^-}. \qquad (5.59)$$

Дифференциал $d\Omega$ удовлетворяет уравнению

$$d\Omega(\tau(p)) = -\overline{d\Omega}(\tau(p)). \qquad (5.60)$$

Предположим, что точки q_i инвариантны относительно τ, т. е. $q_i = \tau(q_i)$. Тогда без ограничения общности можно считать, что выполнено равенство

$$E(p) = -\bar{E}(\tau(p)). \qquad (5.61)$$

Тогда константы r_i^2 в (5.50) являются вещественными, $r_i^2 = \bar{r}_i^2$. При этом данные можно выбрать так, чтобы выполнялось

$$c^2 := (\xi_0^-)^2 > 0, \quad r_i^2 > 0.$$

После этого мы получим, что функции

$$n_i = c^{-1} r_i \psi_i \qquad (5.62)$$

удовлетворяют уравнению

$$(-\partial_z\partial_{\bar{z}} - (\partial_{\bar{z}} \log c)\,\partial_z + (\partial_z \log c)\,\partial_{\bar{z}} + V) \times \\ \times n_i = 0 \qquad (5.63)$$

и условиям самосогласования

$$\sum_{i=1}^N n_i \bar{n}_i = 1, \qquad (5.64)$$

а также (ср. (2.31))

$$A_z = -\sum_{i=1}^N \bar{n}_i(\partial_z n_i) = -\partial_z \log c\,, \qquad (5.65)$$

$$A_{\bar{z}} = -\sum_{i=1}^N \bar{n}_i(\partial_{\bar{z}} n_i) = \partial_{\bar{z}} \log c, \qquad (5.66)$$

т. е. являются решением $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели, если выполнены условия периодичности. В уравнении (5.63) V отличается от потенциала U, определенного выше, сдвигом на $A_z A_{\bar{z}}$.

Замечание 5.7. Явная тэта-функциональная формула для ψ тождественна (4.24) после замены тэта-функции Прима на тэта-функцию Римана, отвечающую матрице $\mathbf{T}$ b-периодов нормированных голоморфных дифференциалов на Γ.

Условия периодичности для Γ даются теми же уравнениями (5.13).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И НАПРАВЛЕНИЕ БУДУЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В настоящей работе мы построили широкий класс решений $O(N)$-модели для четных N и для $\mathbb{CP}^{N-1}$-модели с общими твистованными граничными условиями на Σ с произвольной метрикой. Каждая критическая точка порождает полубесконечную клетку в комплексифицированном пространстве $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ конфигурационных полей модели, так называемый наперсток Лефшеца. Последний зависит от неголоморфной части данных, таких как выбор эрмитовой метрики на $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$.

Основным инструментом нашего построения является аналитическая комплексная ферми-кривая $\mathcal{C}_u$, которая параметризует блоховские решения двумерного оператора Шредингера $-\Delta + u$. Линейные поля сигма-модели принадлежат ядру этого оператора, в то время как твисты модели определяют набор точек $M_1, \ldots, M_N$ в пространстве модулей $\mathcal{M}$ плоских $\mathbb{C}^\times$-связностей на Σ. Данные монодромии (аналог отображения Римана – Гильберта) отображают ферми-кривую в $\mathcal{M}$ так, что ее образ проходит через точки M_j.

Мы показали, что дважды периодические решения уравнений сигма-модели соответствуют линейному отображению Σ в многообразие Прима ферми-кривой $\mathcal{C}_u$. Это является прямым аналогом результата, полученного в работе [1] для квантовомеханической модели, кратко описанного во Введении.

Мы также нашли, что симплектическая геометрия $\mathcal{M}$ любопытным образом отражается в структуре пространства решений. Как и в квантово-механическом случае (1.9), решения отвечают критическим точкам суперпотенциала, который в двумерном случае может быть выражен в терминах периодов дифференциала $\alpha\, d\beta$ типа Зайберга – Виттена, индуцированного симплектической формой Атьи – Ботта $d\alpha \wedge d\beta$ на $\mathcal{M}$.

Явная связь ферми-кривых с кривыми Зайберга – Виттена остается загадкой. Следует подчеркнуть, что для некоторых сигма-моделей решения могут быть построены с помощью аналитических кривых разными способами: с использованием твисторных кривых, возникающих из представлений нулевой кривизны [15–17], с использованием спектральных кривых Хитчина [18] и, наконец, с помощью ферми-кривых. Взаимосвязи этих кривых представляют собой такую же загадку, как и в привычной ситуации монополей: при изучении последних в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ возникают два типа кривых: кривая, кодирующая данные рассеяния [19], и спектральная кривая, которая в действительности является кривой Зайберга – Виттена для квивера $\mathcal{N} = 2$ калибровочной четырехмерной теории [20]. Несмотря на некоторый прогресс в попытках найти связи между этими кривыми [21], общая картина остается неясной.

Планируемое авторами продолжение работы содержит несколько естественных направлений. Во-первых, это обобщение конструкции на случай $O(N)$-модели с нечетным N, в котором ферми-кривая является (сингулярной) приводимой [7]. Как оказалось, в этом случае трансцендентные уравнения периодичности (5.13) допускают явное решение в терминах спектральных кривых эллиптической системы Калоджеро – Мозера, которая тесно связана с теорией Зайберга – Виттена [20, 22], с теорией солитонов [23, 24], с теорией системы Хитчина и калибровочными теориями [2, 25].

Как ожидается, наперстки Лефшеца должны стать инструментом для вычисления функционального интеграла. Первым шагом в этом направлении должен стать анализ определителя оператора второй вариации действия. Для случая $O(N)$-модели это сводится к исследованию детерминанта оператора Шредингера $-\Delta + U$. Комплекснозначность потенциала означает, что и спектр оператора комплексен, что приводит к сложностям анализа направлений градиентного потока, траектории которого порождают наперсток, выходящий из критической точки.

Представляется естественной модификация классического действия (2.14), учитывающая вклады петель, т. е. однопетлевое эффективное действие. Критические точки эффективного действия могут быть представлены в форме условий самосогласования потенциала оператора Шредингера, включающие в себя решения не только из ядра оператора, но и те, которые связаны со всем спектром оператора. Привычный $1/N$-анализ $O(N)$- и $\mathbb{CP}^{N-1}$-моделей в бесконечном объеме [26, 27] предсказывает нарушение конформной инвариантности, возникновение массовой щели, восстановление глобальной симметрии. Было бы интересно проверить эти предсказания с помощью более тщательного анализа функционального интеграла. В частности, ответить на вопрос, является ли массовая щель универсальной или зависит от выбора наперстка или линейной комбинации наперстков? Нетривиальномть этой проблемы видна в анализе, проделанном в работах [28–30], хотя и с другой геометрией мирового листа Σ.

Как уже было сказано выше, алгебро-геометрические потенциалы U, являясь нелинейным обобщением тригонометрических полиномов, плотны в пространстве всех периодических потенциалов. Однако имеющиеся у авторов аргументы указывают на то, что построения настоящей работы и их обобщения в работе [7] дают *все* решения задачи. Мы надеемся, что их представление в виде критических точек суперпотенциала $\mathcal{W}$ откроет возможность вычисления интегралов по наперсткам Лефшеца. В квантово-механическом случае намотки вдоль 1-циклов в абелевом многообразии, являющемся комплексным тором Лиувилля, могут быть качественно представлены как газ инстантонов и антиинстантонов (представляющих намотки вдоль B), одетых пертурбативными осцилляциями (намотками вдоль A циклов). Справедливость этого приближения контролируется малостью параметра $e^{-\beta\omega_0}$, где ω_0 — частота классических осцилляций вблизи минимума потенциала, а $\beta \to \infty$ — мнимое время. В случае сигма-модели имеется бесконечное число частот ω_0, которые, в силу конформной инвариантности классической теории, стремятся к нулю. Это и есть проблема роста инстантонов, разрушающая (см. [31, 32]) приближение инстантонного газа в сигма-моделях и четырехмерных калибровочных теориях [33]. Существует ли феноменологическая картина наших решений?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обобщенные системы Неймана

Решения уравнений (2.36) с четным N могут быть построены, если заметить, что функция вспомогательной переменной z (имеющей смысл $U(1)$-тока)

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2}\left(\dot{f}^{\sigma}\frac{1}{z+\theta}f - f^{\sigma}\frac{1}{z+\theta}\dot{f}\right) + \\ + i\tau_1 f^{\sigma}\frac{\theta}{z+\theta}f \quad \text{(A.1)}$$

сохраняется для всех z:

$$\dot{\mathcal{J}}(z) = 0.$$

Введем

$$\begin{aligned} \tilde{A}(w) &= \dot{f}^{\sigma}\frac{1}{w-\theta^2}f, \\ \tilde{B}(w) &= -f^{\sigma}\frac{1}{w-\theta^2}f, \\ \tilde{C}(w) &= \dot{f}^{\sigma}\frac{1}{w-\theta^2}\dot{f}, \\ \tilde{D}(w) &= -f^{\sigma}\frac{1}{w-\theta^2}\dot{f}, \end{aligned} \quad \text{(A.2)}$$

где $w = z^2$. Ключевым является утверждение, что спектральная кривая оператора Лакса

$$L(w) = \begin{pmatrix} A(w) & B(w) \\ C(w) & D(w) \end{pmatrix}, \quad \text{(A.3)}$$

где

$$A = \tilde{A} + i\tau_1\tilde{B}_+,$$

$$D = \tilde{D} + i\tau_1\tilde{B}_+,$$

$$C = \tilde{C} + 2i\tau_1\mathcal{J}_+ + \tau\bar{\tau},$$

$$B = \tilde{B},$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_+ &= f^{\sigma}\frac{\theta}{w-\theta^2}f\,, \\ \mathcal{J}_+(w) &= \frac{\mathcal{J}(z)+\mathcal{J}(-z)}{2}, \end{aligned} \quad \text{(A.4)}$$

также является интегралом движения:

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{Det}\,(k - L(w)) = 0. \quad \text{(A.5)}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Nekrasov, *Tying up Instantons with Anti-Instantons*, doi:10.1142/9789813233867_0018; arXiv:1802.04202 [hep-th].
2. N. Nekrasov, Commun. Math. Phys. **180**, 587 (1996); doi:10.1007/BF02099624; arXiv:[hep-th/9503157].
3. A. Hanany and K. Hori, Nucl. Phys. B **513**, 119 (1998); doi:10.1016/S0550-3213(97)00754-2; arXiv: hep-th/9707192 [hep-th].
4. L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, Nucl. Phys. B **261**, 678 (1985); Nucl. Phys. B **274**, 285 (1986).
5. C. Neumann, *De Problemate Quodam Mechanica, Quod ad Primam Integralium Ultraellipticorum Classem Revocatur*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **56** (1859).
6. D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, Birkhauser, Boston–Basel–Berlin (1983).
7. I. Krichever and N. Nekrasov, *Towards Lefschets thimbles in sigma models, II*, to appear.
8. I. Krichever, Funct. Anal. Appl. **20**, 42 (1986).
9. I. Krichever, Funct. Anal. Appl. **28**, 21 (1994).
10. I. Krichever, Uspekhi Mat. Nauk **44**, 121 (1989).
11. B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, and S. P. Novikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **229**, 15 (1976).
12. A. P. Veselov and S. P. Novikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **279**, 20 (1984).
13. A. P. Veselov and S. P. Novikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **279**, 784 (1984).
14. A. Il'ina, I. Krichever, and N. Nekrasov, Funct. Anal. Appl. **53**, 23 (2019); arXiv:1903.01778v2 [math-ph].
15. V. Mikhailov and V. Zakharov, JETP **74**, 1953 (1978).
16. N. Hitchin, J. Diff. Geom. **31**, 672 (1990).
17. K. Pohlmeyer, Comm. Math. Phys. **46**, 207 (1976).
18. N. Hitchin, Duke Math. J. **54**, 91 (1987).
19. N. Hitchin, Comm. Math. Phys. **83**, 579 (1982).
20. N. Nekrasov and V. Pestun, *Seiberg-Witten Geometry of Four Dimensional $\mathcal{N}=2$ Quiver Gauge Theories*, arXiv:1211.2240 [hep-th].
21. S. A. Cherkis, SIGMA **3**, 043 (2007); doi:10.3842/SIGMA.2007.043; arXiv:hep-th/0703108 [hep-th].

22. E. D'Hoker and D. Phong, Nucl. Phys. B **513**, 405 (1998).

23. I. Krichever, Funct. Anal. Appl. **14**, 45 (1980).

24. A. Treibich, Duke Math. J. **59**, 611 (1989); J. L. Verdier, *New Elliptic Solitons*, in Algebraic Analysis 2, Special Volume Dedicated to Prof. M. Sato on his 60th birthday, Academic Press, New York (1988).

25. A. Gorsky and N. Nekrasov, *Elliptic Calogero-Moser System from Two Dimensional Current Algebra*, arXiv:hep-th/9401021.

26. A. D'Adda, M. Luscher, and P. Di Vecchia, Nucl. Phys. B **146**, 63 (1978); doi:10.1016/0550-3213(78)90432-7.

27. E. Witten, Nucl. Phys. B **149**, 285 (1979); doi: 10.1016/0550-3213(79)90243-8.

28. A. Milekhin, Phys. Rev. D **95**, 085021 (2017); doi:10.1103/PhysRevD.95.085021; arXiv:1612.02075 [hep-th].

29. A. Gorsky, A. Pikalov, and A. Vainshtein, arXiv: 1811.05449.

30. S. Bolognesi, S. B. Gudnason, K. Konishi, and K. Ohashi, JHEP **12**, 044 (2019); doi:10.1007/JHEP12(2019)044; arXiv:1905.10555 [hep-th].

31. A. Belavin and A Polyakov, JETP Lett. **22**, 245 (1975).

32. A. M. Polyakov, Contemp. Concepts Phys. **3**, 1 (1987).

33. S. R. Coleman, Subnucl. Ser. **15**, 805 (1979).