ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 6, стр. 1018–1027

ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЕЙ ЧЕРНЫХ ДЫР. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

С. В. Чернов[*]

Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 декабря 2020 г.,
после переработки 31 декабря 2020 г.
Принята к публикации 26 января 2021 г.

Рассматриваются аналитические методы построения теней черных дыр в метрике Керра – Ньюмена и возможности их наблюдения с помощью радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ).

DOI: 10.31857/S0044451021060031

1. ВВЕДЕНИЕ

Благодаря проекту «Телескоп горизонта событий» удалось наблюдать тень черной дыры у источника M87* [1–6], но наблюдение фотонных колец является более сложной задачей будущего [7]. Для ее решения необходимо, чтобы радиоинтерферометр имел достаточно большую базу (проекцию баз), которая превышает диаметр Земли (т. е. достаточно высокое угловое разрешение, порядка доли микросекунд) [7], высокую чувствительность приемного комплекса и большую базу численных экспериментов для моделирования фотонных колец и сопоставления данных теории и наблюдений. Одним из таких проектов, который способен решить данную задачу, является проект «Миллиметрон», который планируется запустить в 2030-х гг. [8].

Существует достаточно много свободного программного обеспечения, которое способно моделировать фотонные кольца магнитогидродинамических моделей. Эти программы решают уравнения изотропных геодезических численно (например, пакеты Raptor [9], Ipole [10, 11]) или полуаналитически (grtrans [12]). Все эти пакеты имеют как численные ошибки, так и неточности, связанные с тем, что наблюдатель расположен на конечном, относительно близком расстоянии от черной дыры ($R \approx 50R_g$). В данной работе уравнения изотропных геодезических решаются аналитически точно и строятся образы черных дыр для простейшего бесконечно тонкого диска. Такой подход более точно сопоставляет модельные и наблюдательные данные.

Интерферометрические наблюдения могут достаточно точно определить форму фотонного кольца [13], а это, в свою очередь, позволит более точно протестировать общую теорию относительности в сильном поле и определить параметр вращения черной дыры [14]. Существуют различные способы моделирования формы фотонных колец. В работе [15] форму фотонного кольца моделировали с помощью плоской кривой — улитка Паскаля (limaçon), в работе [13] — с помощью выпуклых овалов (phoval). Форма фотонных колец близко связана с формой критических кривых в гравитационном поле черной дыры, следовательно, точное моделирование фотонных колец поможет лучше понять физику вблизи черных дыр.

В разд. 2 выписываются точные аналитические решения уравнений изотропных геодезических в метрике Керра – Ньюмена и строятся образы черных дыр. В разд. 3 аналитически вычисляются функции видности для колец различной формы и интенсивности. В разд. 4 приводятся выводы.

В работе используется система единиц, в которой скорость света и гравитационная постоянная равны единице, $c = G = 1$. Размерность длины есть GM/c^2, размерность времени — GM/c^3, где M — масса черной дыры.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Метрика вращающейся и заряженной черной дыры Керра – Ньюмена в координатах Бойера – Линдквиста (t, r, θ, ϕ) имеет вид [16]

[*] E-mail: chernov@lpi.ru

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\, dr^2 + \Sigma\, d\theta^2 + \\ + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left((r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta\right) d\phi^2 - \\ - \frac{2a\sin^2\theta(2Mr - Q^2)}{\Sigma}\, dt\, d\phi,$$

где

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2,$$

$J = Ma$ — угловой момент черной дыры. Корни уравнения

$$\Delta = (r - r_1)(r - r_2) = 0$$

соответствуют внешнему и внутреннему горизонтам событий

$$r_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}.$$

В данной работе предполагается, что параметр вращения и заряд черной дыры ограничены неравенством $0 < a^2 + Q^2 < M^2$. Экстремальная черная дыра соответствует случаю, когда $a^2 + Q^2 \to M^2$. Случаям не вращающейся и не заряженной черной дыры отвечают пределы $a \to 0$ и $Q \to 0$ соответственно. Метрические коэффициенты и символы Кристоффеля выписаны в Приложении А.

Траектория фотонов в метрике Керра–Ньюмена описывается тремя интегралами движения. Это полная энергия на бесконечности $E = -p_t$, угловой момент вокруг вращающейся оси черной дыры $L = p_\phi$ и постоянная Картера

$$Q_c = p_\theta^2 - \cos^2\theta\left(a^2 p_t^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right),$$

где p^μ обозначает 4-импульс фотона. Четвертое уравнение получается из условия равенства нулю массы фотона, $g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = 0$. Оказывается, что интегралы движения не зависят от модуля величины полной энергии, а зависят только от знака E. Поэтому удобно ввести две новые величины, от которых зависит траектория движения фотона:

$$\lambda = \frac{L}{E}, \quad \eta = \frac{Q_c}{E^2}.$$

Тогда компоненты 4-импульса фотона записываются в виде

$$\frac{\Sigma}{E}p^t = \frac{r^2+a^2}{\Delta}(r^2 + a^2 - a\lambda) - a^2\sin^2\theta + a\lambda, \quad (1a)$$

$$\frac{\Sigma}{E}p^r = \pm_r\sqrt{R}, \quad (1b)$$

$$\frac{\Sigma}{E}p^\theta = \pm_\theta\sqrt{\Theta}, \quad (1c)$$

$$\frac{\Sigma}{E}p^\phi = \frac{a}{\Delta}(r^2 + a^2 - a\lambda) + \frac{\lambda}{\sin^2\theta} - a, \quad (1d)$$

где были введены радиальный и угловой потенциалы

$$R = (r^2 + a^2 - a\lambda)^2 - \Delta(\eta + (a-\lambda)^2),$$

$$\Theta = \eta + a^2\cos^2\theta - \lambda^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.$$

Символы $\pm_r$ и $\pm_\theta$ означают знаки импульсов фотона p^r и p^θ соответственно. Траектория движения фотона в плоскости r–θ определяется точками остановки в радиальном и угловом потенциалах. Поэтому удобно представить потенциалы в виде

$$R = (r - r_a)(r - r_b)(r - r_c)(r - r_d),$$

где корни уравнения расположены в следующем порядке: $r_a > r_b > r_c > r_d$, и

$$\Theta = a^2\frac{(u_+ - u)(u - u_-)}{1 - u},$$

где введено обозначение $u = \cos^2\theta$ и

$$u_\pm = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta + \lambda^2}{a^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\eta+\lambda^2}{a^2}\right)^2 + \frac{\eta}{a^2}}.$$

Уравнение радиального потенциала является алгебраическим уравнением четвертой степени, решение которого можно выписать аналитически (см. Приложение В). Уравнение углового потенциала является алгебраическим уравнением второго порядка относительно u, решение которого имеет вид

$$u = u_\pm, \quad \theta_\pm = \arccos\left(\mp\sqrt{u_+}\right),$$

где $\theta_+ > \theta_-$.

Если ввести аффинный параметр τ,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\Sigma}{E}\, p^\mu,$$

то уравнения (1) перепишутся в дифференциальном виде. Нас будет интересовать интегральная форма этих уравнений. Последовательно выражая аффинный параметр из каждого уравнения, легко получить интегральную форму вида [17, 18]

$$I_r = G_\theta, \quad (2a)$$

$$\phi_o - \phi_s = I_\phi + \lambda G_\phi, \quad (2b)$$

$$t_o - t_s = I_t + a^2 G_t, \quad (2c)$$

где интегралы равны

$$I_r=\int\limits_{r_s}^{r_o}\frac{dr}{\pm_r\sqrt{R}},\quad G_\theta=\int\limits_{\theta_s}^{\theta_o}\frac{d\theta}{\pm_\theta\sqrt{\Theta}},$$

$$I_\phi=\int\limits_{r_s}^{r_0}\frac{a(2Mr-Q^2-a\lambda)}{\pm_r\Delta\sqrt{R}}\,dr,$$

$$I_t=\int\limits_{r_s}^{r_\theta}\frac{(r^2\Delta+(2Mr-Q^2)(r^2+a^2-a\lambda))\,dr}{\pm_r\Delta\sqrt{R}},$$

$$G_\phi=\int\limits_{r_s}^{r_o}\frac{d\theta}{\pm_\theta\sin^2\theta\sqrt{\Theta}},\quad G_t=\int\limits_{\theta_s}^{\theta_o}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\pm_\theta\sqrt{\Theta}},$$

а обозначения «s» и «o» означают положение источника излучения и наблюдателя соответственно. Все эти интегралы легко взять в явном виде. Для этого представим интеграл I как сумму двух интегралов

$$I=\int\limits_{r_s}^{r_o}[]dr=\int\limits_{r_a}^{r_o}[]dr+w\int\limits_{r_a}^{r_s}[]dr,$$

где $w=\pm1$. Если траектория фотона имеет точку остановки в радиальном потенциале, то $w=1$, если точка остановки совпадает с источником излучения $r_s=r_a$, то $w=0$, если точка остановки отсутствует, то $w=-1$.

В Приложении C показаны способы разложения интегралов I в табличные и представлены значения этих табличных интегралов. Здесь выпишем явные решения для интегралов I. Явные решения для интегралов G представлены в работе [17]. Решения имеют вид

$$I_r=\frac{2(F(\nu_o,k)+wF(\nu_s,k))}{\sqrt{(r_a-r_c)(r_b-r_d)}},\tag{3}$$

$$I_\phi= \\ =ga\sum_{i=1}^{2}\Gamma_i\Big[\left(1-\beta_i^2\right)\left(\Pi(\nu_o,\gamma_i^2,k)+w\Pi(\nu_s,\gamma_i^2,k)\right)+ \\ +\beta_i^2\left(F(\nu_o,k)+wF(\nu_s,k)\right)\Big],\tag{4}$$

$$G_\theta=\frac{1}{\sqrt{-a^2u_-}}\Bigg[2mK\left(\frac{u_+}{u_-}\right)- \\ -(\pm_s)F\left(\arcsin\left(\frac{\cos\theta_s}{\sqrt{u_+}}\right),\frac{u_+}{u_-}\right)+ \\ +(\pm_o)F\left(\arcsin\left(\frac{\cos\theta_o}{\sqrt{u_+}}\right),\frac{u_+}{u_-}\right)\Bigg],\tag{5}$$

$$G_\phi=\frac{1}{\sqrt{-a^2u_-}}\Bigg[2m\Pi\left(u_+,\frac{u_+}{u_-}\right)- \\ -(\pm_s)\Pi\left(u_+,\arcsin\left(\frac{\cos\theta_s}{\sqrt{u_+}}\right),\frac{u_+}{u_-}\right)+ \\ +(\pm_o)\Pi\left(u_+,\arcsin\left(\frac{\cos\theta_o}{\sqrt{u_+}}\right),\frac{u_+}{u_-}\right)\Bigg],\tag{6}$$

$$G_t=-\frac{2u_+}{\sqrt{-a^2u_-}}\Bigg[2mE'\left(\frac{u_+}{u_-}\right)- \\ -(\pm_s)E'\left(\arcsin\left(\frac{\cos\theta_s}{\sqrt{u_+}}\right),\frac{u_+}{u_-}\right)+ \\ +(\pm_o)E'\left(\arcsin\left(\frac{\cos\theta_o}{\sqrt{u_+}}\right),\frac{u_+}{u_-}\right)\Bigg],\tag{7}$$

где $\nu_{o,s}=\nu(r=r_{o,s})$, m — число точек остановок в угловом потенциале, $(\pm_s)=(\pm_o)(-1)^m$ [17], $(\pm_o=\mathrm{sign}(\theta_o))$. Значение интеграла I_t имеет более сложный вид:

$$I_t=(4M^2-Q^2)I_r+gr_a^2\frac{\alpha_1^4}{\alpha^4}\times \\ \times\left[V_0(\nu_o)+2\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{\alpha_1^2}V_1(\nu_o)+\frac{(\alpha^2-\alpha_1^2)^2}{\alpha_1^4}V_2(\nu_o)\right]+ \\ +wgr_a^2\frac{\alpha_1^4}{\alpha^4}\left[V_0(\nu_s)+2\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{\alpha_1^2}V_1(\nu_s)+\frac{(\alpha^2-\alpha_1^2)^2}{\alpha_1^4}V_2(\nu_s)\right]+ \\ +\sum_{i=1}^{2}\frac{gA_i}{r_a-r_i}\Big[\left(1-\beta_i^2\right)\left(\Pi(\nu_o,\gamma_i^2,k)+w\Pi(\nu_s,\gamma_i^2,k)\right)+ \\ +\beta_i^2\left(F(\nu_o,k)+wF(\nu_s,k)\right)\Big]+ \\ +2Mg\Big[(r_a-r_b)\left(\Pi(\nu_o,\delta,k)+w\Pi(\nu_s,\delta,k)\right)+ \\ +r_b\left(F(\nu_o,k)+wF(\nu_s,k)\right)\Big].\tag{8}$$

Решения (3)–(8) полностью аналитически описывают траекторию фотона в метрике Керра – Ньюмена. Для построения тени черной дыры удобно воспользоваться параметрами (α,β), впервые введенными в работе [19]. Считаем, что наблюдатель расположен под некоторым углом θ_o к оси вращения черной дыры в диапазоне $\theta_o\in(0,\pi/2)$. Запишем параметры (α,β) в виде

$$\alpha=-\frac{\lambda}{\sin\theta_o},\quad\beta=\pm_o\sqrt{\eta+a^2\cos^2\theta_o-\lambda^2\frac{\cos^2\theta_o}{\sin^2\theta_o}}.$$

Для построения тени черной дыры нам достаточно воспользоваться только решением уравнения (2а). Из этого уравнения можно вывести радиус источника через радиус наблюдателя r_o и углы источника θ_s и наблюдателя θ_o

$$r_s = \frac{r_a(r_b - r_d) - r_b(r_a - r_d)\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(r_a - r_c)(r_b - r_d)}I_r - F(\nu_o, q)|k\right)}{r_b - r_d - (r_a - r_d)\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(r_a - r_c)(r_b - r_d)}I_r - F(\nu_o, q)|k\right)}, \tag{9}$$

где sn — эллиптический синус Якоби. Для построения образа воспользуемся методом обратной трассировки лучей. Будем запускать лучи от наблюдателя к источнику. Пусть источником излучения является бесконечно тонкий диск, расположенный в экваториальной плоскости вращения черной дыры с внутренним радиусом $r_{in} = 6$. Тогда $\theta_s = \pi/2$. Наблюдатель расположен на расстоянии $r_o = 10^{10}$ под углом $\theta_o = 17^\circ$, что приблизительно соответствует источнику M87*. Для каждого значения параметров α и β вычисляем положение источника r_s и сравниваем с положением внутреннего радиуса диска $r_s \gtrless r_{in}$, таким образом определяем образ диска (черной дыры) в картинной плоскости наблюдателя. На рис. 1 показан пример образа черной дыры Керра–Ньюмена, полученный по аналитическим формулам (3) и (5) для параметров черной дыры, равных $a = 0.9$, $Q = 0.3$. На рис. 1 показана тень черной дыры, первое фотонное кольцо и второе подкольцо (subring). Из-за того, что внутренний радиус диска $r_{in} = 6$ близок к фотонной сфере, происходит наложение образа диска и первого фотонного кольца.

Для построения распределения угла ϕ в картинной плоскости наблюдателя надо воспользоваться решениями уравнений (2a) и (2b). Определяя радиус (9) и подставляя в (4), с помощью (2b) определяем распределения угла ϕ. На рис. 2 цветом показан график распределения угла ϕ, нормированный на угол 2π, в картинной плоскости.

Таким же образом можно найти образ распределения времени t в картинной плоскости. Для этого надо воспользоваться решениями уравнений (2a) и (2c).

3. ФУНКЦИЯ ВИДНОСТИ

В этом разделе рассмотрим наблюдательное проявление колец посредством функции видности и представим точные аналитические решения проявления колец с неоднородной плотностью и конечной толщиной.

Комплексная функция видности V двух элементов интерферометра является фурье-образом распределения интенсивности сигнала на небе I и определяется формулой [20]

$$V(\mathbf{u}) = \int I(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{u}\cdot\mathbf{x}}\, d^2x,$$

где u — безразмерная проекция базы интерферометра в единицах длин волн, x — безразмерный размер образа в радианах. Если ввести полярные координаты $\mathbf{x} = (\rho, \phi_\rho)$ и $\mathbf{u} = (u, \phi_u)$, то функция видности перепишется в виде

$$V(u, \phi_u) = \iint I(\rho, \phi_\rho) e^{-2\pi i u\rho\cos(\phi_\rho - \phi_u)} \rho\, d\rho\, d\phi_\rho.$$

Если интенсивность кольца образа черной дыры описывается бесконечно тонким кольцом с однородной интенсивностью

$$I(\rho, \phi_\rho) = \frac{1}{\pi d}\delta\left(\rho - \frac{d}{2}\right),$$

то функция видности имеет простой вид [7] (в Приложении D выписаны табличные интегралы, которые использовались при вычислении интегралов в этом разделе)

$$V(u, \phi_u) = J_0(\pi\, du), \tag{10}$$

где d — диаметр кольца, J_0 — функция Бесселя. Если фотонное кольцо имеет конечную толщину, то для конечного кольца с однородной интенсивностью

$$I(\rho, \phi_\rho) = \frac{1}{\pi d w}$$

получаем функцию видности

$$\begin{aligned} V(u) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho u\cos(\phi_\rho - \phi_u)} \frac{\rho\, d\rho\, d\phi_\rho}{\pi d w} = \\ &= \frac{2}{dw}\int_a^b \rho J_0(2\pi\rho u)\, d\rho = \\ &= \frac{1}{\pi\, dwu}\Big(bJ_1(2\pi b u) - aJ_1(2\pi a u)\Big), \end{aligned} \tag{11}$$

где a, b — соответственно внутренний и внешний радиус кольца, $d = a + b$ — средний диаметр кольца, $w = b - a$ — толщина кольца. При $a \to b$ решение (11) сводится к решению (10). Для конечного неоднородного кольца, интенсивность которого растет линейно с увеличением радиуса,

$$I(\rho,\phi_\rho) = \frac{1}{\pi d w}\left(\frac{\rho}{a} - 1\right),$$

получаем функцию видности

$$V(u) = \int\limits_a^b \frac{2\rho}{dw}\left(\frac{\rho}{a} - 1\right) J_0(2\pi u\rho)\, d\rho =$$
$$= \frac{1}{4dw\pi u}\left[4b\left(\frac{b}{a} - 1\right) J_1(2\pi ub) + \right.$$
$$+ \frac{b}{au}(J_0(2\pi bu)H_1(2\pi ub) - J_1(2\pi ub)H_0(2\pi ub)) -$$
$$- \frac{a}{au}(J_0(2\pi au)H_1(2\pi ua) -$$
$$\left. - J_1(2\pi ua)H_0(2\pi ua))\right]. \quad (12)$$

Для конечного неоднородного кольца, интенсивность которого зависит параболически от радиуса,

$$I(\rho,\phi_\rho) = \frac{1}{\pi dw}\left(1 - \left(\frac{2}{b-a}\right)^2\left(\rho - \frac{a+b}{2}\right)^2\right),$$

получаем более громоздкое решение:

$$V(u) = \frac{2}{dw}\int\limits_a^b \left(1 - \left(\frac{2}{b-a}\right)^2\left(\rho - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) \times$$
$$\times \rho J_0(2\pi\rho u)\, d\rho = \frac{4}{dw^3}\left[\frac{b}{(2\pi u)^3}\left(-8\pi bu J_0(2\pi bu) + \right.\right.$$
$$+ 8J_1(2\pi bu) - 2d\pi^2 u J_1(2\pi bu)H_0(2\pi bu) +$$
$$\left. + 2d\pi^2 u J_0(2\pi bu)H_1(2\pi bu)\right) - \frac{a}{(2\pi u)^3} \times$$
$$\left(-8\pi au J_0(2\pi au) + 8J_1(2\pi au) - \right.$$
$$- 2d\pi^2 u J_1(2\pi au)H_0(2\pi au) +$$
$$\left.\left. + 2d\pi^2 u J_0(2\pi au)H_1(2\pi au)\right)\right]. \quad (13)$$

Для конечного анизотропного кольца, интенсивность которого зависит от угла ϕ_ρ,

$$I(\rho,\phi_\rho) = \frac{\sin\phi_\rho}{2dw},$$

функция видности равна

$$V(u) = \int\limits_a^b \int\limits_0^{2\pi} \sin\phi_\rho e^{-2\pi i\rho u\cos(\phi_\rho - \phi_u)} \frac{\rho\, d\rho\, d\phi_\rho}{2dw} =$$
$$= -\frac{i\pi\sin\phi_u}{dw}\int\limits_a^b \rho J_1(2\pi\rho u)\, d\rho =$$
$$= \frac{\pi i\sin\phi_u}{4udw}\left[a(J_1(2\pi ua)H_0(2\pi ua) - \right.$$
$$- J_0(2\pi ua)H_1(2\pi ua)) - b(J_1(2\pi ub)H_0(2\pi ub) -$$
$$\left. - J_0(2\pi ub)H_1(2\pi ub))\right]. \quad (14)$$

Данная функция видности является мнимой. Это означает, что фаза функции видности равна $\pi/2$. Амплитуда функции видности равна модулю от выражения (14).

На рис. 3 показаны модуль функции видности для рассмотренных колец в зависимости от проекции баз интерферометра в единицах миллиард длин волн (Gλ). Синяя кривая соответствует бесконечно тонкому кольцу, зеленая кривая — однородному кольцу с конечной толщиной, красная кривая — неоднородному кольцу, интенсивность которого растет линейно с увеличением радиуса, и черная кривая — неоднородному кольцу, интенсивность которого зависит параболически от радиуса. На данном рисунке толщина кольца равна $w = 2\mu$as (микросекунд дуги), а диаметр $d = 34\mu$as. Все кривые нормированы на единицу функции видности $V = 1$ при нулевых проекциях баз $u = 0$. Наибольшую скорость уменьшения функции видности в зависимости от проекции баз имеет неоднородное кольцо с параболическим профилем изменения интенсивности. Для того чтобы разрешить однородное кольцо, проекция баз интерферометра должна быть больше обратной толщины, $u > 1/w$ [7]. Для толщины $w = 2\mu$as это соответствует проекциям базы $u > 100$Gλ. При условиях $u \gg 1/w$ наблюдается периодичность функции видности V с периодом $1/w$ и асимптотикой $V \sim 1/u^{3/2}$. Неоднородное кольцо с линейным ростом интенсивности имеет такую же асимптотику вида $V \sim 1/u^{3/2}$, но периодичность выражена не так ярко. Асимптотика функции видности неоднородного кольца, интенсивность которого зависит параболически от радиуса, имеет вид $V \sim 1/u^{5/2}$, т. е. функция видности убывает быстрее, и периодичность не проявляется.

На рис. 4 показана амплитуда двумерной функции видности в зависимости от координат проекции баз (u, v) в единицах Gλ. Функция видности не симметрична. Вдоль оси x она имеет нулевое значение $(\sin\phi_u = 0)$.

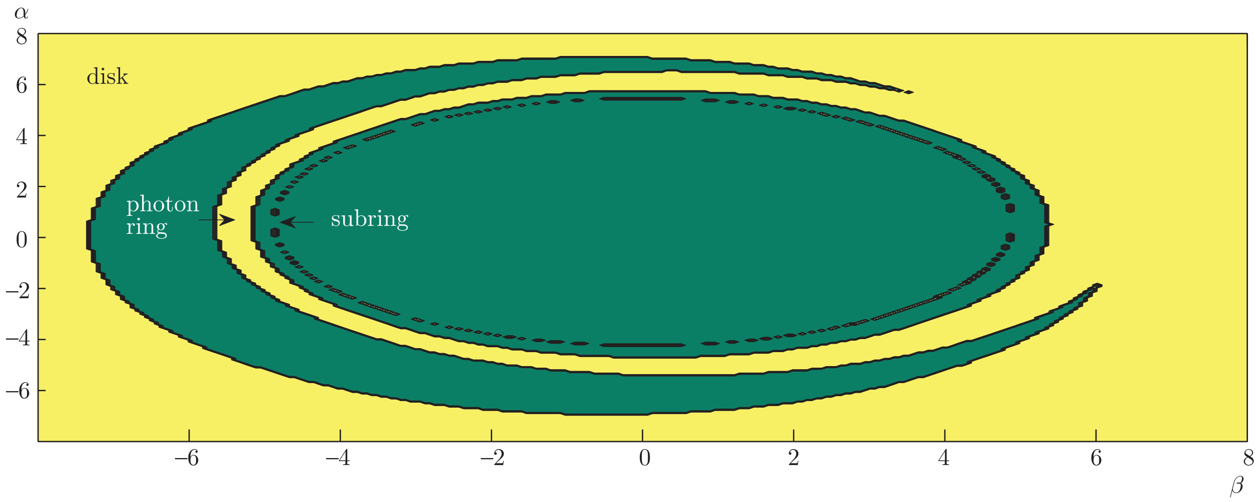

Рис. 1. Аналитический образ черной дыры, полученный по формулам (3) и (5), в зависимости от α и β

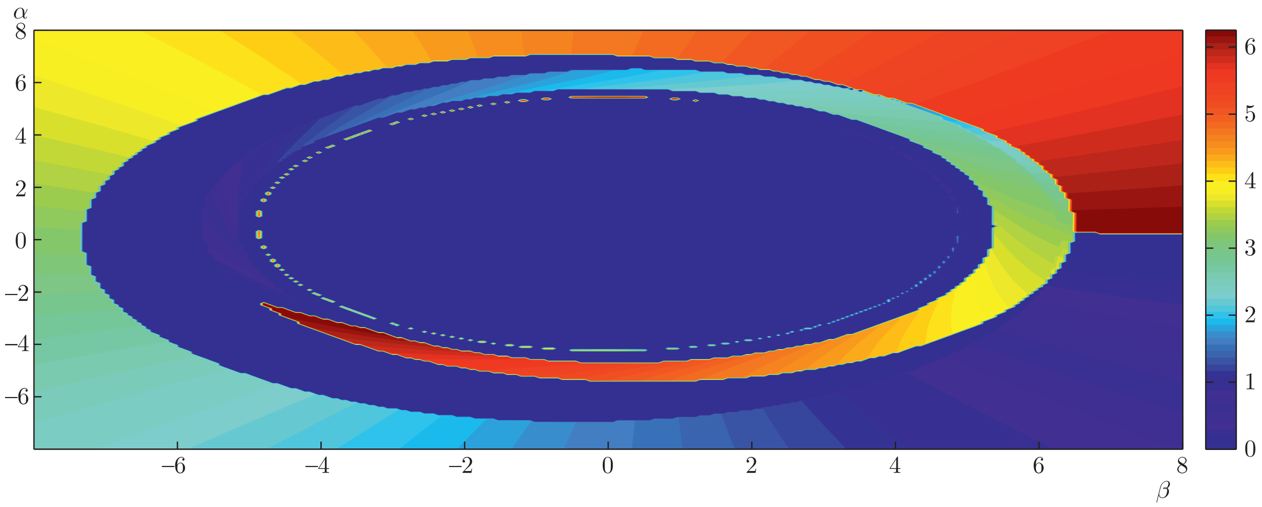

Рис. 2. (В цвете онлайн) Аналитический образ распределения угла ϕ в зависимости от параметров α, β, полученный по формулам (3)–(6)

Из сказанного выше можно сделать следующие выводы. Интерферометрическое проявление фотонных колец черных дыр зависит от степени неоднородности распределения интенсивности по ширине кольца. С увеличением неоднородности требуются более чувствительные детекторы, способные фиксировать функцию видности от фотонных колец.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривались аналитические методы построения образа черной дыры Керра–Ньюмена. Были выписаны точные аналитические решения и в качестве примера построены образы и фотонные кольца бесконечно тонкого диска. Для простейшей формы образа кольца черной дыры были вычислены аналитически функции видности и была показана возможность детектирования колец черной дыры на базах $u > 1/w$, что соответствует расстоянию порядка расстояния от Земли до Луны и больше [7].

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-02-00469-а) и Государственного задания по научной программе ОКР «Миллиметрон».

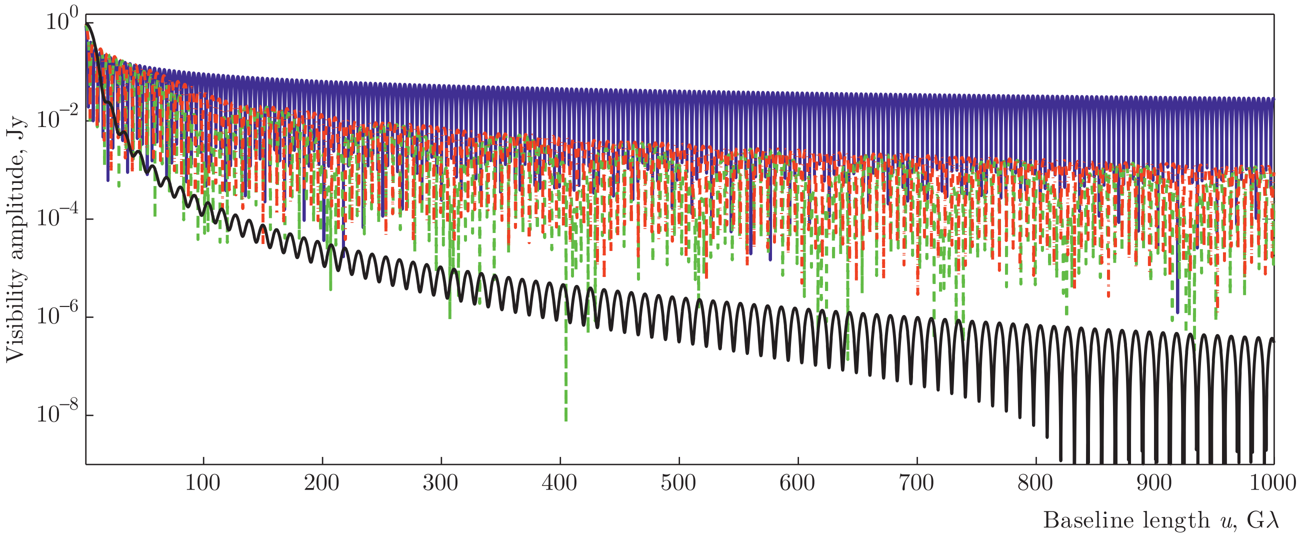

Рис. 3. (В цвете онлайн) Одномерные функции видности в зависимости от u

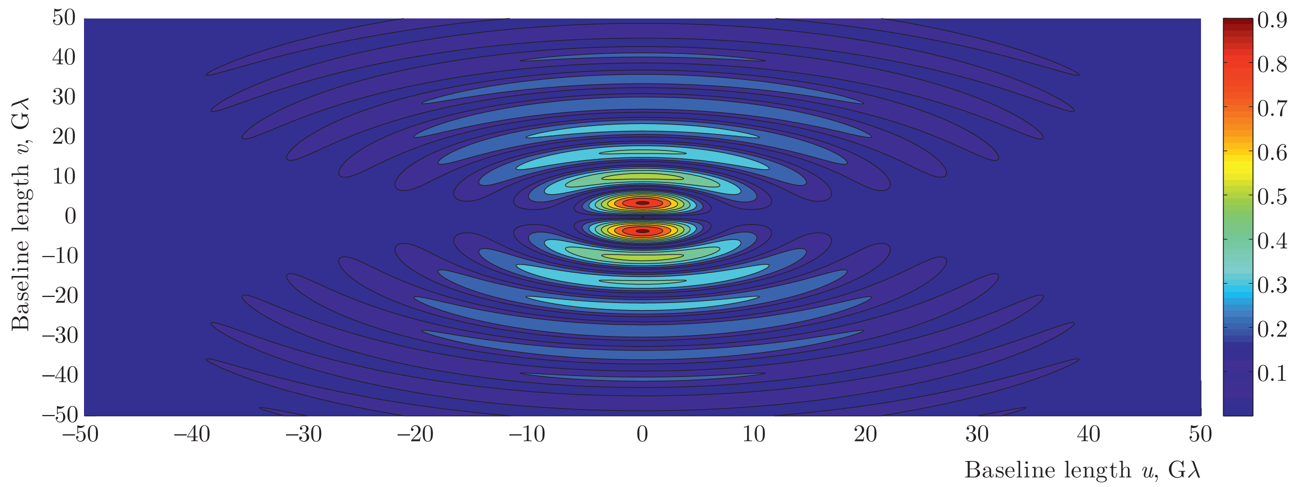

Рис. 4. (В цвете онлайн) Двумерная функция видности в зависимости от u, v для неоднородного анизотропного кольца

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Метрические коэффициенты метрики Керра–Ньюмена равны [16]

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma}\right), \quad g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \Sigma,$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left((r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta\right),$$

$$g_{t\phi} = -\frac{(2Mr - Q^2)a\sin^2\theta}{\Sigma}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{\Sigma},$$

$$g^{tt} = -\frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma\Delta}, \quad g^{rr} = \frac{\Delta}{\Sigma},$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Delta\Sigma\sin^2\theta}, \quad g^{t\phi} = -\frac{(2Mr - Q^2)a}{\Sigma\Delta}.$$

Определитель метрики равен [16]

$$g = -\Sigma^2 \sin^2\theta.$$

Символы Кристоффеля равны [16]

$$\Gamma^t_{tr} = -\frac{pb}{\Delta}, \quad \Gamma^t_{r\phi} = \frac{a\sin^2\theta}{\Delta}(pb + 2qr),$$

$$\Gamma^t_{\theta\phi} = -\frac{qa^3}{\Sigma}\sin^2\theta\sin 2\theta, \quad \Gamma^r_{tt} = -\frac{\Delta p}{\Sigma},$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{r}{\Sigma} + \frac{M - r}{\Delta}, \quad \Gamma^r_{r\theta} = -\frac{a^2\sin 2\theta}{2\Sigma},$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = -\frac{a^2\sin 2\theta}{2\Sigma}, \quad \Gamma^{\theta}_{rr} = \frac{a^2\sin 2\theta}{2\Sigma\Delta},$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -\frac{r\Delta}{\Sigma}, \quad \Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{r}{\Sigma},$$

$$\Gamma^{r}_{\phi\phi} = -\frac{\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}(r + pa^2\sin^2\theta), \quad \Gamma^{t}_{t\theta} = \frac{qa^2\sin 2\theta}{\Sigma},$$

$$\Gamma^{\theta}_{tt} = \frac{qa^2\sin 2\theta}{\Sigma^2}, \quad \Gamma^{r}_{t\phi} = \frac{a\Delta p\sin^2\theta}{\Sigma},$$

$$\Gamma^{\theta}_{t\phi} = -\frac{qab\sin 2\theta}{\Sigma^2}, \quad \Gamma^{\phi}_{t\theta} = \frac{2qa\cos\theta}{\Sigma\sin\theta},$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\frac{\sin 2\theta}{2\Sigma}\left[b - 2a^2q\sin^2\theta\left(2 + \frac{a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\right],$$

$$\Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{r}{\Delta}(1+2q) + a^2p\frac{\sin^2\theta}{\Delta},$$

$$\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\Delta\sin\theta}\left[(1+2q)(b - 2qa^2\sin^2\theta) - \frac{2qa^2b\sin^2\theta}{\Sigma}\right],$$

$$\Gamma^{\phi}_{tr} = -a\frac{rQ^2 + M(\Sigma - 2r^2)}{\Delta\Sigma^2},$$

где

$$b = r^2 + a^2, \quad p = \frac{rQ^2 + M(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma^2}, \quad q = \frac{Q^2 - 2Mr}{2\Sigma}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Выражение для радиального потенциала является алгебраическим уравнением четвертого порядка, которое удобно представить в виде [17]

$$R = (r - r_a)(r - r_b)(r - r_c)(r - r_d),$$

где корни уравнения записаны в порядке убывания, $r_a > r_b > r_c > r_d$. Явный вид решения этого уравнения записывается в виде [17]

$$r_a = z + \sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{2} - z^2 - \frac{\mathcal{B}}{4z}},$$

$$r_b = z - \sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{2} - z^2 - \frac{\mathcal{B}}{4z}},$$

$$r_c = -z + \sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{2} - z^2 + \frac{\mathcal{B}}{4z}},$$

$$r_d = -z - \sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{2} - z^2 + \frac{\mathcal{B}}{4z}},$$

где

$$\mathcal{A} = a^2 - \eta - \lambda^2,$$

$$\mathcal{B} = 2M(\eta + (\lambda - a)^2),$$

$$\mathcal{C} = -a^2\eta - Q^2(\eta + (a - \lambda)^2),$$

$$\mathcal{P} = -\frac{A^2}{12} - \mathcal{C},$$

$$\mathcal{Q} = -\frac{\mathcal{A}}{3}\left[\left(\frac{\mathcal{A}}{6}\right)^2 - \mathcal{C}\right] - \frac{\mathcal{B}^2}{8},$$

$$\omega_{\pm} = \sqrt[3]{-\frac{\mathcal{Q}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\mathcal{Q}}{2}\right)^2}},$$

$$z = \sqrt{\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} - \frac{\mathcal{A}}{6}} > 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ C

Неполные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода определяются следующим образом:

$$F(\phi, k) = \int\limits_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k\sin^2\theta}},$$

$$E(\phi, k) = \int\limits_0^{\phi} \sqrt{1 - k\sin^2\theta}\, d\theta,$$

$$\Pi(\alpha^2, \phi, k) = \int\limits_0^{\phi} \frac{1}{1 - \alpha^2\sin^2\theta}\,\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k\sin^2\theta}}.$$

Производная эллиптического интеграла второго рода E по параметру k задается как

$$E^{'}(\phi, k) = \frac{\partial E(\phi, k)}{\partial k} = \frac{E(\phi, k) - F(\phi, k)}{2k}.$$

Полные эллиптические интегралы определяются условием $\phi = \pi/2$ и обозначаются как

$$K(k) = F(\pi/2, k), \quad E(k) = E(\pi/2, k),$$

$$\Pi(n, k) = \Pi(n, \pi/2, k).$$

Введем обозначения

$$\nu = \arcsin\sqrt{\frac{(r_b - r_d)(r - r_a)}{(r_a - r_d)(r - r_b)}}, \quad \alpha^2 = \frac{r_a - r_d}{r_b - r_d},$$

$$g = \frac{2}{\sqrt{(r_a - r_c)(r_b - r_d)}}, \quad k = \frac{(r_b - r_c)(r_a - r_d)}{(r_a - r_c)(r_b - r_d)}.$$

Для вычисления интегралов I в работе использовались следующие табличные значения интегралов для случая, когда $r > r_a$. Данный интеграл вычисляется на с. 256 [21]:

$$\int\limits_{r_a}^{r} \frac{dx}{\sqrt{(x - r_a)(x - r_b)(x - r_c)(x - r_d)}} = gF(\nu, k).$$

Этот интеграл вычисляется на с. 257 [21]:

$$\int\limits_{r_a}^{r} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)(x-r_d)}} = \\ = g\Big[(r_a-r_b)\Pi\left(\alpha^2,\nu,k\right)+r_bF(\nu,k)\Big].$$

Этот интеграл вычисляется на с. 259 [21]:

$$\int\limits_{r_a}^{r} \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)(x-r_d)}} = \\ = \frac{g}{(p-r_a)(p-r_b)}\left[(r_a-r_b)\Pi\left(\alpha^2\frac{p-r_b}{p-r_a},\nu,k\right)+\right. \\ \left. +(p-r_a)F(\nu,k)\right].$$

Этот интеграл вычисляется на с. 130 [22]:

$$\int\limits_{r_a}^{r} \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)(x-r_d)}} = \\ = gr_a^2\int\limits_0^{u_1}\frac{(1-\alpha_1^2\,\mathrm{sn}^2\,u)^2}{(1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,u)^2}\,du,$$

где

$$\mathrm{am}\,u_1 = \arcsin\sqrt{\frac{(r_b-r_d)(r-r_a)}{(r_a-r_d)(r-r_b)}},\quad \alpha_1^2=\frac{r_a-r_d}{r_b-r_d}\,\frac{r_b}{r_a}$$

и am обозначает амплитуду u_1.

Данный интеграл вычисляется на с. 205 [22]:

$$\int\frac{(1-\alpha_1^2\,\mathrm{sn}^2\,u)^2}{(1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,u)^2}\,du = \\ = \frac{\alpha_1^4}{\alpha^4}\left[V_0+2\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{\alpha_1^2}\,V_1+\frac{(\alpha^2-\alpha_1^2)^2}{\alpha_1^4}\,V_2\right],$$

где (см. с. 201 [22])

$$V_0=\int du = F(\nu,k),$$

$$V_1=\int\frac{du}{1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,u}=\Pi(\alpha^2,\nu,k),$$

$$V_2=\int\frac{du}{(1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,u)^2} = \\ = \frac{1}{2(\alpha^2-1)(k-\alpha^2)}\left[\alpha^2E(u)+(k-\alpha^2)u+\right. \\ +(2\alpha^2k+2\alpha^2-\alpha^4-3k)\Pi(\alpha^2,\nu,k)- \\ \left.-\frac{\alpha^4\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,u}\right],$$

$\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ и $\mathrm{dn}\,u$ — эллиптические функции Якоби.

Интеграл I_ϕ легко представить в виде табличных интегралов. Для этого разложим I_ϕ как [23]

$$I_\phi=\int\limits_{r_a}^{r}\frac{a(2rM-Q^2-a\lambda)}{\Delta\sqrt{R}}dr = \\ = a\sum_{i=1}^{i=2}\int\limits_{r_a}^{r}\frac{K_i\,dr}{(r-r_i)\sqrt{R}} = \\ = ga\sum_{i=1}^{2}\Gamma_i\Big[\left(1-\beta_i^2\right)\Pi(\nu,\gamma_i^2,k)+\beta_i^2F(\nu,k)\Big],$$

где

$$\gamma_i^2=\frac{r_a-r_d}{r_b-r_d}\,\frac{r_i-r_b}{r_i-r_a},\quad \beta_i^2=\frac{r_i-r_a}{r_i-r_b},$$

$$r_i=M+(-1)^{i+1}\sqrt{M^2-a^2-Q^2},\quad \Gamma_i=\frac{K_i}{r_a-r_i},$$

$$K_i=M+(-1)^{i+1}\frac{M^2-Q^2/2-a\lambda/2}{\sqrt{M^2-a^2-Q^2}},$$

Аналогично представим интеграл I_t в виде табличных интегралов как

$$I_t=\int\limits_{r_a}^{r}\left[\frac{A_1}{r-r_1}+\frac{A_2}{r-r_2}+4M^2-Q^2+2Mr+r^2\right]\frac{dr}{\pm_r\sqrt{R}},$$

где

$$A_1(r_1-r_2)=(2Mr_1-Q^2)(r_1^2+a^2-a\lambda),$$

$$A_2(r_1-r_2)=-(2Mr_2-Q^2)(r_2^2+a^2-a\lambda).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Для вычисления функции видности использовались следующие табличные значения интегралов. Для вычисления интеграла (10) использовался табличный интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{-2\pi iu\rho\cos(\phi_\rho-\phi_u)}d\phi_\rho=2\pi J_0(2\pi u\rho).$$

Для вычисления интеграла (11)–(13), использовались табличные интегралы (с. 484 [24])

$$\int\limits_0^{z}tJ_0(ut)\,dt=\frac{z}{u}J_1(uz),$$

$$\int_0^z t^2 J_0(ut)\,dt = \\ = \frac{z}{2u^2}[2uzJ_1(uz) - \pi J_1(uz)H_0(uz) + \pi J_0(uz)H_1(uz)],$$

$$\int_0^z t^3 J_0(ut)\,dt = \frac{z^2}{u^2}(2J_2(uz) - uzJ_3(uz)) = \\ = \frac{z^2}{u^2}[uzJ_1(uz) - 2J_2(uz)] = \\ = \frac{z^2}{u^2}\left[uzJ_1(uz) - \frac{4}{uz}J_1(uz) + 2J_0(uz)\right],$$

где H — функция Струве. Для вычисления интеграла (14) использовался табличный интеграл

$$\frac{2u}{\pi}\int_0^x tJ_1(ut)\,dt = x[J_1(ux)H_0(ux) - J_0(ux)H_1(ux)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **875**, L1 (2019).

2. Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **875**, L2 (2019).

3. Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **875**, L3 (2019).

4. Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **875**, L4 (2019).

5. Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **875**, L5 (2019).

6. Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **875**, L6 (2019).

7. M. D. Johnson et al., Sci. Adv. **6**, 1310 (2020).

8. Н. С. Кардашёв и др., УФН **184**, 1319 (2014).

9. T. Bronzwaer et al., Astron. Astrophys. **613**, 2 (2018).

10. M. Moscibrodzka and C. F. Gammie, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **475**, 43 (2018).

11. S. C. Noble, P. K. Leung, C. F. Gammie, and L. G. Book, Class. Quant. Grav. **24**, 259 (2007).

12. J. Dexter, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **462**, 115 (2016).

13. S. E. Gralla and A. Lupsasca, arXiv:2007.10336.

14. S. E. Gralla and A. Lupsasca, arXiv:2008.03879.

15. J. R. Farah, D. W. Pesce, M. D. Johnson, and L. L. Blackburn, Astrophys. J. **900**, 77 (2020).

16. Д. В. Гальцов, *Частицы и поля в окрестности черных дыр*, МГУ, Москва (1986).

17. S. E. Gralla and A. Lupsasca, Phys. Rev. D **101**, 044031 (2020).

18. S. E. Gralla, A. Lupsasca, Phys. Rev. D **101**, 044032 (2020).

19. C. T. Cunnungham and J. M. Bardeen, Astrophys. J. **173**, L137 (1972).

20. A. R. Thompson, J. M. Moran, and G. W. J. George, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, Springer (2017).

21. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).

22. P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer (1971).

23. S. E. Vázquez and E. P. Esteban, Nuovo Cim. B **119**, 489 (2004).

24. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Nat. Bureau Stand. (1972).