ЖЭТФ, 2021, том 160, вып. 1 (7), стр. 95–106

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ОБЛАСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННУЮ ФАЗУ В СРЕДАХ С ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В. В. Меньшенин *

Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук 620108, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 15 января 2021 г.,
после переработки 5 февраля 2021 г.
Принята к публикации 6 февраля 2021 г.

Исследовано распространение продольных упругих волн вблизи фазового перехода из парамагнитной в несоизмеримую фазу в слоистых системах, имеющих тетрагональную структуру. На основе работы [22] сделан вывод о том, что фазовый переход второго рода возможен, если в кристалле отсутствуют сдвиговые деформации, а перенормировка параметров взаимодействия не меняет знака этих параметров в слагаемых действия, содержащих четвертые степени компонент параметра порядка. С помощью ренормгруппового подхода для продольных звуковых волн в направлении [100] найден степенной закон температурного изменения скорости звука в критической области, а также смещение положения точки минимума частоты (а значит, и скорости) этих волн относительно точки фазового перехода. Выяснены причины различного изменения скорости продольных звуковых волн при их распространении в направлениях [100], [110] и [001].

DOI: 10.31857/S0044451021070105

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение продольных звуковых волн вблизи точки фазового перехода второго рода изучается достаточно давно. Так, в работе Белова с соавторами [1] была построена феноменологическая теория распространения таких волн на основе теории Ландау – Халатникова [2]. В этой работе было показано, что пик изменения скорости звука и критического затухания имеют место при одной и той же температуре, а максимум затухания расположен ниже критической точки и зависит от частоты. Однако экспериментальные исследования продольного звука в соединении MnF_2 показали, что максимум затухания этих волн лежит несколько выше, чем температура Нееля, и нет изменения скорости упругой волны при температуре Нееля [3]. Другой подход, развивавшийся в работах Мори, основан на использовании стохастического уравнения Ланжевена для нормальной моды звуковых колебаний путем введения «случайной» силы, которая действует на эту моду [4, 5]. При этом временной коррелятор случайной силы является гауссовым, а коэффициент затухания упругой волны пропорционален этому коррелятору. В работе [5] с учетом обменной стрикции в качестве механизма влияния магнитной подсистемы на упругие степени свободы были рассчитаны коэффициенты затухания продольных упругих волн вблизи температуры Нееля в соединении MnF_2 для направлений распространения волн [100], [001] и [110]. Были найдены зависимости коэффициентов затухания этих волн от температуры, констант обменного взаимодействия и волновых чисел соответствующих звуковых волн. Дальнейшее развитие этого направления привело к разработке теории описания критической динамики фазовых переходов второго рода, в рамках которой можно исследовать распространение звука вблизи таких переходов. Важное отличие этой теории от статического случая состоит в том, что необходимо принять во внимание уравнения движения стохастического типа. Эти уравнения должны быть необратимы относительно обращения времени, а значит, содержать диссипативные члены [6]. Появление этих членов связано со случайными

* E-mail: menshenin@imp.uran.ru

тепловыми возбуждениями. Первоначально подход к рассмотрению критической динамики развивался подобно ϵ-разложению в ренормгрупповом (РГ) подходе. Формально РГ-преобразование проводится в два этапа [7]. На первом этапе проводится исключение быстрых мод, а на втором этапе — изменение масштаба. Новое уравнение движения записывается в прежнем виде, но с новыми коэффициентами, которые представляют собой РГ-преобразование исходных коэффициентов. Однако далее было показано, что любая стохастическая задача может быть сведена к квантово-полевой модели с удвоенным числом переменных [8–11]. Тогда для вычисления корреляционных функций удается воспользоваться всем теоретико-полевым аппаратом РГ-анализа. На основе этого подхода в работе [12] анализировалось амплитудное соотношение для затухания звука выше и ниже критической точки для одноосного ферромагнетика. Работа [13] посвящена исследованию критического затухания ультразвука в изотропных системах. Обратим внимание на то, что большинство работ посвящено критическому затуханию звуковых волн. В то же время вблизи точки перехода второго рода изменяется также и скорость продольных упругих волн. В работе [14] такое изменение скорости обнаружено в слоистом соединении $FeGe_2$ вблизи точки перехода из парамагнитной фазы в несоизмеримую магнитную фазу. Скорости продольных упругих волн меняются различным образом для направлений распространения [100], [001], [110] волн [14, 15]. Причины такого различия в работах [14, 15] не обсуждаются. Представляет интерес обсудить эти причины. В работе [16] результаты по неупругому рассеянию нейтронов были использованы для определения закона дисперсии фононов в дигерманиде железа при температурах 300 K, 500 K, 650 K. Проведено вычисление с использованием теории функционала плотности в квазигармоническом приближении температурных смещений дисперсии фононов. Результаты расчетов оказались плохо согласующимися с экспериментальными данными.

2. СТАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

Наша задача состоит в изучении критической динамики распространения продольных звуковых волн вблизи перехода из парамагнитного состояния в несоизмеримую магнитную фазу. К таким системам относится, например, соединение $FeGe_2$. Проведем наше рассмотрение, исходя из данных, полученных для этого соединения. Пусть пространственная симметрия среды описывается группой $I4/mcm(D_{4h}^{18})$. Ионы железа занимают позицию $2a$. Заметим, что далее везде работаем с примитивной ячейкой кристалла и рассматриваем для описания группы установку, данную в монографии Ковалева [17]. Волновой вектор несоизмеримой магнитной структуры равен

$$\mathbf{k} = \left\{\frac{2\pi\mu}{\tau},\, 0,\, 0\right\},$$
$$2\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Введем сначала переменные, описывающие нашу систему. Мы будем рассматривать длиннопериодическую магнитную структуру типа продольной спиновой волны. В этом случае, как показано в работе [18], магнитное состояние вблизи перехода описывается с помощью двумерного вектора $\mathbf{S} = \{S_1,\, S_2\}$, где величины S_1 и S_2 есть аксиальные орты вдоль осей координат x и y в разложении плотности магнитного момента по базисным функциям неприводимого представления пространственной группы, по которому происходит переход из парамагнитной фазы в несоизмеримую магнитную фазу. Далее мы будем рассматривать модель C критической динамики [6]. Рассмотрим для определенности распространение звука вдоль направления [100]. В этом случае статическое действие системы можно записать по аналогии с работой [13] в виде

$$\begin{aligned} S^{st} = -\int \Big\{ &\frac{1}{2}r_0(S_1^2+S_2^2) + \frac{1}{2}(\partial_i S_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_i S_2)^2 + \frac{g_{10}}{24}(S_1^2+S_1^2)^2 + \\ &\frac{g_{20}}{24}S_1^2S_2^2 + \frac{1}{2}u^2 + \gamma_{u0}u(S_1^2+S_2^2) + \\ &+ \frac{1}{2}s^2 + \gamma_{s0}s(S_1^2+S_2^2) + wsu \Big\}\, d^dx. \end{aligned} \quad (1)$$

В равенстве (1) мы учли тетрагональную симметрию системы, величина u — звуковая переменная, пропорциональная флуктуациям плотности в системе [13], s — пропорциональна флуктуациям энтропии на единицу массы [13]. Величина d, указывающая размерность пространства, равна $d = 4 - 2\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $r_0 = (T - T_{C0})$, T_{C0} — затравочная температура фазового перехода. В упомянутой статье авторы указали, что наличие слагаемых

$$\int \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}s^2 + wus\right) d^dx$$

можно обосновать с помощью теории термодинамических флуктуаций. Возникновение этих слагаемых можно понять из следующих соображений. Как известно [19], вероятность флуктуации ξ для вывода тела из состояния равновесия при постоянных давлении и температуре пропорциональна

$$\xi \sim \exp\left(-\frac{\delta\Phi_{tot}}{T}\right),$$

где T — температура тела, а $\delta\Phi_{tot}$ — изменение термодинамического потенциала тела в целом. Далее при рассмотрении тела как некоторого числа подсистем, слабо взаимодействующих между собой, изменение термодинамического потенциала всего тела может быть представлено в виде

$$\Delta\Phi_{tot} = \int (\delta\Phi(x))\, d^d x,$$

где интегрирование ведется по всему объему системы, а $\delta\Phi(x)$ — локальное изменение термодинамического потенциала одной из подсистем. Для этой подсистемы локальное изменение термодинамического потенциала при постоянных давлении и температуре равно минимальной работе, необходимой для того, чтобы перевести подсистему из одного состояние в другое обратимым образом. В нашем случае при распространении упругой волны выражение для минимальной работы имеет вид

$$R_{min} = \delta E(S_1, S_2, \triangledown S_1, \triangledown S_2, S, u_{11}) - T_0 \delta S - (\sigma_{11(0)})\, \delta u_{11}, \quad (2)$$

где δE, δS, δu_{11} — изменение внутренней энергии, энтропии и тензора деформации подсистемы, индекс «0» указывает на то, что величины относятся к телу в целом. Раскладывая в ряд изменение внутренней энергии, сразу найдем, что линейные по изменениям $\delta S, \delta u_{11}$ слагаемые в выражении (2) сокращаются, а первые производные по компонентам параметра порядка и их градиентам равны нулю. Выделяя в слагаемых второго порядка члены вида

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}(\delta S)^2 + 2\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial u_{11}}\delta S \delta u_{11} + \frac{\partial^2 E}{\partial u_{11}^2}(\delta u_{11})^2\right),$$

введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s^2}(\delta S)^2 = (s(x))^2, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial u_{11}^2}(\delta u_{11})^2 = (u(x))^2,$$

а слагаемое $\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial u_{11}}\delta S \delta u_{11}$ запишем следующим образом: $wu(x)s(x)$. Следовательно, в выражении для термодинамического потенциала всей системы появятся слагаемые

$$\int \left(\frac{1}{2}s(x)^2 + \frac{1}{2}u(x)^2 + wu(x)s(x)\right)\, d^d x, \quad (3)$$

которые со знаком минус войдут и в статическое действие. Заметим, что величина u пропорциональна изменению объема, а значит, и плотности системы, т. е. не должна менять знака при пространственной инверсии. Отметим также, что и тензор деформации не меняет знака при смене знаков координат.

3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

В этом случае взаимодействие параметра порядка со звуком вблизи фазового перехода описывается следующими стохастическими уравнениями [13]:

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{dt} &= \lambda_0 \frac{\delta S^{st}}{\delta S_i} + \theta_i(\mathbf{x}, t), \\ \frac{ds}{dt} &= -\kappa\Delta \frac{\delta S^{st}}{\delta s} + \theta_s(\mathbf{x}, t), \\ M\ddot{u} &= -\Delta \frac{\delta S^{st}}{\delta u} + DM\Delta\dot{u} + \theta_u(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из уравнений (4) описывает релаксацию компонент параметра порядка с коэффициентом релаксации λ_0. Второе уравнение описывает перенос энергии из-за диффузии, а коэффициент κ есть температурная проводимость. Последнее уравнение следует из стандартного уравнения движения звуковых волн. Величина M является обратным квадратом адиабатической скорости звука, D — константа затухания [13]. В уравнениях (4) величины θ_i, θ_s, θ_u играют роль «случайных» сил. Средние значения этих сил равны нулю, а для их корреляторов выполняются соотношения [6, 13]

$$\begin{aligned} \langle \theta_i(\mathbf{x}, t)\theta_j(\mathbf{x}', t')\rangle &= 2\lambda_0 \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')\delta_{ij}, \\ \langle \theta_s(\mathbf{x}, t)\theta_s(\mathbf{x}', t')\rangle &= -2\kappa \triangledown^2 \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t'), \\ \langle \theta_u(\mathbf{x}, t)\theta_u(\mathbf{x}', t')\rangle &= 2DM \triangledown^4 \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t'). \end{aligned} \quad (5)$$

Эту стохастическую модель можно свести к рассмотрению некоторой квантово-полевой модели. Можно показать [20], что стохастическая модель полностью эквивалентна квантово-полевой модели с удвоенным числом полей, а именно S_i, $\tilde{S}_i$, $(i = 1, 2)$, s, $\tilde{s}$, u, $\tilde{u}$. Функционал действия в этом случае имеет вид

$$S = \iint d^d x\, dt \left[\tilde{S}_1(\mathbf{x},t)\lambda_0 \tilde{S}_1(\mathbf{x},t) + \right.$$
$$+ \tilde{S}_2(\mathbf{x},t)\lambda_0 \tilde{S}_2(\mathbf{x},t) - \tilde{S}_1 \left[\frac{\partial S_1}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\delta S^{st}}{\delta S_1} \right] -$$
$$- \tilde{S}_2 \left[\frac{\partial S_2}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\delta S^{st}}{\delta S_2} \right] + \tilde{u} D M \nabla^4 \tilde{u} - \tilde{s}\kappa\Delta\tilde{s} -$$
$$- \tilde{u} \left[M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta \frac{\delta S^{st}}{\delta u} - DM\Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right] -$$
$$\left. - \tilde{s} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \kappa \Delta \frac{\delta S^{st}}{\delta s} \right] \right]. \quad (6)$$

Переход к квантово-полевой модели позволяет в полной мере использовать методы теории поля для анализа нашей модели. Это означает, что функции Грина стохастической задачи можно вычислять с помощью обычных функций Грина модели (6), которые определяются производящим функционалом [20]

$$G(J) = \int DS_1 DS_2 D\tilde{S}_1 D\tilde{S}_2 Ds D\tilde{s} Du D\tilde{u} \times$$
$$\times \exp\left(S + J_\varphi \varphi + J_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi} \right), \quad (7)$$

где $\varphi = (S_1, S_2, s, u)$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{s}, \tilde{u})$, по ним проводится суммирование, J_φ, $J_{\tilde{\varphi}}$ — источники соответствующих полей, кроме того, в последних двух слагаемых под знаком экспоненты проводится интегрирование по пространственным и временным аргументам. Обеспечивающий нормировку $G(0) = 1$ множитель включен в величину $DS_1 \ldots D\tilde{u}$.

Вычислим входящие в равенство (6) вариационные производные и подставим их в это равенство. Тогда выражение (6) можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$S = \int d^d x\, dt (S_0(\mathbf{x},t)) + V(\varphi(\mathbf{x},t), \tilde{\varphi}(\mathbf{x},t)), \quad (8)$$

где первое слагаемое в равенстве (8) — часть действия, квадратичная по динамическим переменным, а второе слагаемое описывает взаимодействие этих полей. Далее удобно провести сдвиги на константы, которые позволяют исключить из рассмотрения линейные по источникам слагаемые в производящем функционале (7). Покажем это на примере суммы слагаемых [20]

$$A_1 = \tilde{S}_1 \lambda_0 \tilde{S}_1 - \tilde{S}_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_0 (r_0 - \Delta) \right] S_1 +$$
$$+ J_{S_1} S_1 + J_{\tilde{S}_1} \tilde{S}_1, \quad (9)$$

В равенстве (9) предполагается интегрирование по временным и пространственным координатам. Обозначая $\lambda_0 = D/2$, первые два слагаемых запишем в виде

$$\tilde{S}_1 \lambda_0 \tilde{S}_1 - \tilde{S}_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_0 (r_0 - \Delta) \right] S_1 = -LKL^T/2, \quad (10)$$

где $L = (S_1, \tilde{S}_1)$, оператор K равен

$$\begin{bmatrix} 0 & (\partial_t + \lambda_0 [r_0 - \Delta]^T) \\ (\partial_t + \lambda_0 [r_0 - \Delta]) & -D \end{bmatrix},$$

а знак T означает транспонирование. Для такой блочной матрицы с симметричной операцией $D = D^T$ обратный оператор $\Delta^{(S)} = K^{-1}$ записывается в виде [20]

$$\Delta^{(S)} = \begin{bmatrix} \Delta_{12}^{(S)} D \Delta_{21}^{(s)} & \Delta_{12}^{(S)} \\ \Delta_{21}^{(S)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^{(S)} &= (\partial_t + \lambda_0 [r_0 - \Delta])^{-1}, \\ \Delta_{21}^{(S)} &= [(\partial_t + \lambda_0 [r_0 - \Delta])^T]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем далее обозначение

$$\Delta_{11}^{(S)} = \Delta_{12}^{(S)} D \Delta_{21}^{(S)}, \quad (13)$$

при этом

$$(\partial_t + \lambda_0 [r_0 - \Delta])^T = (-\partial_t + \lambda_0 [r_0 - \Delta]). \quad (14)$$

Тогда запаздывающая функция Грина $\Delta_{12}^{(S)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ линейного оператора $L = \partial_t + \lambda_0 [r_0 - \Delta]$ является затравочным коррелятором вида

$$\Delta_{12}^{(S)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \langle S_1(\mathbf{x},t) \tilde{S}_1(\mathbf{x}',t') \rangle_0, \quad (15)$$

а опережающая функция Грина равна

$$\Delta_{21}^{(S)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \langle \tilde{S}_1(\mathbf{x},t) S_1(\mathbf{x}',t') \rangle_0. \quad (16)$$

Линейному оператору $-D\delta(x - x')$ соответствует функция Грина

$$\Delta_{11}^{(S)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \langle S_1(\mathbf{x},t) S_1(\mathbf{x}',t') \rangle_0. \quad (17)$$

Понятно, что в общем случае имеем

$$\begin{gathered} \langle S_i \tilde{S}_j \rangle = \langle S_i \tilde{S}_i \rangle \delta_{ij}, \\ \langle S_i S_j \rangle = \langle S_i S_i \rangle \delta_{ij}, \\ \langle \tilde{S}_i \tilde{S}_j \rangle = 0. \end{gathered} \quad (18)$$

Заменой переменных вида

$$L = y + J_S K^{-1},$$

где вектор-строка

$$J_S = \begin{pmatrix} J_S & J_{\tilde{S}_1} \end{pmatrix},$$

величина

$$A_1 = -\frac{LKL^T}{2} + J_S L^T$$

приводится к виду

$$A_1 = -\frac{yKy^T}{2} + \frac{J_S K^{-1} J_S^T}{2}.$$

Подчеркнем еще раз, что в последнем соотношении ядро K^{-1} имеет смысл функций Грина линейной задачи $KL = J_s$ [20]. По переменным y интегралы оказываются гауссовыми и могут быть вычислены точно. Переменные набора $\{u, \tilde{u}, s, \tilde{s}\}$ связаны между собой билинейными слагаемыми в действии. Поэтому процедура избавления от линейных по этим полям слагаемых с источниками аналогична рассмотренной выше. В этом случае оператор K_1 имеет вид

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & k \\ b & c & n & 0 \\ 0 & n & 0 & d \\ k & 0 & l & q \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{gathered} a = \left[M\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - DM\Delta\frac{\partial}{\partial t}\right]^T, \\ b = \left[M\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - DM\Delta\frac{\partial}{\partial t}\right], \\ c = -2DM\nabla^4, \quad k = -w\kappa\Delta, \\ d = \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa\Delta\right]^T, \quad l = \left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa\Delta\right], \\ n = -w\Delta, \quad q = 2\kappa\Delta. \end{gathered} \tag{19}$$

Выражение для обратной матрицы можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} (K_1^{-1})_{11} &= \Delta_1^{-1}(-cdl - nq^2), \\ (K_1^{-1})_{12} &= \Delta_1^{-1} l(ad - kn), \\ (K_1^{-1})_{13} &= \Delta_1^{-1}(ckl + anq), \\ (K_1^{-1})_{14} &= \Delta_1^{-1}(-dan + kn^2), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} (K_1^{-1})_{21} &= \Delta_1^{-1} d(bl - kn), \\ (K_1^{-1})_{22} &= (K_1^{-1})_{24} = 0, \\ (K_1^{-1})_{23} &= \Delta_1^{-1} n(-bl + k^2), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} (K_1^{-1})_{31} &= \Delta_1^{-1}(cdk + bnq), \\ (K_1^{-1})_{32} &= \Delta_1^{-1} k(-ad + kn), \\ (K_1^{-1})_{33} &= \Delta_1^{-1}(-ck^2 - abq), \\ (K_1^{-1})_{34} &= \Delta_1^{-1} b(-ad - kn), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} (K_1^{-1})_{41} &= \Delta_1^{-1} n(-bl + kn), \\ (K_1^{-1})_{42} &= (K_1^{-1})_{44} = 0, \\ (K_1^{-1})_{43} &= \Delta_1^{-1} a(bl - kn), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\Delta_1 = (ad - kn)(bl - kn). \tag{24}$$

В равенствах (20)–(23) обратная матрица K^{-1} записана поэлементно. В частности,

$$\begin{aligned} \Delta_{12} = (K_1^{-1})_{12} = l(bl - kn)^{-1} = \\ = \left(\left[M\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - DM\Delta\frac{\partial}{\partial t}\right] - \right. \\ \left. - kw^2\Delta^2\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa\Delta\right)^{-1}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Фурье-образ функции Грина $\Delta_{12}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{12}(\mathbf{p}, \omega) = \\ = \left(-M\omega^2 + p^2\left[1 - \frac{\kappa w^2 p^2}{\kappa p^2 - i\omega}\right] - DMp^2 i\omega\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Отметим еще раз, что в нашем случае набора переменных $(u, \tilde{u}, s, \tilde{s})$ выражениям (25), (26) соответствуют именно функции Грина $\langle u\tilde{u}\rangle_0$. В работе [13] эта функция обозначена как $\langle \tilde{u}u\rangle_0$.

После исключения в производящем функционале слагаемых, линейных по динамическим переменным, равенство (7) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} G(J) = N^{-1} \times \\ \times \exp\left(-\int d^d x\, dt\, V\left[\frac{\delta}{\delta J_{S_1}}, \ldots, \frac{\delta}{\delta J_u}, \frac{\delta}{\delta J_{\tilde{u}}}, \ldots, \frac{\delta}{\delta J_{\tilde{S}_1}}\right]\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2}\int d^d x_1 d^d x_2 dt_1 dt_2 J_i(\mathbf{x}_1, t_1) \times \right. \\ \left. \times\, \Delta_{ij}^{(S)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) J_j(\mathbf{x}_2 - t_2)\right] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{2}\int d^d x_1 d^d x_2 dt_1 dt_2 J_k(\mathbf{x}_1, t_1) \times \right. \\ \left. \times\, \Delta_{kl}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) J_l(\mathbf{x}_2, t_2)\right). \end{aligned} \tag{27}$$

В равенстве (27) индексы i, j пробегают значения $\{S_1, S_2, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2\}$ с учетом равенств (18), индексы k, l — значения $\{u, \tilde{u}, s, \tilde{s}\}$ с учетом того, что функции Грина $\langle\tilde{u}\tilde{u}\rangle, \langle\tilde{s}\tilde{s}\rangle, \langle\tilde{u}\tilde{s}\rangle, \langle\tilde{s}\tilde{u}\rangle$ равны нулю, а по повторяющимся индексам проводится суммирование, N определяется из условия нормировки $G(J = 0) = 1$ и обычно опускается. Здесь следует сделать следующее замечание. В выражение для той части действия, которая учитывает взаимодействие полей, входят композитные операторы вида $\tilde{S}_i S_i$ и $S_i S_i$. При проведении расчетов мы рассматривали входящие в них операторы как отдельные операторы, но обладающие одинаковыми координатами.

4. ФОНОННЫЙ ОКЛИК

Рассмотрим функцию Грина $\langle u(\mathbf{x}, t_x)\tilde{u}(\mathbf{y}, t_y)\rangle$, где среднее означает усреднение с плотностью вероятности в конфигурационном пространстве равной $\exp(S)$, где S — действие. Эта функция получается из генерирующего функционала следующим образом:

$$G^{(u)} = \langle u(\mathbf{x}, t_x)\tilde{u}(\mathbf{y}, t_y)\rangle = \\ = \frac{\delta}{\delta J_u}(\mathbf{x}, t_x)\frac{\delta}{\delta J_{\tilde{u}}}(\mathbf{y}, t_y)G(J)_{|J=0}. \quad (28)$$

Далее рассматриваются только связные диаграммы [21]. Записывая функцию $G^{(u)}$ в виде

$$G^{(u)} = G_0^{(u)} + G_0^{(u)}\Sigma G^{(u)},$$

где $G_0^{(u)}$ — невозмущенная функция Грина, Σ — собственно-энергетическая часть, вычислим исходя из (28) последнюю величину во втором порядке по теории возмущений. В этом приближении фурье-образ $\Sigma(\mathbf{p}, \omega)$ записывается следующим образом:

$$\Sigma(\mathbf{p}, \omega) = 8\left\{\gamma_{u0}^2\lambda_0 p^2 + \frac{\lambda_0\gamma_{s0}^2\kappa^2 w^2 p^6}{[-i\omega + \kappa p^2]^2} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_0\gamma_{u0}\gamma_{s0}\kappa w p^4}{[-i\omega + \kappa p^2]}\right\} \times \\ \times \int \frac{d^d p_1 d\omega_1}{[2\pi]^{d+1}}\Delta_{12}^{(S)}(\mathbf{p}_1, \omega_1)\Delta_{11}^{(S)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}, \omega_1 - \omega). \quad (29)$$

Заметим теперь, что интеграл в равенстве (29) есть фурье-преобразование величины

$$\Delta_{12}^{(S)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')\Delta_{11}^{(S)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t').$$

Оказывается, что интеграл в (29) проще считать, вычисляя это фурье-преобразование. В координатном пространстве функции $\Delta_{12}^{(S)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'', t' - t'')$, $\Delta_{11}^{(S)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'', t' - t'')$ равны

$$\Delta_{12}^{(S)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}(\lambda_0 t)^{d/2}} \times \\ \times \theta(t)\exp\left[-\lambda_0 r_0 t - \frac{(|x|)^2}{4\lambda_0 t}\right], \quad (30)$$

$$\Delta_{11}^{(S)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\exp[-\lambda_0 r_0|t|]}{(2\pi)^{d/2}|x|^{-1+d/2}} \times \\ \times \int_0^\infty dk\, k^{d/2} J_{1+d/2}(k|x|)\frac{\exp[-\lambda_0 k^2|t|]}{(r_0 + k^2)}, \quad (31)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}''$, $t = t' - t''$. В равенствах (30), (31) $\theta(t)$ — тэта-функция Хэвисайда, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя. Подставим эти выражения в интеграл

$$I = \int d^d x\, dt \times \\ \times \exp[i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\omega t]\Delta_{12}^{(S)}(\mathbf{x}, t)\Delta_{11}^{(S)}(\mathbf{x}, t). \quad (32)$$

Примем теперь во внимание следующее равенство:

$$\int_0^\infty dq\, q^{d/2} J_{-1+d/2}(q|x|)\frac{\exp[-\lambda_0 t q^2]}{(r_0 + q^2)} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{|x| r_0}{2}\right)^{-1+d/2}\exp[\lambda_0 r_0|t|] \times \\ \times\left[\left(|x|^2\frac{r_0}{4}\right)^{(2-d)/4} I_{-1+d/2}\left(|x|\sqrt{r_0}\right) \times \right. \\ \times\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) - \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\left(|x|^2\frac{r_0}{4}\right)^n \times \\ \left. \times\,\gamma\left(1 - n - \frac{d}{2}, \lambda_0 r_0 t\right)\right], \quad (33)$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $\gamma(a, x)$ — неполная гамма-функция. Тогда интеграл (32) равен

$$I = \frac{(r_0)^{-1+d/2}\lambda_0\Gamma(1 - d/2)\Gamma(d/2)}{(2)^{1+d/2}(2\pi)^{d/2}(-i\omega + \lambda_0 p^2)^2} \times \\ \times {}_1F_1\left(2, \frac{d}{2}, -\frac{p^2\lambda_0^2 r_0}{p^2\lambda_0 - i\omega}\right). \quad (34)$$

В равенстве (34) величина ${}_1F_1(a, b, x)$ есть функция Кумера, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Отметим, что слагаемые, которые возникают от интегралов с неполной гамма-функцией, оказываются равными нулю.

5. О ВОЗМОЖНОСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВТОРОГО РОДА

Влияние решеточных степеней свободы на тип фазового перехода рассматривалось ранее различными авторами. Так, в работе [22] на примере упруго-изотропного сегнетоэлектрика было показано, что наличие сдвиговых напряжений и акустических волн приводит к реализации фазового перехода первого рода, близкого ко второму. Этот вывод справедлив и для модели Изинга. В монографии [23] для магнитного перехода в ферромагнитное состояние в простой модели учета обменострикции как функции относительного объема системы также анализировалась возможность изменения типа фазового перехода. В этой модели происходит изменение термодинамического потенциала, приводящее к уменьшению коэффициента при четвертой степени параметра порядка. Смена знака этого коэффициента нарушает условие существования перехода второго рода.

Вернемся к нашей модели. Действие в квантово-полевой теории ренормгруппы выбирается безразмерным в канонической размерности [20]. Поэтому все слагаемые, входящие в действие, должны быть безразмерными величинами. Величина $\beta_c = 1/T_C$ обычно не пишется, так как ее убирают подходящим растяжением переменных действия. Всем переменным можно приписать канонические размерности, определив их из требования безразмерности каждого из вкладов в действие. В статическом случае должна соблюдаться инвариантность относительно растяжения всех величин и координаты (импульса) [20]. В динамике существуют два независимых преобразования масштабов, в одном из которых, как и в статическом случае, растягиваются величины и координаты (импульс), а во втором — величины и время (частота). Поэтому любая величина обладает двумя независимыми каноническими размерностями, а именно: импульсной d_F^p, где d — обозначение канонической размерности, F — величина, для которой она определяется (индекс p указывает на импульсную размерность), и частотной d_F^ω, где индекс «ω» указывает на частотную размерность. Сейчас действие должно быть инвариантным относительно общего масштабного преобразования, в котором одновременно и согласованно растягиваются все времена и координаты (или частоты и импульсы). Тогда общие канонические размерности d_F для каждой величины F определяются соотношениями [20]

$$d_F = d_F^p + \Delta_\omega d_F^\omega,\, \omega \sim p^{\Delta_\omega}. \tag{35}$$

Обратимся теперь к той части динамического действия, которая описывает взаимодействие в системе и характеризуется внешним параметром e. Если $d_e \geq 0$, то взаимодействие оказывается (инфракрасно) существенным и должно приниматься во внимание при исследовании фазового перехода. Если $d_e < 0$, то взаимодействие с этим внешним параметром необходимо отбросить. Отсюда следует, что в модели, описывающей критическую динамику, все инфракрасные несущественные вклады должны быть отброшены, в том числе и в свободной части действия [20]. В рассматриваемой модели величина $\Delta_\omega \approx 2$. Можно показать, что действие (6) является мультипликативно ренормируемым и для него имеем $d_M = 2 - 2\Delta_\omega$, $d_{DM} = -2\Delta_\omega$, что совпадает с результатами в [13]. Таким образом, в динамическом действии должны быть опущены слагаемые, пропорциональные коэффициентам M и DM. Формально это означает, что продольные колебания решетки при исследовании фазового перехода несущественны. Ниже уточним этот вывод. В этом случае неренормированное действие запишется в виде

$$\begin{aligned} S_c = \int d^dx\, dt(\tilde S_1 \lambda_0 \tilde S_1 - \tilde S_1[\dot S_1 + \lambda_0([r_0 - \Delta]S_1 + \\ + \frac{g_{10} - 12\gamma_{u0}^2}{6}(S_1^2 + S_2^2)S_1 + \frac{g_{20}}{12}S_1 S_2^2 + \\ + 2(\gamma_{s0} - w\gamma_{u0})sS_1)] + \tilde S_2 \lambda_0 \tilde S_2 - \tilde S_2\Big[\dot S_2 + \\ + \lambda_0([r_0 - \Delta]S_2 + \frac{g_{10} - 12\gamma_{u0}^2}{6}(S_1^2 + S_2^2)S_2 + \\ + \frac{g_{20}}{12}S_1^2 S_2 + 2(\gamma_{s0} - w\gamma_{u0})sS_2)\Big] - \\ - \tilde s\kappa\Delta\tilde s - \tilde s[\dot s + \kappa\Delta(1 - w^2)s + \\ + (\gamma_{s0} - w\gamma_{u0})(S_1^2 + S_2^2)]). \end{aligned} \tag{36}$$

Обратим внимание на то, что имеет место перенормировка константы взаимодействия g_{10}. Фазовый переход второго рода может иметь место только в том случае, если выполняется неравенство

$$\gamma_{10} - 12\gamma_{u0}^2 > 0. \tag{37}$$

Следовательно, при наличии обменной стрикции и в отсутствие сдвиговых напряжений могут возникнуть условия для реализации перехода первого рода, если неравенство (37) будет противоположным. Таким образом, в рассматриваемой модели, описывающей звуковые волны в области фазового перехода второго рода, должно выполняться неравенство (37) и отсутствовать сдвиговые напряжения в системе.

При записи производящего функционала для функций Грина с действием (36) нужно принять во внимание, что невозмущенные функции Грина $\Delta_{12}^{(S)}$ и $\Delta_{11}^{(S)}$ имеют тот же вид, что и раньше, а для функций $\langle s\tilde s\rangle_0$ и $\langle ss\rangle_0$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \langle s\tilde s\rangle_0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + (1 - w^2)\kappa\Delta\right)^{-1}, \\ \langle ss\rangle_0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + (1 - w^2)\kappa\Delta\right)^{-1} \times \\ &\times 2\kappa\Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1 - w^2)\kappa\Delta\right)^{-1T}. \end{aligned} \tag{38}$$

6. РЕНОРМГРУППОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Нас интересует критическое поведение величины I (34), полученное на основе действия (6). Однако в предыдущем разделе было показано, что слагаемые, содержащие упругие переменные, не влияют на фазовый переход. Поэтому исследование критического поведения различных функций Грина нужно проводить на основе базового действия S_{cB} [20]. Оно получается из (36) заменой величины $r_0 = (T - T_{C0})$ на $r = (T - T_C)$ (где T_C — температура перехода, наблюдаемая экспериментально), величины λ_0 — на ее ренормированное значение λ, а также заменой неренормированных параметров взаимодействия $g_{i0} i = 1, 2$ на параметры $g_{iB} = g_i \mu^{2\varepsilon}$ (где g_i — ренормированные параметры, μ — затравочная масса) и $\gamma_{j0}(j = s, u)$ — на величины $\gamma_{jB} = \gamma_j \mu^{\varepsilon}$. Выражение для I содержит полюс относительно малой величины ε. Поэтому необходимо ренормировать эту величину для исключения расходимости. Выше уже указывалось, что действие (6) является мультипликативно ренормируемым. Следовательно, мы можем работать в схеме с минимальными вычитаниями [20]. Поэтому в рассматриваемом приближении ренормировка I сводится просто к вычитанию из нее полюсной части. В этом случае ренормированная величина I_R записывается следующим образом:

$$I_R = \frac{r\lambda}{2^3(2\pi)^2}[\ln r - \ln 4\pi] \times \\ \times \frac{\Gamma(2)}{(\lambda p^2 - i\omega)^2} \exp\left(\frac{-p^2\lambda^2 r}{\lambda p^2 - i\omega}\right). \quad (39)$$

В равенстве (39) отброшены малые слагаемые, пропорциональные степеням ε^n с $n > 1$, а также принята во внимание только экспоненциальная часть функции Кумера, не зависящая от этого малого параметра. Заметим, что по аналогии с получением базового действия проведена замена неренормированных параметров r_0, λ_0 на их ренормированные значения r, λ. Функция I_R получена нами в однопетлевом приближении и не содержит констант взаимодействия g_{1B}, g_{2B}, γ_{uB}, γ_{sB}. Фактически нужно исследовать критическое поведение функции$\langle \tilde{S}_i(\mathbf{x}, t) S_i(\mathbf{x}, t) S_j(\mathbf{y}, t') S_j(\mathbf{y}, t')\rangle$. Формально исследуется поведение этой функции, когда спиновые индексы одинаковы и равны, скажем, индексу $i = 1$. Наличие других компонент учитывается симметрийными множителями. Так, в однопетлевом приближении этот множитель равен

$$B = (g_{1B} - 12\gamma_{uB}^2)\left(\frac{10}{3} + \frac{2\alpha}{3}\right) + \\ + g_{2B}(g_{1B} - 12\gamma_{uB}^2)\frac{12 + 4\alpha}{2}, \quad (40) \\ \alpha = \frac{g_{2B}}{2(g_{1B} - 12\gamma_{uB}^2)}.$$

Поэтому исследуем ренормгрупповое уравнение для такого коррелятора. Для этого рассмотрим связную ренормированную функцию Грина $W_R^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}(p, \omega, g_1, g_2, r, \lambda, \mu)$.В этой функции имеется $\tilde{M}$ вставок типа $\tilde{S}S$, M вставок типа SS, $\tilde{N}$ сомножителей $\tilde{S}$ и N сомножителей S. Мы опустили индексы у спиновых переменных, поскольку, как указано выше, все индексы равны единице. Величины g_1, g_2, r, λ являются ренормированными. Тогда ренормгрупповое уравнение для функции $W_R^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}(p, \omega, g_1, g_2, r, \lambda, \mu)$ записывается в виде

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_1(g_1)\frac{\partial}{\partial g_1} + \beta_2(g_2)\frac{\partial}{\partial g_2} - \right. \\ \left. - \gamma_r r\frac{\partial}{\partial r} - \gamma_\lambda \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + N\gamma_S + \tilde{N}\gamma_{\tilde{S}} - M\gamma_{S^2} - \tilde{M}\gamma_{(\tilde{S}S)}\right] \times \\ \times W_R^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}(p, \omega, g_1, g_2, r, \lambda, \mu) = 0. \quad (41)$$

В равенстве (41) параметры $\gamma_i(i = r, S, \tilde{S}, S^2, \tilde{S}S)$ есть аномальные размерности [20] величин, приведенных в скобках, $\beta_j(j = 1, 2)$ — бета-функции соответствующих ренормированных зарядов $g_{1,2}$. Они связаны с неренормированными зарядами g_{10}, g_{20} соотношениями [20]

$$g_{i0} = g_i \mu^{2\varepsilon} Z_{g_i}, \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

где μ — затравочная масса, $Z_{g_i}, (i = 1, 2)$ — константы ренормировки зарядов [20]. Нас будет интересовать функция $W_R^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}$ непосредственно в критической точке фазового перехода, в которой обращаются в нуль коэффициенты $\beta_1(g_1)$, $\beta_2(g_2)$. Обозначим значения ренормированных констант взаимодействия в точке перехода как g_1^*, g_2^*. Используя метод получения уравнения в критической точке [20], получим следующее ренормгрупповое уравнение для искомой ренормированной функции W:

$$\left[p\frac{\partial}{\partial p} + \Delta_\omega \omega\frac{\partial}{\partial\omega} + \Delta_r r\frac{\partial}{\partial r} - \tilde{N}\Delta_{\tilde{S}} - N\Delta_S + M\Delta_{S^2} + \right. \\ \left. + \tilde{M}\Delta_{(\tilde{S}S)}\right] W_R^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}(p, \omega, g_1^*, g_2^*, r, \lambda, \mu) = 0, \quad (43)$$

где $\Delta_i = d_i + \gamma_i^*$. В последнем равенстве аномальная размерность γ_i^* получается путем подстановки в ее выражение величин g_1^*, g_2^*. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Критическая размерность Δ_λ обращается в нуль [20]. Поэтому в уравнении (43) отсутствует слагаемое с производной ∂_λ.В результате возникает связь между аномальной размерностью γ_λ^* в критической точке и критической размерностью Δ_ω вида [20]

$$\Delta_\omega = -(d_\lambda^p + \gamma_\lambda^*)/d_\lambda^\omega,$$

при этом $d_\lambda^p = -2$, $d_\lambda^\omega = 1$.

Ведем также безразмерные переменные

$$\frac{p}{\mu}=\zeta, \quad \frac{r}{\mu^2}=z, \quad \frac{\omega}{\lambda\mu^2}=q. \tag{44}$$

В этих безразмерных переменных уравнение (43) можно записать в виде

$$\left[-\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}-\Delta_r z\frac{\partial}{\partial z}-\Delta_\omega q\frac{\partial}{\partial q}+\right.$$
$$\left.+N\Delta_S+\tilde{N}\Delta_{\tilde{S}}-M\Delta_{S^2}-\tilde{M}\Delta_{(\tilde{S}S)}\right]\times$$
$$\times W_R'^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}(\zeta,z,q,g_1^*,g_2^*)=0. \tag{45}$$

Штрих у ренормированной функции W означает, что она записана через безразмерные переменные. Решение уравнения (45) имеет вид

$$W_R'^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}(\zeta,z,q,g_1^*,g_2^*)=$$
$$=W_R'^{(\tilde{M}M\tilde{N}N)}(1,z\zeta^{-\Delta_r},q\zeta^{-\Delta_\omega},g_1^*,g_2^*)\times$$
$$\times\exp\left[\int\limits_0^\zeta\frac{dt}{t}(N\Delta_S+\tilde{N}\Delta\tilde{S}-M\Delta_{S^2}-\tilde{M}\Delta_{(\tilde{S}S)})\right]. \tag{46}$$

В равенстве (46) параметр t — переменная интегрирования, от которой критические размерности Δ_i под знаком интеграла не зависят. В интересующем нас случае будем иметь

$$W_R'^{(\tilde{1}100)}(\zeta,z,q,g_1^*,g_2^*)=$$
$$=W_R'^{(\tilde{1}100)}\left(1,\frac{r}{\mu^2}\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-1/\nu},\frac{\omega}{\lambda\mu^2}\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-\Delta_\omega},g_1^*,g_2^*\right)\times$$
$$\times\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-(2d-2/\nu+\Delta_\omega)}. \tag{47}$$

В правой части уравнения (47) принято во внимание, что критическая размерность Δ_r величины $r = T - T_C$, где T_C — истинная температура перехода, не меняется при переходе от статики к динамике [20], т. е. равна $1/\nu$. Аномальная размерность вставки S^2 есть $2-1/\nu$ [24]. Размерность компоненты параметра порядка d_S равна $d/2-1$ [13, 20]. Таким образом, критическая размерность Δ_{S^2} равна $d-1/\nu$. Размерность $d_{\tilde{S}}=d/2+1$. Следовательно, $d_{(\tilde{S}S)}=d$. Из данных работы [13] можно получить следующее соотношение для аномальных размерностей: $\gamma_{(\tilde{S}S)}=-\gamma_r-\gamma_\lambda$. В этом случае

$$\gamma^*_{(\tilde{S}S)}=\Delta_\omega-1/\nu,$$

а критическая размерность

$$\Delta_{(\tilde{S}S)}=d+\Delta_\omega-1/\nu.$$

В результате в последнем сомножителе в правой части уравнения (47) и возникает указанный показатель степени. В монографии [20] сформулировано утверждение, что нетривиальный критический скейлинг характеризуется таким асимптотическим поведением, в котором аргументы скейлинговой функции

$$W_R'^{(\tilde{1}100)}\left(1,\frac{r}{\mu^2}\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-1/\nu}\frac{\omega}{\lambda\mu^2}\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-\Delta_\omega},g_1^*,g_2^*\right)$$

оказываются величинами порядка (или меньше) единицы, что приводит к взаимно согласованной малости переменных p, r, ω:

$$p\to 0, \quad r\sim p^{1/\nu}, \quad \omega\sim p^{\Delta_\omega}. \tag{48}$$

Интересно рассмотреть случай, когда к нулю стремится величина $r=(T-T_C)$. В этой ситуации величину $W_R'^{(\tilde{1}100)}(\zeta,z,q,g_1^*,g_2^*)$ запишем в несколько ином виде:

$$W_R'^{(\tilde{1}100)}(\zeta,z,q,g_1^*,g_2^*)=$$
$$=W_R'^{(\tilde{1}100)}\left(1,\frac{p}{\mu}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu},\frac{\omega}{\lambda\mu^2}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu\Delta_\omega},g_1^*,g_2^*\right)\times$$
$$\times\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu(2d-2/\nu+\Delta_\omega)}. \tag{49}$$

Тогда самосогласованная малость величин r, p, ω представляется в виде

$$r\to 0, \quad p\sim r^\nu, \quad \omega\sim r^{\nu\Delta\omega}. \tag{50}$$

Отметим теперь следующее обстоятельство. Если выразить величину I_R, определенную равенством (39), через инвариантные безразмерные переменные (44), то полученное выражение совпадает с величиной $W_R'^{(\tilde{1}100)}(\zeta,z,q,g_1^*,g_2^*)/B(g_1^*,g_2^*)$, где $B(g_1^*,g_2^*)$ определено в (40) с соответствующей заменой параметров взаимодействия (42) их ренормированными значениями в критической точке.

7. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

Дисперсионное уравнение для звуковых (упругих) волн определяется полюсом функции $G^{(u)}$. Это уравнение справедливо и вблизи температуры перехода в несоизмеримую фазу. Принимая во внимание (26), получим [13]

$$p^2\left(1-\frac{\kappa w^2p^2}{\kappa p^2-i\omega}\right)-M\omega^2-DMp^2i\omega-$$
$$-\Sigma(\mathbf{p},\omega)=0. \tag{51}$$

Действительная часть этого уравнения определяет зависимость частоты волны от волнового вектора. В общем виде уравнение для определения закона дисперсии можно записать следующим образом:

$$p^2(1-8\lambda_0\gamma_{u0}^2\operatorname{Re}I_R)-\frac{w\kappa^2p^6}{(\kappa p^2)^2+\omega^2}\times\\ \times[w-8\lambda_0\gamma_{u0}\gamma_{s0}\operatorname{Re}I_R]-\frac{8w\kappa\omega p^4\lambda_0\gamma_{u0}\gamma_{s0}}{(\kappa p^2)^2+\omega^2}\operatorname{Im}I_R-\\ -\frac{8\lambda_0\gamma_{s0}^2w^2p^6}{[(\kappa p^2)^2+\omega^2]^2}[(\kappa p^2)^2-\omega^2]\operatorname{Re}I_R+\frac{16\lambda_0\gamma_{s0}^2w^2p^8\omega\kappa}{[(\kappa p^2+\omega^2)]^2}\times\\ \times\operatorname{Im}I_R-M\omega^2=0. \quad (52)$$

Это неявное уравнение зависимости частоты ω от волнового вектора p аналитически вряд ли может быть решено. Поэтому необходимо сделать существенное упрощение этого уравнения. Первое упрощение состоит в том, что мы пренебрегаем вкладом от энтропии в это уравнение, т. е. полагаем константу w равной нулю. В этом приближении уравнение (52) приобретает вид

$$p^2(1-8\lambda_0\gamma_{u0}^2\operatorname{Re}I_R)-M\omega^2=0, \quad (53)$$

где p — модуль волнового вектора упругой волны.

Выразим коррелятор I_R через безразмерные переменные (44). Используя теперь равенство (49), будем иметь

$$I_R(\zeta,z,q)=\\ =I_R\left(1,\frac{p}{\mu}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu},\frac{\omega}{\lambda\mu^2}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu\Delta_\omega}\right)\times\\ \times\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu(2d-2/\nu+\Delta_\omega)}. \quad (54)$$

Запишем квадрат частоты в уравнении (53) в виде

$$\begin{gathered}\omega^2=\omega_0^2+\delta\omega^2,\\ \omega_0^2=p2/M.\end{gathered} \quad (55)$$

С учетом равенств (53)–(55) величина $\delta\omega^2$ может быть представлена следующим образом:

$$\delta\omega^2=-8\lambda_0\gamma_{u0}^2\omega_0^2\times\\ \times\operatorname{Re}I_R\left(1,\frac{p}{\mu}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu},\frac{\omega}{\lambda\mu^2}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu\Delta_\omega}\right)\times\\ \times\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu(2d-2/\nu+\Delta_\omega)}. \quad (56)$$

Изменение квадрата частоты, как видно из равенства (56), прямо пропорциональна квадрату константы γ_{u0}, определяющей величину связи между магнитной подсистемой и решеткой. Величина этой константы определяется обменной стрикцией. В дигерманиде железа, обладающем слоистой структурой, эти константы будут различными при распространении звуковых волн вдоль главной оси и в слое. Обменная стрикция будет сильнее в слое, поскольку расстояние между магнитными атомами внутри слоя оказывается меньше, чем это расстояние между слоями. Отсюда ясно, что при распространении упругих волн вдоль главной оси изменение частоты волны будет меньше, чем при распространении волны вдоль слоя.

Определим фазовую скорость упругой волны со стандартным соотношением $c=\omega/p$, где ω — частота волны, а p — модуль волнового вектора. Используя это определение, запишем разность квадратов частот $\delta\omega^2$ в уравнении (56) так: $\delta\omega^2=(c^2-c_0)p^2$. В этом равенстве c — скорость звуковой волны, наблюдаемая в эксперименте, c_0 — адиабатическая скорость звуковой волны, распространяющейся вдоль оси [100] кристалла. Здесь необходимо сделать важное замечание. В критической области температур адиабатическую скорость звука, обратный квадрат которой определяет величину M в (55), можно брать как линейную экстраполяцию изменения скорости звука при температурах значительно выше, чем T_C [25]. Используем далее приближение $c^2-c_0^2= =\delta c^2\sim-(\delta c)^2$. В этом случае из равенства (56) будем иметь

$$\frac{\delta c}{c_0}\sim\gamma_{u0}\left[8\lambda_0\operatorname{Re}I_R\left(1,\frac{p}{\mu}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu},\right.\right.\\ \left.\left.\frac{\omega}{\lambda\mu^2}\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu\Delta_\omega}\right)\right]^{1/2}\times\\ \times\left(\frac{r}{\mu^2}\right)^{-\nu(d-1/\nu+\Delta_\omega/2)}. \quad (57)$$

В монографии [20] приведено значение индекса $\nu\approx\approx 0.671$ для размерности пространства $d=3$, в работе [10] рассчитана величина $\Delta_\omega=2+R\eta$, где $R= =0.726(1-0.189)$ для $d=3$, а индекс $\eta=0.040$ [20]. В этом случае модуль показателя степени в последнем сомножителе в правой части (57) равен 1.69.

Из экспериментальных данных работы [14] следует, что скорость звука продольной волны вдоль направления [100] изменяется существенно больше, чем в направлении [001], в котором это изменение оказывается наименьшим. Понятно также, почему изменение скорости волны вдоль направления [110] оказывается промежуточным по величине, поскольку γ_{u0} определяет тогда обменную стрикцию по диагонали в слое.

Отметим, что характер изменения скорости упругой волны формально совпадает с температурным поведением функции $f(r) = |r|(\ln|r| - \ln 4\pi)$, входящей в выражение для I_R, так как в критической области последнее справедливо как выше, так и ниже температуры перехода [20]. При смещении от точки перехода вверх по температуре эта функция уменьшается по величине в той области температур, где существенны флуктуации параметра порядка. При температуре перехода она имеет максимум, в котором ее значение равно нулю. При температурах ниже температуры перехода $f(r)$ также сначала уменьшается при удалении от точки перехода, достигая минимума, а затем начинает расти. Температура минимума равна $T = T_C - T_0$, температура $T_0 \sim 4\pi/e \sim 4.62$ K. Тогда можно положить, что в критической области $c = c(T_C) + \delta c$, где $\delta c \sim Qf(r)$, Q — некоторая константа. При этом значение температуры, в которой функция $f(r)$ достигает локального минимального значения, находится в хорошем согласии с экспериментальными данными работы [14].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено распространение продольной упругой (звуковой) волны в окрестности фазового перехода в несоизмеримую магнитную структуру в слоистых тетрагональных системах на примере соединения $FeGe_2$. Описание проводилось на основе анализа критической динамики с введением в рассмотрение случайных сил с корреляторами гауссова типа. На этом этапе важным оказывается то, каким образом вводится динамическая переменная, описывающая стохастическую решеточную динамику. Для введения этой переменной учитываем изменение плотности термодинамического потенциала в результате флуктуации. Представим систему как набор подсистем, слабо взаимодействующих между собой (например, только за счет градиентов параметров порядка), тогда флуктуация в малой подсистеме пропорциональна минимальной работе, которая совершается над подсистемой, включающей и изменение тензора деформации. В результате удается ввести динамическую переменную, описывающую стохастическую решеточную динамику и включить слагаемые с этой переменной в изменение термодинамического потенциала системы, а значит, и в действие нашей задачи. Путем удвоения числа полей задача была сведена к квантово-полевой модели. Определение функций Грина проводилось с использованием генерирующего функционала, в котором было проведено преобразование «смещения на константу», для избавления от слагаемых, линейных по источникам полей. Дисперсионное уравнение упругих волн определялось полюсом функции Грина $\langle u\tilde{u}\rangle$. Собственно-энергетическая часть определялась с точностью до второго порядка по теории возмущений.

Установлено, что в критической области вблизи температуры перехода второго рода в несоизмеримую магнитную структуру изменение скорости упругой волны относительно адиабатической скорости этой волны, получаемой линейной аппроксимацией высокотемпературных значений, отнесенное к адиабатической скорости, имеет степенной характер вида $(T - T_C)^{-\nu(d-1/\nu+\Delta_\omega/2)}$. Изменение квадрата частоты упругой волны с температурой также имеет степенной характер с показателем степени, удвоенным по сравнению с написанным выше. Показано, что изменение скорости звука в критической области коррелирует с температурным поведением функции $|r|(\ln|r| - \ln 4\pi)$. Различная величина изменения скорости продольного звука в направлениях [100], [110], [001] связана с тем, что константы обменострикции при распространении звука в этих направлениях не совпадают между собой, причем обменострикция при распространении вдоль направления [001] оказывается наименьшей.

Отметим, в заключение, что подход, развиваемый в статье для описания распространения звука вблизи магнитного фазового перехода второго рода беспорядок-порядок может быть распространен и на переходы в соизмеримую магнитную фазу, которая описывается двухкомпонентным параметром порядка. Магнитный переход в этом случае не должен сопровождаться изменением тетрагональной кристаллической структуры.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (шифр «Квант») Г.р. № АААА-А18-118020190095-4.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. P. Belov, G. I. Katayev, and R. Z. Levitin, J. Appl. Phys. Suppl. **31**, 1535 (1960).

2. Л. Д. Ландау, Т. М. Халатников, ДАН СССР **96**, 469 (1954).

3. J. R. Neighbours, R. W. Olivers, and C. H. Stillwell, Phys. Rev. Lett. **10**, 125 (1963).

4. H. Mori, Progr. Theor. Phys. **33**, 423 (1965).

5. K. Tani and H. Mori, Progr. Theor. Phys. **39**, 876 (1968).

6. B. I. Halperin, P. C. Hoenberg, and S.-Keng Ma, Phys. Rev. Lett. **29**, 148 (1972).

7. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).

8. H. K. Jenssen, Z. Phys. B **23**, 377 (1976).

9. C. De Domimicis and L. Peleti, Phys. Rev. B **18**, 363 (1977).

10. Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, ТМФ **60**, 59 (1984).

11. R. Bausch, H. H. Janssen, and H. Wagner, Z. Phys. B **24**, 113 (1976).

12. R. Dengler and F. Schwabl, Z. Phys. B **69**, 327 (1987).

13. B. Drossel and F. Schwabl, Z. Phys. B **91**, 93 (1993).

14. К. Б. Власов, Е. В. Устелемова, Р. И. Зайнуллина и др., ФТТ **32**, 1385 (1990).

15. Р. И. Зайнуллина, М. А. Миляев, ФТТ **61**, 1336 (2019).

16. H. L. Smith, Y. Chen, D. S. Kim et al., Phys. Rev. Mater. **2**, 103602 (2018).

17. О. В. Ковалев, *Неприводимые и индуцированные представления и копредставления федоровских групп*, Наука, Москва (1986).

18. В. В. Меньшенин, ФТТ **61**, 652 (2019).

19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).

20. А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, Санкт-Петербург (1998).

21. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы теории поля в статистической физике*, Изд-во Добросвет, Москва (1998).

22. А. И. Ларкин, С. А. Пикин, ЖЭТФ **56**, 1664 (1969).

23. *Физика магнитных диэлектриков*, под ред. Г. А. Смоленского, Наука, Москва (1974).

24. D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, Singapore Nat. Printers (Pte) Ltd, Singapore (1978).

25. K. Kawasaki and A. Ikushima, Phys. Rev. B **1**, 3143 (1970).