

КООПЕРАТИВНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ КАК СУБОРДИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

А. М. Башаров ^{a,b*}, А. И. Трубилко ^{c**}

^a Научно-исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

^c Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России
196105, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 2021 г.,
после переработки 19 апреля 2021 г.
Принята к публикации 23 апреля 2021 г.

Кооперативное излучение двухуровневых примесей в сложной диэлектрической среде представлено как субординированный случайный процесс, управляемый альфа-устойчивым процессом с параметром альфа, определяемым характерными временами затухания излучения. Найдены отличия от обычного сверхизлучения. Привлеченные физические основания для введения субординации полезны и в других излучательных задачах.

DOI: 10.31857/S0044451021080034

1. ВВЕДЕНИЕ

Кооперативное излучение ансамбля из N_p возбужденных атомов (квантовых частиц), известное как сверхизлучение (СИ), состоит в сокращении в N_p раз длительности времени высвечивания энергии по сравнению со спонтанным излучением одиночного атома, задержке его пика относительно начала излучения и возрастании в N_p^2 раз интенсивности. Как и в случае излучения одиночного атома, при рассмотрении кооперативного излучения используется марковское приближение, в котором имеет место экспоненциальный распад одиночного возбуждения — и в случае одиночного атома, и в случае симметричного состояния ансамбля атомов возбужденное состояние распадается как $\exp(-t/\tau)$ со своим значением времени испускания τ для каждого случая. Между тем многочисленные экспериментальные [1–6] и теоретические [7–10] исследования излучения одиночного примесного атома в сложных диэлектрических средах показывают отличие от экспоненциального закона. Эти отличия обсуждают в терминах или закономерностей типа Коль-

роуша – Вильямса – Уотса $\exp((-t/\tau)^\beta)$, $0 < \beta < 1$ [11–15], или степенной асимптотики $1/(1 + (t/\tau)^\delta)$, $\delta > 0$. Неэкспоненциальный распад связывают также с немарковской динамикой [16–20]. Его часто обсуждают в связи с бозе-конденсатом [21–23]. Неэкспоненциальный распад вследствие суммирования различных экспонент неинтересен в нашем контексте.

Под сложными диэлектрическими средами (матрицами) обычно понимают структуры из многоатомных молекул, в том числе и пленки, например, пленки из $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{PbI}_3$ [24]. Также разные виды фотонных кристаллов можно рассматривать как сложные диэлектрические среды. Считается, что спектр линейных волн в сложных средах имеет степенную плотность фотонных состояний вблизи некоторых точек спектра, например, дна разрешенной зоны фотонных состояний. На этом основан и развиваемый математический аппарат для некоторого описания излучательных процессов в сложных средах. Оператор взаимодействия с линейными волнами в таком представлении выражают через дробную производную по времени [25]. Вообще исследования излучения одиночных молекул в различных диэлектрических средах демонстрируют неэкспоненциальный распад.

* E-mail: basharov@gmail.com

** E-mail: trubilko.andrey@gmail.com

В настоящей статье предлагается новый взгляд на коллективное излучение примесных атомов в сложных диэлектрических средах. Подчеркнем, что и в рамках имеющихся подходов коллективное излучение в сложных средах не рассматривалось. Наш подход основан на следующих двух идеях.

В сложных диэлектрических средах возможны щели в плотности фотонных состояний и прыжковое поведение динамики примесных атомов. Тогда примесные атомы, занимая различные положения в среде и вследствие этого имея различные частоты рабочего перехода и различные константы взаимодействия, могут оказаться в ситуации, когда в первом порядке алгебраической теории возмущений они не излучают [26]. Разброс в частотах примесных атомов приводит к эффекту, известному как неоднородное уширение спектральной линии примесных атомов. Это некоторая мера (в математическом смысле) распределения атомов. Напомним, что подход, основанный на понятии меры в динамике частицы, можно ввести, если вместо рассмотрения временной траектории частицы учитывать долю времени ($\Delta t/T$), проводимого частицей в данном объеме ΔV фазового пространства. Тогда в случае эргодичности

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta t/T = \int_{\Delta V} w dV,$$

где w — плотность меры. Есть разные временные динамики, приводящие к одной и той же мере. В нашем контексте это означает, что вместо рассмотрения неоднородного уширения ансамбля примесных частиц в сложных диэлектрических средах можно рассматривать различную излучательную динамику частицы в вакууме, а именно, считать, что взаимодействие с электромагнитным вакуумом, плотность фотонного состояния которого не имеет особенностей в рассматриваемой области спектра, «включается» случайным образом, т. е. описывается некоторым случайным процессом. Самое простое, однако, рассматривать не включение–выключение взаимодействия с вакуумным электромагнитным полем, а некоторую динамику константы взаимодействия с вакуумным электромагнитным полем. В обоих случаях, очевидно, имеем немарковское взаимодействие. Изменение «константы» будем также рассматривать как случайный процесс.

Прыжковое изменение константы взаимодействия с вакуумным электромагнитным полем предлагается оценивать следующим образом. Спонтанное излучение можно представить как квантовое броуновское движение [27] или моделировать классическим винеровским процессом [28–30]. Пусть, условно, с константой взаимодействия K_1 в некоторый временной интервал совершается броуновский скачок на некоторую величину Δ_1 , зависящую от K_1 . При другой константе взаимодействия K_2 броуновский скачок совершился бы за тот же временной интервал времени на Δ_2 . Однако в силу того, что винеровский процесс имеет модификацию с непрерывными траекториями, полагаем, что того же результата можно достичь, если первоначальный прыжок (с константой K_1) осуществляется как обычно, но его результат перед следующим скачком другой, поскольку относим его к другому промежутку времени. Таким образом, имеется как бы две временные шкалы. В одной шкале совершаются броуновские движения с константой K_1 , а в другой результаты броуновских скачков учитывают как случайные интервалы времени, так, чтобы, например, в некотором временном интервале результат был бы эквивалентен скачку с константой K_2 . Временная шкала совершения броуновского скачка Δ_1 равномерна, а сами прыжки случайны. Временная шкала эффективного результата таких скачков неравномерна и случайна. Случайный процесс, отвечающий неравномерной временной шкале, должен быть стационарным, иметь независимые положительные приращения и не иметь средней величины, иначе нельзя будет говорить о случайной временной шкале. То есть случайный процесс должен быть альфа-устойчивым с $0 < \alpha < 1$. Далее, предъявляя стандартные требования к указанному случайному процессу, нетрудно получить кинетическое уравнение для примесных атомов в сложной диэлектрической среде.

В случае коллективного излучения примесных частиц как в сложных диэлектрических средах, так и в любых открытых системах динамика ансамбля примесных частиц описывается кинетическим уравнением для матрицы плотности примесных частиц. И как для любого кинетического уравнения, есть различные модели временной динамики, которые эффективно дают одно и то же уравнение. Наш подход также приводит к кинетическому уравнению с дробной производной по времени, однако оно отличается от известных в излучательных задачах и справедливо в силу нашего взгляда только для кооперативного излучения частиц в сложной диэлектрической среде. Однако надо подчеркнуть, что полученное уравнение описывает и обычное СИ как частный случай.

Мы математически оформили нашу интерпретацию в виде теории излучения ансамбля примесных

частиц как субординированного процесса, управляемого случайным процессом, включающим взаимодействие квантовой примесной частицы с вакуумным электромагнитным полем. Это, в свою очередь, приводит к построению кинетического уравнения для ансамбля возбужденных примесных частиц с дробной производной по времени. Подчеркнем, что изложенный физический механизм появления дробной производной и появление субординированного процесса для анализа излучения до сих пор не обсуждались в литературе, хотя дробные производные в излучательных задачах для описания процесса спонтанного излучения примесной частицы в «сложной» диэлектрической среде уже неоднократно рассматривались [8, 31–37].

В нашей интерпретации возможно как описание реальных прыжков одной квантовой примеси, так и рассмотрение ансамбля примесных частиц, а собственно неоднородным уширением спектральной линии можно в дальнейшем и пренебречь. Однако если мы говорим о прыжках примесей, то число частиц в ансамбле с единым квантовым состоянием, симметричным по перестановкам частиц, не может быть произвольно велико и зависит от интенсивности скачков частиц. Рассмотрение таких критических чисел ансамбля представляет отдельную задачу. В данной статье для определенности рассматриваем случай единого симметричного по перестановкам числа частиц квантового состояния. Другие пространственные особенности задачи «уходят» в спектральные особенности среды и отражаются лишь в порядке дробной производной. Режим субординации выходит за ограничения марковской теории, как и полученное уравнение с дробной производной по времени. По сравнению с традиционным СИ выявлены отличия — в зависимости от порядка дробной производной в импульсе СИ появляются дополнительные провал и временной сдвиг максимума интенсивности СИ, которые могут свидетельствовать в пользу представленного механизма СИ, хотя экспериментов по СИ в сложных диэлектрических средах авторам неизвестны. В теории дополнительный провал характеризует СИ ансамбля примесей из небольшого числа частиц. Также временной хвост импульса СИ, скорость его уменьшения существенно отличается от обычного случая СИ.

2. ВВЕДЕНИЕ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Теория СИ вошла во многие учебники и монографии по квантовой оптике, а в многочисленных ста-

тях продемонстрированы разные подходы [38–46]. Также укажем работы авторов по невинеровскому сверхизлучению [47–50], в которых теория СИ развита до второго порядка по константе связи с электромагнитным вакуумным полем, тогда как обычная теория представляет собой теорию первого порядка по константе связи с электромагнитным вакуумным полем.

Будем рассматривать случай локализованного атомного ансамбля в сложной диэлектрической среде на основе результатов теории стандартного СИ ансамбля одинаковых двухуровневых частиц. Пусть только пара уровней $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ могут быть заселены и пусть они связаны оптически разрешенным переходом. Основные результаты теории обычного спонтанного излучения следуют из кинетического уравнения стандартного вида Линдблада [27, 51–53]:

$$\frac{d\rho^S}{dt} = \chi \left(R_- \rho^S R_+ - \frac{1}{2} R_+ R_- \rho^S - \frac{1}{2} \rho^S R_+ R_- \right), \quad (1)$$

$$R_- = |E_1\rangle\langle E_2|, R_+ = |E_2\rangle\langle E_1|,$$

$$R_3 = \frac{1}{2} (|E_2\rangle\langle E_2| - |E_1\rangle\langle E_1|),$$

$$[R_3, R_{\pm}] = \pm R_{\pm}, [R_+, R_-] = 2R_3.$$

Здесь χ — безразмерный множитель, пропорциональный константе связи атома с вакуумным окружающим полем.

Всякое кинетическое уравнение, в том числе и уравнение (1), может быть представлено «распутано» (unravelling) как более элементарный, но случайный процесс. Например, к стандартному кинетическому уравнению (1) приводит уравнение Шредингера, записанное в виде стохастического дифференциального уравнения (СДУ) для апостериорного вектора состояния. Уравнение для случайной матрицы плотности, когда переход от одного состояния к другому определяется тем или иным случайным процессом, также дает при усреднении стандартное кинетическое уравнение [28–30]. В частности, кинетическое уравнение (1) может быть получено из стохастического уравнения Шредингера для атомного волнового вектора $|\Psi(t)\rangle$. Таких уравнений можно написать несколько, вкладывая разный смысл в управляющие ими случайные процессы. Для примера укажем такое СДУ, управляемое считающим процессом $N(t)$ [30]:

$$d|\Psi(t)\rangle = \left[-\chi \frac{R_+ R_- - 1}{2} dt + (R_- - 1) dN(t) \right] |\Psi(t)\rangle, \\ (dN(t))^2 = dN(t), \quad \langle dN(t) \rangle = \chi dt.$$

Если ввести компенсированный пуассоновский процесс $\tilde{N}(t) = N(t) - \chi t$, а затем перейти к винеровскому процессу $W(t)$ с алгеброй Ито

$$(dW(t))^2 = dt, \quad dW(t) dt = dt dt = 0, \quad \langle W(t) \rangle = 0,$$

то СДУ, управляемое винеровским процессом,

$$d|\Psi(t)\rangle = \left[-\chi \left(\frac{R_+ R_- + 1}{2} \right) dt + \chi R_- dt + \sqrt{\chi} (R_- - 1) dW(t) \right] |\Psi(t)\rangle, \quad (2)$$

также приводит к кинетическому уравнению (1). В работе [30] также приведено и уравнение для стохастической матрицы плотности. Подчеркнем, что здесь дифференциалы понимаются в смысле Ито [54]. В нашей интерпретации χ — однородная ширина линии спонтанного излучения атома без учета особенностей сложной диэлектрической среды.

При таком представлении винеровский процесс описывает случайные изменения в квантовом состоянии, вызванные взаимодействием с квантованным электромагнитным полем. При дальнейшем стандартном представлении винеровского процесса это означает, что в фиксированные моменты $\tau_j = j\delta\tau$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, происходят случайные скачки/изменения в населенности, вызванные взаимодействием с электромагнитным вакуумом. Это скачки броуновского движения (в случае (2)). В этом месте мы вводим предположение, отвечающее принятой нами картине процессов в сложных диэлектрических средах. Вследствие сложной структуры спектра сложных диэлектриков для частицы ансамбля примесей считаем, что само взаимодействие примеси с электромагнитным вакуумом и связанные с ним случайные скачки в населенности уровней примеси включаются в случайные моменты времени, разделенные случайными интервалами времени T_j .

При представлении/«распутывании» механизма неоднородного уширения частицы ансамбля возникает новый характерный масштаб времени — это характерная «длительность» τ_{Jump} временной динамики частицы, скачка частицы или ее параметров. В случайные моменты времени частица с новыми параметрами начинает взаимодействовать с вакуумным электромагнитным полем. Если $\chi\tau_{Jump} \gg 1$, то имеем обычную марковскую динамику.

Если $\chi\tau_{Jump} < 1$ или $\chi\tau_{Jump} \ll 1$, в задаче возникают два случайных процесса. Один из них дает стандартное «распутывание» кинетического уравнения по отношению случайности в процессах изменения в квантовом состоянии примеси, связанным со спонтанным излучением. Другой процесс «распутывает» неоднородное уширение спектральной линии примеси с учетом особенностей спектра линейных волн сложной диэлектрической среды.

В стационарном случае величины T_1, T_2, \dots представляют собой неотрицательные независимые одинаково распределенные (с плотностью вероятности $\varphi(t)$) случайные переменные. Эти величины должны характеризоваться некоторым α -устойчивым распределением, причем параметр α должен лежать в диапазоне $0 < \alpha < 1$, поскольку такой α -устойчивый процесс характеризует замену обычной временной шкалы в картине спонтанного излучения на случайную, но моделирующую именно временную направленность процессов.

В случае представления кинетического уравнения (1) винеровским СДУ (2) к моменту времени t случайные блуждания, связанные со спонтанным излучением, совершат не детерминированное число $1 + (t/\delta\tau)$ скачков, а некоторое случайное число $N(t)$, определяемое условием $N(t) := \max\{N : T(N) \leq t\}$, где $T(N) = \sum_{i=1}^N T_i$ — суммарное время ожидания N -го скачка.

Процесс $N(t)$ называют процессом восстановления [55–57]. Заметим, что разные авторы процессом восстановления называют несколько разные объекты.

Грубо говоря, $N(t) = \{N : T(N) = t\}$, и поэтому является обратной функцией к $T(N)$, т.е. $T(N(t)) = t$. В пределе $\delta\tau \rightarrow 0$ имеем следующие α -устойчивые процессы:

$$\left(\frac{1}{\delta\tau} \right)^{-1/\alpha} T \left(\frac{\tau}{\delta\tau} \right) \rightarrow U(\tau), \\ (\delta\tau)^\alpha N \left(\frac{t}{\delta\tau} \right) \rightarrow S(t) = \inf\{\tau : U(\tau) > t\}, \\ (\delta\tau)^{1/2} R \left(\frac{\tau}{\delta\tau} \right) \rightarrow X(\tau),$$

$$(\delta\tau)^{\alpha/2} R \left(N \left(\frac{t}{\delta\tau} \right) \right) \rightarrow \\ \rightarrow \{(\delta\tau)^\alpha\}^{1/2} R \left(N \left(\frac{t}{(\delta\tau)^\alpha} \right) \right) \rightarrow X(S(t)),$$

причем имеем свойство самоподобия $aS(t) = S(a^{1/\alpha}t)$ и $U(S(t)) = t$ (равенства по распределению).

Непрерывное случайное время $U(\tau)$, обратная величина $S(\tau) = \min\{\tau : U(\tau) \geq t\}$, существует, так как $U(\tau) \uparrow$ — монотонно возрастающая функция.

Вернемся к первоначально введенному случайному времени и запишем его как $T(\Theta)$, обратная величина $\Theta(t) = \min\{\tau : \Theta(\tau) \geq t\}$ (существует, так как $\Theta(\tau) \uparrow$). Введем плотность распределения вероятностей $g(\theta, t)$ для обратного времени $\Theta(t)$, θ — параметр. Поскольку $T(\Theta) < t \Leftrightarrow \Theta(t) \geq t$, имеем соотношения

$$F(t, \theta) = P(T(\Theta) < t) = P(\Theta(t) \geq \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta', t) d\theta',$$

откуда

$$g(\theta, t) = -\frac{\partial}{\partial \theta} F(t, \theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^t f(t', \theta) dt',$$

$f(t, \theta)$ — плотность распределения вероятностей для $F(t, \theta)$. Поскольку $T(\theta)$ — неотрицательная величина, имеем

$$g(\theta, t) = -\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^t f(t', \theta) dt'.$$

Образ Лапласа для $f(t, \theta)$ есть $\hat{\rho}(s, \theta) = \exp(-\theta s^\alpha)$ [58]. Свойство самоподобия для $f(t, \theta)$ выражается равенством

$$f(t, \theta) = \frac{1}{\theta^{1/\alpha}} f\left(\frac{t}{\theta^{1/\alpha}}\right), \quad f(t) = f(t, 1).$$

С учетом предшествующего выражения для $g(\theta, t)$ получаем

$$g(\theta, t) = \frac{1}{t^\alpha} g\left(\frac{\theta}{t^\alpha}\right), \quad g(\theta) = \frac{1}{\alpha \theta^{1+1/\alpha}} f\left(\frac{1}{\theta^{1/\alpha}}\right).$$

Имеем также полезное для дальнейшего соотношение

$$\exp(-\theta s^\alpha) = \alpha \int_0^\infty \exp(-st) \frac{\theta}{t^{\alpha+1}} g\left(\frac{\theta}{t^\alpha}\right) dt.$$

Далее вычисляем моменты. Среднее $\langle T^\nu \rangle$ бесконечно для $\nu \geq \alpha$. Моменты $\langle \Theta^\nu \rangle$ конечны для всех $\nu > 0$. Умножая предыдущую формулу на $\theta^{\nu-1}$ и интегрируя по θ , получаем

$$\frac{\Gamma(\nu)}{s^{\alpha\nu}} = \alpha \langle \Theta^\nu \rangle \int_0^\infty \exp(-st) t^{\nu\alpha-1} dt = \alpha \langle \Theta^\nu \rangle \frac{\Gamma(\alpha\nu)}{s^{\alpha\nu}},$$

$$\langle \Theta^\nu \rangle = \int_0^\infty \theta^\nu g(\theta) d\theta = \frac{\Gamma(\nu)}{\alpha \Gamma(\alpha\nu)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha\nu+1)}.$$

Отсюда находим преобразование Лапласа

$$\hat{g}(s) = \langle \exp(-s\Theta) \rangle = \sum \frac{(-s)^\nu}{\Gamma(\alpha\nu+1)} = E_\alpha(-s),$$

где

$$E_\alpha(z) = \sum \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

— функция Миттаг-Леффлера. Окончательно,

$$\hat{g}(s, t) = E_\alpha(-st^\alpha).$$

Эти (в известном смысле [58–63] стандартные) манипуляции приводят к представлению процесса спонтанного излучения примесного ансамбля частиц в сложной диэлектрической матрице как подчиненного или субординированного случайного процесса. Говорят, что $X(S(t))$ является подчиненным к процессу $X(t)$ и направляется процессом $S(t)$, который называется направляющим. Направляющий процесс иначе называют рандомизированным операционным временем [59, 63].

Вероятностные характеристики направляющего процесса определяются следующими соображениями. Обозначим функцию плотности распределения вероятности для $U(\tau)$ через $p^T(t, \tau)$, а для $S(t)$ она дается $p^S(\tau, t)$. Тогда

$$p^S(\tau, t) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^t p^T(t', \tau) dt'.$$

Для $S(t)$ получаем (угловые скобки — среднее)

$$\langle \exp(-\nu S(t)) \rangle = \sum_0^\infty \frac{(-\nu t^\alpha)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} = E_\alpha(-\nu t^\alpha).$$

С учетом свойств функции Миттаг-Леффлера получаем плотность вероятности $S(t)$ в виде

$$p^S(\tau, t) = t^{-\alpha} M_\alpha\left(\frac{\tau}{t^\alpha}\right),$$

где введена M -функция Райта [29]¹⁾

¹⁾ Функция $M_\alpha(z)$ неотрицательна для $z \geq 0$ и нормируема, $\int_0^\infty M_\alpha(z) dz = 1$, с образом Лапласа $\mathcal{L}(M_\alpha(t, s)) = E_{\alpha,1}(-s)$. При $0 < \alpha \leq 1/2$ она монотонно убывает, а при $1/2 < \alpha < 1$ имеет максимум в некоторой точке, зависящей от α . Кроме того,

$$M_1(z) = \delta(z-1), \quad M_{1/2}(z) = \pi^{-1/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

$$M_{1/3}(z) = 3^{2/3} \text{Ai}\left(\frac{z}{3^{1/3}}\right),$$

$\text{Ai}(z)$ — функция Эйри.

$$M_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(1 - \alpha - k\alpha)}.$$

В результате несложных вычислений, имея в виду винеровский процесс как броуновское движение с функцией распределения в виде

$$p^R(\tau, x) = (2\pi\tau)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau}\right),$$

находим [61]

$$\mathcal{L}(p^r(t, x), s) = s^{\alpha-1} \mathcal{L}(p^R(t, x), s^\alpha),$$

$$p^r(t, x) = f(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^r(\tau, x)}{\partial x^2}$$

или в эквивалентной форме, используя дробную производную Римана – Лиувилля,

$$D_t^\alpha p^r(t, x) = \frac{f(x)t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^r(t, x)}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Здесь $f(x)$ – начальное распределение.

Подчеркнем, что, говоря об изменении вероятности во времени, мы, по сути дела, рассуждаем на уровне кинетического уравнения. Для классических функций распределения это уравнение Фоккера – Планка, для квантовых квазивероятностей – обобщенное уравнение Фоккера – Планка, для матрицы плотности – просто кинетическое уравнение (или master equation). Во всех случаях меняется только производная по времени. Для рассматриваемого винеровского представления (2) уравнения (1) это означает, что уравнение (1) для рассмотренного процесса субординации следует записывать с дробной производной по времени ($0 < \alpha < 1$):

$$D_t^\alpha \rho^S(t) = \chi \left(R_- \rho^S(t) R_+ - \frac{1}{2} R_+ R_- \rho^S(t) - \frac{1}{2} \rho^S(t) R_+ R_- \right). \quad (4)$$

Подчеркнем, что вид дробной производной в кинетическом уравнении для матрицы плотности ансамбля примесных атомов (4) отличается от вида дробной производной для примеси сложной диэлектрической среды, полученного и исследованного в работах [8, 37]. В работах [8, 25] параметр α определялся степенной зависимостью частоты вблизи особенностей спектра и условие $0 < \alpha < 1$ не требовалось. В нашем случае вследствие предложенного механизма перескока параметр α можно оценить как

$$\alpha \sim \left(\log(\tau_{Rel}) / \log(\tau_{Markov}) \right) - 1.$$

Здесь τ_{Rel} – время затухания возбуждения в рассматриваемом случае, τ_{Markov} – время затухания возбуждения в марковском случае $\alpha = 1$. Выписанная оценка согласуется с качественным рассмотрением и принятой нами моделью только при условии

$$1 < \left(\log(\tau_{Rel}) / \log(\tau_{Markov}) \right) < 2.$$

Есть отдельная задача связать параметр α с моделями спектра линейных волн в сложных диэлектрических средах и с механизмом неоднородного уширения.

Заметим также, что режим субординации, введенный для спонтанного коллективного излучения ансамбля примесей сложной диэлектрической матрицы, можно вводить на разных этапах и для разных уравнений, например для уравнений для диагональных матричных элементов (населенностей) матрицы плотности. В окончательных уравнениях это должно быть учтено начальными условиями.

3. ПРОЯВЛЕНИЕ ЭРИДИТАРНОСТИ В ИМПУЛЬСЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ АТОМНОГО АНСАМБЛЯ

Перепишем уравнение (4) с другим определением дробной производной:

$$\frac{d[\rho^S(\tau)]^\alpha}{d\tau^\alpha} = \left(R_- \rho^S(\tau) R_+ - \frac{1}{2} R_+ R_- \rho^S(\tau) - \frac{1}{2} \rho^S(\tau) R_+ R_- \right), \quad (5)$$

$$\frac{df^\alpha}{d\tau^\alpha} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\tau + \epsilon\tau^{1-\alpha}) - f(\tau)}{\epsilon}, \quad (6)$$

которое при $\alpha = 1$ соответствует производной в традиционном понимании. При записи (5) осуществлен переход к новому безразмерному времени $\tau = \chi t$. В отличие от известных фрактальных производных Римана – Лиувилля, Капуто, Грюнвальда – Летникова, введенная соотношением (6) производная [64] $T_\alpha f = df^\alpha / d\tau^\alpha$ обладает, например, следующими особенностями:

$$\begin{aligned} T_\alpha C &= 0, \quad C = \text{const}, \\ T_\alpha \tau^p &= p\tau^{p-\alpha}, \\ T_\alpha(f(\tau)) &= \tau^{1-\alpha} \frac{df}{d\tau}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обсуждаемая фрактальная производная, в отличие от других фрактальных производных, характеризуется обычными правилами определения производных суммы, произведения и частного двух функций.

Решение с ее помощью задач по определению функции одной переменной может представлять явный вид искомого выражения в аналитическом виде.

Будем интересоваться зависимостью интенсивности $I(t)$ импульса кооперативного излучения ансамбля атомов от времени, которую традиционно определим скоростью изменения среднего значения разности заселенностей системы:

$$I(t) = -\hbar\omega_0 \frac{d\langle R_3(t) \rangle}{dt}, \quad (8)$$

где ω_0 — частота рабочего перехода двухуровневого атома, а среднее значение оператора R_3 понимается как квантовое среднее по матрице плотности всего коллектива атомов $\langle R_3(t) \rangle = \text{Sp}(R_3\rho(t))$. Здесь мы вернулись к традиционному пониманию представления результатов в размерном времени.

Мы использовали симметризованный по всем возможным перестановкам состояний атомной системы базис Дике. Его базисные функции $|r, m\rangle$ образуют $(2r+1)$ -мерное представление алгебры момента с генераторами R_3 и R_3^\pm ,

$$R_3^\pm |r, m\rangle = \sqrt{(r \mp m)(r \pm m + 1)} |r, m \pm 1\rangle,$$

являясь собственными векторами операторов Казимира

$$R^2 = \frac{1}{2}(R^+R^- + R^-R^+) + R_3^2$$

и инверсии R_3 :

$$R^2 |r, m\rangle = r(r+1) |r, m\rangle, \quad R_3 |r, m\rangle = m |r, m\rangle.$$

Будем анализировать стандартную ситуацию излучения атомным ансамблем из $N_p = 2r$ полностью возбужденных атомов. Такое состояние отвечает вектору $|N_p/2, N_p/2\rangle$ начального состояния системы. Оператор R^2 является интегралом движения, сохраняя в процессе эволюции свое среднее $\langle R^2 \rangle = (N_p/2)(N_p/2 + 1)$ по начальному состоянию. Обозначим среднее значение разности заселенностей функцией $y(\tau) = \langle R_3(\tau) \rangle$ с начальным значением $y(0) = N_p/2$ и пренебрежем флуктуациями разностей заселенности. Для последней будем считать, что $\langle R_3^2(\tau) \rangle \approx \langle R_3(\tau) \rangle^2$. Следует особо отметить, что такое приближение означает достаточное число атомов в ансамбле $N_p \gg 1$, поскольку именно в этом случае реализуется указанное выше приближение. Тогда из (5) следует известное уравнение Рикатти, описывающее динамику разности заселенностей:

$$\frac{dy^\alpha}{d\tau^\alpha} = y^2 - y - \frac{N_p}{2} \left(\frac{N_p}{2} + 1 \right), \quad (9)$$

с постоянными коэффициентами и производной в левой части, понимаемой в смысле определения (6). Общее решение (9) можно представить как сумму частного решения \mathcal{B} и некоторой другой функции $u(\tau)$:

$$y(\tau) = \mathcal{B} + \frac{1}{u(\tau)}. \quad (10)$$

Решением в виде \mathcal{B} может выступать постоянная, поэтому, пользуясь соотношениями (7), для ее определения имеем квадратное уравнение, корни которого

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{2}(N_p + 2), -\frac{N_p}{2} \right)$$

приводят к решению одного и того же вида. Подставляя решение (10) в уравнение (9) и вновь используя соотношения (7), приведем окончательный вид искомого функции разности заселенностей для заданного начального условия:

$$y(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{N_p + 1}{2} \frac{N_p - \exp \Theta_\alpha}{N_p + \exp \Theta_\alpha}. \quad (11)$$

Производная найденной функции и определяет вид выражения для интенсивности импульса излучения в случае фрактальной динамики системы:

$$I(\tau) = -\hbar\omega_0 \frac{(N_p + 1)^2}{2} \tau^{\alpha-1} \frac{2N_p \exp \Theta_\alpha}{(N_p + \exp \Theta_\alpha)^2}. \quad (12)$$

В этих выражениях $\Theta_\alpha = (N_p + 1)\tau^\alpha/\alpha$. Полученные выражения обладают свойством нелокальности или эридитарности. Действительно, при $\alpha = 1$ выражения (11) и (12) переходят в известные выражения

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{N_p + 1}{2} \text{th} \left(\frac{\chi}{2} (N_p + 1)(t - t_0) \right), \quad (13)$$

$$I(t) = -\hbar\omega_0 \chi \frac{(N_p + 1)^2}{4} \times \times \text{sch}^2 \left(\frac{\chi}{2} (N_p + 1)(t - t_0) \right) \quad (14)$$

для среднего от разности заселенностей и интенсивности в импульсе сверхизлучения изначально полностью возбужденного атомного ансамбля. Эти выражения во избежание путаницы приведены для размерного времени. В них также введено время задержки

$$t_0 = (\chi(N_p + 1))^{-1} \ln N_p, \quad (15)$$

которое определяет время, в течение которого полностью возбужденный ансамбль переходит в полувозбужденное состояние $|N_p/2, 0\rangle$, а заселенности рабочих уровней в этой ситуации выравниваются.

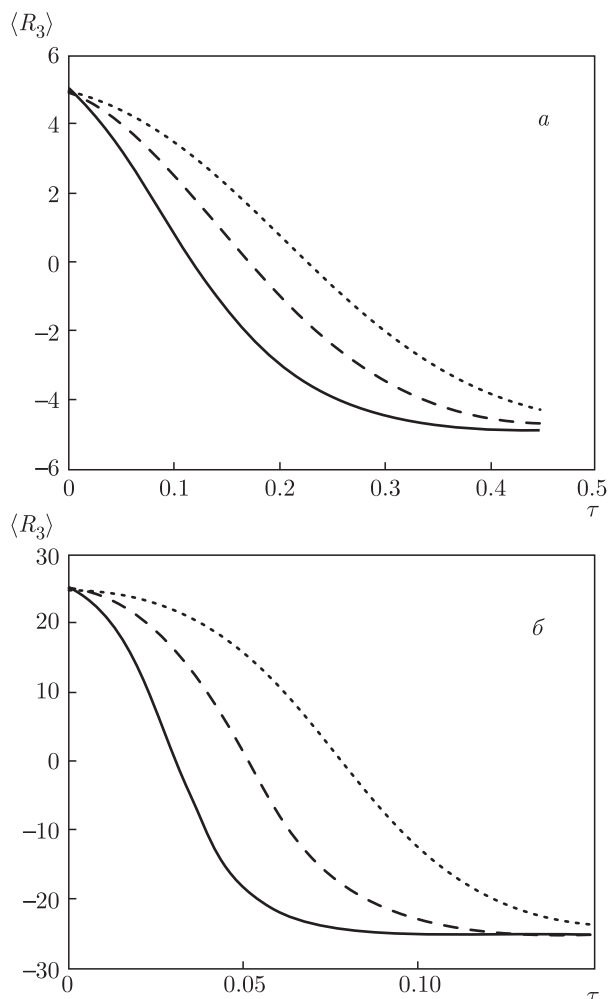


Рис. 1. Графики временных зависимостей разности заселенностей рабочих уровней кооперативной системы для $N_{p,1} = 10$ (а) и $N_{p,2} = 50$ (б) атомов. Кривые отвечают следующим значениям параметра фрактальности: 1 — пунктирные кривые, 0.9 — штриховые, 0.8 — сплошные

Проведем исследование наблюдаемых временных характеристик, в качестве которых выступают кооперативная населенность и интенсивность импульса сверхизлучения в зависимости от параметра фрактальности или значения величины дробной производной. Напомним, что уравнение Рикатти, описывающее сверхизлучение, получено в приближении, когда число атомов ансамбля относительно велико. В исходном уравнении (8) мы пренебрегли различием средних значений квадрата оператора разности заселенностей $\langle R_3^2 \rangle$ и квадрата среднего $\langle R_3 \rangle^2$, а следовательно, его флуктуациями. Будем исследовать обсуждаемые режимы, когда число атомов в системе равно $N_{p,1} = 10$ и $N_{p,2} = 50$.

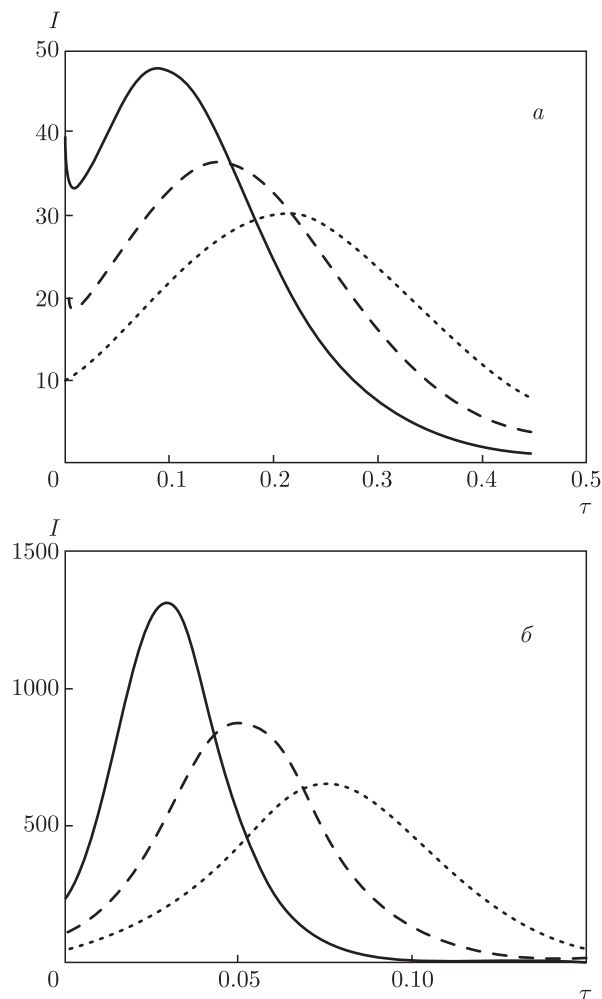


Рис. 2. Временные зависимости импульсов сверхизлучения для атомных систем с числом атомов $N_{p,1} = 10$ (а) и $N_{p,2} = 50$ (б). Кривые отвечают следующим значениям параметра фрактальности: 1 — пунктирные кривые, 0.9 — штриховые, 0.8 — сплошные

На рис. 1 представлены зависимости среднего значения оператора разности заселенностей $\langle R_3(\tau) \rangle$ атомного ансамбля при разных значениях фрактального параметра α . Из графиков следует, что увеличение значения этого параметра приводит к увеличению эффективной скорости релаксации ансамбля, при этом сама функция остается монотонно убывающей. Изменение масштаба как временной шкалы, так и самой анализируемой величины связано с учетом их зависимости от числа атомов в ансамбле.

Напротив, в зависимости интенсивности $I(\tau)$ импульса сверхизлучения от времени существенно проявляется фрактальный параметр. Из рис. 2 видно, что независимо от числа атомов в ансамбле, для слу-

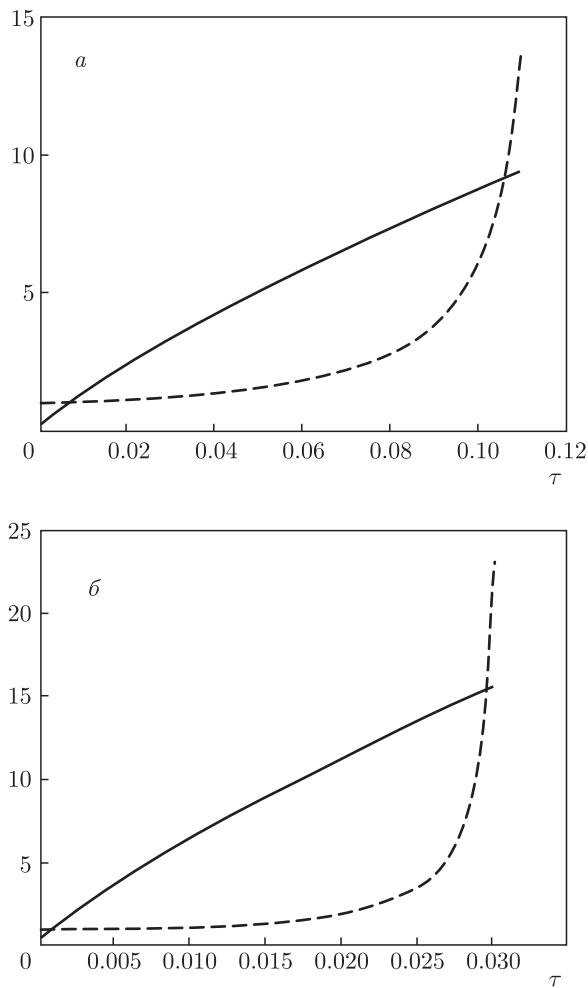


Рис. 3. Решение трансцендентного уравнения (16) при значении параметра фрактальности $\alpha = 0.8$ для атомных систем с числом атомов $N_{p,1} = 10$ (а) и $N_{p,2} = 50$ (б). Точки пересечения кривых — корни уравнения, определяющие экстремальные значения интенсивности импульса сверхизлучения. Сплошные кривые — правая часть уравнения, штриховые — левая

чая излучения системы при взаимодействии с обычным широкополосным вакуумом (кривые, определенные точками на графиках) наблюдается максимум интенсивности, он единственный и определен временем задержки $\tau_0 = \chi t_0$ импульса сверхизлучения согласно уравнению (15). Этот промежуток времени, в течение которого возбужденный ансамбль переходит в полувозбужденное состояние. Уменьшение параметра α до некоторого критического значения, разного для разных ансамблей, приводит к появлению характерного провала — минимума на начальном этапе развития импульса (пунктирные и сплошные кривые графиков). Именно эта особен-

ность характеризует проявление субординации в кооперативном излучении ансамблем с симметричным по перестановкам частиц начальным квантовым состоянием. Здесь можно было бы говорить о своеобразном фрактальном вакууме, но это лишь игра слов. Экстремальные значения времен определены следующим параметрическим уравнением:

$$\frac{N_p + 1}{1 - \alpha} \tau^\alpha = \frac{N_p + \exp \Theta_\alpha}{N_p - \exp \Theta_\alpha}. \quad (16)$$

Его решение представлено в графическом виде на рис. 3. Здесь штриховые кривые определяют поведение правой части равенства (16), а сплошные — его левой части. Точки пересечения кривых и определяют характерные экстремальные времена на графиках временной зависимости импульса интенсивности кооперативного излучения системы. Отметим, что уравнение (16) естественно сводится к виду (15) при $\alpha = 1$. Наконец, при дальнейшем уменьшении фрактального параметра кривые, характеризующие трансцендентное уравнение, перестают пересекаться, что и продемонстрировано на рис. 4 как отсутствие корней обсуждаемого уравнения, и импульс излучения перестает обладать какими-либо особенностями. Он теперь характеризуется монотонно убывающей кривой, как в случае коллективного излучения возбужденного ансамбля сфазированных классических осцилляторов.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложено физическое обоснование появления субординированного процесса для описания кооперативного спонтанного излучения в сложных диэлектрических средах и в качестве примера рассмотрен простой случай кооперативного излучения нескольких примесных частиц. Выделим три аспекта предложенного подхода к исследованию коллективного излучения примесных частиц в сложных диэлектрических средах.

Первый аспект состоит в использовании «распутывания» распределения примесных атомов по частотам и замене распределения на временную динамику примесных частиц, состоящей в случайном изменении параметров и/или положения и параметров частиц. Это привело к необходимости использования субординированных процессов, которые дают новый взгляд на старую проблему излучения частиц в диэлектрических средах. Сам вопрос о границах, в которых такое рассмотрение не только возможно, но и необходимо, частично решается рассмотрением спектральных особенностей линейных

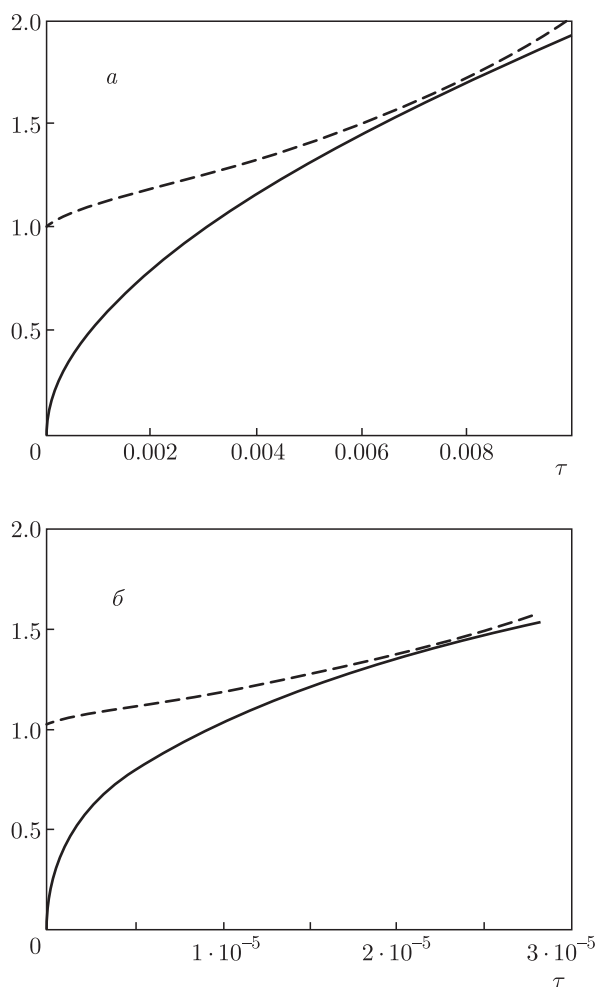


Рис. 4. У трансцендентного уравнения (16) отсутствуют решения при значениях фрактального параметра $\alpha = 0.555$ и меньших для атомной системы с числом атомов $N_{p,1} = 10$ (а) и при значениях $\alpha = 0.38$ и меньших для атомной систем с числом атомов $N_{p,2} = 50$ (б). Сплошные кривые — правая часть уравнения, штриховые — левая

волн в сложных диэлектрических средах. Однако возникает целый ряд новых задач по рассмотрению излучения примесных частиц, которые в сложных диэлектрических средах демонстрируют прыжковое поведение и различные взаимодействия с дефектами и самой средой. При этом отдельным вопросом является учет пространственной динамики примесных частиц. Использование субординации в некотором смысле в предложенном подходе оказалось простым — в кинетических уравнениях обычной теории проводится лишь замена обычной производной по времени на дробную производную.

Второй аспект предложенного подхода состоит в способе работы с динамическими уравнениями, в

которых параметры взаимодействия зависят от частот, времени (смотря какую форму слагаемых уравнения использовать). Известно, что стандартному марковскому приближению отвечает пренебрежение зависимостью параметров взаимодействия от частот. Тогда в одном из подходов к теории открытых систем удается ввести основные стохастические процессы и представить уравнение Шредингера, например, как квантовое или классическое стохастическое дифференциальное уравнение типа (2). Случайная зависимость параметров этого уравнения от времени или частоты, например, параметра χ , приводит к ситуации, когда в коэффициент у дифференциала Ито одного случайного процесса мультипликативно входит дифференциал Ито другого случайного процесса. Один из вариантов возникновения такой ситуации в марковском случае рассмотрен в работе [65]. В общем случае, однако, ситуация немарковская, и в данной статье предлагается иной и весьма общий подход — один из указанных процессов рассматривать как субординатор. Получается в некотором смысле вполне канонический подход, который требует дальнейшего изучения с точки зрения и получения конкретных результатов, и определения границ необходимости такого подхода.

Третий аспект связан с учетом пространственных особенностей. Первоначально теория сверхизлучения относилась к локализованному атомному ансамблю и строилась как линейная (по параметру взаимодействия с квантованным электромагнитным вакуумом) теория. Линейность здесь понимается в смысле алгебраической теории возмущений [66], эквивалентной суммированию целого ряда обычной теории возмущений. Такой «линейный» подход в резонансной физике более известен как приближение вращающейся волны. Выход за рамки приближения вращающейся волны активно обсуждается, однако еще со времен монографии [67] считается, что поправки второго порядка по взаимодействию с квантованным электромагнитным вакуумом не дают вклада в кинетическое уравнение и, соответственно, не влияют на картину сверхизлучения в обсуждаемом контексте. В работах [47–50] учет антивращающихся слагаемых проведен в рамках алгебраической теории возмущений как учет слагаемых, квадратичных по параметру взаимодействия с квантованным электромагнитным вакуумом. Показано, что картина сверхизлучения Дике резко меняется — в зависимости от числа атомов ансамбля возникает эффект стабилизации возбужденных атомов по отношению к коллективным процессам излучения. Однако этот результат получен для модели возбуж-

денных одинаковых атомов, локализованных в пространстве в области, размеры которой много меньше длины волны излучения. Проблема учета пространственного распределения для СИ актуальна, поскольку СИ является нежелательным эффектом в системах многокубитной квантовой памяти, а обнаруженный в работах [47–50] эффект стабилизации дает способ его устранения.

Если пространственное распределение учитывать непосредственно введением координат атомов, то на этом пути не удастся ввести основные квантовые случайные процессы, свойства которых обеспечили бы явное суммирование рядов в формальном решении уравнения Шредингера и привели бы к эффекту стабилизации возбужденного состояния атомного ансамбля. Другой путь был предложен в работе [65]. Наша статья делает шаг для поиска решения проблемы учета пространственного распределения атомов ансамбля в направлении введения субординированных процессов.

Подчеркнем, что предложенное в статье введение субординированного процесса позволяет строить основное кинетическое уравнение системы в рамках марковского приближения и с использованием мощного аппарата стохастических дифференциальных уравнений. Последующее распутывание кинетического уравнения с помощью классического винеровского процесса позволяет перейти на язык кинетических уравнений для вероятностей и квазивероятностей. После этого немарковость определяется введением рандомизированного времени, которое меняет лишь моменты совершения скачков броуновского движения и отражается лишь на замене временной производной кинетического уравнения на дробную производную. Физические процессы изменения моментов времени совершения случайных скачков броуновского движения могут быть самыми разнообразными и необходима более детальная проработка возникающих здесь связей.

Наконец отметим, что с точки теории кооперативного излучения в нашей статье использовано простое предположение, что состояние ансамбля примесей симметрично по перестановке частиц. В форме линии импульса СИ это отразилось в наличии провала, но для небольшого числа частиц ансамбля. Предположение о наличии иных состояний, например антисимметричных по перестановкам частиц, должно приводить к перепутыванию квантовых состояний [68] аналогично обычному случаю, но это еще более усложняет ситуацию спонтанного излучения в сложных диэлектрических средах.

Финансирование. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-02-00234а).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pavesi and M. Ceschini, *Phys. Rev. B* **48**, 17625 (1993).
2. R. Rohlsberger, K. Schlage, T. Klein, and O. Leupold, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 097601 (2005).
3. C. Rothe, S. I. Hintschich, and A. P. Monkman, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 163601 (2006).
4. J. Linnros, N. Lalic, A. Galeckas, and V. Grivickas, *J. Appl. Phys.* **86**, 6128 (1999).
5. M. D. Tocci, M. Scalora, M. J. Bloemer, J. P. Dowling, and C. M. Bowden, *Phys. Rev. A* **53**, 2799 (1996).
6. P. Lodahl et al., *Nature* **430**, 654 (2004).
7. I. Thanopoulos, V. Karanikolas, N. Pliopoulos, and E. Paspalakis, *Phys. Rev. B* **99**, 195412 (2019).
8. Jing-Nuo Wu, Chih-Hsien Huang, Szu-Cheng Cheng, and Wen-Feng Hsieh, *Phys. Rev. A* **81**, 023827 (2010).
9. Wei-Min Zhang, Ping-Yuan Lo, Heng-Na Xiong, Matisse Wei-Yuan Tu, and Franco Nori, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 170402 (2012).
10. K. Sinha, P. Meystre, E. A. Goldschmidt, F. K. Fatemi, S. L. Rolston, and P. Solano, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 043603 (2020).
11. R. Kohlrausch, *Ann. Phys. Lpz.* **12**, 353 (1847).
12. F. Alvarez, A. Alegria, and J. Colmenero, *Phys. Rev. B* **44**, 7306 (1991).
13. K. Funke, *Solid State Ionics* **40–41**, 200 (1990).
14. E.-J. Donth, *The Glass Transition: Relaxation Dynamics in Liquids and Disordered Materials*, Springer-Verlag, Berlin (2001).
15. A. Jedrzejowska et al., *Phys. Rev. E* **101**, 010603(R) (2020).
16. G. R. Kneller and M. Saouessi, *J. Phys. A* **53**, 20LT01 (2020).
17. Y. Luchko, *Mathematics* **8**, 1561 (2020).

18. D. Boyanovsky, D. Jasnaw, X.-L. Wu, and R. C. Colson, *Phys. Rev. A* **100**, 043617 (2019).
19. R. Tan, X. Xu, and D. Poletti, *Phys. Rev. A* **101**, 023603 (2020).
20. A. Kaminska and T. Srokowski, *Phys. Rev. E* **97**, 062120 (2018).
21. K. Fujimoto, R. Hamazaki, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 073002 (2018).
22. R. Bouganne, M. B. Aguilera, A. Ghermaoui, J. Beugnon, and F. Gerbier, *Nature Phys.* **16**, 21 (2020).
23. W. Berdanier, J. Marino, and E. Altman, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 230604 (2019).
24. Md. Sariful Sheikh et al., *Thin Solid Films* **638**, 277 (2017).
25. R. Metzler and J. Klafter, *J. Non-Cryst. Sol.* **305**, 81 (2002).
26. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **116**, 469 (1999).
27. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2000), (2004).
28. P. Warszawski and H. M. Wiseman, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, 1 (2003).
29. P. Warszawski and H. M. Wiseman, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, 15 (2003).
30. А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 699 (2019).
31. G. L. Lippi, *Atoms* **9**, 6 (2021).
32. L. Lu and X. Yu, *Laser Phys. Lett.* **14**, 115202 (2017).
33. J. F. Gomez Aguilar, K. M. Saad, and D. Baleanu, *Opt. Quant. Electron.* **51**, 316 (2019).
34. A. N. Pisarchik and R. Jaimes-Reategui, *Phys. Lett. A* **374**, 228 (2009).
35. Y. O. Barmenkov et al., *J. Appl. Phys.* **106**, 1 (2009).
36. A. D. Guzman-Chavez, Y. O. Barmenkov, and A. V. Kir'yanov, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 1 (2008).
37. C. H. Huang, J. N. Wu, Y. Y. Li, S. C. Cheng, and W. F. Hsieh, *Phys. Rev. A* **84**, 013802 (2011).
38. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, Institute of Physics Publ., Bristol, UK (1996).
39. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике. Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы*, Наука, Москва (1988).
40. Y. Luo et al., *Phys. Rev. Lett.* **122**, 233901 (2019).
41. P. Kirton and J. Keeling, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 123602 (2017).
42. N. Shammah, N. Lambert, F. Nori, and S. De Liberato, *Phys. Rev. A* **96**, 023863 (2017).
43. P. Weiss, A. Cipris, R. Kaiser, I. M. Sokolov, and W. Guerin, *Phys. Rev. A* **103**, 023702 (2021).
44. И. В. Рыжов и др., *ЖЭТФ* **151**, 803 (2017).
45. Д. Я. Байрамдурдыев и др., *ЖЭТФ* **158**, 269 (2020).
46. S. J. Masson et al., *Phys. Rev. Lett.* **125**, 263601 (2020).
47. А. М. Башаров, *Phys. Rev. A* **84**, 013801 (2011).
48. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **158**, 978 (2020).
49. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **155**, 654 (2019).
50. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **155**, 425 (2019).
51. А. С. Холево, в сб. *Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. направления*, ВИНТИ, Москва **83**, 3 (1991).
52. А. М. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Sociedad Mathematica Mexicana (2000).
53. Х.-П. Бройер, Ф. Петруччионе, *Теория открытых квантовых систем*, Институт компьютерных исследований, Москва (2010).
54. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986).
55. А. А. Боровков, *Обобщенные процессы восстановления*, РАН, Москва (2020).
56. Б. А. Севастьянов, в сб. *Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, ВИНТИ, Москва **11**, 99 (1974).
57. Д. Кокс, В. Смит, *Теория восстановления*, Сов. радио, Москва (1967).
58. J. Bertoin, *Levy Processes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).
59. J. Bertoin, *Lect. Notes Math.* **1717**, 1 (1999).

60. M. Winkel, *Ann. Probab.* **30**, 382 (2002).
61. А. А. Станиславский, *ТМФ* **138**, 491 (2004).
62. A. A. Stanislavsky, *Phys. Rev. E* **70**, 051103 (2004).
63. A. A. Stanislavsky and A. Weron, *Phys. Rev. E* **101**, 052119 (2020).
64. R. Khalil, M. al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh, *J. Comp. Appl. Math.* **264**, 65 (2014).
65. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **153**, 375 (2018).
66. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).
67. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).
68. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **121**, 1249 (2002).