

# ПОПЕРЕЧНЫЙ ТЕРМОМАГНИТНЫЙ ЭФФЕКТ В ДВУМЕРНОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКИ

*А. А. Перов\**, *П. В. Пижун*

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 15 марта 2021 г.,  
после переработки 7 апреля 2021 г.  
Принята к публикации 21 апреля 2021 г.

В одноэлектронном приближении во внешнем магнитном поле при наличии градиента температуры рассчитана поверхностная плотность тока носителей заряда в двумерных двоякопериодических полупроводниковых сверхрешетках  $n$ -типа. Магнитное поле полагалось постоянным, однородным, приложенным перпендикулярно плоскости электронного газа. В результате совместного решения уравнения Шредингера и кинетического уравнения Больцмана показано, что зависимости поверхностной плотности поперечного тока от температуры и модуля градиента температуры имеют существенно нелинейный характер и на них присутствуют участки с отрицательной поперечной дифференциальной проводимостью. Зависимость времени релаксации от квазиимпульса электрона учтена в модели феноменологически через закон дисперсии носителей в магнитных подзонах.

DOI: 10.31857/S0044451021080113

## 1. ВВЕДЕНИЕ

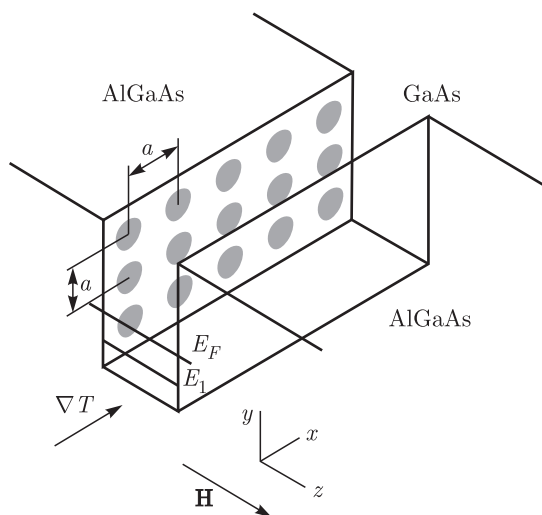
Известно, что магнитное поле квантует поперечное движение заряженной частицы, а поле кристаллической решетки приводит к образованию энергетических зон. В результате в зонах проводимости и в валентной зоне полупроводников в магнитном поле формируются «лестницы» уровней Ландау. В действительности, как показывают результаты первых теоретических работ, выполненных в середине прошлого столетия [1, 2], уровни Ландау в кристаллах уширяются в зоны экспоненциально малой ширины. Причиной тому является снятие вырождения состояний в магнитном поле по центру орбиты вследствие взаимодействия заряженной частицы с электростатическим периодическим полем кристалла.

Непараболичность закона дисперсии носителей в материалах приводит к нетривиальному течению термомагнитных [3–6], магнитотранспортных [7] и магнитооптических [8] эффектов. Так, в работе [3] рассчитан коэффициент Нернста–Эттингаузена (НЭ) в одномерных сверхрешетках с косинусои-

дальным законом дисперсии. В сильных магнитных полях, ориентированных в плоскости слоя сверхрешетки, при рассеянии носителей на полярных оптических фонах коэффициент НЭ менял знак. В кристаллах селенида ртути с примесями атомов галлия и железа поперечный эффект НЭ протекал со сменой знака при изменении концентрации примесных атомов галлия, определяющих степень упорядочения ионов железа в образце [4]. В работе [5] исследованы осцилляции коэффициента Нернста в щелевом и бесщелевом графене с учетом зависимости положения уровней Ландау от величины электрического поля. В недавней работе [6] построена квантовая кинетическая теория термоэлектрического транспорта в магнитном поле. Учет топологической фазы Берри магнитных подзон блоховских электронов, приводящей к возникновению аномальной скорости носителей, позволил авторам рассчитать эффект Нернста и показать справедливость соотношений Онзагера в рамках развитой ими кинетической теории.

Предметом нашего исследования является двумерный электронный газ в области полупроводникового гетероперехода с поверхностной двоякопериодической сверхрешеткой с периодом  $a$ , помещенно-

\* E-mail: wkb@inbox.ru



**Рис. 1.** Схема полупроводникового гетероперехода с поверхностной сверхрешеткой, помещенного в перпендикулярное магнитное поле  $\mathbf{H}$

го в постоянное однородное перпендикулярное магнитное поле. На рис. 1 представлена типичная схема такой структуры. В присутствии градиента температуры в плоскости гетероперехода в направлении, перпендикулярном магнитному полю и  $\nabla T$ , возникает поверхностный термомагнитный ток. В данной работе использована простая модель знакопеременного периодического электростатического потенциала сверхрешетки, которая, по нашему мнению, призвана отразить фундаментальные свойства электронного спектра и особенности возникновения поперечного термомагнитного тока в изучаемых структурах. Эффект появления нернстовского тока сам по себе не является новым, но в рассматриваемых модельных структурах ранее в литературе не освещался и не обсуждался.

Идея искусственных периодических структур, обладающих свойствами, не реализуемыми в природных веществах, была высказана Келдышем еще в 1962 году [9]. Но реальным содержанием она наполнилась лишь после появления технологии молекулярно-лучевой эпитаксии, позволившей изготавливать периодические искусственные структуры с заранее заданными параметрами слоев. С тех пор многие лаборатории стали уделять большое внимание поискам новых периодических структур. На рубеже 1995–1998 годов группой Леденцова были выращены дwoякопериодические планарные массивы квантовых точек InAs на подложке из арсенида галлия [10]. Такие структуры обладали малой периодичностью порядка 20 нм, но степень

упорядоченности квантовых точек была невысокой, что сказывалось на ожидаемых результатах экспериментов по магнитотранспорту и магнитооптике. С развитием технологии субмикронной электронной литографии стало возможным формировать дwoякопериодические сверхрешетки с требуемым периодом и симметрией элементарной ячейки. Теория квантовых состояний носителей заряда в таких поверхностных сверхрешетках опередила создание самих структур и эксперименты на несколько десятилетий. К настоящему моменту экспериментально изучена минизонная структура спектра электронов в поверхностных дwoякопериодических полупроводниковых сверхрешетках по результатам магнитотранспортных и магнитооптических измерений [11–13]. Вплоть до настоящего времени идет поиск новых материалов для создания двумерных искусственных кристаллов [14]. Литографические технологии позволяют в итоге «конструировать» зонную структуру носителей и изучать, например, безмассовые дираковские квазичастицы в решетке с элементарной ячейкой в виде правильного шестиугольника [15].

Для актуальных в современных экспериментах параметров полупроводниковых сверхрешеток [11, 12] и величин напряженности магнитного поля порядка нескольких десятков тысяч эрстед типичное расщепление в спектре носителей, обусловленное действием электростатического поля сверхрешетки на электрон, оказывается много меньше характерной энергии Ландау  $\hbar\omega_c$ . Поэтому становится возможным проводить модельные расчеты квантовых состояний электрона в одноуровневом приближении, когда можно пренебречь примесью состояний Ландау в состоянии магнитных блоховских подзон данного уровня  $E_S = \hbar\omega_c(S + 1/2)$  с заданным значением номера  $S$ . Кроме того, поскольку характерный период сверхрешеток в несколько десятков нанометров на два порядка превосходит масштаб естественной периодичности кристалла, использование приближения изотропной эффективной массы в  $\Gamma$ -точке является оправданным.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РАСЧЕТА

Классификация электронных состояний во внешних постоянном однородном магнитном и дwoякопериодическом электростатическом полях по неприводимым проективным представлениям группы магнитных трансляций возможна лишь

в случае, когда магнитное поле ориентировано перпендикулярно плоскости газа носителей [16]. При этом необходимо также, чтобы число квантов магнитного потока, пронизывающего элементарную ячейку кристалла, было рациональным числом:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{eHa^2}{2\pi\hbar c} = \frac{p}{q}.$$

В результате электронная волновая функция также является собственной функцией оператора магнитной трансляции и удовлетворяет обобщенным условиям Блоха в магнитном поле [17] (условиям Блоха – Пайерлса).

Гамильтониан, описывающий квантовомеханическое движение электрона в рассматриваемой системе, имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V_0 \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \hat{E}, \quad (1)$$

где  $V_0$  — амплитуда периодического потенциала сверхрешетки,  $\hat{H}_0$  — гамильтониан электрона в постоянном однородном магнитном поле,  $\hat{E}$  — единичный оператор. Предполагается заполненным низший уровень размерного квантования  $E_1$  в области гетероперехода (см. рис. 1). Эффективная масса  $m^*$  электрона в GaAs взята равной  $0.067m_e$ , период сверхрешетки  $a = 50$  нм.

Рассчитаем спектр магнитных подзон, образовавшихся на месте основного (нулевого) уровня энергии в магнитном поле,  $E_0 = \hbar\omega_c/2$ . Волновая функция электрона в  $\mu$ -й магнитной подзоне ( $\mu = \overline{1, p}$ ), удовлетворяющая обобщенным граничным условиям Блоха в магнитном поле, представляется в виде симметризованной линейной комбинации базисных состояний Ландау  $\varphi_0$  в постоянном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}^{\mu}(x, y) = & \sum_{n=1}^p C_n^{\mu}(\mathbf{k}) \times \\ & \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_0 \left( \frac{x - x_0 - lqa - nqa/p}{l_H} \right) \times \\ & \times \exp(ik_y y) \exp \left[ ik_x \left( lqa + \frac{nqa}{p} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[ \frac{2\pi iy}{a} (lp + n) \right], \quad (2) \end{aligned}$$

где  $l_H$  — магнитная длина,  $x_0 = c\hbar k_y/eH = k_y l_H^2$ . Волновые функции (2) представляют собой  $p$ -мерное расслоение над двумерным тором — магнитной зоной Бриллюэна (МЗБ):

$$-\frac{\pi}{qa} \leq k_x \leq \frac{\pi}{qa}, \quad -\frac{\pi}{a} \leq k_y \leq \frac{\pi}{a}.$$

Численное решение задачи на собственные значения и собственные функции для гамильтониана (1) проводилось нами путем унитарных преобразований базиса, сохраняющих норму вектора.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Расчеты положения магнитных подзон Ландау нулевого уровня энергии в магнитном поле в зависимости от числа квантов магнитного потока через элементарную ячейку сверхрешетки приведены на рис. 2. Амплитуда периодического потенциала сверхрешетки принята в расчетах равной  $V_0 = 1$  мэВ. Количество магнитных подзон совпадает с числителем дроби  $p/q$ . Положение уровня Ферми таково, что заполнена низшая магнитная подзона Ландау ( $\mu = 1$ ) при  $p/q = 4/1$  и концентрация носителей заряда составляет величину порядка  $n = 10^{11}$  см<sup>-2</sup>. Модуль вектора напряженности магнитного поля при указанных выше значениях периода сверхрешетки и числа квантов магнитного потока равен  $H = 6.626 \cdot 10^4$  Э. Ширина расщепленной зонной структуры при этом много меньше характерной энергии Ландау  $\hbar\omega_c = 2\pi\hbar^2 p/m^* a^2 q \approx 11.4$  мэВ.

Расчеты законов дисперсии носителей в магнитных подзонах нулевого уровня Ландау приведены на рис. 3 при числе квантов потока  $p/q = 4/1$ . Поскольку модельный периодический потенциал сверхрешетки обладает центром инверсии, согласно теореме Крамерса, в магнитном поле законы дисперсии

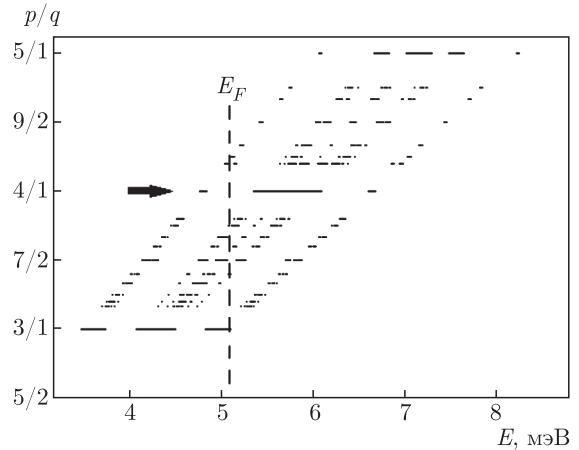
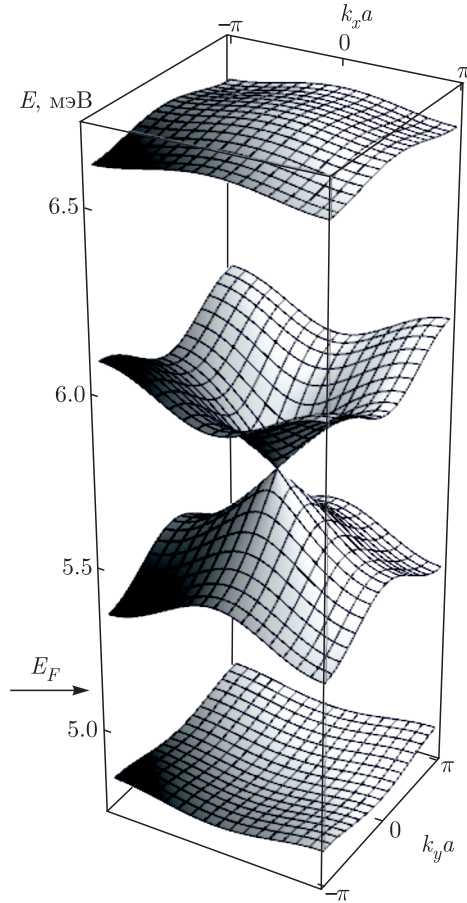


Рис. 2. Зависимость положения магнитных блоховских подзон, относящихся к основному уровню Ландау, от числа квантов магнитного потока через элементарную ячейку сверхрешетки в модельной структуре AlGaAs/GaAs/AlGaAs при параметрах  $V_0 = 1$  мэВ,  $m^* = 0.067m_0$ ,  $a = 50$  нм



**Рис. 3.** Законы дисперсии в магнитных подзонах, относящихся к основному уровню Ландау, при  $p/q = 4/1$  в модельной структуре AlGaAs/GaAs/AlGaAs с параметрами  $V_0 = 1$  мэВ,  $m^* = 0.067m_0$ ,  $a = 50$  нм

электрона в подзонах есть четные функции проекций квазиимпульса в МЗБ. Положение уровня Ферми показано стрелкой на рис. 3. Симметрия квантовых состояний носителей такова, что при четных значениях числителя дроби  $p/q$  в решетках с тетрагональной элементарной ячейкой центральные магнитные подзоны касаются друг друга. В случае, когда периодический электростатический потенциал поля сверхрешетки есть возмущение общего типа, различные магнитные подзоны спектра остаются разделенными щелями [18].

Расчетам поверхностной плотности термомагнитного поперечного тока (в  $y$ -направлении)

$$j_y^\mu = \frac{2e}{\hbar^2} \int v_y^\mu f^\mu(\mathbf{k}, \zeta) dp_x dp_y \quad (3)$$

в нижней магнитной подзоне Ландау ( $\mu = 1$ ) предшествовало численное решение квазиклассического однородного кинетического уравнения Больцмана в релаксационном приближении (время релаксации  $\tau > 2\pi\hbar/kT$ ):

$$\frac{|e|\eta\zeta}{\hbar} \frac{\partial f^\mu(\mathbf{k}, \zeta)}{\partial k_x} = -\frac{1}{\tau} [f^\mu(\mathbf{k}, \zeta) - F^\mu(\mathbf{k})], \quad (4)$$

где  $F^\mu(\mathbf{k}) = f^\mu(\mathbf{k}, 0)$  – равновесная функция распределения Ферми–Дирака,  $\zeta = (\nabla T)_x$ ,  $\eta$  – постоянная Зеебека (для GaAs  $\eta \simeq 3 \cdot 10^{-6}$  ед. СГСВ/К [19]).

Зависимость времени релаксации от квазиимпульса электрона учтена нами феноменологически через закон дисперсии двумерных носителей  $\varepsilon(\mathbf{p})$  в рамках наиболее подходящей модели, развитой в работе [20]:

$$\tau(\mathbf{p}) \sim (kT)^\beta \varepsilon(\mathbf{p})^{\alpha+0.5}.$$

Расчеты поперечного тока были проведены для случаев рассеяния электрона на нейтральных примесях ( $\alpha = 0, \beta = 0$ ) и акустических фононах ( $\alpha = -0.5, \beta = -1$ ). Проекция вектора скорости  $v_y^\mu(\mathbf{k})$  электрона и его эффективная масса в подзоне Ландау существенно зависят от точки в МЗБ вследствие непараболичности спектра. Результаты расчетов проекции скорости  $v_y^1(\mathbf{k})$  и функции распределения носителей по импульсам  $f^1(\mathbf{k}, \zeta)$  представлены на рис. 4. Белые контурные линии задают сечения функции распределения, а тонированные области соответствуют сечениям проекции скорости  $v_y^1(\mathbf{k})$  в МЗБ. Более темные области тона отвечают меньшим значениям проекции скорости. При ненулевом градиенте температуры (рис. 4б,е,з) неравновесная функция распределения Больцмана, в отличие от равновесной (рис. 4а), не обладает симметрией поворотной оси четвертого порядка в МЗБ, и в неоднородном температурном поле с заданным градиентом максимум распределения носителей смещается от центра МЗБ в  $y$ -направлении.

На рис. 5а представлены результаты расчетов  $y$ -проекции поверхностной плотности тока в изучаемой модельной структуре в зависимости от величины градиента температуры. Зависимости 1 и 2 на рис. 5а соответствуют случаям рассеяния носителей заряда на нейтральных атомах примеси и акустических фононах. Температура электронного газа в области гетероперехода со сверхрешеткой в модельных расчетах взята равной  $T = 2$  К. При малых значениях градиента температуры кинетическое уравнение Больцмана может быть решено аналитически [21]. В этом случае неравновесная поправка к функции распределения линейна по  $|\nabla T|$ , что и подтверждается численным расчетом. С ростом градиента температуры начальный линейный рост функции  $j_y^1$  сменяется участком ее убывания, плотность термомагнитного тока имеет максимум. По мере роста градиента температуры функция распределения меняется таким образом, что вклад в

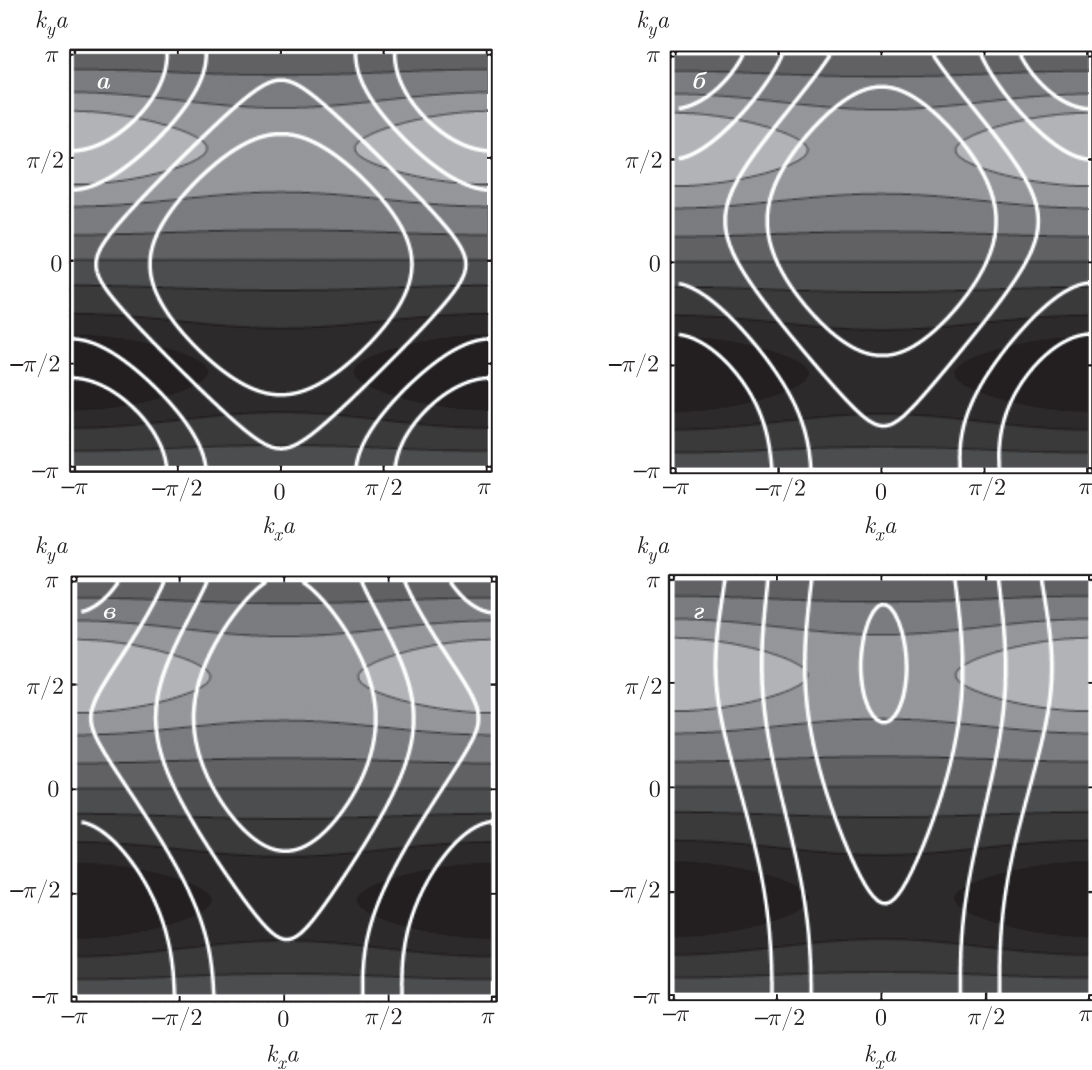


Рис. 4. Линии постоянного уровня функции распределения Больцмана и проекции скорости электрона  $v_y^1(\mathbf{k})$  в нижней магнитной подзоне в МЗБ

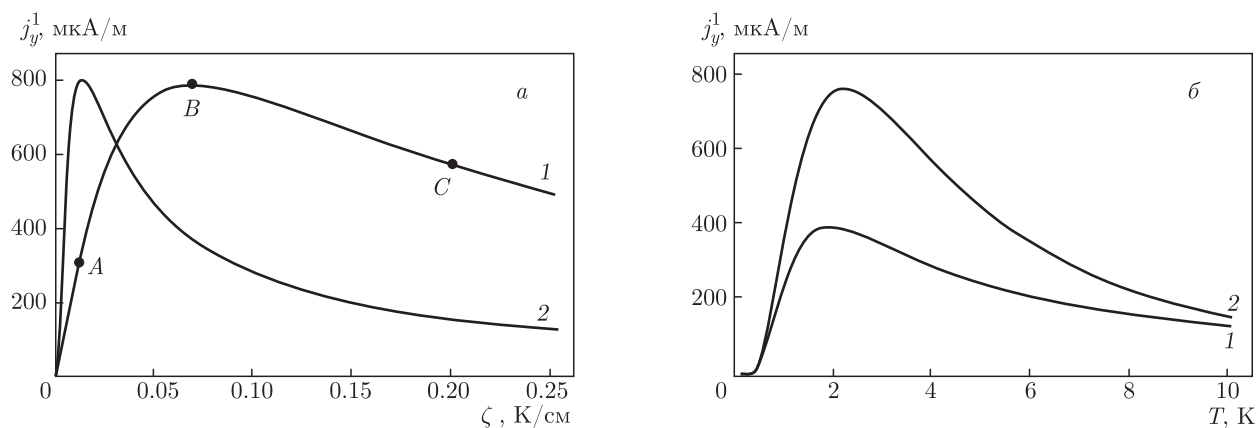
выражение (3) от состояний носителей с положительной проекцией скорости в подзоне Ландау возрастает (см. рис. 4б, точка *A* на рис. 5 *a*). Это приводит к увеличению значения  $j_y^1$  вплоть до максимального (точка *B* на рис. 5 *a*, рис. 4в). При дальнейшем возрастании модуля градиента температуры функция распределения носителей по импульсам не имеет ярко выраженного максимума в МЗБ и равновелико учитывает вклад в ток от состояний как с положительной, так и отрицательной *y*-проекцией скорости (см. рис. 4г). Имеет место участок с отрицательной поперечной дифференциальной проводимостью (точка *C* на рис. 5 *a*).

При фононном рассеянии становится вполне оправданным смещение максимума плотности то-

ка в область меньших значений градиента температуры. Время релаксации становится зависящим от абсолютной температуры газа, и область значений градиента температуры, отвечающая участку с отрицательной дифференциальной поперечной проводимостью, расширяется (кривая 2 на рис. 5 *a*). Характерная ширина пика плотности тока на рис. 5 *a* становится меньше по сравнению со случаем, когда имеет место лишь примесное рассеяние.

Таким образом, результаты проведенных в нашей работе модельных расчетов поверхностной плотности поперечного термомагнитного тока говорят о достаточно высокой чувствительности эффекта НЭ к механизму рассеяния носителей заряда.





**Рис. 5.** Зависимости  $y$ -проекции поверхностной плотности терромагнитного тока от величины градиента температуры при  $T = 2$  К (а) и от температуры электронного газа при  $\zeta = 0.02$  К/см (б): 1 — рассеяние на нейтральных атомах примеси; 2 — рассеяние на акустических фоновых

Расчеты плотности тока как функции температуры электронного газа в гетеропереходе при малом фиксированном значении  $\zeta = 0.02$  К/см представлены на рис. 5б. Начальный участок зависимости  $j_y^1(T)$  при малом градиенте температуры демонстрирует степенной нелинейный характер, и плотность тока близка к нулю. С увеличением абсолютной температуры функция распределения носителей по импульсам ограничивает рост плотности тока.

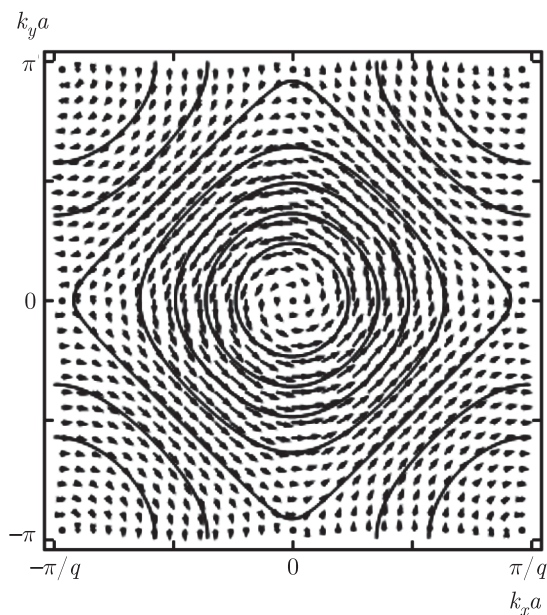
#### 4. ЭФФЕКТЫ СПИНОВОГО И СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО РАСЩЕПЛЕНИЙ В СПЕКТРЕ

Представляется необходимым качественно обсудить вклад в терромагнитный ток от эффектов спинового и спин-орбитального расщеплений в спектре носителей. В рамках моделей, эквивалентных рассмотренной в данной работе, ранее нами были проведены расчеты квантовых состояний электронов в дwoякопериодических сверхрешетках в перпендикулярном магнитном поле с учетом электронного спина (см., например, работы [22, 23]). Спин-орбитальное взаимодействие в электронном газе учитывалось как по типу Рашба, так и по типу Дрессельхауза для двумерных систем. В обоих случаях спиновая поляризация квантовых состояний носителей в МЗБ имела вихревую структуру в плоскости газа и была отличной от нуля функцией квазиимпульса с симметрией поворотной оси четвертого порядка в направлении магнитного поля. Величины спинового, спин-орбитального расщеплений в спектре, а также расщепления, определяемого дей-

ствием на электрон периодического электростатического поля сверхрешетки с указанными в настоящей работе параметрами сопоставимы между собой в магнитных полях порядка нескольких десятков тысяч эрстед. В силу связи спиновых и координатных степеней свободы электрона его скорость, например, в  $y$ -направлении в некотором квантовом состоянии будет определяться проекцией спиновой поляризации этого состояния на  $x$ -направление (спин-орбитальное взаимодействие Рашба) (рис. 6) и  $y$ -направление (для спин-орбитального взаимодействия Дрессельхауза). На рис. 6 указаны также изоэнергетические линии магнитной подзоны. Вклад от спиновой поляризации в поперечный поверхностный терромагнитный ток дается функцией распределения носителей по импульсам. Качественные оценки и предварительные расчеты показывают, что можно ожидать некоторого незначительного, определяемого константой спин-орбитального взаимодействия, вклада в ток  $j_y^1(\zeta)$  от  $x$ -проекции спиновой поляризации состояний в линейной области явления переноса при наличии спин-орбитального взаимодействия по типу Рашба в электронном газе.

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Спектр материалов, в которых теоретически и экспериментально изучаются терромагнитные эффекты в газе носителей заряда, необычайно широк. Дwoякопериодические полупроводниковые сверхрешетки составляют класс таких материалов, где исследование транспорта носителей представляет ин-



**Рис. 6.** Спиновая поляризация квантовых состояний носителей заряда в плоскости электронного газа со спин-орбитальным взаимодействием Рашба в низшей магнитной подзоне в модельной структуре AlGaAs/GaAs/AlGaAs с параметрами  $V_0 = 1$  мэВ,  $m^* = 0.067m_0$ ,  $a = 50$  нм;  $g$ -фактор и константа спин-орбитального взаимодействия соответственно равны  $g = -0.44$ ,  $\alpha = 2.5 \cdot 10^{-2}$  эВ · нм

интерес не только с точки зрения фундаментальной науки, но и с позиций прикладного характера. В настоящей работе проведены необходимые расчеты и указаны области магнитных полей и параметров решеточных структур, когда становится возможным экспериментальное изучение эффекта НЭ в таких сверхрешетках. Рассчитанные в рамках модели зависимости поверхностной плотности тока от градиента температуры демонстрируют существенно нелинейное поведение. Имеет место эффект отрицательной дифференциальной поперечной проводимости. Установлены причины такой нелинейности, обусловленной различным вкладом в ток магнитных блоховских состояний электрона в подзоне. Эта нелинейность, в свою очередь, связана с непараболичностью электронного спектра, которая обуславливает возникновение и других, как известно, многочисленных нелинейных оптических и электрических эффектов в полупроводниковых сверхрешетках: блоховских осцилляций [24], электрофононного резонанса [25], оптического выпрямления [26, 27], самоиндуцированной прозрачности [28].

Расчет времени релаксации импульса носителей в системах с произвольным законом дисперсии является, вообще говоря, задачей нерешаемой. В двумерных полупроводниковых сверхрешетках во внешнем перпендикулярном однородном магнитном поле зависимость энергии электрона от его квазиимпульса в МЗБ существенно не параболична, а число магнитных блоховских подзон определяется числом квантов магнитного потока через элементарную ячейку сверхрешетки. Магнитное поле, таким образом, не только квантует поперечное движение носителя заряда, но и является управляющим параметром, от величины которого зависит общее число магнитных подзон спектра. В то же время известно, что эффект НЭ в полупроводниках имеет место благодаря тому, что носители заряда с различными импульсами по-разному рассеиваются при взаимодействии с примесями и колебаниями решетки. Поэтому, в контексте возможного использования результатов нашей работы при постановке соответствующих транспортных экспериментов с электронным газом, необходимо отметить роль полученных в рамках обозначенной в работе модели результатов как отправной точки при изучении механизмов рассеяния двумерных электронов двоякопериодических сверхрешеток в магнитном поле. Сверхрешетки, созданные методами электронной литографии, являются предпочтительными в плане проведения магнитотранспортных экспериментов прежде всего благодаря высокой степени своей периодичности. Возможно также создавать сверхрешетки с различной симметрией элементарной ячейки, нарушать инверсионную симметрию, конструируя двумерный нецентросимметричный искусственный кристалл.

При наложении внешнего магнитного поля законы дисперсии носителей заряда в магнитных блоховских подзонах уже не будут четными функциями квазиимпульса, что, по нашему мнению, определенным образом должно отразиться на течении эффекта НЭ в двумерном электронном газе таких структур. Несомненно, потребуется развитие уже имеющихся экспериментальных технологий формирования сверхрешеток малой периодичности и магнитотранспортных измерений. Кроме того, экспериментальные образцы должны быть достаточно чистыми, чтобы уширение магнитных подзон спектра электронов не превышало величин разделяющих их энергетических щелей.

**Финансирование.** Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ в рамках госзадания № 0729-2020-0058.

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Harper, Proc. Phys. Soc. A **68**, 874 (1955).
2. F. A. Butler and E. Brown, Phys. Rev. B **166**, 630 (1968).
3. С. Р. Фигарова, Г. И. Гусейнов, В. Р. Фигаров, ФТП **52**, 712 (2018).
4. И. Г. Кулеев, А. Т. Лончаков, Г. Л. Штрапенин и др., ФТТ **39**, 1767 (1997).
5. З. З. Алисултанов, Письма в ЖЭТФ **99**, 813 (2014).
6. Akihiko Sekine and Naoto Nagaosa, Phys. Rev. B **101**, 155204 (2020).
7. V. Ya. Demikhovskii and A. A. Perov, Phys. Rev. B **75**, 205307 (2007).
8. A. A. Perov, L. V. Solnyshkova, and D. V. Khomitsky, Phys. Rev. B **82**, 165328 (2010).
9. Л. В. Келдыш, ФТТ **4**, 2265 (1962).
10. Н. Н. Леденцов, В. М. Устинов, В. А. Щукин и др., ФТП **32**, 385 (1998).
11. C. Albrecht, J. H. Smet, K. von Klitzing et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 147 (2001).
12. M. C. Geisel, J. H. Smet, V. Umansky et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 256801 (2004).
13. T. Schlösser, K. Ensslin, J. P. Kotthaus et al., Semicond. Sci. Technol. **11**, 1582 (1996).
14. Y. K. Ryu, R. Frisenda, and A. Castellanos-Gomez, Chem. Comm. **55**, 11498 (2019).
15. M. Polini, F. Guinea, M. Lewenstein et al., Nature Nanotechnol. **8**, 625 (2013).
16. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 9, Наука, Москва (1978), § 60, с. 292.
17. D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale et al., Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
18. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ЖЭТФ **79**, 1006 (1980).
19. S. K. Sutradhar and D. Chattopadhyay, J. Phys. C **12**, 1693 (1979).
20. С. И. Борисенко, ФТП **33**, 1240 (1999).
21. А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников*, Наука, Москва (1978).
22. V. Ya. Demikhovskii and A. A. Perov, Europhys. Lett. **76**, 477 (2006).
23. А. А. Перов, Л. В. Солнышкова, Письма в ЖЭТФ **88**, 717 (2008).
24. L. Esaki and R. Tsu, IBM J. Res. and Dev. **14**, 61 (1970).
25. Г. М. Шмелев, Г. И. Цуркан, Нгуен Хог Шон, Изв. вузов, Физика **2**, 84 (1985).
26. V. V. Fomin and E. P. Pokatilov, Phys. Stat. Sol. (b) **97**, 161 (1980).
27. А. А. Булгаков, О. В. Шрамкова, ФТП **35**, 578 (2001).
28. А. А. Игнатов, Ю. А. Романов, ФТТ **17**, 3338 (1975).