ЖЭТФ, 2021, том 160, вып. 4 (10), стр. 498–507

ПРОЦЕССЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИЗЛУЧЕНИИ АНСАМБЛЯ КВАНТОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А. М. Башаров [a,b*], *А. И. Трубилко* [c**]

[a] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» 123182, Москва, Россия*

[b] *Московский физико-технический институт (технический университет) 141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

[c] *Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России 196105, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 16 июня 2021 г.,
после переработки 16 июня 2021 г.
Принята к публикации 21 июня 2021 г.

Показано, что в локальном подходе к открытым осцилляторным системам, в случае наличия у ансамбля одинаковых квантовых осцилляторов общего бозонного термостата, коллективное излучение ансамбля осцилляторов демонстрирует признаки невинеровской динамики. Интенсивность излучения достаточно большого числа N_c осцилляторов ансамбля уменьшается с ростом N_c и периодически оказывается полностью подавленной процессами второго порядка по константе связи осцилляторов с общим термостатным полем.

DOI: 10.31857/S0044451021100060

1. ВВЕДЕНИЕ

Под квантовым осциллятором мы понимаем одномодовое электромагнитное поле в высокодобротном (микро)резонаторе и/или его описание, причем о самом таком микрорезонаторе говорим как о квантовом осцилляторе. Например, можно говорить об эффективном квантовом осцилляторе резонатора с движущимся зеркалом [1]. Излучение и накачка квантового осциллятора есть взаимодействие электромагнитного поля (микро)резонатора с вакуумным электромагнитным полем и/или с когерентным полем на границе микрорезонатора или на зеркале. С общетеоретической точки зрения, одномодовый микрорезонатор и N-уровневая квантовая частица являются двумя основными объектами квантовой оптики, о которых и говорят соответственно как о квантовом осцилляторе и атомном осцилляторе [2]. Часто вообще рассматривают осцилляторную модель квантовой частицы [3] или предел слабого возбуждения квантовой частицы, в котором атомный осциллятор математически описывается так же, как и квантовый осциллятор.

Эти основные квантовые объекты участвуют в сходных процессах — рассматривают когерентные процессы, процессы возбуждения и релаксации, коллективные процессы в ансамблях, процессы запутывания квантовых состояний. Все указанные процессы, в зависимости от типа осцилляторов, имеют свои четкие отличия и особенности, определяемые алгеброй операторов, описывающих осцилляторы. Есть различия и в реализации ансамбля осцилляторов того или иного типа. Если атомные осцилляторы — просто примесные квантовые частицы, частицы в газообразном состоянии, то представить реализацию ансамбля квантовых осцилляторов аналогично ансамблю одинаковых квантовых частиц несколько сложнее. Ансамбль одинаковых атомов (квантовых частиц) взаимодействует с общим электромагнитным полем. Чтобы такое реализовать в виде ансамбля квантовых осцилляторов и считать их взаимодействующими с одним и тем же вакуумным электромагнитным полем и/или когерентным полем, необходимо рассматривать различные искус-

* E-mail: basharov@gmail.com
** E-mail: trubilko.andrey@gmail.com

ственные среды, например, пучок световодов, соединенных с одним общим световодом; направленные ответвители; квантовые точки в диэлектрической среде и иные искусственные объекты. Взаимодействие ансамбля осцилляторов с единым возбуждением можно также реализовать в резонаторах с общим движущимся зеркалом и рассматривать различные оптомеханические системы. Изучение ансамбля одинаковых квантовых осцилляторов востребовано в задачах построения многокубитного квантового процессора.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования различных систем квантовых осцилляторов [4–12]. Мы не будем в дальнейшем говорить о конкретной реализации ансамбля одинаковых квантовых осцилляторов, а обсудим эффекты, родственные обнаруженным авторами эффектам в случае ансамбля атомных осцилляторов. Речь, в первую очередь, пойдет об эффекте, аналогичном эффекту стабилизации возбужденных состояний локализованного атомного ансамбля одинаковых атомов по отношению к коллективному распаду. С точки зрения математического описания подобных эффектов, в статье выводится релаксационный оператор, входящий в стандартное кинетическое уравнение, получаемое в марковском приближении. При этом мы не обсуждаем случай ангармонизма у квантового осциллятора (с точки зрения математического описания коллективного распада, здесь релаксационный оператор неизменен), и все рассматриваемые квантовые осцилляторы считаются гармоническими.

Заметим, что задачи о взаимодействии квантового осциллятора с широкополосным вакуумным электромагнитным полем, иначе релаксация или распад возбужденных состояний осциллятора, всегда рассматривают в приближении вращающейся волны, отбрасывая антивращающие слагаемые. Самое простое представление о вращающих и антивращающих слагаемых дает алгебраическая теория возмущений [13–15]. В представлении взаимодействия оператор взаимодействия открытой системы с окружением и/или с элементами самой открытой системы всегда содержит два типа слагаемых. Одни из них являются медленно меняющимися функциями по сравнению с величинами типа $\exp(\pm i\Omega t)$, где Ω — характерная частота открытой системы. Такие слагаемые удобно называть вращающими слагаемыми (геометрическую интерпретацию см. в [16]). Другие слагаемые называют антивращающими слагаемыми. Такое разделение слагаемых в операторе взаимодействия сохранится и в представлении Шредингера, однако не всегда это разделение можно просто и наглядно провести.

Обычно антивращающие слагаемые просто отбрасывают, говоря о приближении вращающейся волны. При этом выделенный квантовый осциллятор и представляет собой открытую систему, которая на границе (зеркале в случае резонатора) взаимодействует с окружением. Рассматривая осциллятор как открытую систему, важно считать все константы взаимодействия осциллятора малыми. Еще в работе [17] было обнаружено, что именно в приближении вращающейся волны получаются корректные кинетические уравнения для описания распада квантового осциллятора. Однако до сих пор открыт вопрос о корректном учете антивращающих слагаемых в кинетическом уравнении для квантового гармонического осциллятора. Решение этого вопроса позволит также записывать кинетические уравнения, учитывающие антивращающие слагаемые, и для ангармонического осциллятора, и для других осцилляторных моделей [4–12, 18–20].

Подчеркнем, что с математической точки зрения, квантовые осцилляторы, взаимодействующие между собой и/или с окружением, описываются квадратичным гамильтонианом по бозонным операторам (в случае бозонного окружения), который может быть диагонализован в рамках глобального подхода к открытым системам [21, 22], например, при помощи преобразования Боголюбова. В результате можно получить весьма общие, но громоздкие формулы, и проблемой будет являться их анализ, так что для рассматриваемого в данной статье случая результатов, следующих из глобального подхода, пока нет. Однако требование малости констант взаимодействия позволяет в анализе осцилляторных систем прибегнуть к локальному подходу, который проще и нагляднее глобального подхода подчеркивает общность локального подхода к анализу различных по природе квантовых открытых систем и позволяет увидеть новые именно физические закономерности, которые, быть может, и содержатся в общих формулах глобального подхода, но о которых на данный момент пока ничего не известно.

Когда мы говорим об общности локального подхода к теории открытых квантовых систем, мы имеем в виду следующее. Оптические открытые квантовые системы обладают такой принципиальной особенностью, что оператор их взаимодействия с окружением всегда содержит вращающие и антивращающие слагаемые. В работах [13–15] развита алгебраическая теория возмущений применительно к задачам учета антивращающих слагаемых, а в работах [23–29] показано, как алгебраическая теория возмущений сочетается с техникой квантовых стохастических дифференциальных уравнений для получения эффективного гамильтониана задачи и кинетического уравнения. Более того, в работах [24, 27] доказана необходимость использования эффективного гамильтониана (вместо полного гамильтониана) открытой системы и ее окружения в оптических задачах для возможности описания окружения открытой системы белым шумом. Однако в случае локального подхода авторам до сих пор не известен способ корректного учета антивращающих слагаемых в релаксации осцилляторных моделей открытых квантовых систем. Авторы продемонстрировали наглядность и эффективность локального подхода на основе алгебраической теории возмущений в выделении интерференционных слагаемых в задачах о возбуждении и распаде изолированных (нерезонансно связанных с другими) осцилляторов [25, 26, 28, 29], которые еще не выделены из общих решений глобального подхода.

В ряде работ рассматривалось коллективное излучение ансамбля квантовых осцилляторов в приближении вращающейся волны. Для сравнения со случаем атомных осцилляторов напомним известное обстоятельство в модели Дике — отсутствие постоянного дипольного момента как всей атомной системы, так и каждого излучателя. Импульс коллективного излучения возникает с задержкой во времени. Возможный всплеск и импульс коллективного излучения осцилляторов, которые ассоциированы в рамках классической электродинамики излучателями, следует ожидать только в моменты времени, отвечающие образованию системы сфазированных осцилляторов. Такое оказывается возможным, только в изначально пусть даже слабых, но нелинейных системах [30, 31]. Для случая системы линейных квантовых осцилляторов увеличение интенсивности оказывается возможным только при условии изначально сфазированных осцилляторов, при этом максимум интенсивности сверхизлучательного импульса наблюдается только в начальный момент времени излучения и никакой задержки импульса не возникает. Динамика как ансамбля атомов модели Дике, так и ансамбля квантовых осцилляторов описывается единым квантовомеханическим уравнением для матрицы плотности ρ^S системы, называемой открытой, с релаксационным оператором $\hat\Gamma\rho^S(t)$ одного и того же вида ($\rho^S(t)$ — матрица плотности открытой системы в представлении взаимодействия, на что указывает явное написание аргумента времени):

$$\frac{d\rho^S(t)}{dt} - \frac{i}{\hbar}\left[\rho^S(t), H^S\right] = -\hat\Gamma\rho^S(t),$$
$$\hat\Gamma\rho^S(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[\rho^S(t), H^{L-S}\right] + $$
$$+\chi\left(\frac{1}{2}L_+L_-\rho^S(t)+\frac{1}{2}\rho^S(t)L_+L_- - L_-\rho^S(t)L_+\right). \quad (1)$$

Различия релаксационных операторов определяются алгеброй операторов Линдблада $L_\pm$, входящих в уравнение (1). В винеровском [24] описании динамики ансамбля под операторами $L_\pm$ следует понимать коллективные повышающий и понижающий операторы $R_\pm$ всей системы, отвечающие коммутационным соотношениям операторов углового момента. Динамика излучения коллектива осцилляторов описывается коллективными операторами рождения и уничтожения. Оператор H^{L-S} определяет сдвиги энергии уровней открытой системы, обусловленные релаксационными переходами. В подавляющем большинстве работ оператор H^{L-S} кладется равным нулю, поскольку авторы не выходят за рамки винеровской динамики. Эффективный гамильтониан открытой системы H^S введен для учета других возможных взаимодействий. Однако надо помнить, что любые новые взаимодействия, как правило, порождают и новые интерференционные каналы релаксации [24], и весь вопрос состоит только в том, насколько они значимы для данной задачи.

Мы показали, что коллективное излучение ансамбля квантовых осцилляторов, рассматриваемых как открытая система, может быть полностью подавлено в модельном случае, когда все осцилляторы взаимодействуют с общим вакуумным электромагнитным полем, а число самих осцилляторов в ансамбле достаточно велико. Подавление возникает в результате учета антивращающих слагаемых, которые проявляются в алгебраической теории возмущений в виде слагаемых эффективного гамильтониана, квадратичных по параметру связи осциллятора с общим квантованным электромагнитным вакуумным полем. В уравнении (1) это отражается в появлении у операторов $L_\pm$ невинеровского множителя, осциллирующего с изменением числа осцилляторов. Кроме того, коллективные релаксационные переходы определяют специфический частотный сдвиг осцилляторов $H^{L-S} \neq 0$, величина которого сосчитана.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Пусть имеется ансамбль независимых друг от друга одинаковых квантовых осцилляторов частоты Ω_c в количестве N_c. Эти осцилляторы взаимодействуют с общим вакуумным квантованным электромагнитным полем нулевой плотности фотонов, так что вся система описывается уравнением Шредингера с гамильтонианом H:

$$i\hbar\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle,$$
$$H = \sum_{i=1}^{N_c} \hbar\Omega_c c_i^\dagger c_i + \int \hbar\omega b_\omega^\dagger b_\omega d\omega + \quad (2)$$
$$+ \gamma_c \sum_i \int (c_i + c_i^\dagger)(b_\omega + b_\omega^\dagger)\, d\omega.$$

Здесь $|\Psi\rangle$ — вектор состояний ансамбля осцилляторов и окружающего поля, $c_i^\dagger$ и c_i — операторы рождения и уничтожения квантов i-го осциллятора с коммутационными соотношениями $\left[c_i, c_j^\dagger\right] = \delta_{i,j}$, $\left[c_i, c_j\right] = 0$, $b_\omega^\dagger$ и b_ω — операторы рождения и уничтожения квантов вакуумного квантованного электромагнитного поля с коммутационными соотношениями $\left[b_\omega, b_{\omega'}^\dagger\right] = \delta(\omega - \omega')$, γ_c — константа связи квантового осциллятора с вакуумным полем.

С точки зрения терминологии квантовой теории открытых систем, ансамбль независимых друг от друга одинаковых квантовых осцилляторов представляет собой открытую систему, если константы связи γ_c малы, а общее вакуумное квантованное электромагнитное поле является окружением открытой системы. Уравнение Шредингера и гамильтониан (2) записаны в представлении Шредингера, однако в дальнейшем при выводе кинетического уравнения удобно преобразования проводить в представлении Дирака [24].

Наша задача — вывести кинетическое уравнение для ансамбля осцилляторов. Его вид в марковском приближении — общий вид Линдблада (1) кинетического уравнения открытых систем. В локальном подходе для вывода кинетического уравнения необходимо сначала получить эффективный гамильтониан задачи, не содержащий в представлении взаимодействия быстро меняющихся во времени слагаемых, иначе приближение белого шума для вакуумного поля окажется некорректным [17]. Самый простой и универсальный способ получения эффективного гамильтониана — алгебраическая теория возмущений, основанная на унитарном преобразовании вектора состояния $|\Psi\rangle$ и гамильтониана H:

$$|\tilde\Psi(t)\rangle = \hat T(t)|\Psi(t)\rangle, \quad \hat T(t) = e^{iS(t)}, \quad S^\dagger(t) = S(t).$$

С точки зрения описания открытой системы и ее окружения, унитарное преобразование ничего не меняет, только уравнение Шредингера для преобразованного вектора состояний $|\tilde\Psi(t)\rangle$ определяется преобразованным гамильтонианом $\tilde H(t)$:

$$i\hbar\frac{d|\tilde\Psi(t)\rangle}{dt} = \tilde H(t)|\tilde\Psi(t)\rangle,$$
$$\tilde H(t) = \hat T(t)V(t)\hat T^\dagger(t) - i\hbar\hat T(t)\frac{d}{dt}\,\hat T^\dagger(t), \quad (3)$$

где $V(t)$ — оператор взаимодействия в представлении взаимодействия.

Алгебраическая теория возмущений строится на разложении генератора унитарного преобразования $S(t)$ и генератора сдвига системы во времени $\tilde H(t)$ в ряд по константе связи γ_c. При этом используются формула Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа и условие отсутствия быстро меняющихся во времени слагаемых по сравнению с $\exp(\pm i\Omega_c t)$. Это процедура неоднократно проделывалась в работах авторов [1, 24–29] поэтому приводим результаты:

$$S^{(1)}(t) = \gamma_c \sum_j \int\limits_{\omega\notin(-\Omega_c)} \frac{c_j b_\omega \exp\left[i(\omega+\Omega_c)t\right]\, d\omega}{i\hbar(\omega+\Omega_c)} +$$
$$+ \gamma_c \sum_j \int\limits_{\omega\notin(\Omega_c)} \frac{c_j^\dagger b_\omega \exp\left[-i(\omega-\Omega_c)t\right]\, d\omega}{i\hbar(\omega-\Omega_c)}, \quad (4)$$

$$\tilde H^{(1)}(t) = \gamma_c \sum_j \int\limits_{\omega\in(\Omega_c)} \Big(c_j b_\omega^\dagger \exp\left[-i(\Omega_c-\omega)t\right] +$$
$$+ c_j^\dagger b_\omega \exp\left[i(\Omega_c-\omega)t\right]\Big)\, d\omega,$$
$$\tilde H^{(2)}(t) = -\gamma_c^2 \sum_{j=1}^{N_c} c_j^\dagger c_j \int\limits_{\omega\notin(-\Omega_c)} \frac{d\omega}{\hbar(\omega+\Omega_c)} - \quad (5)$$
$$-\gamma_c^2 N_c \left(\int\limits_{\omega,\omega'\in(\Omega_c)} \frac{b_\omega^\dagger b_{\omega'} \exp\left[i(\omega-\omega')t\right] d\omega\, d\omega'}{2\hbar(\omega+\Omega_c)} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\omega,\omega'\in(\Omega_c)} \frac{b_{\omega'}^\dagger b_\omega \exp\left[i(\omega'-\omega)t\right]\, d\omega' d\omega}{2\hbar(\omega+\Omega_c)} \right).$$

Здесь через (Ω_c) обозначена частотная область спектра частот окружения открытой системы вблизи центральной частоты $\omega = \Omega_c$. Для частот ω из этой области экспоненты $\exp[\pm i(\omega-\Omega_c)t]$ являются медленно меняющими функциями времени по сравнению с $\exp(\pm i\Omega_c t)$. Ширина области (Ω_c) определяется скоростью затухания фотонов в микрорезонаторе в случае, когда открытая система состоит из одного квантового осциллятора. Мы распространили область суммирования по частотам непрерывного спектра окружения, положив $b_{-\omega} = b_\omega^\dagger$, $\omega > 0$, но при этом исключили из области интегрирования билинейных по операторам $b^\dagger_\omega, b_{\omega'}$ слагаемых все другие области, согласно общему анализу [24].

Выписанные слагаемые представляют собой первый и второй порядки разложения генераторов по константе связи. Эффективный гамильтониан с точностью до первого порядка по константе связи есть

$$H^{eff}(t) = \tilde{H}^{(1)}(t),$$

и именно он используется в теориях взаимодействия вакуумного электромагнитного поля с квантовыми осцилляторами. Алгебраическая теория возмущений накладывает жесткие ограничения на формально введенное приближение вращающейся волны, состоящие в требовании суммирования по частотам в формуле (4) только по области (Ω_c). Выход за рамки таких ограничений приводит в ряде задач к «парадоксам» типа нарушения второго начала термодинамики [32].

Эффективный гамильтониан с точностью до второго порядка по константе связи есть

$$H^{eff}(t) = \tilde{H}^{(1)}(t) + \tilde{H}^{(2)}(t). \tag{6}$$

В представленном виде эффективный гамильтониан с точностью до второго порядка алгебраической теории возмущений ранее не рассматривался. В задачах, в которых фигурируют две константы взаимодействия, например, «изолированный» микрорезонатор, нерезонансно связанный с микрорезонатором, мода которого затухает вследствие потерь на зеркалах, слагаемые второго порядка алгебраической теории возмущений описывали интерференционный канал релаксации и накачки «изолированного» осциллятора [28, 29]. Учет слагаемого (6) и его роль в динамике ансамбля одинаковых квантовых осцилляторов обсудим ниже.

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АНСАМБЛЯ ОДИНАКОВЫХ КВАНТОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Пусть преобразованный вектор состояния ансамбля одинаковых квантовых осцилляторов и его окружения в начальный момент времени факторизован:

$$|\tilde{\Psi}_0\rangle = |\Phi_0\rangle \otimes |\Xi_0\rangle.$$

Здесь $|\Phi_0\rangle$ — начальный вектор состояния ансамбля квантовых осцилляторов, $|\Xi_0\rangle$ — начальный вектор состояния вакуумного квантованного электромагнитного поля. Вакуумное поле, как обычно, дельта-коррелированное поле, т. е.

$$\begin{gathered}\langle\Xi_0|b_\omega|\Xi_0\rangle = \langle\Xi_0|b^\dagger_\omega|\Xi_0\rangle = \langle\Xi_0|b^\dagger_\omega b_{\omega'}|\Xi_0\rangle = 0,\\ \langle\Xi_0|b_\omega b^\dagger_{\omega'}|\Xi_0\rangle = \delta_{\omega\omega'},\end{gathered} \tag{7}$$

и с нулевой плотностью квантов.

При условиях (7), независимости константы связи γ_c от частот (в (2) мы ее сразу вынесли за знак интеграла) и дополнительном предположении о следующем виде слагаемого (5) эффективного гамильтониана:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(2)}(t) = {} & -\gamma_c^2 N_c \times \\ & \times \int\limits_{\omega,\omega'\in(\Omega_c)} \frac{b^\dagger_\omega b_{\omega'} \exp\left[i(\omega-\omega')t\right]\, d\omega\, d\omega'}{2\hbar\Omega_c},\end{aligned} \tag{8}$$

уравнение Шредингера (3) с $\tilde{H}(t) = H^{eff}(t)$ становится математически неопределенным [33, 34]. Его принято доопределять, вводя стохастические интегралы Ито в формальном решении уравнения Шредингера, выраженном через оператор эволюции $U(t,t_0)$ и T-экспоненту:

$$\begin{gathered}U(t,t_0) = I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int\limits_{t_0}^{t} H^{eff}(t')\,dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \times \\ \times \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t'} H^{eff}(t')H^{eff}(t'')\,dt'dt'' + \ldots = \\ = \overleftarrow{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} H^{eff}(t')\,dt'\right),\\ |\tilde{\Psi}(t)\rangle = U(t,t_0)|\tilde{\Psi}_0\rangle.\end{gathered}$$

В условиях (7) и (8) естественно ввести следующие операторы квантовых уничтожающего $B(t)$, рождающего $B^+(t)$ и считывающего $\Lambda(t)$ процессов [35–37]:

$$\begin{gathered}dB(t) = B(t+dt) - B(t), \quad B(t) = \int\limits_0^t b(t')\,dt',\\ b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left[-i(\omega-\Omega_c)t\right] b_\omega,\end{gathered} \tag{9}$$

и

$$\begin{gathered}\Lambda(t) = \int\limits_0^t dt' b^\dagger(t') b(t'),\\ d\Lambda(t) = \Lambda(t+dt) - \Lambda(t).\end{gathered} \tag{10}$$

Физическое обоснование замен пределов интегрирования см. в [33, 34, 37]. Под дифференциалом понимается дифференциал в смысле Ито [33–37]. В выражениях (9), (10) и ниже считаем время и частоты безразмерными, пока не будет оговорено о возврате к размерному времени.

Дифференциалы (9) и (10) удовлетворяют следующей алгебре Хадсона – Партасарати:

$$\begin{gathered} d\Lambda(t)\,d\Lambda(t) = d\Lambda(t), \quad dB(t)\,dB^{+}(t) = dt, \\ d\Lambda(t)\,dB^{+}(t) = dB^{+}(t), \quad dB(t)\,d\Lambda(t) = dB(t), \\ d\Lambda(t)\,dB(t) = d\Lambda(t)\,dt = dB^{+}(t)\,d\Lambda(t) = \\ = dB^{+}(t)\,dB(t) = dB^{+}(t)\,dt = dB(t)\,dt = \\ = dt\,dt = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

При этом средние от дифференциалов Ито введенных случайных процессов — нулевые:

$$\begin{gathered} \mathrm{Tr}_{env}\left(\rho^{S+env}dB(t)\right) = \mathrm{Tr}_{env}\left(\rho^{S+env}dB^{+}(t)\right) = \\ = \mathrm{Tr}_{env}\left(\rho^{S+env}d\Lambda(t)\right) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

След берется по состоянию вакуумного электромагнитного поля, $\rho^{S+env}(t) = |\tilde{\Psi}(t)\rangle\langle\tilde{\Psi}(t)|$ — преобразованная матрица плотности системы квантовых осцилляторов и окружения. Получение уравнения для $\rho^{S+env}(t)$ и (путем указанной выше процедуры взятия следа) для $\rho^{S}(t)$ — следующие этапы подхода к теории открытых квантовых систем на основе алгебраической теории возмущений (унитарного преобразования) и техники квантовых стохастических дифференциальных уравнений.

Для нахождения кинетических уравнений записываем стохастическое дифференциальное уравнение для оператора эволюции. Используем следующее представление:

$$dU(t,t_0) = [\exp(-iH^{eff}(t)\,dt) - 1]U(t,t_0), \tag{13}$$

в котором эффективный гамильтониан в базовых квантовых процессах приобретает вид

$$H^{eff-S}(t)\,dt = Y^{+}dB(t) + Y\,dB^{+}(t) + Y_\Lambda d\Lambda(t). \tag{14}$$

В уравнениях (13) и (14) все величины безразмерные. Введены операторы

$$Y = \frac{\gamma_c}{\hbar}\sqrt{\frac{2\pi}{\Omega_c}}\sum_{j=1}^{N_c} c_j, \quad Y_\Lambda = -\frac{\pi\gamma_c^2 N_c}{\hbar}. \tag{15}$$

Время измеряется в единицах Ω_c^{-1}, частота — в единицах Ω_c.

Из разложения экспоненты (13) в ряд с учетом всех членов разложения и алгебры (11) следует более привычный вид стохастического дифференциального уравнения для оператора эволюции, используя который стандартным образом [24], находим искомое кинетическое уравнение. Кинетическое уравнение, как и все в марковском приближении, имеет вид (1) с операторами

$$\begin{gathered} H^{L-S} = \frac{2\pi\gamma_c^2}{\hbar^2\Omega_c}\,\frac{\sin Y_\Lambda - Y_\Lambda}{Y_\Lambda^2}\sum_{j=1}^{N_c} c_j^{\dagger}\sum_{k=1}^{N_c} c_k, \\ L_- = \frac{Y_\Lambda^e}{Y_\Lambda}\sum_{j=1}^{N_c} c_j, \\ L_+L_- = 2\frac{1-\cos Y_\Lambda}{Y_\Lambda^2}\sum_{j=1}^{N_c} c_j^{\dagger}\sum_{k=1}^{N_c} c_k, \\ Y_\Lambda^e = \exp(-iY_\Lambda) - 1, \quad \chi = 1. \end{gathered} \tag{16}$$

Подчеркнем, что с операторами и величинами (16) кинетическое уравнение рассматривается как уравнение в безразмерных величинах.

Кинетическое уравнение (1) с операторами и величинами, определяемыми соотношениями (16), описывает динамику ансамбля одинаковых, не зависящих друг от друга квантовых осцилляторов, взаимодействующих с общим вакуумным широкополосным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов. В отличие от традиционных исследований, операторы (16) кинетического уравнения (1) получены с точностью до второго порядка по константе связи γ_c. Оператор H^{L-S} и множители

$$Y_\Lambda, \quad Y_\Lambda^e, \quad \frac{Y_\Lambda^e}{Y_\Lambda}, \quad \frac{\sin Y_\Lambda - Y_\Lambda}{Y_\Lambda^2}, \quad \frac{1-\cos Y_\Lambda}{Y_\Lambda^2}, \tag{17}$$

входящие в соотношения (16), отличают полученное кинетическое уравнение от традиционных уравнений. Мы говорим, что уравнение (1) с операторами (16) относится к уравнениям невинеровского типа, поскольку учет второго порядка алгебраической теории возмущений вводит в рассмотрение квантовый считывающий процесс $\Lambda(t)$. Множители (17) называем невинеровскими множителями, а динамику ансамбля квантовых осцилляторов, описываемую при помощи уравнения (1) и соотношений (16), — невинеровской динамикой.

В отсутствие считывающего процесса $Y_\Lambda \equiv 0$ невинеровские операторные множители равны

$$Y_\Lambda^e = 0, \quad \frac{Y_\Lambda^e}{Y_\Lambda} = -i, \quad \frac{\sin Y_\Lambda - Y_\Lambda}{Y_\Lambda^2} = 0,$$

$$\frac{1-\cos Y_\Lambda}{Y_\Lambda^2} = \frac{1}{2},$$

что обеспечивает описание процессов в ансамбле одинаковых квантовых осцилляторов только с точностью до первого порядка по константе связи.

Заметим, что в классическом случае считывающий процесс представляет собой пуассоновский процесс. В квантовом случае винеровский $W(t)$ и пуассоновский $P(t)$ процессы взаимосвязаны и определяются рождающим, уничтожающим и считывающим процессами по формулам

$$W(t) = B(t)+B^{+}(t), \quad P(t) = \Lambda(t)+i\Big(B^{+}(t)-B(t)\Big).$$

Говоря о невинеровской динамике, мы подчеркиваем, что не только винеровский процесс, но и пуассоновский процесс определяют такую динамику.

4. КОЛЛЕКТИВНАЯ НЕВИНЕРОВСКАЯ ДИНАМИКА ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Проанализируем полученный эффективный гамильтониан (6) со слагаемыми первого (4) и второго (5) порядков малости по константе связи и невинеровское кинетическое уравнение (1), определяемое операторами (16). Одним из важнейших его отличий от традиционного уравнения является непосредственное появление дополнительных к частоте Ω_c рассматриваемых квантовых осцилляторов двух частотных сдвигов. Один из них для ансамбля осцилляторов из малого числа осцилляторов определяет новую эффективную частоту осциллятора $\Omega_c' = \Omega_c + \Delta\Omega_c$, где

$$\Delta\Omega_c = -\gamma_c^2 \int\limits_{\omega\notin(-\Omega_c)} \frac{d\omega}{\omega+\Omega_c}. \tag{18}$$

Это — аналог лэмбовского сдвига энергии уровней для атомов. В случае осцилляторов сдвиг происходит в длинноволновую область. Для корректности выражения необходимо учесть исходную зависимость параметра связи γ_c от частоты и внести ее под знак интеграла.

Но помимо аналога лэмбовского сдвига есть и коллективный сдвиг энергии уровней осцилляторов, зависящий от числа осцилляторов в ансамбле. Поскольку этот сдвиг определяется слагаемым H^{L-S} в релаксационном операторе (1), (16), его естественно назвать коллективным релаксационным сдвигом. Авторам не известны работы, в которых бы коллективный релаксационный сдвиг для осцилляторов вычислялся и обсуждался. Авторам также не известны работы, выполненные в рамках глобального подхода, где подобное явление обсуждалось. Для малого числа N_c осцилляторов в ансамбле наблюдается (должна наблюдаться) линейная зависимость частот осциллятора от числа осцилляторов в ансамбле. Если представить новое приближение эффективной частоты осциллятора как

$$\Omega_c'' = \Omega_c + \Delta\Omega_c + \Delta\Omega_R, \tag{19}$$

то

$$\Delta\Omega_R \approx \frac{\pi^2\gamma_c^4}{3\hbar^4\Omega_c} N_c, \tag{20}$$

хотя корректнее говорить о сдвиге частоты коллективного состояния или о коллективной энергии

$$H^{L-S} = \frac{\pi^2\gamma_c^4}{3\hbar^3\Omega_c} N_c \sum_{j=1}^{N_c} c_j^\dagger \sum_{k=1}^{N_c} c_k. \tag{21}$$

Видим, что направление коллективного сдвига противоположно лэмбовскому сдвигу $\Delta\Omega_c$.

В данной статье, применяя локальный подход к теории открытых квантовых систем, мы преследовали цель найти в ансамбле одинаковых квантовых осцилляторов аналоги новым эффектам, которые ранее были обнаружены в коллективной атомной динамике [24]. Помимо релаксационного сдвига энергии коллективного состояния рассмотрим теперь проявление коллективной динамики осцилляторов в явлении сверхизлучения ансамбля. Зависимость интенсивности $I(t)$ импульса сверхизлучения такой системы от времени определяется следующим размерным выражением:

$$I(t) = -\hbar\Omega_c \frac{d\langle C^\dagger C\rangle}{dt}, \tag{22}$$

где динамика среднего от оператора числа возбуждений коллектива осцилляторов

$$\langle C^\dagger C\rangle = \sum_{j=1}^{N_c} \langle c_j^\dagger c_j\rangle,$$

следует уравнению, полученному усреднением названного оператора, и, согласно уравнению (1), имеем

$$\frac{d}{dt}\langle C^\dagger C\rangle = -\gamma_c \frac{1-\cos(\gamma_c^2 N_c/2\Omega_c^2)}{(\gamma_c^2 N_c/2\Omega_c^2)^2} \langle C^\dagger C\rangle. \tag{23}$$

При записи двух последних выражений мы вновь вернулись к размерному времени. Решение приведенного уравнения имеет отличительные особенности, характерные для невинеровской динамики. Так, константа распада γ_c по сравнению с обычной винеровской динамикой приобретает дополнительный осциллирующий множитель

$$\frac{1-\cos(\gamma_c^2 N_c/2\Omega_c^2)}{(\gamma_c^2 N_c/2\Omega_c^2)^2},$$

зависящий от числа квантовых осцилляторов в ансамбле. Нетрудно видеть, что при определенных значениях числа осцилляторов в ансамбле, $N_c = 2n\pi 2\Omega_c^2/\gamma_c^2$, $n = 1,2,3,\ldots$, константа коллективной релаксации принимает значение, в точности равное нулю. В этих ситуациях невинеровская динамика ансамбля, производимая эффектами, учитывающими второй порядок по взаимодействию ансамбля и вакуумного окружения и характеризуемая учетом антивращающих слагаемых в операторе взаимодействия, приводит к тому, что скорость коллективной релаксации ансамбля обращается в нуль и замораживается возбужденное состояние ансамбля осцилляторов. Этот эффект обусловлен квантовой интерференцией различных каналов взаимодействия системы с окружением — квантовых переходов в системе с излучением реального кванта и переизлучением виртуальных квантов с сохранением энергетического состояния открытой системы. Реальные переходы описываются квантовыми уничтожающим $B(t)$ и рождающим $B^+(t)$ процессами, а переизлучение — считывающим процессом $\Lambda(t)$. Они имеют различные алгебраические свойства (см. соотношения алгебры Хадсона – Партасарати (11)). Своеобразную интерференцию описывает считывающее свойство $d\Lambda(t)\,dB^+(t) = dB^+(t)$. Такая интерпретация была дана ранее на примере ансамбля атомных осцилляторов [24].

Решение уравнения (23), определяющее и вид импульса сверхизлучения во времени,

$$\langle C^\dagger C\rangle = \langle C^\dagger C\rangle_0 \exp\left(-\gamma_c \frac{1-\cos\left(\dfrac{\gamma_c^2 N_c}{2\Omega_c^2}\right)}{\left(\dfrac{\gamma_c^2 N_c}{2\Omega_c^2}\right)^2}\, t\right),$$

существенным образом зависит от начального состояния осцилляторов, определяемого средним $\langle C^\dagger C\rangle_0$, или от способа приготовления коллективной системы. Как и в случае винеровской динамики, значение интенсивности оказывается пропорциональным квадрату числа осцилляторов N_c^2 только для случая сфазированно-приготовленного начального состояния, когда $\langle C^\dagger C\rangle_0 \propto N_c^2$. Для такого состояния для средних справедливы соотношения $\langle C^\dagger\rangle_0 \propto \langle C\rangle_0 \propto N_c$. В случае приготовления системы со случайным распределением фаз осцилляторов значение среднего $\langle C^\dagger C\rangle_0 \propto N_c$, поскольку в этом случае $\langle C^\dagger\rangle_0 \propto \langle C\rangle_0 \propto \sqrt{N_c}$.

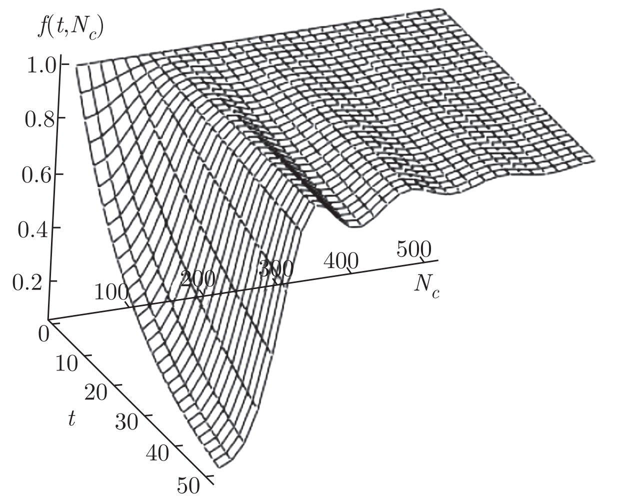

Рис. 1. Нормированное среднее число возбуждений ансамбля одинаковых квантовых осцилляторов. Время t — безразмерная величина

На рис. 1 представлены графики зависимости нормированного среднего числа возбуждений

$$f(t,N_c) = \langle C^\dagger C\rangle / \langle C^\dagger C\rangle_0$$

в зависимости от времени и числа осцилляторов в системе. Среднее число возбуждений носит осцилляционный характер в зависимости от числа осцилляторов ансамбля. С увеличением числа последних среднее число возбуждений практически не меняет своего значения во времени, что определяется учетом процессов второго порядка по константе связи. Это — новый эффект, не встречающийся в теории сверхизлучения ансамбля осцилляторов при применении обычного описания в рамках традиционной теории резонансного взаимодействия ансамбля с вакуумным окружением в приближении вращающейся волны.

На рис. 2 приведены графики зависимости нормированной интенсивности

$$g(t,N_c) = \frac{I(t,N_c)}{\hbar\Omega_c\gamma_c\langle C^\dagger C\rangle_0}$$

импульсов сверхизлучения в зависимости от времени и числа осцилляторов в системе. Видно, что максимальное значение интенсивности отвечает именно начальному моменту времени, что отличает систему квантовых осцилляторов от системы атомных ос-

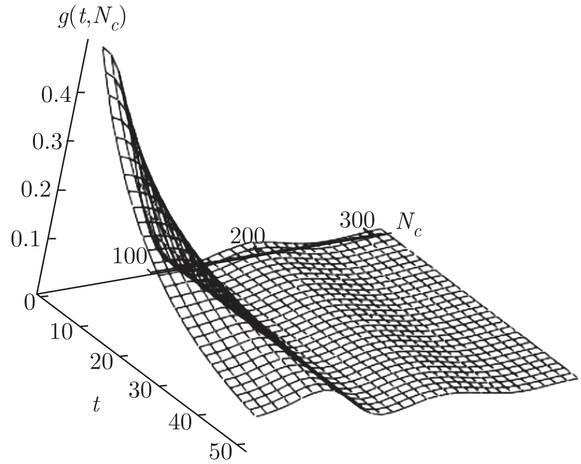

Рис. 2. Нормированная интенсивность коллективного излучения ансамбля возбужденных квантовых осцилляторов. Время t — безразмерная величина

цилляторов. Однако на зависимости $g(t,N_c)$ от числа осцилляторов N_c наблюдаются колебания, а также уменьшение времени затухания ансамбля с увеличением N_c. Эти особенности сходны с аналогичными эффектами в ансамбле атомных осцилляторов.

Для указанных зависимостей мы не учитывали малый частотный сдвиг частоты осциллятора, полагая, что $\Omega_c'' \approx \Omega_c$. Для исследования сдвигов частоты (18) и (20) хорошо разработаны спектральные методы, а различные зависимости от числа осцилляторов N_c в ансамбле позволят отделять один тип частотного сдвига $\Delta\Omega_c$ от другого $\Delta\Omega_R$.

Финансирование. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-02-00234а).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, ЖЭТФ **159**, 262 (2021).
2. B. W. Shore and P. L. Knight, J. Mod. Optics **40**, 1195 (2003).
3. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).
4. A. I. Maimistov, Nonlinear Phenom. Complex Syst. J. **19**, 358 (2016).
5. Y. Kivshar, Low Temp. Phys. **45**, 1201 (2019).
6. N. B. Plougonven, C. Minot, G. Bouwmans, A. Levenson, and J.-M. Moison, Opt. Express **22**, 12379 (2014).
7. Xun-Wei Xu, Ai-Xi Chen, Yong Li, and Yu-xi Liu, Phys. Rev. A **95**, 063808 (2017).
8. K. Li, U. Krishnamoorthy, J. P. Heritage, and O. Solgaard, Opt. Lett. **27**, 366 (2002).
9. M. Hasan, I. V. Iorsh, O. V. Kibis, and I. A. Shelykh, Phys. Rev. B **93**, 125401 (2016).
10. S. Schmidt and G. Blatter, Phys. Rev. Lett. **103**, 086403 (2009).
11. J. Perczel, J. Borregaard, D. E. Chang, S. F. Yelin, and M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **124**, 083603 (2020).
12. S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Munoz, P. Solano, and C. Hermann-Avigliano, Phys. Rev. A **100**, 023841 (2019).
13. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Э. А. Маныкин, ЖЭТФ **84**, 487 (1983).
14. А. М. Башаров, *Фотоника, Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике*, МИФИ, Москва (1990).
15. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).
16. Л. Аллен, Д. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
17. D. F. Walls, Z. Phys. **234**, 231 (1970).
18. B. Nachtergaele, B. Schlein, R. Sims, S. Starr, and V. Zagrebnov, Rev. Math. Phys. **22**, 207 (2010).
19. J.-T.Hsiang and B.-L. Hu, Phys. Rev. D **101**, 125003 (2020).
20. T. Chen, V. Balachandran, C. Guo, and D. Poletti, Phys. Rev. E **102**, 012155 (2020).
21. A. S. Trushechkin and I. V. Volovich, Europhys. Lett. **113**, 30005 (2016).
22. A. E. Teretenkov, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics **22**, 1930001 (2019).

23. А. М. Башаров, ЖЭТФ **102**, 1126 (1992).

24. А. М. Башаров, ЖЭТФ **158**, 978 (2020).

25. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, ЖЭТФ **156**, 407 (2019).

26. A. I. Trubilko and A. M. Basharov, Phys. Scr. **95**, 045106 (2020).

27. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **111**, 632 (2020).

28. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, ЖЭТФ **157**, 74 (2020).

29. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **110**, 505 (2019).

30. Ю. А. Ильинский, Н. С. Маслова, ЖЭТФ **91**, 171 (1988).

31. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, УФН **153**, 525 (1987).

32. A. Levy and R. Kozloff, Europhys. Lett. **107**, 20004 (2014).

33. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2004).

34. A. M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Sociedad Mathematica Mexicana (2000).

35. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Comm. Math. Phys. **93**, 301 (1984).

36. В. П. Белавкин, УМН **47**, 47 (1992).

37. A. M. Basharov, Phys. Rev. A **84**, 013801 (2011).