

ИСПАРЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР, БАРИОННАЯ АСИММЕТРИЯ И ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

*А. Чаудхури**, *А. Долгов***

*Физико-астрономический факультет, Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 22 марта 2021 г.,
после переработки 2 июля 2021 г.
Принята к публикации 3 июля 2021 г.

Достаточно легкие первичные черные дыры (ПЧД) могли испариться в очень ранней Вселенной и уменьшить существовавшую ранее барионную асимметрию и/или замороженную плотность стабильных реликтовых частиц. Эффект особенно силен в случае распада ПЧД, когда и если они доминировали в космологической плотности энергии. Величина уменьшения сначала рассчитывается аналитически при упрощенном предположении о дельта-образном спектре масс ПЧД и в приближении мгновенного распада. В реалистичном случае экспоненциального распада и для широкого спектра масс ПЧД расчеты выполнены численно. Возникающее в результате уменьшение асимптотической плотности суперсимметричных реликтов открывает для них более широкое окно по массам, чтобы стать жизнеспособными кандидатами на роль носителей темной материи.

DOI: 10.31857/S0044451021110043

1. ВВЕДЕНИЕ

Первичные черные дыры могут быть достаточно обильны в ранней Вселенной и даже какое-то время доминировать в космологической плотности энергии. В последнем случае они могут оказать существенное влияние на барионную асимметрию Вселенной, на долю частиц темной материи, а также привести к росту возмущений плотности на относительно небольших масштабах.

Обычно считается, что первичные черные дыры (ПЧД) создаются согласно механизму Зельдовича – Новикова (ЗН) [1] (см. также [2]). Согласно ЗН, ПЧД могли бы возникнуть, если возмущение плотности $\delta\rho/\rho$ на размере горизонта оказалось бы больше единицы. В таком случае эта область с более высокой плотностью окажется внутри своего собственного гравитационного радиуса и превратится в черную дыру. В предположении спектра Харрисона – Зельдовича [3, 4] первичных возмущений плотности подобный процесс создания ПЧД может привести к их значительной плотности.

Масса внутри горизонта во Вселенной на стадии доминирования излучения (RD) составляет

$$M_{hor} = m_{Pl}^2 t, \quad (1)$$

где масса Планка равна $m_{Pl} \approx 2.176 \cdot 10^{-5}$ г, а t — космологическое время (возраст Вселенной). Соответственно, согласно пионерским оценкам ЗН, начальный момент создания ПЧД с массой M можно принять равным

$$t_{in}(M) = \frac{M}{m_{Pl}^2}. \quad (2)$$

Более точные расчеты с учетом уравнения состояния первичной плазмы приводят к несколько иному результату, но для наших приближенных оценок это не слишком существенно.

Как правило, предполагается, что спектр масс ПЧД, созданных механизмом ЗН, очень узок. Для него обычно принимается степенная форма или даже дельта-функция. Однако существует довольно много других сценариев образования ПЧД. Можно упомянуть, в частности, механизм, предложенный в работах [5, 6], который приводит к логнормальному распределению по массам и может, в принципе, создавать ПЧД с массами до тысяч и даже миллионов солнечных масс благодаря образованию

* E-mail: arnabchaudhuri.7@gmail.com

** E-mail: dolgov@fe.infn.it

зародышей ЧД во время космологической инфляции. Другие механизмы образования ПЧД, стимулированные инфляцией, рассмотрены, например, в статьях [7, 8]. Работы по образованию ПЧД с расширенным спектром масс включают, в частности, статьи [9–12]. Возникновение ПЧД вследствие фазового перехода в первичной плазме исследуется в работе [13]. Недавний обзор образования массивных ПЧД можно найти в [14].

Логнормальный спектр масс стал довольно популярным в течение последних нескольких лет, поскольку он хорошо описывает наблюдаемые массивные черные дыры в современной Вселенной. В частности, анализ распределения по «чирп»-массам событий, зарегистрированных LIGO, замечательно согласуется с логнормальным спектром [15]. Разумеется, возможны другие спектры масс ПЧД, но задача изучения всех возможных спектров весьма сложна, поэтому мы ограничимся спектром в форме дельта-функции и приведем два примера расширенных спектров, а именно, плоский спектр и степенной спектр, близкий по форме к логнормальному. Для обоих типов расширенных спектров предполагается, что массы ПЧД ограничены некоторыми M_{min} и M_{max} . Все три типа спектров приводят к сравнимым результатам для коэффициентов подавления энтропии.

Мы будем рассматривать достаточно малые массы ПЧД, такие что черные дыры испарятся достаточно рано, ранее первичного нуклеосинтеза (BBN). Хотя такие короткоживущие ПЧД исчезли задолго до нашего времени, их влияние на современную Вселенную может быть хорошо заметно. С одной стороны, распады ПЧД могут привести к значительному выбросу количества энтропии в первичную плазму и уменьшить величину ранее созданной барионной асимметрии или уменьшить относительную (по отношению к фону реликтовых фотонов) плотность частиц темной материи [16, 17]. С другой стороны, барионная асимметрия могла возникнуть при испарении ПЧД [18, 19], да и темная материя также могла быть создана в таком процессе. Однако мы пренебрежем вторым видом процессов и будем рассматривать лишь разбавление барионов и частиц темной материи испарением ПЧД. Действительно, можно показать, что при выбранных значениях параметров стабильные суперсимметричные реликты, образующиеся в процессе испарения ПЧД, будут давать пренебрежимо малый вклад в плотность темной материи, см. Приложение А.

Интересный хорошо известный эффект, не затронутый в этой работе, — это рост возмущений плотно-

сти на ранней стадии доминирования вещества. Если бы существовала эпоха доминирования ранних ПЧД, возрастающие возмущения плотности могли бы создать небольшие скопления материи в современной Вселенной, такие как шаровые скопления или даже карликовые галактики.

В рассмотренном ниже сценарии предполагается, что Вселенная изначально находилась в состоянии доминирования излучения, на так называемой RD-стадии, когда космологическая материя в основном состояла из релятивистских частиц. Космологическая плотность энергии в эту эпоху была равна

$$\rho_{rel}^{(1)} = \frac{3m_{Pl}^2}{32\pi t^2}, \quad (3)$$

а масштабный фактор эволюционировал как

$$a_{rel}(t) = a^{(in)} \left(\frac{t}{t_{in}} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Если бы в этот период была создана достаточно большая плотность ПЧД и если бы ПЧД были достаточно массивными, чтобы дожить до того момента, когда они начали доминировать во Вселенной, то закон космологического расширения превратился бы в нерелятивистский, а плотность энергии стала бы асимптотически стремиться к

$$\rho_{nr} = \frac{m_{Pl}^2}{6\pi(t+t_1)^2}, \quad (5)$$

где t_1 определяется из условия равенства плотностей энергии ρ_{nr} (5) и $\rho_{rel}^{(1)}$ (3), что произошло бы в момент равновесия, который мы обозначим как t_{eq} . Сравнивая эти два выражения, находим, что $t_1 = t_{eq}/3$, а t_{eq} можно найти из уравнений

$$\frac{a_{in}}{a_{eq}} = \left(\frac{t_{in}}{t_{eq}} \right)^{1/2} = \frac{\rho_{BH}^{(in)}}{\rho_{rel}^{(in)}},$$

см. ниже.

В конечном итоге все или значительная часть ПЧД испарилась, образовав релятивистскую материю, и при $t = t_2$ режим расширения вернулся к релятивистскому:

$$\rho_{rel}^{(2)} = \frac{3m_{Pl}^2}{32\pi(t+t_2)^2}, \quad (6)$$

где t_2 определяется условием равенства ρ_{nr} (5) и $\rho_{rel}^{(2)}$ (6) в момент распада ПЧД, т. е. при $t = \tau_{BH}$.

Конечно, приведенные выше оценки являются приближительными и представлены здесь, чтобы понять суть эффекта. Тем не менее они применяются

ниже для расчетов в приближении мгновенного распада для мгновенного изменения режима расширения. Сравнение с точными расчетами продемонстрировало, что эти «мгновенные» результаты оказались довольно точными.

В тепловом равновесии плотность энергии релятивистских частиц равна

$$\rho_{rel} = \frac{\pi^2 g_*(T) T^4}{30}, \quad (7)$$

где T — температура плазмы, $g_*(T)$ — количество типов релятивистских частиц в плазме при температуре T .

Как известно, см., например, [20, 21], энтропия равновесной космологической плазмы с нулевым химическим потенциалом сохраняется в сопутствующем объеме:

$$s = \frac{\rho + \mathcal{P}}{T} a^3 = \text{const}, \quad (8)$$

где ρ — плотность энергии плазмы, \mathcal{P} — ее давление.

В обычных сценариях бариогенезиса несохранение барионного числа происходило при очень высоких температурах, а при низких температурах барионы эффективно сохранялись. Соответственно, в поздние космологические эпохи плотность барионного числа N_B также сохранялась в сопутствующем объеме. Поэтому барионная асимметрия оставалась постоянной в ходе расширения Вселенной, если не было притока энтропии в плазму, т. е. имело место соотношение

$$\beta = N_B/s = \text{const}. \quad (9)$$

Есть несколько реалистичных механизмов производства энтропии в ранней Вселенной. Например, энтропия выростала в процессе электрослабого фазового перехода, даже если это был переход второго рода (или мягкий кроссовер). Рост энтропии мог быть на уровне порядка 10 % [17]. Если в ходе космологической эволюции произошел фазовый переход первого рода, например в фазовом переходе КХД, рост энтропии может быть гигантским. Некоторый рост энтропии может быть также вызван остаточной аннигиляцией неравновесных нерелятивистских частиц темной материи после того, как они практически отключились от плазмы (заморозились).

В этой работе мы рассматриваем гипотетический случай Вселенной, в которой на каком-то этапе доминировали ПЧД, и вычисляем уменьшение предшествующей барионной асимметрии, а также относительное уменьшение плотности частиц темной материи (далее называемых X -частицами). Мы покажем, что при разумном количестве ПЧД подав-

ление плотности слабо взаимодействующих массивных частиц (WIMP), может быть достаточно сильным, чтобы позволить им быть реалистичными кандидатами на роль носителей темной материи, несмотря на то, что сила их взаимодействия типична для суперсимметрии, в частности, при сечении аннигиляции, равном $\sigma_{ann} v \approx \alpha^2/m_X^2$ при $\alpha \sim 10^{-2}$. Здесь m_X — масса X -частицы.

Пространство параметров суперсимметрии, как известно, существенно ограничено данными Большого адронного коллайдера (БАК) [22], но некоторые типы легчайших суперсимметричных частиц все еще остаются жизнеспособными кандидатами на роль частиц темной материи [23, 24]. Дополнительное выделение энтропии, обсуждаемое в этой статье, может привести к более широкому классу возможных легчайших суперсимметричных частиц носителей темной материи.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы приводим простую оценку величины выделения энтропии для случая ПЧД, имеющих фиксированную массу (дельта-функция), приближения мгновенного распада ПЧД и мгновенного перехода от начальной RD-стадии к стадии доминантности нерелятивистской материи, или MD-стадии, и обратно. В разд. 3 численно получены решения для закона космологической эволюции и выделения энтропии в случае смеси релятивистской материи и распадающихся ПЧД с дельта-функциональным спектром масс. Раздел 4 посвящен изучению эволюции для двух примеров широкого распределения ПЧД по массам. В разд. 5 мы анализируем результаты и формулируем выводы. Приложение А посвящено расчетам плотности числа X -частиц, возникающих при испарении ПЧД, тема, которая несколько удалена от основной линии статьи. Мы показываем там, что плотность частиц темной материи, образующихся при испарении ПЧД, недостаточно велика, чтобы компенсировать подавление энтропии. В Приложении В представлены выражения для аналитически вычисленных интегралов, входящих в уравнения эволюции.

2. МГНОВЕННАЯ СМЕНА РЕЖИМОВ РАСШИРЕНИЯ И МГНОВЕННОЕ ИСПАРЕНИЕ

Рассмотрим простейшую модель ПЧД с фиксированной массой M_0 и плотностью, на момент возникновения равной

$$\frac{dN_{BH}}{dM} = \mu_1^3 \delta(M - M_0), \quad (10)$$

где μ_1 — постоянный параметр размерности массы.

Все эти ПЧД были созданы одновременно в момент времени $t_{in}(M_0) = M_0/m_{Pl}^2$, см. уравнение (2). Предположим, что доля плотности энергии (массы) ПЧД при рождении составляла

$$\frac{\rho_{BH}^{(in)}}{\rho_{rel}^{(in)}} = \epsilon \ll 1. \quad (11)$$

Если пренебречь испарением ПЧД и если взаимодействием ПЧД с релятивистской материей можно пренебречь, то оба ингредиента космической плазмы эволюционируют независимо согласно законам

$$\begin{aligned} \rho_{rel}(t) &= \left(\frac{a^{(in)}}{a(t)}\right)^4 \rho_{rel}^{(in)}, \\ \rho_{BH}(t) &= \left(\frac{a^{(in)}}{a(t)}\right)^3 \rho_{BH}^{(in)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим случай, когда плотности релятивистской и нерелятивистской (ПЧД) материи стали равны при $t = t_{eq}$ до распада ПЧД. Согласно уравнениям (11) и (12) это происходит, когда

$$\frac{\rho_{BH}(t_{eq})}{\rho_{rel}(t_{eq})} = \epsilon \frac{a(t_{eq})}{a_{in}} = 1. \quad (13)$$

В этом разделе мы предполагаем, что при $t < t_{eq}$ расширение Вселенной описывается чисто релятивистским законом, когда масштабный фактор изменяется в соответствии с уравнением (4). Соответственно находим

$$t_{eq} = t_{in}/\epsilon^2. \quad (14)$$

ПЧД выжили бы в первичной плазме до момента равенства плотностей релятивистской и нерелятивистской материи, если бы выполнялось условие $t_{eq} - t_{in} < \tau_{BH}$, где время жизни ПЧД по отношению к испарению дается выражением [25]

$$\tau_{BH} \approx 3 \cdot 10^3 N_{eff}^{-1} M_{BH}^3 m_{Pl}^{-4} \equiv C \frac{M_{BH}^3}{m_{Pl}^4}, \quad (15)$$

где $C \approx 30$ и N_{eff} — эффективное количество разновидностей частиц с массами, меньшими температуры черной дыры. Для выбранных значений масс ПЧД $N_{eff} \approx 100$. (На самом деле g_* ближе к 200, но эта разница не имеет большого значения.) Температура черной дыры равна

$$T_{BH} = \frac{m_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}}. \quad (16)$$

Таким образом, условие достижения равенства плотностей энергий релятивистской и нерелятивистской компонент первичной плазмы до распада ПЧД выглядит следующим образом:

$$M_{BH} > \left[\frac{m_{Pl}^2}{C} \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \approx \frac{m_{Pl}}{\sqrt{C} \epsilon}. \quad (17)$$

Согласно предположению о мгновенной смене режима расширения масштабный фактор после того, как достигается момент равенства плотностей энергий релятивистской и нерелятивистской компонент, т. е. при $t > t_{eq}$, начинает эволюционировать согласно закону

$$a_{nr}(t) = a_{rel}(t_{eq}) \left(\frac{t + t_{eq}/3}{4t_{eq}/3} \right)^{2/3}, \quad (18)$$

а космологическая плотность энергии убывает по нерелятивистскому закону расширения:

$$\rho_{BH} = \frac{m_{Pl}^2}{6\pi (t + t_{eq}/3)^2}. \quad (19)$$

Такие формы уравнений (18) и (19) продиктованы непрерывностью параметра Хаббла и плотности энергии (т. е. равенством ρ_{rel} и ρ_{BH}) при $t = t_{eq}$. MD-режим (19) длился до $t = \tau_{BH}$, когда мгновенный взрыв ПЧД создал новую релятивистскую плазму с температурой

$$T_{heat}^4 = \frac{5m_{Pl}^2}{\pi^3 g_*(T_{heat})(\tau_{BH} + t_{eq}/3)^2}. \quad (20)$$

Здесь предполагается мгновенная термализация.

Температура релятивистской плазмы, сосуществующей с доминирующими ПЧД, уменьшалась как масштабный фактор:

$$T_{rel} = T_{eq} \frac{a_{eq}}{a_{nr}(\tau_{BH})} = T_{eq} \left(\frac{4t_{eq}}{3\tau_{BH} + t_{eq}} \right)^{2/3}. \quad (21)$$

Соответственно, температура вновь созданной релятивистской плазмы, возникающей в результате распада ПЧД, могла быть намного выше, чем T_{rel} , даваемая уравнением (21). Коэффициент подавления энтропии, равный кубу отношения температуры новой релятивистской плазмы, создаваемой мгновенным испарением ПЧД, и температуры «старой» релятивистской плазмы плюс единица, записывается как

$$\begin{aligned} S &= 1 + \left(\frac{T_{heat}}{T_{rel}} \right)^3 = 1 + \left(\frac{a(\tau_{BH})}{a_{eq}} \right)^{3/4} = \\ &= 1 + \sqrt{\frac{3\tau_{BH}}{4t_{eq}}} \left(1 + \frac{t_{eq}}{3\tau_{BH}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Наш подход действителен для $\tau_{BH} \geq t_{eq}$, а в предельном случае $\tau_{BH} = t_{eq}$ коэффициент подавления энтропии составляет $S = 2$, происходящий из релятивистской материи и от ПЧД в равных долях. Поскольку минимальное значение отношения

$$\frac{\tau_{BH}}{t_{eq}} = \frac{CM_{BH}^2 \epsilon^2}{m_{Pl}^2} \quad (23)$$

равно единице, минимальная масса ПЧД, для которой можно доверять приближенным расчетам, приведенным выше, равна

$$M_{BH} > M_1^{min} \equiv \frac{m_{Pl}}{\epsilon \sqrt{C}} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ г} \cdot \frac{10^{-12}}{\epsilon}, \quad (24)$$

где $C = 30$ согласно формуле (15).

Для больших $\tau \gg t_{eq}$, когда S велико, это подавление примерно равно

$$S \approx \sqrt{\frac{3\tau_{BH}}{4t_{eq}}} = \frac{\sqrt{3C} \epsilon M}{2m_{Pl}} = 2.14 \cdot 10^{-7} \frac{\epsilon}{10^{-12}} \frac{M}{\text{г}}. \quad (25)$$

Масса ПЧД ограничена сверху условием, что температура нагрева после испарения должна быть выше температуры ВВН, составляющей примерно 1 МэВ. Из уравнения (20) следует, что

$$T_{heat} \approx 0.06 m_{Pl} \left(\frac{m_{Pl}}{M_{BH}} \right)^{3/2}. \quad (26)$$

Следовательно, массы ПЧД должны быть меньше 10^9 г.

Коэффициенты подавления энтропии для $\epsilon = 10^{-12}$ в зависимости от M_{BH} представлены на рис. 1 для малых и больших масс.

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИОННОГО СПЕКТРА МАСС ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Здесь мы откажемся от приближения мгновенного распада и мгновенного изменения режимов космологического расширения и численно решим уравнения, описывающие эволюцию космологических плотностей энергии нерелятивистских ПЧД и релятивистской материи. Удобно работать с безразмерной переменной времени $\eta = t/\tau_{BH}$, когда уравнения можно записать как

$$\frac{d\rho_{BH}}{d\eta} = -(3H\tau_{BH} + 1)\rho_{BH}, \quad (27)$$

$$\frac{d\rho_{rel}}{d\eta} = -4H\tau_{BH}\rho_{rel} + \rho_{BH}. \quad (28)$$

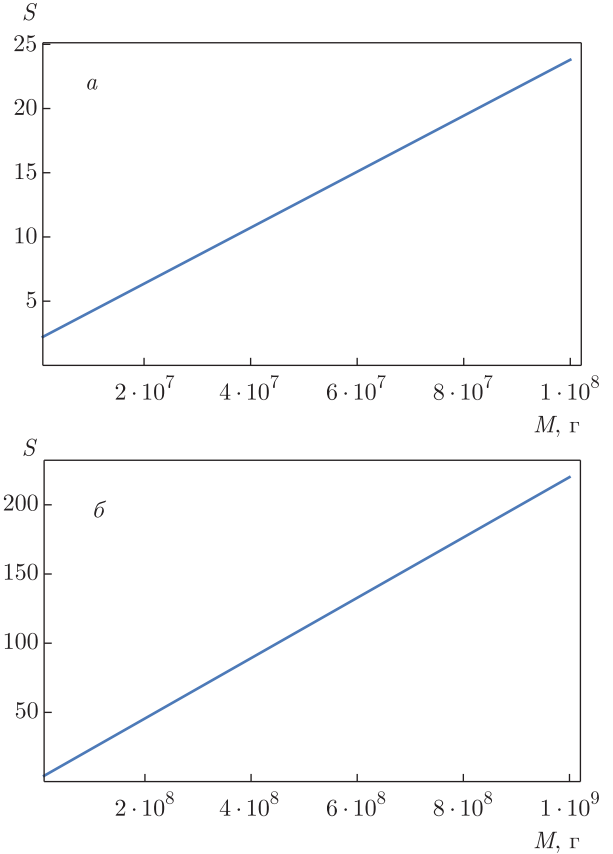


Рис. 1. Коэффициент подавления энтропии из-за распада ПЧД в приближении мгновенного распада как функция массы ЧД, начиная с M_1^{min} до $M = 10^8$ г (а), 10^9 г (б) для $\epsilon = 10^{-12}$

Представим плотности энергии ПЧД и релятивистской материи соответственно в следующем виде:

$$\rho_{BH} = \rho_{BH}^{(in)} \exp(-\eta + \eta_{in}) \frac{y_{BH}(\eta)}{z^3(\eta)}, \quad (29)$$

$$\rho_{rel} = \rho_{rel}^{(in)} \frac{y_{rel}(\eta)}{z^4(\eta)}, \quad (30)$$

где $y_{rel}^{(in)} = y_{BH}^{(in)} = 1$ и

$$\eta_{in} = \frac{m_{Pl}^2}{CM_{BH}^2} \ll 1. \quad (31)$$

Постоянная C определяется в уравнении (15).

Красное смещение $z(\eta) = a(\eta)/a_{in}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz}{d\eta} = H\tau_{BH} z, \quad (32)$$

где параметр Хаббла H определяется обычным выражением для пространственно-плоской Вселенной:

$$\frac{3H^2 m_{Pl}^2}{8\pi} = \rho_{rel} + \rho_{BH}. \quad (33)$$

Используя уравнения (30) и (29) с $\rho_{rel}^{(in)}$, определенной формулой (3) при $t = t_{in}$, и учитывая, что $\rho_{BH}^{(in)} = \epsilon \rho_{rel}^{(in)}$, находим

$$H\tau_{BH} = \frac{C}{2} \frac{M_{BH}^2}{m_{Pl}^2} \left(\frac{y_{rel}}{z^4} + \frac{\epsilon}{z^3 e^{\eta - \eta_{in}}} \right)^{1/2}. \quad (34)$$

Очевидно, уравнение (27) с ρ_{BH} , данной уравнением (29), имеет решение

$$y_{BH}(\eta) = y_{BH}^{(in)} = 1, \quad (35)$$

а $\rho_{rel}(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy_{rel}}{d\eta} = \epsilon z(\eta) e^{-\eta + \eta_{in}}. \quad (36)$$

Уравнения (32) и (36) можно решить численно с начальными условиями при $\eta = \eta_{in}$

$$y_{bh} = y_{rel} = z = 1. \quad (37)$$

Однако большое значение коэффициента $H\tau$ делает численную процедуру весьма медленной. Чтобы этого избежать, введем новую функцию W согласно соотношению

$$z = \sqrt{W}/\epsilon \quad (38)$$

и приходим к уравнениям

$$\frac{dW}{d\eta} = C\epsilon^2 \left(\frac{M}{m_{Pl}} \right)^2 \left(y_{rel} + \sqrt{W} e^{-\eta + \eta_{in}} \right)^{1/2}, \quad (39)$$

$$\frac{dy_{rel}}{d\eta} = \sqrt{W} e^{-\eta + \eta_{in}}, \quad (40)$$

где $W(\eta_{in}) = \epsilon^2$. Выделение энтропии от испарения ПЧД можно рассчитать следующим образом. В отсутствие ПЧД величины, сохраняющиеся в сопутствующем объеме, эволюционировали бы как $1/z^3$. С учетом дополнительного излучения, исходящего от испарения ПЧД, энтропия изменяется как $y_{rel}^{3/4}/z^3$, см. уравнение (30). Отсюда коэффициент подавления относительной численности замороженных частиц темной материи или ранее сгенерированной барионной асимметрии стремится к

$$S = [y_{rel}(\eta)]^{3/4} \quad (41)$$

при времени, стремящемся к бесконечности. Эволюция S показана на рис. 2 для значений $M_{BH} = 10^7$, 10^8 , 10^9 г и $\epsilon = 10^{-12}$.

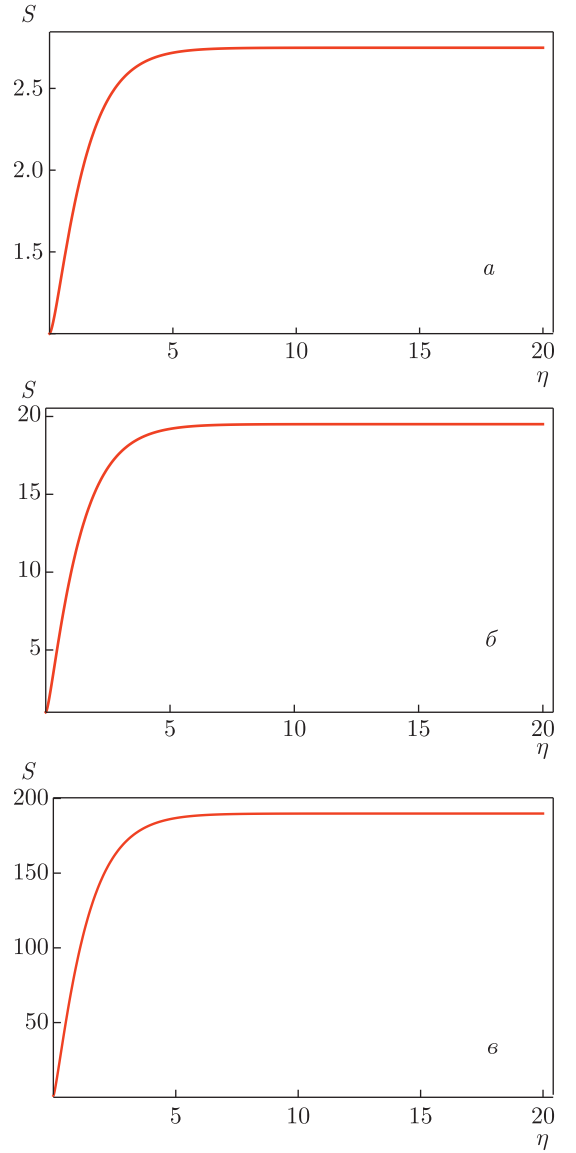


Рис. 2. Временная эволюция S для $M_{BH} = 10^7$ г (а), 10^8 г (б), 10^9 г (в) и $\epsilon = 10^{-12}$

При больших η (фактически при $\eta > 15$) коэффициент подавления S , как и ожидалось, стремится к постоянному значению. Результаты, представленные на рис. 2, очень хорошо согласуются с приближительными значениями, показанными на рис. 1.

На рис. 3 представлены асимптотические значения коэффициента подавления энтропии для разных масс ПЧД и $\epsilon = 10^{-12}$. Они также очень близки к предельным значениям, которые можно извлечь из рис. 1.

Отношение коэффициента подавления энтропии для точных расчетов при фиксированной массе ПЧД к коэффициенту, полученному в приближе-

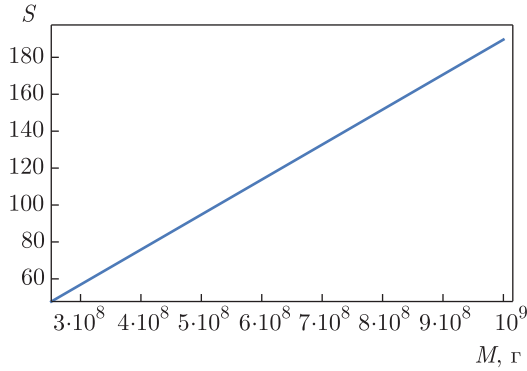


Рис. 3. Коэффициент подавления энтропии как функция массы для $\epsilon = 10^{-12}$

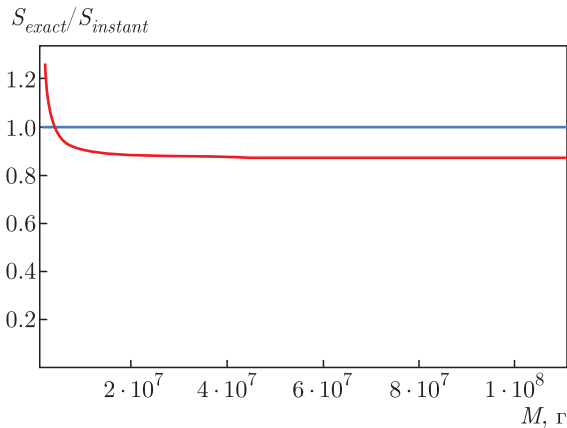


Рис. 4. (В цвете онлайн) Отношение коэффициента подавления энтропии для точных вычислений при фиксированной массе (красная кривая) и того же коэффициента, вычисленного в приближении мгновенного распада и мгновенного изменения режима расширения. Синяя линия описывает гипотетическое отношение, равное единице

нии мгновенного распада и мгновенного изменения режима расширения, как функция массы для $\epsilon = 10^{-12}$, представлено на рис. 4. Рост этого отношения при малых M можно объяснить недооценкой выделения энтропии в мгновенном приближении. Действительно, для M , меньших граничного значения, заданного формулой (24), высвобождение энтропии будет равно нулю, в то время как точные вычисления приводят к ненулевому результату, поэтому их отношение стремится к бесконечности.

4. РАСШИРЕННЫЙ СПЕКТР МАСС

Рассмотрим теперь вместо дельта-функции более широкое распределение по массам:

$$\frac{dN_{BH}}{dM} = f(M, t), \tag{42}$$

где N — плотность числа ПЧД. Поскольку ПЧД нерелятивистские, их дифференциальная плотность энергии равна

$$\frac{d\rho_{BH}}{dM} \equiv \sigma(M, t) = Mf(M, t). \tag{43}$$

Первичные черные дыры, созданные старым традиционным механизмом [1,2], должны иметь острый спектр масс, близкий к дельта-функции. Однако в нескольких более поздних работах были исследованы механизмы, приводящие к расширенному спектру масс, см., например, ранние статьи [5–8].

В последующем рассмотрении мы предполагаем, что плотности числа и энергии ПЧД в единице объема заключены в пределах между M_{min} и M_{max} . Значение M_{max} должно быть ниже верхнего предела $M = 10^9$ г, который налагается условием, что испарение ПЧД не исказило бы успешных результатов теории первичного нуклеосинтеза. Однако небольшая часть ПЧД может иметь массы больше 10^9 г, и их влияние на ВВН может быть интересным, хотя еще не исследовано в полной мере.

Минимальное значение массы ПЧД, M_{min} , должно быть больше, чем M_1^{min} , заданное формулой (24), чтобы реализовалось предположение $\tau_{BH} \geq t_{eq}$, необходимое для того, чтобы доля подавления энтропии была больше единицы, иначе влияние масс, меньших M_{min} , было бы несущественным.

Параметризуем значение массы ПЧД безразмерным параметром x , таким что $M_{BH} = xM_0$, где M_0 — среднее значение распределения плотности массы, или значение, при котором $\sigma(M, t)$ достигает максимума. Очевидно, что x имеет ненулевое значение в следующих пределах:

$$x_{min} \equiv \frac{M_{min}}{M_0} \leq x \leq x_{max} \equiv \frac{M_{max}}{M_0}. \tag{44}$$

Определим теперь безразмерное «время» η как $\eta = t/\tau(M_0)$, где $\tau(M_0) \equiv \tau_0$ — время жизни ПЧД с массой M_0 . Все ПЧД имеют разную массу и, следовательно, время их жизни (15) и моменты возникновения (2) разные.

Временная эволюция дифференциальной плотности энергии ПЧД определяется уравнением

$$\dot{\sigma}(M, t) = -[3H + \Gamma(M)]\sigma(M, t), \tag{45}$$

где

$$\Gamma(M) = \frac{1}{\tau(M)} = \frac{m_{Pl}^4}{CM^3},$$

см. уравнение (15).

В терминах безразмерного времени η это уравнение принимает вид

$$\frac{d\sigma}{d\eta} \equiv \sigma' = - \left[3H\tau_0 + \left(\frac{M_0}{M} \right)^3 \right] \sigma. \quad (46)$$

Начальное значение η — момент образования ЧД. Оно зависит от M и, согласно уравнению (31), равно

$$\eta_{form}(M) = \frac{m_{Pl}^2 M}{CM_0^3}. \quad (47)$$

Очевидно, что $\sigma(M) = 0$, когда $\eta(M) < \eta_{form}$.

Уравнение, описывающее эволюцию плотности энергии релятивистской материи, теперь принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{rel}}{d\eta} &\equiv \rho'_{rel} = \\ &= -4H\tau_0\rho_{rel} + \int dM \left(\frac{M_0}{M} \right)^3 \sigma(M). \end{aligned} \quad (48)$$

По аналогии с предыдущим разделом мы вводим красное смещение, нормированное на значение масштабного фактора, когда образовалась наименее массивная ПЧД:

$$z(\eta) = a(\eta)/a[\eta_{form}(M_{min})]. \quad (49)$$

Эволюция $z(\eta)$ определяется уравнением, аналогичным уравнению (32):

$$\frac{dz}{d\eta} = H\tau_0 z, \quad (50)$$

с параметром Хаббла, который теперь определяется выражением

$$\frac{3H^2 m_{Pl}^2}{8\pi} = \rho_{rel} + \rho_{BH} = \rho_{rel} + \int dM \sigma(M). \quad (51)$$

Уравнение (46) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \sigma(M, \eta) &= \theta(\eta - \eta_f) \sigma(M, \eta_f) \times \\ &\times \exp \left[(\eta_f - \eta) \left(\frac{M_0}{M} \right)^3 \right] \left(\frac{z(\eta_f)}{z(\eta)} \right)^3, \end{aligned} \quad (52)$$

где для краткости введено новое обозначение $\eta_f \equiv \eta_{form}(M)$, а тета-функция обеспечивает обращение в нуль решения для $\eta < \eta_f$. Начальное значение плотности ПЧД в момент образования $\sigma(\eta_f(M))$ (47) определяется долей $\epsilon(M)$ плотности энергии ПЧД с массой M по отношению к плотности энергии релятивистской материи в момент образования ПЧД:

$$\sigma(M, \eta_f(M)) = \epsilon(M) \rho_{rel}(\eta_f(M))/M, \quad (53)$$

где $\epsilon(M)$ зависит от сценария образования ПЧД и будет взята ниже в соответствии с некоторыми разумными предположениями. В любом случае мы предполагаем, что $\epsilon(M)$ обращается в нуль, если $M < M_{min}$ и $M > M_{max}$.

Предположим, что на временном интервале $\eta_f(M_{min}) < \eta < \eta_f(M_{max})$ общая доля массовой плотности ПБД пренебрежимо мала по сравнению с плотностью энергии релятивистской материи, поэтому режим расширения является невозмущенным релятивистским, см. формулы (3), (4). Соответственно с помощью уравнения (2) находим, что плотность энергии релятивистской материи на момент создания «первых» легчайших черных дыр равна

$$\rho_{rel}(t_{in}) = \frac{3}{32\pi} \frac{m_{Pl}^6}{M_{min}^2}. \quad (54)$$

Если плотность энергии ПЧД остается небольшой по сравнению с плотностью релятивистской материи до образования наиболее тяжелых ПЧД, то последним членом в правой части уравнения (48) можно пренебречь, и поэтому во временном интервале $\eta(M_{min}) < \eta < \eta(M_{max})$ плотность энергии ρ_{rel} равна

$$\rho_{rel} = \frac{3}{32\pi} \frac{m_{Pl}^6}{M_{min}^2} \frac{1}{z(\eta)^4}. \quad (55)$$

Следовательно, дифференциальная плотность энергии ПЧД эволюционирует как

$$\begin{aligned} \sigma(M, \eta) &= \frac{3m_{Pl}^6}{32\pi M M_{min}^2} \frac{\epsilon(M)}{z(\eta_f(M))} \times \\ &\times \frac{\theta(\eta - \eta_f(M))}{z^3(\eta) \exp[(M_0/M)^3(\eta - \eta_f(M))]} \end{aligned} \quad (56)$$

В этом уравнении η заключено в пределах $\eta(M_{min}) < \eta < \eta(M_{max})$ или $\eta_f(M) < \eta < \eta(M_{max})$ в зависимости от того, какой нижний предел больше.

Поскольку

$$\left(\frac{M_0}{M} \right)^3 \eta_f(M) = \frac{m_{Pl}^2}{CM^2} \ll 1$$

для любого η , экспоненту можно разложить как

$$\begin{aligned} \exp \left[- \left(\frac{M_0}{M} \right)^3 (\eta - \eta_f(M)) \right] &= \\ &= \exp \left[- \left(\frac{M_0}{M} \right)^3 \eta \right] \left(1 + \frac{m_{Pl}^2}{CM^2} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

В связи с необходимостью интегрирования по M соответствующие эволюционные уравнения оказываются интегродифференциальными и численные расчеты обычно становятся довольно громоздкими. Однако мы рассмотрим некоторые упрощенные формы начальных распределений ПЧД по массам, для которых интегралы по M можно взять аналитически, а затем дифференциальные уравнения можно быстро и просто решить численно. Используя такие игрушечные модели, мы можем понять суть особенности производства энтропии ПЧД с расширенным спектром масс ПЧД. К сожалению, мы не смогли найти работоспособную игрушечную модель для реалистичного логнормального спектра масс, см. [12]. Тем не менее спектры, которые допускают аналитическое интегрирование, могут быть численно довольно близкими к логнормальному.

Далее рассмотрим пару иллюстративных примеров, предполагая, что функция

$$F(x) = \epsilon(M)/z(\eta_f(M)) \quad (58)$$

заключена между $x_{min} = M_{min}/M_0$ и $x_{max} = M_{max}/M_0$. Здесь согласно формуле (53) $\epsilon(M)$ — доля плотности энергии ПЧД с массой M на момент создания ПЧД. Для простоты мы предполагаем, что $F(x)$ — полиномиальная функция по целым степеням x , хотя в последнем нет необходимости.

Возьмем два примера для F :

$$F_1(x) = \frac{\epsilon_0}{x_{max} - x_{min}} \quad (59)$$

для $x_{min} < x < x_{max}$ и $F_1 = 0$ для x вне этого интервала. Очевидно, что точка $x = 1$ должна находиться внутри этого интервала.

Еще одна интересная форма F :

$$F_2(x) = \frac{\epsilon_0}{N} a^2 b^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right)^2. \quad (60)$$

Здесь N — нормировочный коэффициент, выбранный таким образом, чтобы максимальное значение $F_2/\epsilon = 1$. Эта функция обращается в нуль при $x = x_{min} \equiv a$ и $x = x_{max} \equiv b$, с исчезающими производными в этих точках, и F_2 тождественно равна нулю вне этого интервала. Функция F_2 достигает максимума при $x_0 = 2ab/(a + b)$:

$$F_2^{(max)} = \frac{\epsilon_0}{16} N a^2 b^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^4 = 1. \quad (61)$$

F_2 может быть численно довольно близка к логнормальному распределению при правильном выборе параметров. В качестве рабочего примера при $a = 1$,

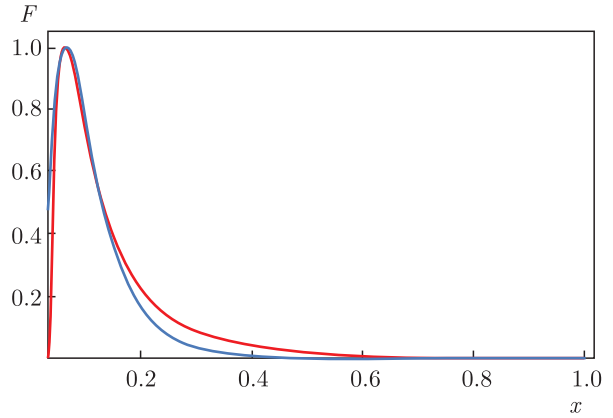


Рис. 5. (В цвете онлайн) Модельная функция спектра масс F_2 (красная кривая) и логнормальный спектр (синяя кривая) от $x = M/M_0$

$b = 30$ проведем сравнение F_2 с логнормальной функцией:

$$F_{LN} = \epsilon \exp[-1.5 (\ln^2(15x))]. \quad (62)$$

При выбранных значениях параметров функции $F_2(x)$ и $F_{LN}(x)$ представлены на рис. 5.

В уравнение эволюции входят два следующих интеграла (51) и (48):

$$I_0 = \int dM \sigma(M, \eta) \quad (63)$$

и

$$I_3 = \int dM \left(\frac{M_0}{M}\right)^3 \sigma(M, \eta). \quad (64)$$

Мы можем вычислить их явно, сделав некоторые упрощающие предположения о форме F (58), которые обсуждаются в разд. 4.1, 4.2.

4.1. Расчеты для плоского спектра

Здесь мы найдем коэффициент подавления энтропии для «плоского» спектра $F_1(x)$:

$$F_1(x) = \frac{\epsilon(M)}{z(\eta_f(M))} = \frac{\epsilon_0}{b - a} = \text{const}, \quad (65)$$

если x находится в пределах $a \equiv x_{min} < x < b \equiv x_{max}$ и $F_1(x) = 0$ за пределами этого отрезка. Параметры a и b здесь и ниже, см. формулу (75), определяют ширину спектра масс. Величина S довольно слабо зависит от них. Поскольку нет значительной разницы между величинами подавления энтропии для расширенного и дельта-образного спектров масс, вариация a и b не имеет существенного значения.

Используя уравнение (56), находим

$$I_0^{(1)} = \int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \sigma(M, \eta) = \frac{3m_{Pl}^6 \epsilon_0}{32\pi z^3(\eta) M_{min}^2 (b-a)} \times \\ \times \int \frac{dM}{M} \frac{\theta[\eta - \eta_f(M)]}{\exp[(M_0/M)^3(\eta - \eta_f(M))]} = \\ = \frac{K(\eta)}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{x} \frac{\theta[\eta - \eta_f(M)]}{\exp[x^3(\eta - \eta_f(M))]} \equiv \\ \equiv \frac{K(\eta)}{b-a} j_{(10)}(a, b, \eta, \eta_f), \quad (66)$$

где $x = M_0/M$ и

$$K(\eta) = \frac{3m_{Pl}^6 \epsilon_0}{32\pi z^3(\eta) M_{min}^2}, \quad (67)$$

$$I_3^{(1)} = \int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \left(\frac{M_0}{M}\right)^3 \sigma(M, \eta) = \\ \frac{K(\eta)}{b-a} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{x^4} \frac{\theta[\eta - \eta_f(M)]}{\exp[x^3(\eta - \eta_f(M))]} \equiv \\ \equiv \frac{K(\eta)}{b-a} j_{13}(x_{min}, x_{max}, \eta, \eta_f). \quad (68)$$

Вычислим интегралы $j_{(10)}$ и $j_{(13)}$ аналитически, используя Mathematica, и подставим их в уравнения (47)–(49), которые решим численно. Поскольку $\eta_f(M) \ll \eta$ почти на всем интервале интегрирования, мы пренебрегаем η_f , см. также уравнение (57). Результаты представлены в Приложении В.

Будем искать решение, как это делается в разд. 4, принимая, что ρ_{rel} имеет вид

$$\rho_{rel} = y_{rel} \rho_{rel}^{(in)} / z^4, \quad (69)$$

где

$$\rho_{rel}^{(in)} = \frac{3m_{Pl}^6}{32\pi M_{min}^2},$$

и поэтому y_{rel} и z удовлетворяют уравнениям

$$y'_{rel} = \epsilon_0 z(\eta) j_{(13)}, \quad (70)$$

$$z'(\eta) = \frac{C M_0^3}{2m_{Pl}^2 M_{min}} \left(\frac{y_{rel}}{z^4} + \frac{\epsilon_0}{z^3} j_{(10)} \right)^{1/2}. \quad (71)$$

По аналогии с уравнением (38) вводим новую функцию W_e согласно

$$z = \sqrt{W_e} / \epsilon_0, \quad (72)$$

для которой получим

$$\frac{dW_e}{d\eta} = \frac{C \epsilon_0^2 M_0^3}{m_{Pl}^2 M_{min}} \left(y_{rel} + \sqrt{W_e} j_{(10)} \right)^{1/2} \equiv \\ \equiv \frac{C \epsilon_0^2 M_0^2}{m_{Pl}^2 a} \left(y_{rel} + \sqrt{W_e} j_{(10)} \right)^{1/2}, \quad (73)$$

$$\frac{dy_{rel}}{d\eta} = \sqrt{W_e} j_{(13)} \quad (74)$$

с начальными условиями $W_e^{(in)} = \epsilon^2$ и $y_{rel}^{(in)} = 1$.

Эти уравнения можно проинтегрировать численно. Асимптотическое значение $y_{rel}^{3/4}$ при больших η , которое, согласно уравнению (41), представляет собой коэффициент подавления энтропии, изображено на рис. 6, 7 для разных значений $\epsilon = 10^{-12}$, $x_{min} = 1/3$ и $x_{max} = 5/3$. Результат пропорционален M_{BH} и достаточно хорошо согласуется с приближительными результатами, рассчитанными в приближении мгновенного распада и мгновенной смены режима (25).

4.2. Расчеты с непрерывным почти логнормальным спектром масс

Здесь мы предполагаем, что спектр масс имеет вид

$$F_2(x) = \frac{\epsilon(M)}{z(\eta_f(M))} = \\ = \frac{\epsilon_0 a^2 b^2 (1/a - 1/x)^2 (1/x - 1/b)^2}{16a^2 b^2 (1/a - 1/b)^4}. \quad (75)$$

Соответственно уравнения (66) и (68) модифицируются добавлением множителя $F_2(x)$ в подынтегральные выражения. Выражения для $j_{(20)}$ и $j_{(23)}$ представлены в Приложении В.

Уравнения эволюции совпадают с уравнениями разд. 4.1 после замены $j_{(10)} \rightarrow j_{(20)}$ и $j_{(13)} \rightarrow j_{(23)}$. Коэффициенты подавления энтропии для непрерывного спектра масс и различных значений параметров представлены на рис. 8, 9.

Мы видим, что коэффициенты подавления энтропии для обеих форм расширенных спектров масс, прямоугольной и более реалистичной логнормальной, ведут себя как функция центрального значения массы ПЧД и ϵ по существу аналогично вычисленному для дельта-функционального спектра масс, рассмотренного в разд. 2 и 3, и изменяются от величин 2–3 для $M = 10^7$ г до 100–300 для $M = 10^9$ г.

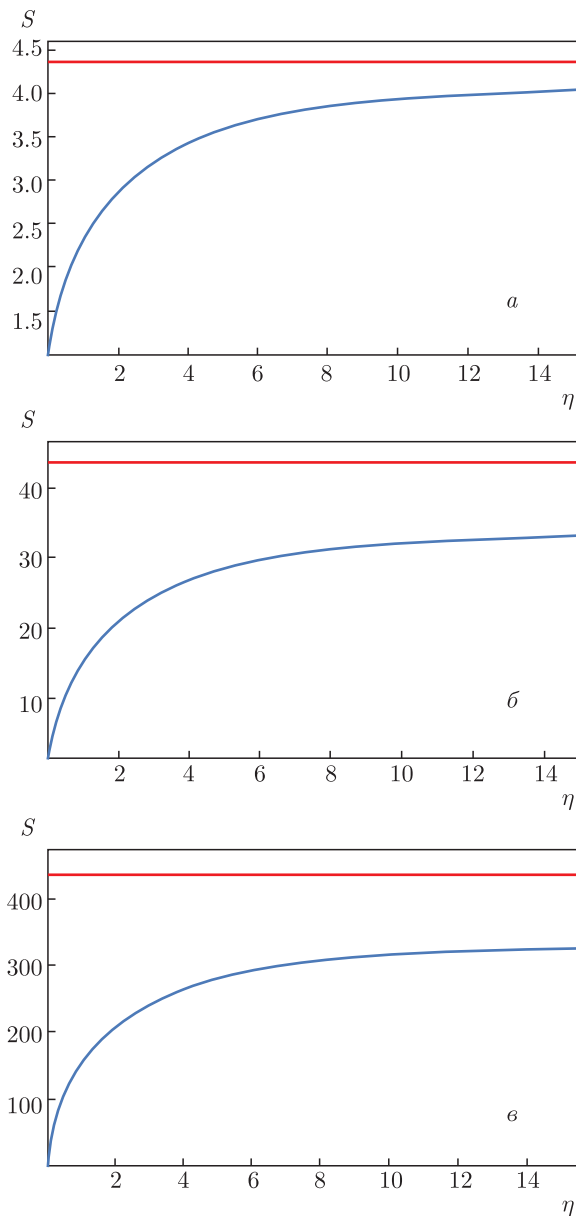


Рис. 6. (В цвете онлайн) Эволюция подавления энтропии $y_{rel}^{3/4}$ для плоского спектра масс (65) при $M_{BH} = 10^7$ г и $\epsilon = 10^{-12}$ как функция безразмерного времени η для $a = 1/3$, $b = 4/3$ (синие кривые). $M_0 = 10^7$ г (а), 10^8 г (б), 10^9 г (е). Красные линии — коэффициент подавления энтропии, приближенно рассчитанный в мгновенном приближении (25)

Все же нужно заметить, что сравнение неоднозначно, так как оно зависит от нормировки спектров, например, мы можем сравнивать их при равных плотностях масс ПЧД или при их равных числах в единице объема. Результаты сравнения также зависят от ширины расширенных спектров. В любом случае результаты совпадают по порядку величины. Зави-

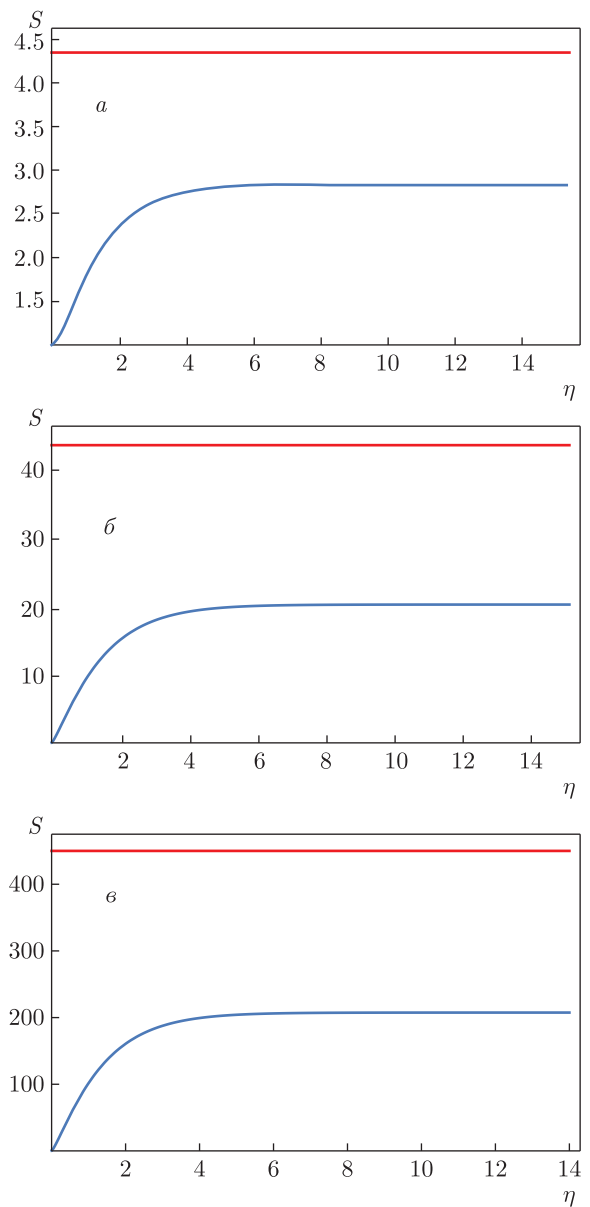


Рис. 7. (В цвете онлайн) То же, что на рис. 6, но с $a = 0.95$ и $b = 1.05$ (синие кривые). $M_0 = 10^7$ г (а), 10^8 г (б), 10^9 г (е). Красные линии — коэффициент подавления энтропии, приближенно рассчитанный в мгновенном приближении (25)

симость от ϵ в точности такая же, как это было обнаружено в аналитических расчетах в разд. 2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в данной работе, подавление замороженной плотности реликтовых частиц или космологической барионной асимметрии может быть

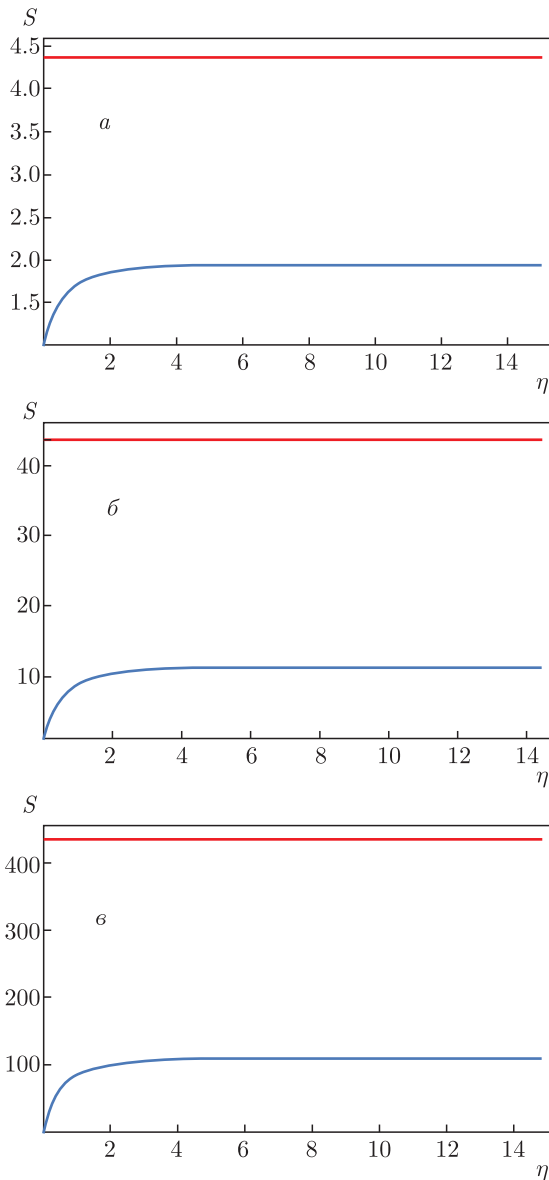


Рис. 8. (В цвете онлайн) То же, что на рис. 6, но с непрерывным спектром масс и с $a = 1/3$, $b = 4/3$ (синие кривые). $M_0 = 10^7$ г (а), 10^8 г (б), 10^9 г (в). Красные линии — коэффициент подавления энтропии, приблизительно рассчитанный в мгновенном приближении (25)

весьма значительным, если они были образованы до испарения ПЧД. При упрощенных приближениях о дельта-функциональном спектре масс ПЧД, мгновенном распаде ПЧД и мгновенном изменении режимов расширения от начального доминирования релятивистской материи до нерелятивистского доминирования ЧД и обратно коэффициент подавления энтропии, S , может быть вычислен аналитически, см. уравнение (25). Точные расчеты, но все еще

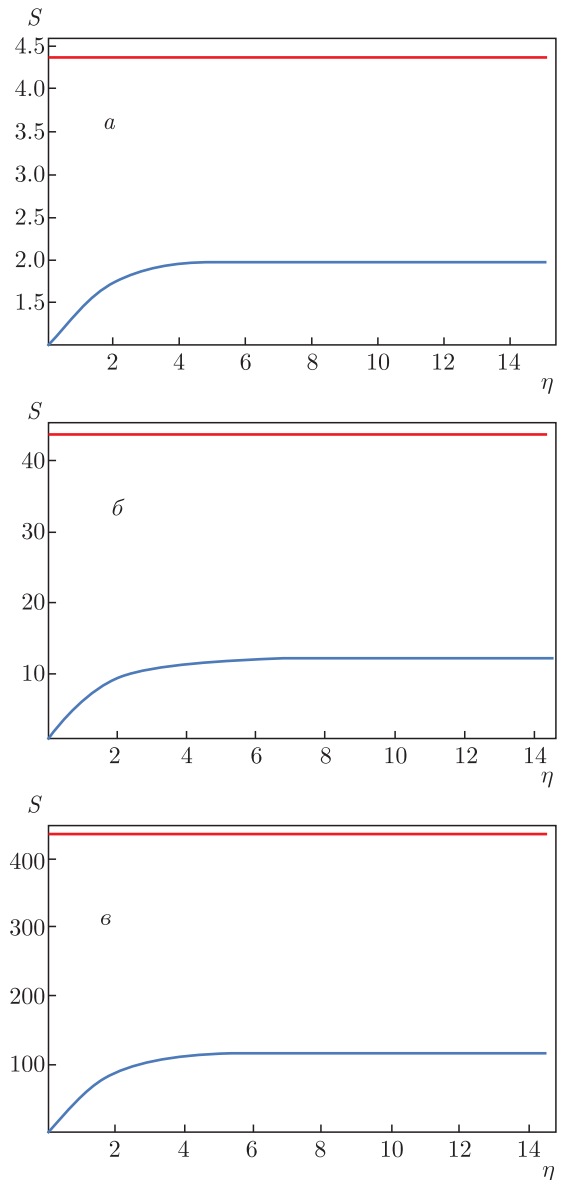


Рис. 9. (В цвете онлайн) То же, что на рис. 6, но с непрерывным спектром масс и с $a = 0.95$ и $b = 1.05$ (синие кривые). $M_0 = 10^7$ г (а), 10^8 г (б), 10^9 г (в). Красные линии — коэффициент подавления энтропии, приблизительно рассчитанный в мгновенном приближении (25)

с дельта-функциональным спектром масс, находятся в очень хорошем совпадении с приближительными.

Величина подавления пропорциональна произведению ϵM_{BH} и, например, для $M_{BH} = 10^9$ г и $\epsilon = 10^{-12}$ коэффициент подавления составляет $S \approx 400$. Масса черной дыры 10^9 г составляет максимальное значение, разрешенное первичным нуклеосинтезом, см. вывод после уравнения (26). Это ограничение справедливо, если ПЧД доминировали

в ранней Вселенной до эпохи BBN, что могло произойти, если минимальная масса ПЧД определялась уравнением (24).

Расчеты с более реалистичными расширенными спектрами масс ПЧД показывают аналогичные черты коэффициента подавления S , который также пропорционален ϵ и центральному значению массы в массовом распределении. Имеется некоторая зависимость от формы спектра и от значений M_{max} и M_{min} , но они существенно не меняют наших результатов.

Существенное ограничение пространства параметров минимальной суперсимметричной модели, полученное на БАК, привело к сомнениям относительно гипотезы, что носители темной материи состоят из легчайших суперсимметричных частиц. Более того, обычные слабо взаимодействующие массивные частицы (WIMP) с массой ниже тераэлектронвольт также кажутся исключенными. Рассмотренный здесь механизм позволяет спасти относительно легкие WIMP и расширить пространство параметров для суперсимметричной темной материи. Поскольку, согласно известному результату, отношение космологической плотности энергии массивных реликтов к плотности энтропии пропорционально квадрату массы этих частиц, возможное повышение плотности энтропии в 100 раз позволяет увеличить допустимую массу частиц в 10 раз, что открывает возможность для суперсимметричной (SUSY) темной материи с массой, превышающей ограничения, установленные БАК.

Уменьшение космологической барионной асимметрии за счет указанного здесь механизма дополнительного высвобождения энтропии может показаться не столь существенным, потому что теоретические оценки асимметрии довольно неопределенны в силу того, что они сильно зависят от неизвестных параметров теории при высоких энергиях. Однако есть несколько исключений, для которых энтропийное разбавление может представлять интерес. Во-первых, это механизм Аффлекса–Дайна [26], который естественно приводит к величине барионной асимметрии, существенно превышающей наблюдаемую. Подавление на 1–2 порядка может быть полезно, но не всегда достаточно. Во-вторых, это сценарий бариогенезиса посредством лептогенеза [27], описание которого можно найти, например, в обзорах [28]. Согласно этой модели космологическая барионная асимметрия возникла из первоначально созданной лептонной асимметрии, которая возникла в результате распадов тяжелых майорановских нейтрино.

В некоторых моделях параметры CP-нарушающих распадов этого тяжелого нейтрино можно выразить через CP-нечетные фазы осцилляций легких нейтрино, что позволяет предсказать величину и знак лептонной асимметрии. Однако, если в прошлом существовало энтропийное разбавление асимметрии с величиной, зависящей от модели, ее величина не может быть предсказана, но знак, вероятно, может.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-42-02004).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь мы оценим плотность стабильных суперсимметричных реликтов, образующихся при испарении ПЧД, и покажем, что их вклад в космологическую темную материю незначителен из-за очень низкой плотности ПЧД и из-за их быстрого охлаждения фоновыми релятивистскими частицами. С этой целью представим здесь несколько простых оценок и численных значений.

Момент образования ПЧД с массой M равен (2)

$$t_{in} = \frac{M}{m_{Pl}^2} = 2.5 \cdot 10^{-31} M_8 \text{ с}, \quad (76)$$

где $M_8 = M/(10^8 \text{ г})$.

По предположению, в момент образования черные дыры составляют небольшую долю $\epsilon \ll 1$ плотности энергии релятивистской материи.

Таким образом, плотности энергии и числа ПЧД при $t = t_{in}$ соответственно равны

$$\rho_{BH}^{(in)} = \frac{3\epsilon}{32\pi} \frac{m_{Pl}^6}{M^2}, \quad n_{BH}^{(in)} = \frac{3\epsilon}{32\pi} \frac{m_{Pl}^6}{M^3}. \quad (77)$$

Плотность энергии релятивистской материи при $t = t_{in}$ равна

$$\rho_{rel}^{(in)} = \frac{3}{32\pi} \frac{m_{Pl}^6}{M^2} = \frac{\pi^2 g_*^{(in)}}{30} T_{in}^4, \quad (78)$$

где $g_*^{(in)} \approx 100$ — количество типов релятивистских частиц при $T = T_{in}$. Соответственно температура релятивистской космологической плазмы на момент рождения ПЧД равна

$$T_{in} \approx 1.72 \cdot 10^{12} \text{ ГэВ} / \sqrt{M_8}. \quad (79)$$

Отношение плотности ПЧД к плотности релятивистских частиц в момент рождения можно оценить как

$$r_{in} = \frac{n_{BH}^{(in)}}{n_{rel}^{(in)}} = \frac{\rho_{BH}^{(in)}}{\rho_{rel}^{(in)}} \frac{T_{in}}{0.3M} = 0.9 \cdot 10^{-31} \epsilon_{12} M_8^{-3/2}, \quad (80)$$

где $\epsilon_{12} = 10^{12} \epsilon$ и $n_{rel} \approx 0.3 \rho_{rel}/T$.

Это отношение остается примерно постоянным до распада ПЧД, поскольку обе плотности практически сохраняются в сопутствующем объеме с точностью до возможного вброса энтропии, созданного аннигиляцией массивных частиц. Как мы увидим ниже, температура релятивистской материи в момент распада ПЧД составляет около 20–30 МэВ и поэтому в этот момент $g_* \sim 10$.

Следовательно, отношение r уменьшается в 10 раз.

Среднее расстояние между ПЧД на момент их создания составляет

$$d_{in}^{(BH)} = \left(n_{BH}^{(in)} \right)^{-1/3} = 2.4 \cdot 10^{-16} M_8 \epsilon_{12}^{-1/3} \text{ см.} \quad (81)$$

В момент равновесия, когда плотности ЧД и релятивистской материи сравнялись, среднее расстояние между ЧД было

$$d_{eq}^{(BH)} = \frac{d_{in}^{(BH)}}{\epsilon} = 2.4 \cdot 10^{-4} M_8 \epsilon^{-4/3} \text{ см.} \quad (82)$$

Температура релятивистской материи в момент равновесия составляла

$$T_{eq} = \epsilon T_{in} S_{eq}^{1/3} = 3.7 \epsilon_{12} M_8^{-1/2} \text{ ГэВ}, \quad (83)$$

где S_{eq} — отношение количества типов частиц при $T = T_{in}$ к количеству типов частиц при $T = T_{eq}$:

$$S_{eq} = \frac{g_*(10^5 \text{ ГэВ})}{g_*(3 \text{ ГэВ})} \approx 10. \quad (84)$$

Поскольку до достижения равновесия Вселенная расширялась в релятивистском режиме, когда масштабный фактор увеличивался как $a(t) \sim t^{1/2}$, равновесие достигалось в момент времени

$$t_{eq} = \frac{t_{in}}{\epsilon^2} = 2.5 \cdot 10^{-7} M_8 \epsilon_{12}^{-2} \text{ с.} \quad (85)$$

После этого и до момента распада ЧД при

$$t = \tau = \frac{30 M_{BH}^3}{m_{Pl}^4} = 1.6 \cdot 10^{-4} M_8^3 \text{ с} \quad (86)$$

Вселенная расширялась в режиме доминантности нерелятивистской материи по закону $a(t) \sim t^{2/3}$. Таким образом, на этом MD-этапе масштабный фактор увеличивался как

$$z(\tau) \equiv \left(\frac{\tau}{t_{eq}} \right)^{2/3} = 74 (\epsilon_{12} M_8)^{4/3}. \quad (87)$$

Соответственно, плотность энергии ПЧД непосредственно перед моментом их распада будет больше, чем плотность энергии релятивистского фона, на этот фактор красного смещения, $z(\tau)$:

$$\frac{\rho_{BH}(\tau)}{\rho_{rel}(\tau)} = 74 (\epsilon_{12} M_8)^{4/3}. \quad (88)$$

Температура релятивистского фона непосредственно перед распадом черной дыры была равна

$$T_{cool} \equiv T_{rel}(\tau) = \frac{T_{eq}}{z(\tau)} = 50 \epsilon_{12}^{-1/3} M_8^{-11/6} \text{ МэВ.} \quad (89)$$

Температура частиц, образующихся при распаде ЧД, равна

$$T_{BH} = \frac{m_{Pl}^2}{8\pi M} = 10^5 M_8^{-1} \text{ ГэВ.} \quad (90)$$

Итак, легчайшие суперсимметричные частицы минимальной SUSY-модели с массой $m_\chi \sim 10^3$ ГэВ должны обильно образовываться в процессе испарения ПЧД с $T_{BH} \gg m_\chi$, что составляет около 0.01–0.1 от общего количества образовавшихся частиц.

Поскольку ПЧД образовывались при температурах, намного превышающих температуру окружающей релятивистской плазмы, первоначально они не теряли массу из-за испарения, а вместо этого приобретали ее за счет аккреции окружающего вещества. Однако этот эффект оказывается незначительным. Действительно, площадь поверхности ПЧД равна $4\pi r_g^2$ и поток внешнего излучения будет порядка T^4 . Таким образом, скорость увеличения массы будет равна

$$\dot{M} = 4\pi r_g^2 T^4. \quad (91)$$

Согласно уравнению (3) $T^2 t \approx m_{Pl}/30$, и поэтому

$$dt = -\frac{m_{Pl} dT}{15T^3}.$$

Следовательно, увеличение массы составит

$$\Delta M = \frac{4\pi}{30} m_{Pl} r_g^2 T_{in}^2, \quad (92)$$

где T_{in} задается формулой (79). Итак, окончательно получаем

$$\frac{\Delta M}{M} \approx 0.1. \quad (93)$$

Интересно, что относительное увеличение массы не зависит от значения массы ПЧД.

Этот результат противоречит работе [2], как указал нам рецензент. Действительно, основанные на оценке скорости аккреции, полученной в работе [1], расчеты [2] привели к огромному увеличению массы ПЧД до миллиардов масс Солнца или даже намного больше. Это определенно весьма завышенная оценка. Аргументы работ [1, 2] основаны на применении механизма аккреции Бонди к ранней Вселенной. Однако физические ситуации в современной Вселенной в эпоху доминантности материи и в ранней Вселенной в эпоху доминантности излучения были совершенно различны. Предполагается, что в ранней Вселенной ПЧД покоились в сопутствующей системе отсчета, а поток релятивистских частиц на них индуцировался лишь процессом гравитационного притяжения окружающих релятивистских частиц, который имеет исключительно низкую эффективность, в частности, из-за хаббловского расширения. В работе [29] рассмотрен и выполнен расчет эффективности аккреции в разные эпохи космологической эволюции. Приведем цитату из этой работы: «Для ПЧД, размер которых намного меньше M_{cr} , аккреция совершенно не важна», где M_{cr} составляет примерно $5 \cdot 10^{14}$ г. ПЧД с массой больше M_{cr} может дожить до настоящего времени, в то время как более легкие ПЧД испарятся прежде, чем достигнут времени, благоприятного для аккреции. Поскольку мы имеем дело с ПЧД с массами не больше 10^9 г, можем пренебречь возможным увеличением их массы после образования.

Среднее расстояние между ПЧД непосредственно перед их распадом составляло

$$d^{BH}(\tau) = d_{eq}^{(BH)} z(\tau) \approx 1.75 \cdot 10^{-2} M_8^{7/3}. \quad (94)$$

Общее количество энергичных частиц, образовавшихся при распаде одной ЧД, равно

$$N_{hot} \approx \frac{M_{BH}}{3T_{BH}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{M}{m_{Pl}} \right)^2 = 1.8 \cdot 10^{26} M_8^2. \quad (95)$$

Мы предполагаем следующую модель: в результате мгновенного испарения ЧД каждая черная дыра превращается в облако энергичных частиц с температурой $T_{BH} = 10^5 M_8^{-1}$ ГэВ и радиусом τ_{BH} , см., например, формулу (86):

$$\tau_{BH} = 4.8 \cdot 10^6 M_8^3 \text{ см}. \quad (96)$$

Этот радиус намного больше среднего расстояния между ЧД (94) и число ПЧД в этом общем облаке составляет

$$N_{cloud} = \left(\frac{\tau_{BH}}{d_{BH}(\tau)} \right)^3 = 2 \cdot 10^{25} M_8^7, \quad (97)$$

поэтому плотность их числа непосредственно перед распадом была

$$n_{BH}(\tau) = d^{-3}(\tau) = 1.9 \cdot 10^5 M_8^{-7} \text{ см}^{-3}. \quad (98)$$

Плотность горячих частиц с температурой T_{BH} , созданных испарением этого набора черных дыр, равна

$$n_{hot} = n_{BH}(\tau) N_{hot} = 3.4 \cdot 10^{31} M_8^{-5} \text{ см}^{-3}. \quad (99)$$

Плотность холодных фоновых частиц с температурой T_{cool} (89) равна

$$n_{cool} = 0.1 g_* T_{cool}^3 = 1.6 \cdot 10^{37} \epsilon_{12}^{-1} M_8^{-11/2} \text{ см}^{-3}, \quad (100)$$

где мы взяли $g_* = 10$ при $T < 100$ МэВ. Отметим, что $n_{cool} \gg n_{hot}$.

Частицы, образующиеся при испарении ПЧД, состоят преимущественно из разновидностей легких или быстро распадающихся частиц и небольшого количества стабильных легчайших суперсимметричных частиц (или любых других стабильных частиц, предполагаемых частиц темной материи), обозначим их как X . Поскольку по предположению T_{BH} выше, чем масштаб масс SUSY, общее количество всех суперсимметричных партнеров, созданных за счет испарения, должно быть равно количеству всех других частиц. Каждый SUSY-партнер создает одну легчайшую суперсимметричную частицу (X -частицу) в процессе своего распада и несколько других видов частиц. Таким образом, количество X -частиц будет около одного процента от числа других частиц. Более точное значение здесь не так важно. Это соотношение должно еще больше уменьшиться в процессе термализации, см. ниже.

Выброшенные черными дырами энергичные частицы распространяются на фоне гораздо более холодной плазмы и остывают, одновременно нагревая фон. Охлаждение происходит, в частности, за счет кулоновского рассеяния, поэтому импульс горячих частиц уменьшается согласно уравнению (слабое, связанное с расширением Вселенной, в этом уравнении не учитывается, поскольку характерный временной масштаб остывания намного меньше, чем время Хаббла при $T \sim 100$ МэВ):

$$\dot{E}_{hot} = -\sigma v n_{cool} \delta E, \quad (101)$$

где δE — передача импульса от горячих частиц к холодным. Сечение рассеяния можно аппроксимировать как $\sigma = \alpha^2 g_* / |p_1 - p_2|^2$. Для безмассовых частиц

$$q^2 \equiv (p_1 - p_2)^2 = -2(E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2). \quad (102)$$

Здесь E_1 и E_2 — начальная и конечная энергии холодных частиц,

$$E_1 \sim T_{cool}, \quad \delta E \equiv (E_2 - E_1) \sim E_2.$$

Для заметной передачи энергии необходимо рассеяние на большие углы, так что $q^2 \sim E_1 E_2$. Окончательно получим

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{0.1 g_* T_{cool}^3 \alpha^2}{E_1} \approx 10^{-4} T_{cool}^2 = \\ &= 6 \cdot 10^{18} \text{ МэВ/с.} \end{aligned} \quad (103)$$

Соответственно величина потерь энергии горячих частиц, по порядку величины равная их температуре (90), будет достигнута в течение очень короткого времени:

$$t_{cool} \approx 10^{-10} \text{ с.} \quad (104)$$

Такое быстрое охлаждение обеспечивается за счет огромной плотности холодных частиц: их около миллиона на каждую горячую частицу, см. уравнения (99), (100).

В результате смешения и термализации двух компонентов, горячего и холодного, температура образующейся плазмы станет

$$T_{fin} = T_{cool} \left(\frac{\rho_{phot}}{\rho_{cool}} \right)^{1/4} \approx 147 M_8^{-3/2} \text{ МэВ.} \quad (105)$$

Соответственно, полная плотность релятивистских частиц будет равна

$$n_{rel} = 0.1 g_* T_{fin}^3 = 4 \cdot 10^{38} M_8^{-9/2} / \text{см}^3. \quad (106)$$

Согласно формуле (99) плотность числа X -частиц сразу после испарения должна быть около $10^{30} M_8^{-5} \text{ см}^{-3}$. После быстрой термализации отношение плотности X -частиц к плотности всех релятивистских частиц становится равным

$$n_X / n_{rel} = 3 \cdot 10^{-9}. \quad (107)$$

Эволюция плотности X -частиц определяется уравнением

$$\dot{n}_X + 3H n_X = -\sigma_X^{(ann)} v n_X^2, \quad (108)$$

где слагаемое, отвечающее обратной аннигиляции, не учитывается, поскольку горячие частицы от испаряющихся ПЧД очень быстро остывают с характерным временем (104) и, следовательно, температура плазмы станет намного меньше M_X . Очевидно, поскольку $m_X \gg T_{fin}$ (105), распределение X -частиц будет сильно отличаться от равновесного распределения Бозе–Эйнштейна или Ферми–Дирака,

но кинетическое равновесие устанавливается очень быстро, что приведет к распределению по энергии, близкому к равновесному с ненулевыми и равными химическими потенциалами частиц X и анти- X , в предположении нулевой X/\bar{X} -асимметрии. Если бы установилось полное кинетическое и химическое равновесие, то плотности X (и \bar{X}) были бы чрезвычайно малы и проблема избытка таких частиц не возникла бы. Ключевым моментом здесь является быстрое охлаждение плазмы образовавшихся горячих частиц, намного более быстрое, чем космологическое расширение, см. уравнение (104).

Параметр Хаббла H , входящий в уравнение (108), определяется выражением

$$H = \left(\frac{8\pi^3 g_*}{90} \right)^{1/2} \frac{T^2}{m_{Pl}} \approx \frac{0.4 T_{in}^2}{z^2 m_{Pl}}, \quad (109)$$

где $z = a_{in}/a$ — отношение начального масштабного коэффициента к текущему, а для начального значения температуры T_{in} мы возьмем T_{fin} , заданное уравнением (105). Надеемся, это не приведет к путанице.

Вводя $r = n_X z^3$ и меняя временную переменную на z , мы приходим к уравнению

$$\frac{dr}{dz} = -\sigma_{ann} v \frac{r^2}{H z^4} = -\frac{\sigma_{ann} v m_{Pl}}{0.4 T_{in}^2} \frac{r^2}{z^2}, \quad (110)$$

которое легко интегрируется, приводя к следующему результату:

$$n_X = \frac{n_{in}}{z^3 (1 - 1/z)} \rightarrow \frac{1}{Q z^3}, \quad (111)$$

где $Q = \sigma v m_{Pl} / (0.4 T_{in}^2)$.

Полное сечение аннигиляции может быть зафиксировано условием, что X -частицы являются доминирующими носителями космологической темной материи. Согласно многочисленным наблюдательным данным,

$$\Omega_{DM} = 0.26, \quad \Omega_{CMB} = 5.5 \cdot 10^{-5}, \quad (112)$$

или $(\rho_X / \rho_\gamma)_{obs} \approx 5 \cdot 10^3$.

По расчетам, приведенным, например, в книге [30], замороженная космологическая плотность массы X -частиц определяется уравнением

$$\Omega_X h^2 \approx \frac{10^9 x_f}{m_{Pl} \text{ ГэВ} (\sigma_{ann} v)} \approx 0.12, \quad (113)$$

где $h \approx 0.67$ — безразмерный параметр Хаббла, а $x_f = T_f / m_X = 20\text{--}30$ — отношение температуры заморозки к массе X . Последний член в приведенном выше соотношении является наблюдаемым значением. Следовательно,

$$\sigma_{ann} v m_{Pl} \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ ГэВ}^{-1} \quad (114)$$

и

$$n_X \approx 10^{-12} z^{-3} T_{in}^2 \text{ ГэВ}. \quad (115)$$

Итак, для отношения плотности X к плотности релятивистских частиц находим

$$\frac{n_X}{n_{rel}} \rightarrow \frac{10^{-12} \text{ ГэВ}}{T_{in}} \approx 7 \cdot 10^{-12}, \quad (116)$$

так что отношение соответствующих плотностей энергии в настоящее время равно

$$\frac{\rho_X}{\rho_{CMB}} = \frac{m_X}{3T_{CMB}} \frac{n_X}{n_{rel}} \frac{g_*(0.1 \text{ МэВ})}{g_*(150 \text{ МэВ})} < < 10^3 \frac{m_X}{\text{ТэВ}}, \quad (117)$$

что безопасно ниже наблюдательного значения $\rho_X/\rho_{CMB} = 5 \cdot 10^3$, особенно если $m_X < 1 \text{ ТэВ}$. Здесь мы взяли $g_* = 50$ при $T = 150 \text{ МэВ}$ и $g_* < 10$ при $T = 0.1 \text{ МэВ}$.

Результаты, представленные в этом приложении, не согласуются с опубликованными в работах [31, 32] о рождении возможных частиц темной материи испарением ПЧД. Но это разногласие естественно, поскольку в этих работах не учитывается ряд существенных физических эффектов. Во-первых, в этих работах предполагается, что испарение идет в пустое пространство, а в нашем случае Вселенная бы-

ла заполнена более холодной релятивистской плазмой. Во-вторых, не учитывается остаточная аннигиляция созданных частиц темной материи, в то время как выше было показано, что это очень важно. С другой стороны, охлаждение частиц темной материи идет настолько быстро, что их обратной аннигиляции не происходит, поэтому они не создаются в этом процессе.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Здесь мы приведем аналитические выражения для интегралов I_0 (63) и I_3 (64) для двух форм спектра масс ПЧД: плоского (первый индекс j равен 1) и непрерывного гладкого спектра, который численно близок к логнормальному (первый индекс j равен 2), см. уравнение (60) и выше. Вторые индексы 1 или 3 соответствуют I_0 и I_3 соответственно. Для краткости мы используем обозначения t вместо η .

$$j_{10}(t, a, b) = \frac{1}{3} \left[-\Gamma \left[0, \frac{t}{a^3} \right] + \Gamma \left[0, \frac{t}{b^3} \right] \right] \quad (118)$$

— аналитический результат для интеграла j_{10} , определенного в уравнении (66).

$$j_{13}(t, a, b) = \frac{-\exp[-t/a^3] + \exp[-t/b^3]}{3t} \quad (119)$$

— аналитический результат для интеграла j_{13} , определенного в уравнении (68).

$$\begin{aligned} j_{20}(t, a, b) = & -\frac{1}{9(a-b)^4} 8a^2b^2 \left(27 \exp \left[-\frac{t}{a^3} \right] - \frac{8a\Gamma[-2/3]}{t^{1/3}} + \frac{24\sqrt{3}a\pi}{t^{1/3}\Gamma[-1/3]} + \frac{8b\Gamma[-2/3, t/a^3]}{t^{1/3}} - \right. \\ & \left. - \frac{2b(4a+b)\Gamma[-1/3, t/a^3]}{t^{2/3}} + 6\Gamma[0, t/a^3] + \frac{2a^2b^2\Gamma[1/3, t/a^3]}{t^{4/3}} - \frac{36a\Gamma[4/3, t/a^3]}{t^{1/3}} + \frac{9a^2\Gamma[5/3, t/a^3]}{t^{2/3}} \right) + \frac{1}{9(a-b)^4} \times \\ & \times 8a^2b^2 \left(27 \exp \left[-\frac{t}{b^3} \right] - \frac{8b\Gamma[-2/3]}{t^{1/3}} + \frac{24\sqrt{3}b\pi}{t^{1/3}\Gamma[-1/3]} + \frac{8a\Gamma[-2/3, t/b^3]}{t^{1/3}} - \frac{2a(4b+a)\Gamma[-1/3, t/b^3]}{t^{2/3}} + \right. \\ & \left. + 6\Gamma[0, t/b^3] + \frac{2a^2b^2\Gamma[1/3, t/b^3]}{t^{4/3}} - \frac{36b\Gamma[4/3, t/b^3]}{t^{1/3}} + \frac{9b^2\Gamma[5/3, t/b^3]}{t^{2/3}} \right) \end{aligned} \quad (120)$$

— аналитический результат для интеграла j_{20} , как объяснено в разд. 4.2.

$$\begin{aligned} j_{23}(t, a, b) = & -\frac{1}{27(a-b)^4 t^{7/3}} 16a^2b^2 (-6at\Gamma[1/3, t/a^3] + 6a^2t^{2/3}\Gamma[2/3, t/a^3] + b[-18a^2 \exp[-t/a^3]t^{1/3} - \\ & - 18ab \exp[-t/a^3]t^{1/3} - \frac{18 \exp[-t/a^3]t^{4/3}}{a} - \frac{18b \exp[-t/a^3]t^{4/3}}{a^2} - \frac{8\sqrt{3}a^2b\pi}{\Gamma[-1/3]} - 9a^2b\Gamma[7/3] - 18t\Gamma[4/3, t/a^3] + \\ & + 9(4a+b)t^{2/3}\Gamma[5/3, t/a^3] + 9a^2b\Gamma[7/3, t/a^3]) + \frac{1}{27(a-b)^4 t^{7/3}} 16a^2b^2 (-6bt\Gamma[1/3, t/b^3] + 6b^2t^{2/3}\Gamma[2/3, t/b^3] + \\ & + a[-18b^2 \exp[-t/b^3]t^{1/3} - 18ab \exp[-t/b^3]t^{1/3} - \frac{18 \exp[-t/b^3]t^{4/3}}{b} - \frac{18a \exp[-t/b^3]t^{4/3}}{b^2} - \frac{8\sqrt{3}b^2a\pi}{\Gamma[-1/3]} - \\ & - 9b^2a\Gamma[7/3] - 18t\Gamma[4/3, t/b^3] + 9(a+4b)t^{2/3}\Gamma[5/3, t/b^3] + 9b^2a\Gamma[7/3, t/b^3]) \end{aligned} \quad (121)$$

— аналитический результат для интеграла j_{23} , как объяснено в разд. 4.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Zel'dovich and I. Novikov, *Sov. Astron.* **10**, 602 (1967).
2. B. J. Carr and S. W. Hawking, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **168**, 399 (1974).
3. E. R. Harrison, *Phys. Rev. D* **1**, 2726 (1970).
4. Y. Zeldovich, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **160**, 1P (1972).
5. A. Dolgov and J. Silk, *Phys. Rev. D* **47**, 4244 (1993).
6. A. Dolgov, M. Kawasaki, and N. Kevlishvili, arXiv:0806.2986.
7. P. Ivanov, P. Naselsky, and I. Novikov, *Phys. Rev. D* **50**, 7173 (1994).
8. J. Garcia-Bellido, A. D. Linde, and D. Wands, *Phys. Rev. D* **54**, 60406058 (1996); arXiv:astro-ph/9605094.
9. E. Kotok and P. Naselsky, *Phys. Rev. D* **58**, 103517 (1998); arXiv:astro-ph/9806139v1.
10. B. Basset and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **63**, 123503 (2001); arXiv:hep-ph/0008328.
11. A. Green and K. Malik, *Phys. Rev. D* **64**, 021301 (2001); arXiv:hep-ph/0008113.
12. M. Kawasaki and K. Murai, *JCAP* **2019**(01), 27 (2019); arXiv:1907.02273.
13. S. G. Rubin, M. Yu. Khlopov, and A. S. Sakharov, *Grav. Cosmol.* **6**, 51 (2000); arXiv:hep-ph/0005271.
14. V. I. Dokuchaev, Yu. N. Eroshenko, and S. G. Rubin, arXiv:0709.0070.
15. A. D. Dolgov, A. G. Kuranov, N. A. Mitichkin et al., arXiv:2005.00892.
16. A. D. Dolgov, P. D. Naselsky, and I. D. Novikov, arXiv:astro-ph/0009407.
17. A. Chaudhuri and A. Dolgov, *JCAP* **2018**(01), 32 (2018); arXiv:1711.01801v1.
18. Ya. B. Zel'dovich, *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **24**, 29 (1976) [*JETP Lett.* **24**, 25 (1976)].
19. A. D. Dolgov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **79**, 337 (1980) [*JETP Lett.* **52**, 169 (1980)].
20. D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov, *Introduction to the Theory of Early Universe — Hot Big Bang Theory*, World Sci. (2011).
21. C. Bambi and A. Dolgov, *Introduction to Particle Cosmology. The Standard Model of Cosmology and its Open Problems*, Springer (2015).
22. S. Chatrchyan et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 221804 (2011).
23. M. Cirelli, F. Sala, and M. Taoso, *JHEP* **2015**(01), 41 (2015); arXiv:1407.7058.
24. N. Nagata and S. Shirai, *JHEP* **2015**(01), 29 (2015); arXiv:1410.4549v2.
25. D. N. Page, *Phys. Rev. D* **13**, 198 (1976).
26. I. Affleck and M. Dine, *Nucl. Phys. B* **249**, 361 (1985); M. Dine, L. Randall, and S. Thomas, *Nucl. Phys. B* **458**, 291 (1996).
27. M. Fukugita and T. Yanagita, *Phys. Lett. B* **174**, 45 (1986).
28. W. Buchmuller, R. D. Peccei, and T. Yanagida, 10.1146/annurev.nucl.55.090704.151558, hep-ph/0502169.
29. J. R. Rice and B. Zhang, *J. High Energy Astrophys.* **13**, 22 (2017).
30. E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City, CA (1980).
31. T. Fujita, M. Kawasaki, K. Harigaya, and R. Matsuda, *Phys. Rev. D* **89**, 103501 (2014); arXiv:1401.1909v2.
32. O. Lennon, J. March-Russell, R. Petrossian-Byrne, and H. Tillim, *JCAP* **2018**(04), 009 (2018); arXiv:1712.07664v2 (2018).