ЖЭТФ, 2021, том 160, вып. 5 (11), стр. 730–734

БОЛЬШИЕ ЧИСЛА, ПОРОЖДАЕМЫЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА

Ю. Н. Овчинников [*]

Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems
01187, Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 10 июня 2021 г.,
после переработки 9 июля 2021 г.
Принята к публикации 12 июля 2021 г.

Исследуются аномально большие числа, порожденные дзета-функцией Римана. Исследовано множество простых чисел Мерсенна. Получено уравнение, связывающее величины простых чисел Мерсенна с их номерами. Полученные результаты важны для понимания причин дисбаланса между теорией и экспериментом, возникающего при изучении флуктуационных поправок к проводимости квазидвухмерных сверхпроводников.

DOI: 10.31857/S0044451021110110

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было показано, что плотность простых чисел δ как функция величины простого числа P может быть записана в виде $\delta = 1/\ln(P/\kappa)$, где функция $\kappa(P)$ бесконечное число раз проходит через значение $\kappa = 1$. При этом ширина интервалов, на концах которых κ обращается в 1, оказывается аномально большой. В частности, оценка первого такого интервала дает значение порядка 10^{32}. Это обстоятельство открывает широкие возможности для установления номеров простых чисел по их величине. В качестве примера мы рассмотрим простые числа в окрестности $P \sim 10^{14}$, поскольку эта область может быть достигнута сравнительно быстро при расширении банка данных простых чисел.

Аномальная ширина интервала прохождения κ через единицу связана с наличием бесконечного числа связей между величинами простых чисел и их номерами, устанавливаемых уравнением Эйлера, и наличием у дзета-функции Римана простого полюса с вычетом единицы в точке $z = 1$ [2].

Метод нумерации простых чисел мы применим для чисел Мерсенна. Мы получим выражение, позволяющее установить с хорошей точностью номер простого числа в подмножестве простых чисел Мерсенна.

Используемые методы могут быть также применены для исследования флуктуационных явлений в сверхпроводниках.

Термодинамика сверхпроводников хорошо описывается функционалом Гинзбурга – Ландау [3] в широкой окрестности точки перехода T_c. Ширина флуктуационной области в чистом массивном сверхпроводнике, полученная в работе [4], оказывается очень малой — порядка 10^{-15} К. Для описания динамики сверхпроводника использование функционала Гинзбурга – Ландау оказывается недостаточным. В физике применяются уравнения БКШ и температурная техника [5], в которой необходимо использовать аналитическое продолжение по частоте с целых точек. Вблизи точки перехода можно выделить три типа флуктуационных поправок. Одна из них — флуктуационный сдвиг температуры перехода [6], две другие — поправки к проводимости: парапроводимость (поправка Асламазова – Ларкина, AL) [7] и поправка Маки – Томсона (MT) [8, 9]. Сдвиг температуры перехода в «грязных» сверхпроводящих пленках оказывается большим и в эксперименте практически всегда наблюдается лишь поправка AL [10]. Аномальная поправка MT оказывается подав-

[*] E-mail: ovc@itp.ac.ru

Таблица 1. Простые числа в интервале 8796093021493–8796093022853

8796093021493	8796093021517	8796093021523
8796093021533	8796093021587	8796093021607
8796093021671	8796093021743	8796093021763
8796093021769	8796093021791	8796093021803
8796093021839	8796093021889	8796093021899
8796093021917	8796093021941	8796093021953
8796093022033	8796093022091	8796093022141
8796093022151	8796093022237	8796093022247
8796093022261	8796093022313	8796093022349
8796093022391	8796093022393	8796093022427
8796093022501	8796093022513	8796093022567
8796093022601	8796093022609	8796093022657
8796093022667	8796093022711	8796093022723
8796093022777	8796093022807	8796093022811
8796093022853		

лена и степень подавления определяется величиной сдвига температуры перехода.

Метод аналитического продолжения, используемый при вычислении поправок МТ, аналогичен методике вычисления функции κ, изучаемой в данной работе. Поэтому можно надеяться, что полученные здесь результаты помогут понять механизм подавления аномальных поправок МТ в проводимость тонких сверхпроводящих пленок. Эта задача потребует глубокого изучения области частот $\omega \gg T$. Существенно, что при этом возникает новый физический параметр — флуктуационный сдвиг температуры перехода. Примером такого подавления служат условно сходящиеся ряды в работе [1].

Эффект связан с аналитическим продолжением с дискретных частот ω_n. Для его учета необходимо расширять пространство — добавить к флуктуационным полям модуля и фазы параметра порядка еще и флуктуации скалярного поля ϕ на высоких частотах. Эта работа выполняется в настоящее время.

2. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В ОКРЕСТНОСТИ $P \sim 10^{14}$

В табл. 1 мы приводим значения простых чисел в интервале $8796093021493 \le P \le 8796093022853$.

Таблица 2

$\ln(P/\kappa)$	κ
15.4917121040215111	2.9166686711853
16.65991828181654	2.907305274520592
18.8927990341525	2.8838266274785
19.648249409415	2.87634920124975

Среднее значение P в этом интервале равно

$$\tilde{P} = 8796093022164.395348837. \quad (1)$$

Для определения величины κ в этой точке мы воспользуемся скоррелированной интерполяционной формулой работы [1]. Три свободных параметра, входящих в такое уравнение, могут быть получены минимизацией по этим параметрам суммы квадратов расстояний от четырех базовых точек до рассматриваемой кривой. Выбирая в качестве точек величины из табл. 2, получаем следующее модифицированное уравнение для функции κ:

$$\begin{aligned} \kappa = 2.884464805304654 - 1.094564193816 \cdot 10^{-2} \times \\ \times \left(\ln\left(\frac{P}{\kappa}\right) - 18.89277990341552\right) - \\ - 4.150905361667447 \cdot 10^{-4} \times \\ \times \left(\ln\left(\frac{P}{\kappa}\right) - 18.8927990341552\right)^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (2) значение $P = \tilde{P}$ из формулы (1), находим значение $\kappa(\tilde{P})$:

$$\kappa(\tilde{P}) = 2.735299388293696. \quad (3)$$

Используя уравнение для связи величины простого числа с его номером N, выведенным в работе [1], получим значение $\tilde{N}$ для простого числа 8796093022151:

$$\tilde{N} \approx 305429569932. \quad (4)$$

Это значение $\tilde{N}$ следует сопоставить с неизвестным сейчас точным значением номера $\tilde{N}$ числа 8796093022151.

Знание точного значения $\tilde{N}$ позволит уточнить значение величины κ в точке $\tilde{P}$ и улучшить уравнение (2). Для этого точку $\{\tilde{P}, \kappa\}$ следует добавить к четырем точкам табл. 2 и использовать так расширенный базис для получения четырехпараметрического уравнения для функции κ, включающего в себя кубический член

$$\left(\ln\left(\frac{P}{\kappa}\right)-\ln\left(\frac{P_0}{\kappa(P_0)}\right)\right)^3.$$

В этом случае целесообразно использовать в качестве P_0 точку

$$\ln\left(\frac{P_0}{\kappa(P_0)}\right)=19.648249409415.$$

Используя уравнение (2) для грубой оценки величины P_1, при которой $\kappa(P_1)=1$, находим

$$P_1\sim 10^{32}. \qquad (5)$$

Четырехпараметрическое уравнение для функции κ позволит существенно улучшить оценку величины P_1.

Важное утверждение состоит том, что приближение Лежандра и приближение логарифмическим интегралом $\mathrm{Li}(x)$ не описывают достаточно хорошо зависимость $N(P)$ при больших значениях P. Масштабом больших P являются не числа порядка $5\cdot 10^7$, а числа порядка 10^{32} — ожидаемая величина первого интервала, на концах которого функция $\kappa(P)$ переходит через единицу. Величина 10^{32} лишь первая грубая оценка этого расстояния. Рассмотрение значений небольшого блока последовательных простых чисел при $P\approx 10^{14}$ — лишь второй шаг на пути установления номера простого числа в центре этого интервала, и тем самым очень точного установления величины $\kappa(\tilde{P})$. В работе [11] зависимость $N(P)$ рассматривается лишь в области $P\le$ ≤ 982451653 $(N=5\cdot 10^7)$. Отметим, что условно сходящиеся ряды в уравнениях (4) работы [1] оказываются более информативными, чем выражение для величины $\sum_{P<x}P^{-1}$, приведенное в Замечании 15 работы [11]. Это связано со сравнительно быстрой сходимостью ряда

$$S_0=\sum_N\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{N\ln P}\right)$$

относительно условно сходящихся рядов в уравнениях (4) работы [1]. Точность вычисления величины S_0 можно существенно повысить, используя интерполяционную формулу (2) для величины $\kappa(P)$ в интервале $5\cdot 10^7<N<10^{25}$. Переход от функции $\pi(x)$ и простых чисел P к исследованию функций $\{\kappa(P),\xi(P)\}$ [1] позволил доказать прохождение бесконечное число раз функцией $\kappa(P)$ через значение единица и выявить проблемы при определении величины даже первого такого интервала разбиения.

3. НУМЕРАЦИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ МЕРСЕННА

Числа вида

$$P=2^n-1,\quad n=2,3,4,\ldots \qquad (6)$$

образуют множество чисел Мерсенна. Подмножество простых чисел P образует подмножество простых чисел Мерсенна. База данных простых чисел Мерсенна приведена в [12]. Важным обстоятельством является возможность установить принадлежность данного числа Мерсенна к подмножеству простых чисел без установления его номера, подобно тому как это имеет место для простых чисел [13]. Для простых чисел существует связь величины простого числа с его номером, осуществляемая функцией κ [1]. Подобная связь существует и на множестве чисел Мерсенна. Она реализуется двумя функциями $\{M,\mu\}$ параметра P:

$$M=\frac{1.8}{\ln 2}\int\limits_0^P\frac{dP_1}{(P_1+1)\ln(P_1/\kappa)}+\mu. \qquad (7)$$

Функция M на множестве простых чисел Мерсенна равна порядковому номеру числа, тем самым функция μ однозначно определена на данном множестве. Наше предположение состоит в том, что μ ограничена.

Структурный коэффициент 1.8 связан с тем, что все числа Мерсенна оканчиваются на $\{1,3,5,7\}$, а все простые числа Мерсенна, кроме первого, оканчиваются на 1 или 7. В области $\ln P\gg 1$ находим

$$M=\frac{1.8}{\ln 2}\left\{\ln n-\frac{\ln\kappa}{n\ln 2}+D\right\}+\mu, \qquad (8)$$

где D — константа.

Используя данные [1], получаем для величины D значение

$$D=0.832925673. \qquad (9)$$

Функцию μ целесообразно записать в виде

$$\mu=\mu_0+\mu_1, \qquad (10)$$

где μ_0 — среднее значение μ. Используя базу данных [12] и формулы (7), (8), находим значение константы μ_0,

$$\mu_0=-3.753494642, \qquad (11)$$

и функцию μ_1 на подмножестве простых чисел Мерсенна. Эти значения приведены в табл. 3.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дзета-функция Римана порождает аномально большие числа, возникающие при исследовании свя-

Таблица 3. Значение функции μ_1 на множестве простых чисел Мерсенна; M — номер простого числа Мерсенна, n — параметр, определяющий величину простого числа M

M	n	μ_1
1	2	1.8293766895
2	3	1.694038612
3	5	1.137035997
4	7	1.082091498
5	13	0.207859618
6	17	0.428468746
7	19	1.111903997
8	31	0.752828242
9	61	−0.06715266
10	89	−0.063024914
11	107	0.456372999
12	127	1.010875533
13	521	−1.654740498
14	607	−1.051484157
15	1279	−1.986930274
16	2203	−2.39894609
17	2281	−1.489300602
18	3217	−1.382189683
19	4253	−1.107166537
20	4423	−0.208946434
21	9689	−1.24532699
22	9941	−0.312004771
23	11213	0.375318259
24	19937	−0.119178578
25	21701	0.660657686
26	23209	1.486196577
27	44497	0.7959539
28	86243	0.077495176
29	110503	0.433803893
30	132049	0.971225783
31	216091	0.692207684
32	756839	−1.562817719
33	859433	−0.892935453
34	1257787	−0.881910444
35	1398269	−0.156868192

Таблица 3. Продолжение

M	n	μ_1
36	2976221	−1.118579695
37	3021378	−0.157683891
38	6972593	−1.3293642
39	13466917	−2.03873858
40	20996011	−2.191990747
41	24036583	−1.543200557
42	25964951	−0.743601187
43	30402457	−0.153321539
44	32582657	0.666829059
45	37156667	1.325698746
46	42643801	1.968011852
47	43112609	2.939618951

зи простых чисел с их номерами. Полученные результаты позволяют надеяться, что по крайней мере вторая–третья точки, в которых функция κ проходит через единицу, будут установлены с приличной точностью в ближайшее время. В работе [1] показано, что число точек, в которых κ проходит через единицу, бесконечно велико. Нами показано, что число элементов на подмножестве простых чисел Мерсенна определяется формулами (8), (9) и расстояние между ними быстро растет с увеличением номера. Сорок семь первых таких точек приведены в табл. 3 вместе со значениями функции μ_1 в них. Отметим, что относительная точность предсказания ожидаемой величины P возрастает с увеличением номера M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **160**, 132 (2021).

2. H. M. Edwerds, *Riemann's Zeta Function*, Academic, New York, London (1974).

3. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).

4. В. Л. Гинзбург, ФТТ **2**, 2031 (1960).

5. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматлит, Москва (1962).

6. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **64**, 719 (1973).

7. L. G. Aslamazov and A. I. Larkin, Phys. Lett. A **26**, 238 (1968).

8. K. Maki, Progr. Theor. Phys. **40**, 193 (1968).

9. R. S. Thompson, Phys. Rev. B **1**, 327 (1970).

10. А. А. Варламов, А. И. Ларкин, *Теория флуктуаций в сверхпроводниках*, Добросвет, Москва (2007).

11. Don Zagier, Math. Intelligencer **1**, 7 (1977).

12. *Great Internet Mersenne Prime Search GIMPS*.

13. G. M. Ziegler, Notices Amer. Math. Soc. **51**, 414 (2004).