

СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РАЗНОСТИ ФАЗ КВАНТОВЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

*А. В. Козловский**

*Физический институт Российской академии наук им. П. Н. Лебедева
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 2 июня 2021 г.,
после переработки 5 июля 2021 г.
Принята к публикации 5 июля 2021 г.

Получены и проанализированы соотношения неопределенностей для операторов разности фаз двух электромагнитных полей, предложенных нами ранее [10]. Проведены исследования соотношения неопределенностей для операторов косинуса и синуса разности фаз, а также для операторов суммы числа фотонов и операторов разности фаз двух полей. Рассмотрены фоковские и когерентные квантовые состояния полей, общие состояния квантовых суперпозиций когерентных состояний полей и состояния «шредингерского кота» полей. Исследуется строгое соотношение неопределенностей (неравенство Коши – Шварца) и соотношение неопределенностей Гейзенберга для указанных операторов и квантовых состояний полей. На примерах рассмотренных состояний полей показаны различия между строгими соотношениями неопределенностей и соотношениями неопределенностей Гейзенберга для тригонометрических операторов разности фаз полей. Показано, что строгие соотношения неопределенностей и соотношения неопределенностей Гейзенберга качественно различны как для когерентных состояний, так и для состояний квантовых суперпозиций, и совпадают в случае фоковских состояний полей.

DOI: 10.31857/S0044451021120026

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение проблемы последовательного и полного квантовомеханического описания электромагнитного поля сталкивается со значительными теоретическими трудностями, связанными с определением квантовомеханической фазы поля. Квантовомеханический подход к определению фазы поля необходим в условиях слабых и ультраслабых электромагнитных полей с числом фотонов порядка единицы: $\langle \hat{n} \rangle \sim 1$, применяемых при решении задач в области квантовых технологий. В ряде работ [1–9] предложено несколько подходов к построению эрмитовых тригонометрических квантовых операторов фазы электромагнитного поля. Существенной особенностью результатов этих работ является то, что предлагаемые в них операторы синуса и косинуса фазы не удовлетворяют основному тригонометрическому соотношению; т. е. $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \neq \hat{1}$. Вследствие это-

го, для получения операторов разности фаз двух полей, величин, широко используемых на практике для описания явлений интерференции, операторы такого рода применены быть не могут, так как стандартные формулы для разности и суммы фаз в условиях нарушения основного соотношения тригонометрии не выполняются.

В работе [10] нами предложены эрмитовы операторы синуса и косинуса разности фаз двух полей, удовлетворяющие основному соотношению тригонометрии. Тригонометрические операторы разности фаз (ТОРФ) определяются в [10] с помощью интерференционных операторов пассивного светоделителя. В настоящей работе нами проводятся дальнейшие исследования свойств ТОРФ, предложенных в [10]. Получены и проанализированы различные соотношения неопределенностей для этих операторов. Исследуются строгие соотношения неопределенностей, представляющие собой неравенство Коши – Шварца для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I , а также тригонометрические соотношения неопределенностей (ТСН) для операторов суммы числа фотонов двух полей $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и ТОРФ \hat{C}_I , \hat{S}_I . Также исследовано соотношение

* E-mail: kozlovskiyav@lebedev.ru

неопределенностей Гейзенберга для указанных пар операторов.

Рассмотрены когерентные квантовые состояния двух полей, наиболее близкие по своим свойствам к классическому электромагнитному полю, а также ярко выраженные неклассические квантовые фокковские состояния и состояния общих суперпозиций двух когерентных состояний.

Рассмотрены частные случаи состояния общих суперпозиций когерентных состояний — состояния «шредингеровского кота», находящие свое применение в областях квантовой метрологии и квантовых вычислений.

2. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РАЗНОСТИ ФАЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Рассматриваемое нами строгое соотношение неопределенностей (ССН), представляет собой неравенство Коши–Шварца [11, 12] для любых двух эрмитовых операторов поля \hat{A} и \hat{B} и имеет следующий вид:

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq |\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle|^2, \quad (1)$$

где $\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle$, $\langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle$ — дисперсии операторов \hat{A} и \hat{B} , а

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle \equiv \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle$$

— ковариация (центральный корреляционный момент) для данных операторов.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга (СНГ), исследуемое нами для тригонометрических операторов разности фаз двух электромагнитных полей наряду со строгим соотношением неопределенностей (1), имеет следующий вид:

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2}{4}. \quad (2)$$

Отметим, что СНГ накладывает менее жесткое ограничение на величину произведения дисперсий операторов (флуктуаций наблюдаемых) по сравнению с ограничением, следующим из ССН [12].

Причины различий СНГ и ССН и критерии применимости того или иного соотношения представлены и обсуждаются в работе [12].

Соотношение Гейзенберга (2) имеет место только тогда, когда

$$\langle \{ \Delta\hat{A}, \Delta\hat{B} \} \rangle = 0,$$

где

$$\{ \Delta\hat{A}, \Delta\hat{B} \} \equiv \Delta\hat{A} \Delta\hat{B} + \Delta\hat{B} \Delta\hat{A}$$

— антикоммутатор операторов

$$\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$$

и

$$\Delta\hat{B} \equiv \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle.$$

Соотношения неопределенностей (1) и (2) рассматриваются в настоящей работе для ТОРФ, определяемых с помощью операторов интерференции двух полей, поступающих на входы пассивного светоделителя и характеризующих интенсивности (числа фотонов) полей на выходе из светоделителя [10].

Согласно квантовой теории операторы рождения/уничтожения электромагнитных полей

$$\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i, \quad i = 1, 2,$$

рассматриваемых нами, удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение эрмитовы операторы косинуса и синуса разности фаз полей \hat{a}_1 и \hat{a}_2 , используя интерференционные операторы \hat{I}_C и \hat{I}_S светоделителя,

$$\hat{I}_C \equiv \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \quad (4)$$

$$\hat{I}_S \equiv i(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2), \quad (5)$$

в следующем симметризованном виде [10]:

$$\hat{C}_I \equiv \cos(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} [\hat{K}_I \hat{I}_C + \hat{I}_C \hat{K}_I], \quad (6)$$

$$\hat{S}_I \equiv \sin(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} [\hat{K}_I \hat{I}_S + \hat{I}_S \hat{K}_I], \quad (7)$$

где

$$\hat{K}_I \equiv \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_C^2 + \hat{I}_S^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_1\hat{n}_2)}}, \quad (8)$$

поскольку сумма квадратов операторов интерференции выражаются через операторы числа фотонов входных полей светоделителя согласно

$$\hat{I}_C^2 + \hat{I}_S^2 = 2(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_1\hat{n}_2).$$

Может быть показано, что операторы \hat{C}_I и \hat{S}_I , определяемые с помощью (6) и (7), не коммутируют между собой:

$$[\hat{C}_I, \hat{S}_I] \neq 0.$$

Операторы квадрата косинуса и синуса разности фаз полей, выражаемые через операторы интерференции, запишем также в симметризованном виде [10] согласно

$$\hat{C}_I^2 \equiv \cos^2(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} [\hat{K}_I^2 \hat{I}_C^2 + \hat{I}_C^2 \hat{K}_I^2], \quad (9)$$

$$\hat{S}_I^2 \equiv \sin^2(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} [\hat{K}_I^2 \hat{I}_S^2 + \hat{I}_S^2 \hat{K}_I^2]. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что определенные таким образом операторы квадратов тригонометрических функций точно удовлетворяют основному тригонометрическому соотношению, т. е.

$$\hat{C}_I^2 + \hat{S}_I^2 = \hat{1}.$$

Выполнение этого соотношения обеспечивается выбором вида нормировочного оператора \hat{K}_I согласно формуле (8).

Отметим, что операторы, определяемые формулами (6) и (7), возведенными в квадрат, не удовлетворяют основному тригонометрическому соотношению в квантовом режиме слабых полей.

3. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ, ДИСПЕРСИИ И КОРРЕЛЯЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РАЗНОСТИ ФАЗ

В настоящем разделе нами найдены выражения для наблюдаемых средних ТОРФ, средних квадратов и дисперсий (флуктуаций), а также корреляционных функций ТОРФ для полей в произвольных квантовых состояниях.

Операторы косинуса и синуса (6) и (7) в базисе фоковских квантовых состояний двух полей могут быть записаны в виде

$$\hat{C}_I = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \times \langle |n_1, n_2 + 1\rangle \langle n_1 + 1, n_2| + \text{H.c.} \rangle, \quad (11)$$

$$\hat{S}_I = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \times \langle |n_1, n_2 + 1\rangle \langle n_1 + 1, n_2| - \text{H.c.} \rangle, \quad (12)$$

где введено обозначение

$$K_1(n_1, n_2) \equiv \sqrt{\frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{2}} \times \left[\frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 + 1 + 2n_1(n_2 + 1)}} + \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 + 1 + 2n_2(n_1 + 1)}} \right]. \quad (13)$$

Для операторов квадратов тригонометрических функций разности фаз, в свою очередь, с помощью (9), (10) и (8) находим в базисе фоковских состояний следующие выражения:

$$\hat{C}_I^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times \langle |n_1, n_2 + 2\rangle \langle n_1 + 2, n_2| + \text{H.c.} \rangle, \quad (14)$$

$$\hat{S}_I^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times \langle |n_1, n_2 + 2\rangle \langle n_1 + 2, n_2| + \text{H.c.} \rangle, \quad (15)$$

где введено обозначение

$$K_2(n_1, n_2) \equiv \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 1)(n_2 + 2)} \times \left[\frac{1}{n_1 + n_2 + 2 + 2n_1(n_2 + 2)} + \frac{1}{n_1 + n_2 + 2 + 2n_2(n_1 + 2)} \right]. \quad (16)$$

Средние значения ТОРФ для произвольных квантовых состояний двух полей $|x_1\rangle$ и $|x_2\rangle$ с помощью формул (11), (12) могут быть найдены в виде

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{C}_I | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \text{Re} (\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle x_2 | n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_I \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{S}_I | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \text{Im} (\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle x_2 | n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle). \quad (18) \end{aligned}$$

Используя (14)–(16), для средних значений квадратов ТОРФ получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I^2 \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{C}_I^2 | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times \\ &\times \operatorname{Re}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | n_2 + 2 \rangle \langle n_1 + 2 | x_1 \rangle), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_I^2 \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{S}_I^2 | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times \\ &\times \operatorname{Re}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | n_2 + 2 \rangle \langle n_1 + 2 | x_1 \rangle). \end{aligned} \quad (20)$$

Средние значения произведения ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I для произвольных состояний полей, необходимые для расчетов ССН (если положить в формуле (1) $\hat{A} = \hat{C}_I$, $\hat{B} = \hat{S}_I$), могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I \hat{S}_I \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{C}_I \hat{S}_I | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_1^2(n_1, n_2) \left(|\langle x_1 | n_1 + 1 \rangle|^2 |\langle n_2 | x_2 \rangle|^2 - \right. \\ &\quad \left. - |\langle x_1 | n_1 \rangle|^2 |\langle n_2 + 1 | x_2 \rangle|^2 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2 + 1) K_1(n_1 + 1, n_2) \times \\ &\quad \times \operatorname{Im}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | n_2 + 2 \rangle \langle n_1 + 2 | x_1 \rangle). \end{aligned} \quad (21)$$

Средние значения коммутаторов ТОРФ для произвольных состояний полей, определяющие правые части СНГ (если положить в формуле (2) $\hat{A} = \hat{C}_I$, $\hat{B} = \hat{S}_I$), находятся с помощью следующего выражения:

$$\begin{aligned} \langle [\hat{C}_I, \hat{S}_I] \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | [\hat{C}_I, \hat{S}_I] | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \frac{i}{2} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_1^2(n_1, n_2) \left(|\langle x_1 | n_1 + 1 \rangle|^2 |\langle n_2 | x_2 \rangle|^2 - \right. \\ &\quad \left. - |\langle x_1 | n_1 \rangle|^2 |\langle n_2 + 1 | x_2 \rangle|^2 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Левая часть соотношения неопределенностей (СН) для оператора суммы числа фотонов и ТОРФ \hat{C}_I (присутствующая в формулах (1) и (2) при $\hat{A} = \hat{n}_1 + \hat{n}_2$, $\hat{B} = \hat{C}_I$) имеет вид

$$\begin{aligned} L_{x_1, x_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{C}_I) &= \left\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \right\rangle_{x_1, x_2} \times \\ &\times \left\langle (\Delta \hat{n}_1)^2 \right\rangle_{x_1} + \left\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \right\rangle_{x_2, x_2} \left\langle (\Delta \hat{n}_2)^2 \right\rangle_{x_2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где дисперсии числа фотонов каждого из полей есть

$$\begin{aligned} \left\langle (\Delta \hat{n}_j)^2 \right\rangle_{x_j} &= \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j^2 |\langle x_j | n_j \rangle|^2 - \\ &- \left(\sum_{n_j=0}^{\infty} n_j |\langle x_j | n_j \rangle|^2 \right)^2, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (24)$$

Правая часть ССН при этом имеет вид

$$\begin{aligned} R_{t, x_1, x_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{C}_I) &= \left| \left\langle (\hat{n}_1 + \hat{n}_2), \hat{C}_I \right\rangle_{x_1, x_2} \right|^2 \equiv \\ &\equiv \left| \left\langle (\hat{n}_1 + \hat{n}_2) \hat{C}_I \right\rangle_{x_1, x_2} - \right. \\ &\quad \left. - \langle \hat{n}_1 + \hat{n}_2 \rangle_{x_1, x_2} \langle \hat{C}_I \rangle_{x_1, x_2} \right|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично выглядит правая часть ССН $R_{t, x_1, x_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{S}_I)$ с заменой в (25) \hat{C}_I на \hat{S}_I .

Для корреляторов оператора суммы числа фотонов и ТОРФ получаем

$$\begin{aligned} \left\langle (\hat{n}_1 + \hat{n}_2) \hat{C}_I \right\rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | (\hat{n}_1 + \hat{n}_2) \hat{C}_I | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_3(n_1, n_2) \operatorname{Re}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle x_2 | n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left\langle (\hat{n}_1 + \hat{n}_2) \hat{S}_I \right\rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | (\hat{n}_1 + \hat{n}_2) \hat{S}_I | x_1, x_2 \rangle = \\ &= - \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_3(n_1, n_2) \operatorname{Im}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle x_2 | n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle), \end{aligned} \quad (27)$$

где обозначено

$$K_3(n_1, n_2) = (n_1 + n_2 + 1) K_1(n_1, n_2).$$

4. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РАЗНОСТИ ФАЗ ПОЛЕЙ В ФОКОВСКИХ СОСТОЯНИЯХ

Рассмотрим случай, когда оба электромагнитных поля, разность фаз которых исследуются нами, находятся в фоковских состояниях $|n_{01}\rangle$ и $|n_{02}\rangle$, $n_{01}, n_{02} \geq 0$. Найдем левые части соотношений неопределенностей для операторов разности фаз \hat{C}_I и \hat{S}_I (полагая в формулах (1) и (2) $\hat{A} = \hat{C}_I$, $\hat{B} = \hat{S}_I$), определяемые для произвольных квантовых состояний полей выражениями (17)–(20). Дисперсии ТОРФ $\left\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \right\rangle_{n_{01}, n_{02}}$ и $\left\langle (\Delta \hat{S}_I)^2 \right\rangle_{n_{01}, n_{02}}$

в случае фоковских состояний полей, входящие в левую часть СН,

$$L_{n_{01}, n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv \langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{n_{01}, n_{02}} \langle (\Delta \hat{S}_I)^2 \rangle_{n_{01}, n_{02}},$$

находятся путем подстановки в выражения для этих величин (17)–(20) скалярных произведений вида $\langle n | n' \rangle = \delta_{n, n'}$. В результате получаем соотношения

$$\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{n_{01}, n_{02}} = \langle (\Delta \hat{S}_I)^2 \rangle_{n_{01}, n_{02}} = \frac{1}{2},$$

при этом средние значения ТОРФ равны

$$\langle \hat{C}_I \rangle_{n_{01}, n_{02}} = \langle \hat{S}_I \rangle_{n_{01}, n_{02}} = 0,$$

это означает, что случайная величина разности фаз обладает равномерным распределением со значениями от 0 до 2π .

Таким образом, получаем, что левая часть СН для ТОРФ в случае фоковских состояний полей есть

$$L_{n_{01}, n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = \frac{1}{4}. \quad (28)$$

Найдем далее правые части точного соотношения неопределенностей (неравенства Коши–Шварца, ССН) и соотношения неопределенностей Гейзенберга (СНГ). Из выражений для этих двух неравенств (1) и (2) в случае, если $\hat{A} = \hat{C}_I$, $\hat{B} = \hat{S}_I$, с помощью соотношения ортонормированности векторов фоковских состояний $\langle n | n' \rangle = \delta_{n, n'}$ получаем формулу для ковариации ТОРФ, входящей в правую часть ССН:

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I, \hat{S}_I \rangle_{n_{01}, n_{02}} &\equiv \langle n_{01}, n_{02} | \hat{C}_I \hat{S}_I | n_{01}, n_{02} \rangle - \\ &- \langle n_{01}, n_{02} | \hat{C}_I | n_{01}, n_{02} \rangle \langle n_{01}, n_{02} | \hat{S}_I | n_{01}, n_{02} \rangle = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_1^2(n_1, n_2) \times \\ &\times (\delta_{n_{01}, n_1+1}^2 \delta_{n_{02}, n_2}^2 - \delta_{n_{01}, n_1}^2 \delta_{n_{02}, n_2+1}^2), \quad (29) \end{aligned}$$

и для среднего коммутатора, определяющего правую часть СНГ, находим

$$\begin{aligned} \langle [\hat{C}_I, \hat{S}_I] \rangle_{n_{01}, n_{02}} &\equiv \langle n_{01}, n_{02} | [\hat{C}_I, \hat{S}_I] | n_{01}, n_{02} \rangle = \\ &= 2 \langle \hat{C}_I, \hat{S}_I \rangle_{n_{01}, n_{02}}. \quad (30) \end{aligned}$$

Таким образом, получены следующие выражения для правых частей ССН и СНГ в случае фоковских состояний полей:

$$\begin{aligned} R_{n_{01}, n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) &\equiv \left| \langle \hat{C}_I, \hat{S}_I \rangle_{n_{01}, n_{02}} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{C}_I, \hat{S}_I] \rangle_{n_{01}, n_{02}} \right|^2, \quad (31) \\ R_{n_{01}, n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) &\equiv \left| \langle \hat{C}_I, \hat{S}_I \rangle_{n_{01}, n_{02}} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{C}_I, \hat{S}_I] \rangle_{n_{01}, n_{02}} \right|^2, \quad n_{01}, n_{02} > 0. \end{aligned}$$

Из равенств (31) следует, что для полей в фоковских состояниях ССН и СНГ совпадают для любых $n_{01}, n_{02} \geq 0$.

Из выражения (29) также следует, что, если $n_{01}, n_{02} > 0$, то правые части СН есть

$$\begin{aligned} R_{n_{01}, n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) &= \\ &= \frac{1}{16} [K_1^2(n_{01}, n_{02} - 1) - K_1^2(n_{01} - 1, n_{02})]^2. \quad (32) \end{aligned}$$

При $n_{01} = 0, n_{02} > 0$ имеем

$$R_{0, n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = \frac{1}{16} K_1^4(n_{01}, n_{02} - 1).$$

При $n_{01} > 0, n_{02} = 0$ получаем

$$R_{n_{01}, 0}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = \frac{1}{16} K_1^4(n_{01} - 1, 0).$$

В случае $n_{01} = n_{02} = 0$ находим

$$R_{0,0}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = 0.$$

Для больших значений $n_{01}, n_{02} \rightarrow \infty$ правая часть СН стремится к нулю, так как

$$\langle \hat{C}_I, \hat{S}_I \rangle_{n_{01}, n_{02}} \rightarrow 0,$$

т. е. ТОРФ не коррелируют между собой.

На рис. 1 изображена зависимость правой части СН $R_{n_{01}, n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ от значений чисел фотонов n_{01} и n_{02} фоковских состояний полей $|n_{01}\rangle$ и $|n_{02}\rangle$, $0 \leq n_{01}, n_{02} \leq 10$. На рисунке видно, что правая часть СН заметно отличается от 0 только для малых значений n_{01} или n_{02} вблизи 0, т. е. в случае когда одно из полей находится в состоянии близком к вакуумному состоянию.

Левая часть СН значительно превышает левую часть ССН и СНГ для всех значений n_{01} и n_{02} за исключением состояний полей

$$|n_{01} = 0\rangle, |n_{02} = 1\rangle$$

и

$$|n_{01} = 1\rangle, |n_{02} = 0\rangle,$$

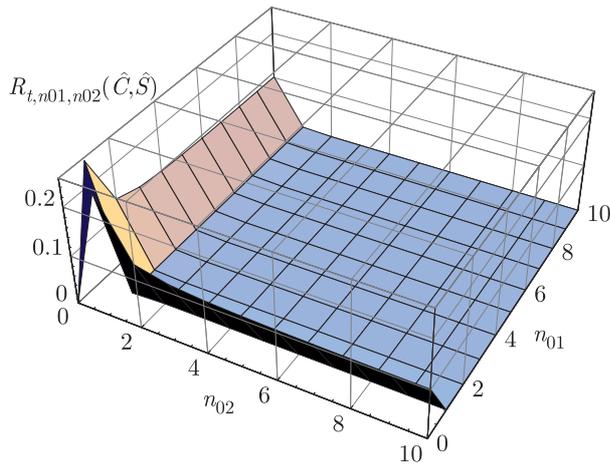


Рис. 1. Зависимость правой части соотношения неопределенностей операторов косинуса и синуса разности фаз

$$R_{t,n_{01},n_{02}}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv$$

$$\equiv \left| \langle \hat{C}_I \hat{S}_I \rangle_{n_{01},n_{02}} - \langle \hat{C}_I \rangle_{n_{01},n_{02}} \langle \hat{S}_I \rangle_{n_{01},n_{02}} \right|^2$$

для фоковских состояний полей $|n_1\rangle$ и $|n_2\rangle$ от средних значений числа фотонов n_{01} и n_{02} состояний

т. е. в случаях, когда одно из полей находится в вакуумном состоянии, а состояние другого поля является однофотонным. В этих особых случаях

$$R_{1,0}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = R_{0,1}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = L_{1,0}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = \frac{1}{4},$$

и это означает, что фоковские состояния полей являются состояниями с минимальной неопределенностью ТОРФ только для разностей фаз однофотонного и вакуумного состояний полей.

Вместе с тем, рассматривая СН для оператора полного числа фотонов

$$\hat{N}_1 + \hat{N}_2 = \hat{n}_1 + \hat{n}_2$$

и ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I с помощью формул (26) и (27) и соотношения

$$\langle (\Delta(\hat{n}_1 + \hat{n}_2))^2 \rangle_{n_{01},n_{02}} = 0,$$

нетрудно убедиться, что СН для $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I для полей в фоковских состояниях представляет собой равенство

$$\begin{aligned} R_{t,n_{01},n_{02}}((\hat{n}_1 + \hat{n}_2), \hat{C}_I) &= \\ &= R_{t,n_{01},n_{02}}((\hat{n}_1 + \hat{n}_2), \hat{S}_I) = \\ &= L_{n_{01},n_{02}}((\hat{n}_1 + \hat{n}_2), \hat{C}_I) = \\ &= L_{n_{01},n_{02}}((\hat{n}_1 + \hat{n}_2), \hat{S}_I) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Следовательно, фоковские состояния полей являются квантовыми состояниями с минимальной неопределенностью для операторов полного (суммарного) числа фотонов двух полей и ТОРФ \hat{C}_I, \hat{S}_I для любых значений числа фотонов n_{01}, n_{02} .

В случае если одно из полей находится в фоковском, а другое поле в произвольном квантовом состоянии $(|n_{01}\rangle, |x_2\rangle)$ или $(|x_1\rangle, |n_{02}\rangle)$, из выражений (17) и (18) следует, что средние значения ТОРФ в этом случае равны 0, а дисперсии ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I равны 1/2, так же как и в случае фоковских состояний обоих полей. Из формул (21) и (22) в случае, когда одно из полей находится в фоковском состоянии, следует, что ССН и СНГ совпадают между собой для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I . Так, например,

$$R_{t,n_{01},x_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) = R_{H,n_{01},x_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I), \quad (34)$$

причем

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I \hat{S}_I \rangle_{n_{01},x_2} &= \frac{i}{4} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(K_1^2(n_{01}-1, n_2) |\langle n_2 | x_2 \rangle|^2 - \right. \\ &\quad \left. - K_1^2(n_{01}, n_2) |\langle n_2 + 1 | x_2 \rangle|^2 \right) \end{aligned} \quad (35)$$

при $n_{01} > 0$ и

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I \hat{S}_I \rangle_{n_{01},x_2} &= \\ &= -\frac{i}{4} \sum_{n_2=0}^{\infty} K_1^2(0, n_2) |\langle n_2 + 1 | x_2 \rangle|^2, \end{aligned} \quad (36)$$

при $n_{01} = 0$ для любого квантового состояния $|x_2\rangle$.

Поскольку оператор суммарного числа фотонов полей $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ коммутирует с ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I , ССН для операторов $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и \hat{C}_I, \hat{S}_I совпадают с СНГ для этих операторов в рассматриваемом случае полей в фоковском и произвольном квантовых состояниях. При этом правые части ССН и СНГ равны нулю. Отметим равенство нулю правой части СНГ для $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и \hat{C}_I, \hat{S}_I для любых квантовых состояний $|x_1\rangle, |x_2\rangle$, поскольку операторы суммы числа фотонов и ТОРФ коммутируют между собой.

5. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РАЗНОСТИ ФАЗ ПОЛЕЙ В КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Рассмотрим теперь случай, когда оба поля находятся в когерентных состояниях

$$|x_j\rangle = |\alpha_j\rangle, \alpha_j = \sqrt{n_{\alpha_j}} e^{i\varphi_{\alpha_j}}, \quad j = 1, 2.$$

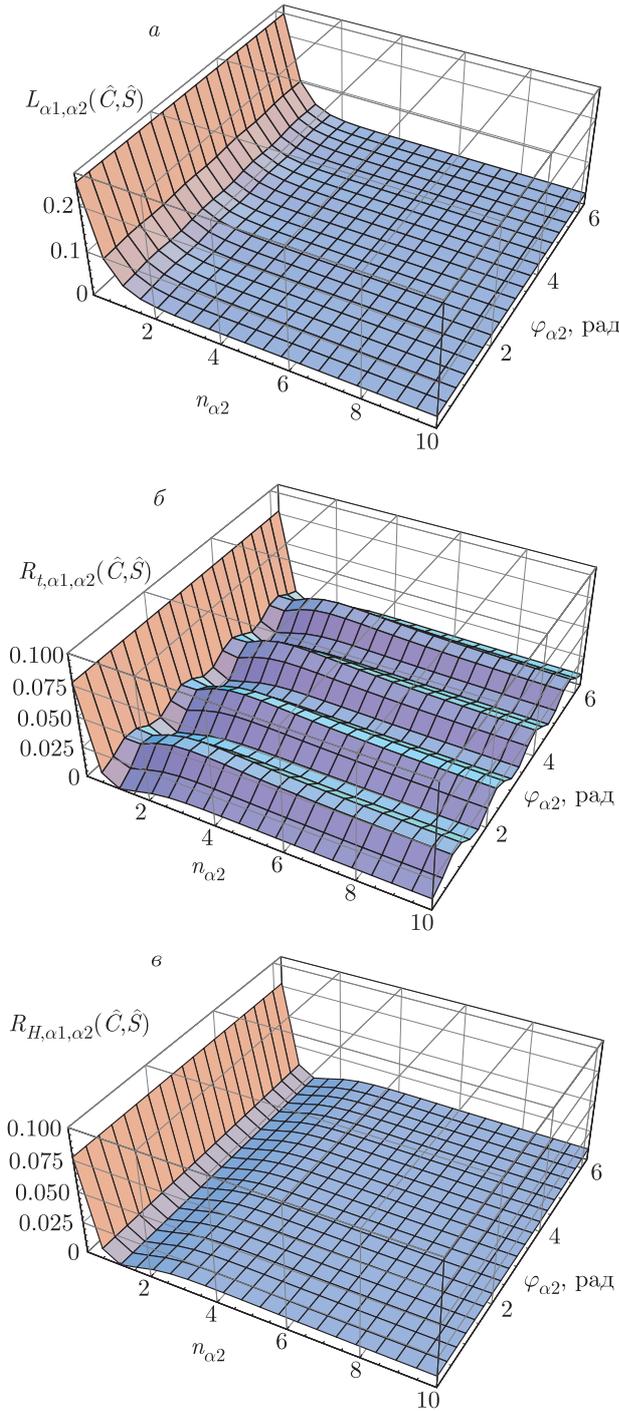


Рис. 2. Зависимости а) левой части соотношений (1) и (2) для операторов косинуса и синуса разности фаз

$$L_{\alpha_1, \alpha_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv \left\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \left\langle (\Delta \hat{S}_I)^2 \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2},$$

б) правой части соотношения (1) для операторов косинуса и синуса разности фаз

$$R_{t, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv \left| \left\langle \hat{C}_I \hat{S}_I \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} - \left\langle \hat{C}_I \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \left\langle \hat{S}_I \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \right|^2,$$

в) правой части соотношения неопределенностей Гейзенберга (2) для операторов косинуса и синуса разности фаз

$$R_{H, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv \frac{1}{4} \left| \left\langle [\hat{C}_I, \hat{S}_I] \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \right|^2,$$

для когерентных состояний полей $|\alpha_1\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$. Для фиксированных значений $n_{\alpha_1} = 1$ и $\varphi_{\alpha_1} = 0$ когерентного состояния $|\alpha_1\rangle$

Правые части СН, в свою очередь, находятся с помощью указанных скалярных произведений из формул (21), (22).

Скалярные произведения векторов состояний полей, необходимые для расчета левых и правых частей СН для случая когерентных состояний полей, могут быть записаны в виде

$$\langle m_j | \alpha_j \rangle = e^{-n_{\alpha_j}/2} \frac{n_{\alpha_j}^{m_j/2}}{\sqrt{m_j!}} e^{i m_j \varphi_{\alpha_j}}, \quad (37)$$

$$m_j = n_j, n_j + 1, n_j + 2, \quad j = 1, 2.$$

Численные расчеты дисперсий, средних значений коммутаторов и ковариаций, определяющих левые и правые части ССН и СНГ, проводились нами путем подстановки значений скалярных произведений (37) в выражения (17)–(22).

Как показали расчеты, правые части ССН и СНГ для соотношений неопределенностей $\hat{C}_I - \hat{S}_I$ значительно различаются между собой. На рис. 2 показаны левые и правые части ССН и СНГ для ТОРФ в случае когерентных состояний полей, в зависимости от параметров состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированном значении $\alpha_1 = 1$.

Как видно на рис. 2а, левая часть $L_{\alpha_1, \alpha_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ СН достигает максимальных значений при малых числах фотонов когерентных состояний $n_1, n_2 \sim 1$ и монотонно убывает с их ростом. Как показано на рис. 2б и 2в, правые части $R_{t, n_{01}, x_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ для ССН и $R_{H, n_{01}, x_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ для СНГ значительно раз-

Найдем левые части СН для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I , представляющие собой произведение дисперсий ТОРФ

$$\left\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \left\langle (\Delta \hat{S}_I)^2 \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2},$$

определяемые с использованием формул (17)–(20) и выражающиеся через скалярные произведения когерентных и фоковских состояний.

личаются между собой для любых значений параметров когерентных состояний α_1 и α_2 .

Сравнение левых и правых частей ССН и СНГ показывает, что левые части обоих СН в общем случае больше правых частей, т.е. когерентные состояния полей не являются для ТОРФ состояниями с наименьшей неопределенностью. Приближенное равенство левых и правых частей ССН имеет место только для определенных значений фазовых углов φ_{α_j} , $j = 1, 2$ и при больших значениях числа фотонов n_{α_j} , $j = 1$ и/или 2 (см. рис. 2а,б).

Результаты расчетов СН для оператора суммы числа фотонов полей $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и ТОРФ \hat{C}_I , \hat{S}_I приведены на рис. 3. На рис. 3а показано, что левая часть $L_{\alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{S}_I)$ принимает минимальное значение при малых значениях n_j , $j = 1, 2$ и возрастает с увеличением n_j , что связано с возрастанием дисперсии числа фотонов с ростом средних чисел фотонов когерентных состояний равных n_j . Так же как и в случае СН для \hat{C}_I и \hat{S}_I , различие между собой правых частей $R_{t, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{S}_I)$ и $R_{H, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{S}_I)$ велико.

Как отмечалось выше, операторы суммы числа фотонов ТОРФ полей коммутируют между собой,

$$[(\hat{n}_1 + \hat{n}_2), \hat{S}_I] = [(\hat{n}_1 + \hat{n}_2), \hat{C}_I] = 0,$$

вследствие чего правые части СНГ равны нулю:

$$R_{H, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{S}_I) = R_{H, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{C}_I) = 0.$$

В то же время правые части ТСН

$$R_{t, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{S}_I), R_{t, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{C}_I)$$

значительно отличаются от нуля для всех значений параметров когерентных состояний, как показано на рис. 3б.

Отличие правой части ССН для операторов $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и ТОРФ \hat{C}_I или \hat{S}_I от левой части значительно, как и в случае ССН для \hat{C}_I и \hat{S}_I , и почти линейно растет с увеличением чисел фотонов когерентных состояний n_{α_j} (см. рис. 3). Когерентные состояния не являются квантовыми состояниями полей с минимальной неопределенностью для ТОРФ \hat{C}_I или \hat{S}_I и оператора суммы чисел фотонов $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$.

Рассмотрим также случай, когда одно из полей находится в когерентном, а другое в фоковском квантовом состоянии. В таких условиях ССН и СНГ для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I совпадают. Правые части СН не зависят от фазы φ и значительно отличаются от нуля лишь при $n \sim 1$ и близки к нулю при $n \gg 1$.

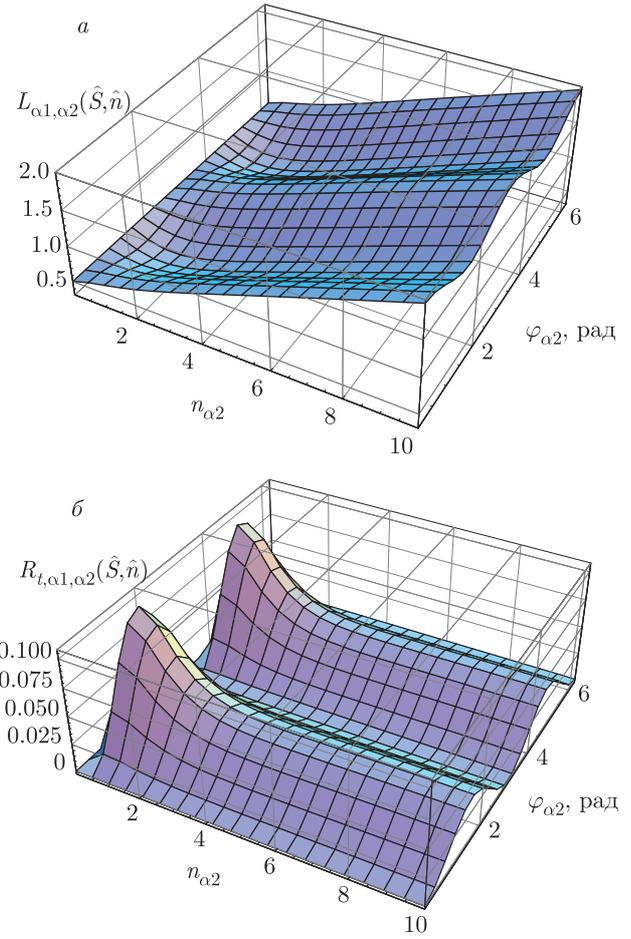


Рис. 3. Зависимости а) левой части соотношений (1) и (2) для операторов суммы числа фотонов полей $\hat{n} \equiv \hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и синуса разности фаз

$$L_{\alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}, \hat{S}_I) \equiv \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \langle (\Delta \hat{S}_I)^2 \rangle_{\alpha_1, \alpha_2},$$

б) правой части соотношения (1) для числа фотонов и синуса разности фаз

$$R_{t, \alpha_1, \alpha_2}(\hat{n}, \hat{S}_I) \equiv \left| \langle \hat{n} \hat{S}_I \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} - \langle \hat{n} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \langle \hat{S}_I \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \right|^2,$$

для когерентных состояний полей $|\alpha_1\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$. Для фиксированных значений $n_{\alpha_1} = 1$ и $\varphi_{\alpha_1} = 0$ когерентного состояния $|\alpha_1\rangle$

Правые части СН для операторов $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и ТОРФ \hat{C}_I , \hat{S}_I равны нулю для любых значений параметров состояний $|n_{01}\rangle, |\alpha_2\rangle$ (или $|\alpha_1\rangle, |n_{02}\rangle$). Это означает, что СН в случае таких квантовых состояний полей не накладывает никаких дополнительных ограничений на точность измерения полного (суммарного) числа фотонов и разности фаз полей.

**6. СООТНОШЕНИЯ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ
РАЗНОСТИ ФАЗ ДЛЯ ПОЛЕЙ В
СОСТОЯНИЯХ СУПЕРПОЗИЦИИ
КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ**

Рассмотрим теперь случай когда электромагнитные поля находятся в квантовых состояниях суперпозиций когерентных состояний [13–18]. Такие состояния полей $|\psi_{s,j}\rangle$, $j = 1, 2$ могут быть записаны в общем виде [18], следующим образом:

$$|\psi_{s,j}(\xi)\rangle = N_j (|\alpha_j\rangle + e^{i\xi}|\beta_j\rangle) = \sum_{n_j=0}^{\infty} Z_{n_j} |n_j\rangle, \quad j = 1, 2, \quad (38)$$

где

$$Z_{n_j} \equiv N_j (z_{n_j,\alpha_j} + e^{i\xi_j} z_{n_j,\beta_j}), \quad (39)$$

$$N_j \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \theta_j e^{-\delta_j/2})}}, \quad (40)$$

$$\theta_j \equiv \xi_j + \sqrt{n_{\alpha_j} n_{\beta_j}} \sin \Delta_j, \quad (41)$$

$$\Delta_j \equiv \varphi_{\beta_j} - \varphi_{\alpha_j}, \quad (42)$$

$$\delta_j \equiv n_{\alpha_j} + n_{\beta_j} - 2\sqrt{n_{\alpha_j} n_{\beta_j}} \cos \Delta_j, \quad (43)$$

$$\alpha_j = \sqrt{n_{\alpha_j}} e^{i\varphi_{\alpha_j}}, \quad \beta_j = \sqrt{n_{\beta_j}} e^{i\varphi_{\beta_j}}, \quad j = 1, 2,$$

и использованы обозначения

$$z_{n_j,\alpha_j} \equiv e^{-n_{\alpha_j}/2} \frac{\alpha_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}, \quad (44)$$

$$z_{n_j,\beta_j} \equiv e^{-n_{\beta_j}/2} \frac{\beta_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}.$$

В случае если фазовые углы когерентных состояний, составляющих каждую из суперпозиций, равны между собой,

$$\varphi_{\alpha_j} = \varphi_{\beta_j}, \quad \Delta_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

а числа фотонов когерентных состояний различаются, $n_{\alpha_j} \neq n_{\beta_j}$, состояния квантовых суперпозиций могут быть названы амплитудными суперпозициями когерентных состояний [18]. В другом важном частном случае, когда

$$\varphi_{\alpha_j} \neq \varphi_{\beta_j}, \quad \Delta_j \neq 0, \quad j = 1, 2,$$

и

$$n_{\alpha_j} = n_{\beta_j},$$

состояния суперпозиции могут быть названы состояниями фазовых суперпозиций двух когерентных состояний [18].

Фазовые состояния суперпозиции, имеющие значения параметров

$$\varphi_{\alpha_j} = \varphi_{\beta_j} + \pi, \quad j = 1, 2,$$

представляют собой известные и хорошо изученные квантовые состояния «шредингеровского кота» [13–21]. В случае

$$\xi_j = 0, \quad n_{\alpha_j} = n_{\beta_j}, \quad \varphi_{\alpha_j} = \varphi_{\beta_j} + \pi$$

состояния полей представляют собой четные состояния суперпозиций когерентных состояний, а в случае $\xi_j = \pi$ — нечетные состояния суперпозиций [20].

Квантовые состояния суперпозиций когерентных состояний поля обладают ярко выраженными неклассическими свойствами. Так, фазовые суперпозиции (включая состояния типа «шредингеровского кота») могут иметь флуктуации числа фотонов значительно ниже величины флуктуаций числа фотонов когерентного состояния поля (уровня дробового шума) [19–21].

Отметим, что в случае субпуассоновской статистики фотонов с дисперсией (флуктуациями) числа фотонов ниже пуассоновского уровня, присущего когерентному состоянию поля, нарушается неравенство Коши–Шварца для автокорреляционной функции интенсивности света [22, 23].

Амплитудные суперпозиции когерентных состояний могут обладать малыми флуктуациями фазы поля существенно ниже уровня флуктуаций, присущих когерентным состояниям [21].

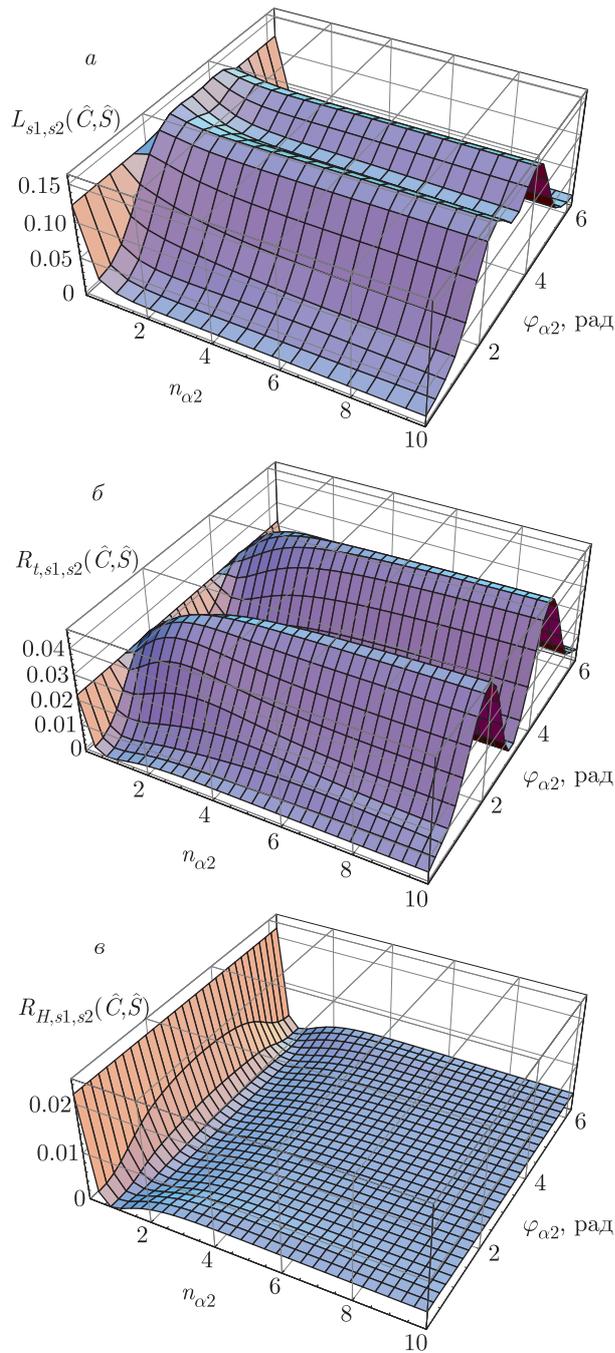
Соотношения неопределенностей для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I могут быть найдены из полученных выше выражений (17)–(22) для состояний полей общей суперпозиции когерентных состояний (38) путем подстановки в эти выражения значений скалярных произведений фоковских состояний и состояний суперпозиции:

$$\langle m_j | \varphi_{s,j} \rangle = Z_{m,j}, \quad m_j = n_j, n_j + 1, n_j + 2, \quad (45)$$

$$j = 1, 2.$$

где $Z_{m,j}$ определяются формулами (39)–(44).

На рис. 4а изображен пример зависимости левой части ССН и СНГ от параметров состояний суперпозиций для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I . Левая часть ССН в случае состояний полей суперпозиции когерентных состояний $L_{s_1,s_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ качественно отличается от левой части ССН для когерентных состояний $L_{\alpha_1,\alpha_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$. На рис. 2а видно, что эта величина не зависит от значений фазовых углов когерентных состояний и монотонно убывает с ростом числа фотонов n_{α_2} , тогда как $L_{s_1,s_2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ обладает



сильной зависимостью от φ_{α_2} и не убывает, а даже возрастает с увеличением n_{α_2} в широком интервале изменения значений φ_{α_2} . Указанные закономерности выполняются для любых значений параметров рассмотренных состояний полей.

На рис. 4б показан пример зависимости правой части ССН от параметров состояний суперпозиций для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I . Правая часть ТСН $R_{t,s1,s2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ также качественно отличается от

Рис. 4. Зависимости а) левой части соотношений (1) и (2) для операторов косинуса и синуса разности фаз

$$L_{s1,s2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv \left\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \right\rangle_{s1,s2} \left\langle (\Delta \hat{S}_I)^2 \right\rangle_{s1,s2},$$

б) правой части соотношения (1) для операторов косинуса и синуса разности фаз

$$R_{t,s1,s2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv \left| \left\langle \hat{C}_I \hat{S}_I \right\rangle_{s1,s2} - \left\langle \hat{C}_I \right\rangle_{s1,s2} \left\langle \hat{S}_I \right\rangle_{s1,s2} \right|^2,$$

в) правой части соотношения неопределенностей Гейзенберга (2) для операторов косинуса и синуса разности фаз

$$R_{H,\alpha1,\alpha2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I) \equiv \frac{1}{4} \left| \left\langle [\hat{C}_I, \hat{S}_I] \right\rangle_{\alpha1,\alpha2} \right|^2,$$

для состояний суперпозиций когерентных состояний полей $|\psi_{s,j}(\xi)\rangle = N_j (|\alpha_j\rangle + e^{i\xi}|\beta_j\rangle)$, $j = 1, 2$, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$. Для фиксированных значений остальных параметров состояния суперпозиций $|\psi_{s,j}(\xi_j)\rangle$, $j = 1, 2$, $n_{\alpha_1} = 1$, $n_{\beta_1} = 2$, $n_{\beta_2} = 4$ и $\varphi_{\alpha_1} = \varphi_{\beta_1} = \varphi_{\beta_2} = 0$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$

правой части для когерентных состояний полей $R_{t,\alpha1,\alpha2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$. Неравенство ССН (неравенство Коши – Шварца) выполняется для всех значений параметров квантовых состояний полей.

На рис. 4в показана зависимость правой части СНГ от параметров состояний суперпозиций для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I . Как и в случае когерентных состояний, правые части ССН и СНГ качественно различны. Правые части СНГ для состояний суперпозиции $R_{H,s1,s2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ обладают зависимостью от параметров квантовых состояний, подобной зависимости $R_{H,\alpha1,\alpha2}(\hat{C}_I, \hat{S}_I)$ для полей в когерентных состояниях (см. рис. 2в), но они значительно различаются по абсолютной величине. При этом правые части ССН и СНГ качественно различны как в случае суперпозиций когерентных состояний, так и в случае когерентных состояний полей.

На рис. 5а изображен пример зависимости левой части ССН и СНГ от параметров состояний суперпозиций для оператора $\hat{n} \equiv \hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и ТОРФ \hat{S}_I . Левые части СН $L_{s1,s2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$ и $L_{\alpha1,\alpha2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$ возрастают с увеличением числа фотонов, но, в отличие от $L_{\alpha1,\alpha2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$ и $L_{s1,s2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$, обладают сложной зависимостью от фазового угла когерентного состояния φ_{α_2} .

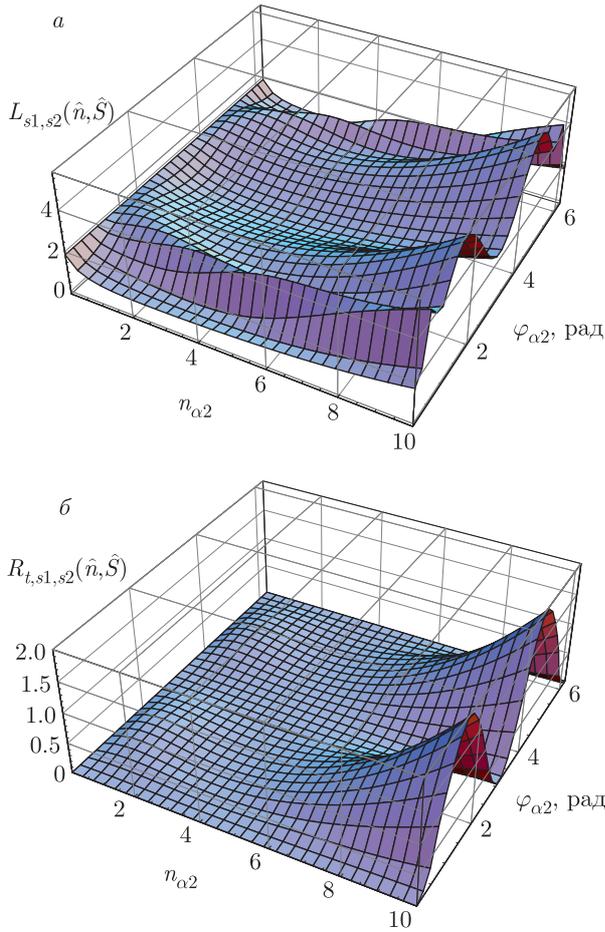


Рис. 5. Зависимости а) левой части соотношений (1) и (2) для операторов суммы числа фотонов полей $\hat{n} \equiv \hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и синуса разности фаз

$$L_{s1,s2}(\hat{n}, \hat{S}_I) \equiv \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle_{s1,s2} \left\langle \left(\Delta \hat{S}_I \right)^2 \right\rangle_{s1,s2},$$

б) правой части соотношения (1) для операторов числа фотонов и синуса разности фаз

$$R_{t,s1,s2}(\hat{n}, \hat{S}_I) \equiv \left| \left\langle \hat{n} \hat{S}_I \right\rangle_{s1,s2} - \langle \hat{n} \rangle_{s1,s2} \langle \hat{S}_I \rangle_{s1,s2} \right|^2,$$

для состояний суперпозиций когерентных состояний полей $|\psi_{s,j}(\xi)\rangle = N_j (|\alpha_j\rangle + e^{i\xi}|\beta_j\rangle)$, $j = 1, 2$, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$. Для фиксированных значений остальных параметров состояния суперпозиций $|\psi_{s,j}(\xi_j)\rangle$, $j = 1, 2$, $n_{\alpha_1} = 1$, $n_{\beta_1} = 2$, $n_{\beta_2} = 4$ и $\varphi_{\alpha_1} = \varphi_{\beta_1} = \varphi_{\beta_2} = 0$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$

На рис. 5б показана зависимость правой части ССН от параметров состояний суперпозиций для $\hat{n} \equiv \hat{n}_1 + \hat{n}_2$ и ТОРФ \hat{S}_I . Правые части ССН $R_{t,s1,s2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$ и $R_{t,\alpha_1,\alpha_2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$ характеризуются

резко различающимися между собой зависимостями от числа фотонов. В случае когерентных состояний полей $R_{t,\alpha_1,\alpha_2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$ велика для малых чисел фотонов ($n_{\alpha_2} \sim 1$) и с ростом числа фотонов убывает (см. рис. 3б), тогда как $R_{t,s1,s2}(\hat{n}, \hat{S}_I)$ резко возрастает при больших числах фотонов $n_{\alpha_2} \gg 1$.

Правые части СНГ

$$R_{H,s1,s2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{S}_I) = R_{H,s1,s2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2, \hat{C}_I) = 0,$$

так как оператор суммы числа фотонов коммутирует с ТОРФ.

Отметим, что состояния суперпозиции не являются квантовыми состояниями полей с минимальной неопределенностью для данных операторов, так как левая часть ССН больше правой для всех значений параметров состояний.

В частном случае состояний фазовых суперпозиций двух полей (состояний «шредингеровского кота», четных и нечетных) ССН и СНГ для суммы чисел фотонов и ТОРФ совпадают, тогда как для амплитудных суперпозиций правые части ССН и СНГ значительно различаются. ССН и СНГ для ТОРФ \hat{C}_I и \hat{S}_I полей в состояниях «шредингеровского кота» также качественно различаются.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе продолжены теоретические исследования квантовомеханических свойств тригонометрических операторов разности фаз двух электромагнитных полей, предложенных нами в работе [10].

Получены и исследованы соотношения неопределенностей для операторов синуса и косинуса разности фаз, а также соотношения неопределенностей для оператора суммы чисел фотонов двух полей и операторов синуса и косинуса разности фаз полей. Найдены и проанализированы строгие соотношения неопределенностей (неравенства Коши – Шварца для указанных пар операторов), а также соответствующие соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Рассмотрены случаи, когда поля находятся в квантовых когерентных состояниях, наиболее близких по своим свойствам к классическим электромагнитным полям. Исследованы случаи, когда оба поля (или одно из них) находятся в квантовых фоковских состояниях. Рассмотрены состояния квантовых суперпозиций когерентных состояний, проявляющие ярко выраженные неклассические свойства.

Расчеты, проведенные нами, показали, что как строгие соотношения неопределенностей, так и соотношения Гейзенберга выполняются для предлагаемых операторов разности фаз полей для всех значений параметров рассмотренных квантовых состояний.

В работе показано, что точные соотношения неопределенностей для предлагаемых операторов разности фаз полей качественно отличаются от соответствующих соотношений неопределенностей Гейзенберга для когерентных состояний полей, а также для состояний квантовых суперпозиций когерентных состояний, и совпадают для фоковских состояний при всех значениях параметров состояний.

Найдены значения параметров квантовых состояний электромагнитных полей, для которых точные рассматриваемые тригонометрические операторы разности фаз соответствуют наблюдаемым с минимальной квантовой неопределенностью. Исследования проведены для слабых электромагнитных полей с малым числом фотонов (~ 1), используемых в области квантовых технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1**, 49 (1964).
2. P. Carruthers and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 387 (1965).
3. P. Carruthers and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968).
4. E. C. Lerner, *Nuovo Cim. B* **56**, 183 (1968).
5. R. Lynch, *J. Opt. Soc. Amer. B* **3**, 1006 (1986).
6. R. Lynch, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1723 (1987).
7. J. W. Noh, A. Fougères, and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **45**, 424 (1992).
8. J. W. Noh, A. Fougères, and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **46**, 2840 (1992).
9. P. Riegler and K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. A* **49**, 1387 (1994).
10. А. В. Козловский, *ЖЭТФ* **159**, 244 (2021).
11. E. Schrödinger, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse* **14**, 296 (1930).
12. А. В. Козловский, *Опт. и спектр.* **120**, 626 (2016); **128**, 368 (2020).
13. E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 664 (1935); **23**, 823 (1935); **23**, 844 (1935) [Eng. transl. by J. D. Trimmer, *Proc. Amer. Philos. Soc.* **124**, 323 (1980)].
14. B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 13 (1986).
15. B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. A* **35**, 4846 (1987).
16. G. J. Milburn and C. A. Holmes, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2237 (1986).
17. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **31**, 2403 (1985).
18. A. V. Kozlovskii, *J. Mod. Opt.* **63**, 2356 (2016); **66**, 463 (2019).
19. W. Schleich, M. Pernigo, and Fam Le Kien, *Phys. Rev. A* **44**, 2172 (1991).
20. V. Buzek, A. Vidiella-Barranco, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **45**, 6570 (1992).
21. V. Buzek, A. D. Wilson-Gordon, P. L. Knight, and W. K. Lai, *Phys. Rev. A* **45**, 8079 (1992).
22. D. V. Strekalov and G. Leuchs, in *Quantum Photonics: Pioneering Advances and Emerging Applications*, ed. by R. Boyd, S. Lukishova, and V. Zadkov, Springer Series in Optical Sciences, Vol. 217, p. 51 (2019).
23. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Univ. Press (2000).