

# УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩЕГО МАЛОЕ ВЛИЯНИЕ ТОРМОЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ НА ДВИЖЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

*А. В. Пересторонин\**, *А. Л. Карузский*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 августа 2021 г.,  
после переработки 16 августа 2021 г.  
Принята к публикации 4 октября 2021 г.

В произвольной инерциальной системе отсчета рассматривается задача о движении классического электрона в поле монохроматической плоской волны произвольной поляризации (линейной, круговой или эллиптической). Показано, что отношение энергии, излучаемой ускоренно движущимся в поле волны электроном за время равное периоду, к средней энергии колебательного движения электрона может быть выражено через два безразмерных релятивистски инвариантных параметра. В качестве критерия, определяющего границу применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны, принято условие равенства энергии, излучаемой электроном за время равное периоду, и средней энергии колебательного движения. Граница применимости приближения построена в пространстве двух безразмерных инвариантных параметров. В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны с резким передним фронтом, один из этих параметров пропорционален частоте падающей волны, а другой — ее интенсивности.

DOI: 10.31857/S0044451022010011

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В классической электродинамике вывод о наличии силы радиационного трения, действующей на ускоренно движущийся электрон, следует из анализа баланса энергии и импульса системы, включающей в себя заряженную частицу и поле, при учете излучения. Ускоренно движущийся электрон, имеющий заряд  $q = -e$ , излучает. В нерелятивистском случае мгновенная мощность  $\mathcal{P}^{inst}$  этого излучения определяется [1] выражением

$$\mathcal{P}^{inst} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света,  $a$  — абсолютное значение вектора трехмерного ускорения  $\mathbf{a}$  электрона ( $a = |\mathbf{a}|$ ). Необходимость перехода от уравнения

$$m_e \mathbf{a} = \mathbf{f}^{ext}, \quad (2)$$

определяющего закон движения электрона массы  $m_e$  под действием внешней силы  $\mathbf{f}^{ext}$ , к уравнению

$$m_e \mathbf{a} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{rad}, \quad (3)$$

в котором наряду с действующей на электрон внешней силой содержится еще и сила радиационного трения  $\mathbf{f}^{rad}$ , возникает как результат учета баланса энергии и импульса в системе при излучении [1–3], поскольку в общем случае работы, совершаемой над зарядом силой  $\mathbf{f}^{ext}$ , недостаточно для того, чтобы компенсировать потери энергии, возникающие вследствие излучения ускоренно движущегося электрона.

Хорошо известно, что в нерелятивистском случае торможение излучением оказывает малое влия-

\* E-mail: anatoly@sci.lebedev.ru, perestoroninav@lebedev.ru

ние на движение электрона в электромагнитном поле. Сравнение абсолютных значений векторов  $\mathbf{f}^{ext}$  и  $\mathbf{f}^{rad}$  выполнено, например, в книге [1]. В § 75 книги [1] показано, что условие малости

$$|\mathbf{f}^{rad}| \ll |\mathbf{f}^{ext}| \quad (4)$$

сил торможения по сравнению с силой, действующей на электрон со стороны волнового электромагнитного поля, которое характеризуется длиной волны  $\lambda$ , соответствует неравенству

$$\lambda \gg \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (5)$$

При выводе условия (5) не учитывались числовые коэффициенты порядка единицы и  $\pi$ . Если повторить вычисления, сделанные в § 75 книги [1], не отбрасывая числовые коэффициенты и используя соотношения

$$k_4 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT_\omega} \quad (6)$$

для модуля волнового вектора, обозначенного здесь как  $k_4$ , круговой частоты излучения  $\omega$ , частоты  $\nu$ , длины волны  $\lambda$  и периода колебаний  $T_\omega$  монохроматического излучения, то условие (5) (уравнение (75.11) в [1]) будет иметь вид

$$\lambda \gg \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (7)$$

Обозначая величину классического радиуса электрона как

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}, \quad (8)$$

перепишем (7) в форме

$$\lambda \gg \frac{4\pi}{3} r_e \quad \text{или} \quad \omega \ll \frac{3}{2} \frac{c}{r_e}. \quad (9)$$

При этом сама возможность классического, не квантового рассмотрения задачи о взаимодействии монохроматического излучения со свободным электроном, как известно [1], ограничена в силу необходимости учета квантовых эффектов в том случае, когда энергия кванта излучения  $\hbar\omega = h\nu$ , где  $\hbar = h/2\pi$  — приведенная постоянная Планка, становится сравнима с энергией, соответствующей массе покоя электрона  $m_e c^2$ , или длина волны излучения становится сравнима с комптоновской длиной волны электрона

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = 2\pi\lambda_C, \quad (10)$$

где  $\lambda_C = \lambda_C/2\pi$  — приведенная комптоновская длина. Как следует из определений (8) и (10) и выражения для постоянной тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (11)$$

приведенная комптоновская длина волны электрона  $\lambda_C = r_e/\alpha$  приблизительно в 137 раз больше классического радиуса электрона  $r_e$ , а для комптоновской длины волны имеем

$$\lambda_C = 2\pi\lambda_C = \frac{2\pi}{\alpha} r_e \approx 861 r_e. \quad (12)$$

При выполнении условия

$$\lambda \gg \lambda_C \quad \text{или} \quad \hbar\omega \ll m_e c^2, \quad (13)$$

которое обеспечивает корректность применения классического подхода к анализу поведения электрона в волновом поле, условие (9) также выполняется в силу (12) и с учетом неравенства  $2\pi/\alpha \approx 861 > 4\pi/3$ . Таким образом, сила торможения излучением мала по сравнению с внешней силой, действующей на электрон со стороны волнового электромагнитного поля, в том случае, когда вообще возможен классический подход к рассматриваемой задаче. Этот вывод сделан в [1] в рамках предположения о том, что скорость движения электрона в волне мала по сравнению со скоростью света.

Кроме того, для применимости классического подхода необходимо, чтобы напряженность поля волны была мала по сравнению с величиной  $m_e^2 c^4/e^3$ . Поля  $\sim m_e^2 c^4/e^3$  являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям [1]. Поскольку интенсивность монохроматической плоской волны  $I$  зависит только от напряженности поля волны, соответствующая этой напряженности  $\sim m_e^2 c^4/e^3$  интенсивность ограничивает область применимости классического подхода.

Частный случай предельно релятивистского движения классического электрона в поле монохроматической плоской волны круговой поляризации был проанализирован в работе [4]. Для системы отсчета, в которой электрон в среднем покоится, было получено условие (уравнение (2) в [4]), при выполнении которого влияние сил радиационного трения на движение электрона превышает влияние силы, действующей со стороны электромагнитного поля волны. Из выражения (уравнение (2) в [4]) для границы пределов применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением

на движение классического электрона, следует, что в рассматриваемых условиях уравнение границы в координатах  $(I, \omega)$  может быть описано зависимостью  $I \propto \omega^{4/3}$ .

Приведенные выше соотношения, определяющие уравнения границ применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны, не имеют инвариантного характера, поскольку рассматриваются в фиксированной системе отсчета, в то время как интенсивность и частота волны зависят от используемой системы отсчета. Кроме того, эти оценки относятся к различным частным случаям (нерелятивистское или релятивистское движение электрона, круговая поляризация волны).

В настоящей работе задача о движении классического электрона в поле монохроматической плоской волны произвольной поляризации (линейной, круговой или эллиптической) рассматривается в произвольной инерциальной системе отсчета. Полученные результаты включают в себя частные случаи, описанные выше. Граница применимости приближения построена в пространстве двух безразмерных релятивистски инвариантных параметров. В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны с резким передним фронтом, один из этих параметров пропорционален частоте падающей волны, а другой — ее интенсивности.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как было отмечено выше, выяснение пределов применимости приближения, в котором торможение излучением мало, выполнено в [1] путем сравнения абсолютных значений векторов силы торможения  $\mathbf{f}^{rad}$  и силы  $\mathbf{f}^{ext}$ , действующей на электрон со стороны внешнего электромагнитного поля. Ясно, что такой способ не является единственным и вместо сравнения модулей мгновенных значений сил  $|\mathbf{f}^{rad}|$  и  $|\mathbf{f}^{ext}|$  можно сравнивать работу, совершаемую этими силами за определенный промежуток времени.

В случае периодического с периодом  $T$  или квазипериодического движения заряда для любых физических величин, характеризующих это движение, могут быть вычислены их усредненные по времени значения. Например, усредненная по времени мощность излучения  $\mathcal{P}$  будет выражаться через величину мгновенной мощности формулой

$$\mathcal{P} = \langle \mathcal{P}^{inst} \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathcal{P}^{inst}(t) dt. \quad (14)$$

Здесь и далее операция усреднения обозначается угловыми скобками с указанием параметра (в (14) это время  $t$ ), по которому проводится усреднение. Следствием определения мгновенной мощности излучения  $\mathcal{P}^{inst}$  как отношения дифференциала излучаемой энергии к дифференциалу времени и формулы (14) является соотношение

$$\Delta \mathcal{E}_T = \mathcal{P} T, \quad (15)$$

выражающее полное количество энергии  $\Delta \mathcal{E}_T$ , излучаемое зарядом за время, равное периоду  $T$ , через интегральную среднюю мощность излучения  $\mathcal{P}$  и период  $T$ .

Для того чтобы оценить степень влияния излучательных энергетических потерь на периодическое или квазипериодическое движение заряда, следует сравнивать полное количество энергии  $\Delta \mathcal{E}_T$  с другой характерной величиной, имеющей размерность энергии. В случае если периодическое или квазипериодическое движение заряда рассматривается в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится, т. е. средняя скорость заряда равна нулю, такой характерной величиной будет средняя кинетическая энергия частицы  $\langle \mathcal{K} \rangle_t$ . Выполнение условия  $\Delta \mathcal{E}_T = \langle \mathcal{K} \rangle_t$  будет означать, что за время равное периоду заряд потеряет за счет излучения всю свою кинетическую энергию. В этом случае влиянием торможения излучением на движение классического электрона уже нельзя пренебрегать. При выполнении условия

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_T}{\langle \mathcal{K} \rangle_t} \ll 1 \quad (16)$$

влиянием торможения излучением на периодическое или квазипериодическое движение электрона можно пренебречь.

Хорошо известно (см., например, [1]), что в поле монохроматической плоской волны круговой поляризации электрон движется по окружности с постоянной угловой скоростью. Считая движение электрона нерелятивистским и влияние силы радиационного трения малым, найдем, к каким ограничениям на длину волны или частоту падающего излучения приводит условие (16). В системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится (дрейфовая скорость равна нулю), постоянное значение имеет модуль вектора мгновенной скорости электрона  $v = |\mathbf{v}|$ , где  $\mathbf{v}$  — трехмерный вектор мгновенной скорости, а период движения электрона  $T$  равен периоду

колебаний волны  $T_\omega$ ,  $T = T_\omega$ . Ускорение и скорость электрона связаны в рассматриваемом случае простым соотношением

$$a = \omega v. \quad (17)$$

Кинетическая энергия имеет в рассматриваемых условиях постоянное значение  $\mathcal{K} = m_e v^2/2$ . Из формул (1), (6), (15) и (17) получим отношение излучаемой зарядом энергии к кинетической энергии частицы:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_T}{\mathcal{K}} = \frac{8\pi}{3} r_e \frac{\omega}{c}.$$

Тогда условие (16) приводит к следующим ограничениям на длину волны или частоту падающего излучения:

$$\lambda \gg \frac{16\pi^2}{3} r_e \quad \text{или} \quad \omega \ll \frac{3}{8\pi} \frac{c}{r_e}. \quad (18)$$

Граничные значения в условиях (9) и (18) несколько различаются (в  $4\pi \approx 13$  раз), поскольку (9) получено, исходя из требования (4), а (18) — исходя из требования (16).

В приведенном выше примере, во-первых, предполагается, что скорость движения электрона много меньше скорости света, во-вторых, задача рассматривается только в одной системе отсчета, где средняя скорость движения электрона равна нулю, в-третьих, рассматривается только случай круговой поляризации, а в общем случае монохроматическая плоская волна может иметь линейную, круговую или эллиптическую поляризацию. В рамках используемого в настоящей работе подхода, описанного далее, все эти три ограничения отсутствуют.

Для анализа движения электрона в поле монохроматической плоской волны применяется 4-векторное уравнение:

$$m_e c W_i = \frac{-e}{c} F_{ik} U_k, \quad (19)$$

где  $U_i$  — 4-вектор скорости,  $W_i = dU_i/ds$  — 4-вектор ускорения электрона,  $F_{in}$  — тензор электромагнитного поля монохроматической плоской волны. Латинские индексы  $i, k, \dots$  пробегает значения от 1 до 4. Здесь, так же как в [5, 6], используется форма записи 4-векторных величин, в которой временная компонента 4-вектора считается действительной величиной, а пространственные компоненты — мнимыми,

$$X_i = \begin{Bmatrix} X_\alpha \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ix_\alpha \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ix_\alpha \\ ct \end{Bmatrix}.$$

Греческие индексы  $\alpha, \beta, \dots$  пробегает значения от 1 до 3. Три пространственные компоненты  $x_\alpha$  4-вектора  $X_i$  являются составляющими трехмерного вектора  $\mathbf{x}$ . Дифференциал собственного времени материальной точечной частицы выражается равенством

$$ds = \sqrt{(dX_i)^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}},$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ , а 4-скорость

$$\begin{aligned} \frac{dX_i}{ds} &= U_i = \begin{Bmatrix} U_\alpha \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} iu_\alpha \\ u_4 \end{Bmatrix}, \\ u_4 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \quad \mathbf{u} = u_4 \frac{\mathbf{v}}{c}, \end{aligned} \quad (20)$$

является единичным 4-вектором  $U_i^2 = 1$ . В рамках этих определений квадрат времениподобных 4-векторов является положительной величиной, а пространственноподобных — отрицательной.

Использование подхода, описанного в [5] и более подробно в [6] позволяет на основе решения уравнения (19) получить выражения как для мгновенного значения квадрата 4-ускорения  $W_n^2$  электрона, так и для усредненной по времени величины  $\langle -W_n^2 \rangle_t$ , от которой зависит средняя мощность излучения  $\mathcal{P}$ . По формуле (15) для любой инерциальной системы отсчета можно определить полное количество энергии  $\Delta \mathcal{E}_T$ , излучаемое электроном за время равное периоду. Эту энергию  $\Delta \mathcal{E}_T$  будем сравнивать со средней энергией колебательного движения электрона. Равенство этих величин определяет границу между областью, в которой влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны мало, и областью, в которой это приближение неприменимо.

### 3. ПОЛНОЕ КОЛИЧЕСТВО ЭНЕРГИИ, ИЗЛУЧАЕМОЙ ЭЛЕКТРОНОМ ЗА ВРЕМЯ РАВНОЕ ПЕРИОДУ

Согласно (15) и формуле (5) из [5] в произвольной инерциальной системе отсчета полное количество энергии, излучаемой электроном за время равное периоду, определяется выражением

$$\Delta \mathcal{E}_T = \frac{2}{3} e^2 c \langle -W_n^2 \rangle_t T. \quad (21)$$

Поскольку 4-ускорение, компоненты которого имеют размерность, равную размерности обратной длины, является пространственноподобным 4-вектором, квадрат которого является отрицательной величиной, в обеих частях равенства (21) содержатся положительно определенные величины.

В произвольной инерциальной системе отсчета зависимость мгновенного значения квадрата 4-ускорения электрона, движущегося в поле монохроматической плоской волны, от фазы волны  $\varphi$  в точке нахождения частицы определяется [6] выражением

$$-W_n^2 = \mu^2 (1 + \mu^2) (K_p \bar{U}_p)^2 (1 + \gamma \cos(2\varphi + \delta)), \quad (22)$$

где  $\delta/2$  — начальная фаза волны,  $\gamma$  — параметр эллиптичности волны, который связан с величинами большой  $\mathbf{a}$  и малой  $\mathbf{b}$  полуосей эллипса поляризации и его эксцентриситетом  $\epsilon$  соотношениями

$$\gamma = \frac{1 - \mathbf{b}^2/\mathbf{a}^2}{1 + \mathbf{b}^2/\mathbf{a}^2} = \frac{\epsilon^2}{2 - \epsilon^2},$$

где

$$\epsilon = \sqrt{1 - \mathbf{b}^2/\mathbf{a}^2}.$$

Линейной поляризации волны соответствует значение параметра  $\gamma = 1$ , а круговой поляризации — значение  $\gamma = 0$ . Содержащаяся в (22) релятивистски инвариантная безразмерная величина

$$\mu^2 = \frac{r_e \lambda^2}{\pi} \frac{I}{m_e c^3} = \frac{4\pi r_e}{m_e c} \frac{I}{\omega^2} \quad (23)$$

в два раза меньше аналогичной безразмерной величины, нередко используемой различными авторами при анализе релятивистского поведения заряда в волне (в работе [7] она обозначена как  $\mu$ , в работе [8] — как  $q^2$ , в работе [9] — как  $x^2$ ). В (22) содержится инвариантное скалярное произведение  $(K_p \bar{U}_p)$  двух 4-векторов: волнового 4-вектора нулевой длины

$$K_i = \begin{Bmatrix} K_\alpha \\ K_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik_\alpha \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik_\alpha \\ \omega/c \end{Bmatrix},$$

$$k_\alpha^2 = k_4^2, \quad K_n^2 = 0,$$

где  $k_\alpha$  являются составляющими трехмерного волнового вектора  $\mathbf{k}$ , и постоянного единичного 4-вектора дрейфовой скорости электрона в поле монохроматической плоской волны

$$\bar{U}_i = \begin{Bmatrix} \bar{U}_\alpha \\ \bar{U}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\bar{u}_\alpha \\ \bar{u}_4 \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

$$\bar{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{\mathbf{v}}^2/c^2}}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\bar{u}_4 \bar{\mathbf{v}}}{c}.$$

Определение 4-вектора дрейфовой скорости (24) отличается от определения 4-вектора мгновенной скорости (20) тем, что вместо мгновенной скорости  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  в (24) используется вектор дрейфовой скорости электрона в поле монохроматической плоской волны  $\bar{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle_t$ . Операция усреднения вектора

мгновенной скорости электрона  $\mathbf{v}$  по времени системы отсчета  $t$  определена аналогично (14). Мгновенное значение квадрата 4-ускорения (22) зависит от инвариантной переменной фазы волны

$$\varphi = K_n X_n = \frac{\omega}{c} (ct - \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{k}}{k_4}, \quad (25)$$

в 4-точке  $X_i$ , в отношении которой подразумевается ее принадлежность к мировой линии электрона.

Для вычисления по формуле (21) полного количества энергии, излучаемой электроном за время равное периоду, необходимо усреднить по времени системы отсчета выражение (22). Такое усреднение, приводящее к результату

$$\langle -W_n^2 \rangle_t = (K_p \bar{U}_p)^2 \mu^2 \left( 1 + \mu^2 - \frac{\gamma^2 \mu^2 K_4}{4\bar{U}_4 (K_l \bar{U}_l)} \right), \quad (26)$$

было выполнено в [6] и использовалось в [5] без вывода. В общем случае результаты операций усреднения периодических величин по параметру времени системы отсчета  $t$  и по параметру фазы волны  $\varphi$  не совпадают. Так, из (22) следует равенство

$$\langle -W_n^2 \rangle_\varphi = \mu^2 (1 + \mu^2) (K_p \bar{U}_p)^2, \quad (27)$$

отличающееся от (26). В частном случае круговой поляризации  $\gamma = 0$  падающей волны результаты (26) и (27) совпадают.

В том случае, когда тензор электромагнитного поля  $F_{in}$  описывает поле монохроматической плоской волны, выполняется равенство  $F_{in} K_n = 0$ , соответствующее соотношениям в векторном виде  $(\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{E}) = 0$  и  $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}_k]$ , которые отражают свойство поперечности поля волны и описывают связь между векторами напряженности электромагнитного поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

Из равенства  $F_{in} K_n = 0$  и уравнения (19) сразу следует, что при движении электрона в поле монохроматической плоской волны сохраняется инвариантная скалярная величина  $K_n U_n$ , которая, как видно из определения (25), равна производной фазы по собственному времени:  $K_n U_n = d\varphi/ds$ . Пропорциональность дифференциала фазы  $d\varphi$  дифференциалу собственного времени  $ds$  приводит к равенству результатов операций усреднения по фазе и по собственному времени. Используя соотношения

$$\langle -W_n^2 \rangle_\varphi = \langle -W_m^2 \rangle_s = \langle -W_p^2 \rangle_t \Big|_{\gamma=0},$$

представим среднее  $\langle -W_n^2 \rangle_t$ , определяемое равенством (26), в форме произведения двух величин

$$\langle -W_n^2 \rangle_t = \kappa_1 \langle -W_m^2 \rangle_s, \quad (28)$$

одна из которых,  $\langle -W_m^2 \rangle_s$ , инвариантна относительно преобразований Лоренца, т. е. имеет одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчета, а другая,  $\kappa_1$ , таким свойством не обладает.

Выясним свойства неинвариантного в общем случае коэффициента

$$\kappa_1 = 1 - \frac{\gamma^2}{4} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \frac{K_4}{K_p \bar{U}_p} \frac{1}{\bar{U}_4}, \quad (29)$$

который в частном случае круговой поляризации  $\gamma = 0$  падающей волны равен единице. Содержащиеся во втором слагаемом в правой части (29) множители имеют области значений, определяемые неравенствами

$$0 \leq \frac{\gamma^2}{4} \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} < 1.$$

Третий множитель во втором слагаемом (29) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{K_4}{K_p \bar{U}_p} \frac{1}{\bar{U}_4} &= \frac{K_4}{K_4 \bar{U}_4 (1 + K_\alpha \bar{U}_\alpha / K_4 \bar{U}_4)} \frac{\bar{U}_4}{\bar{U}_4^2} = \\ &= \frac{1 - \bar{\mathbf{v}}^2 / c^2}{1 - \mathbf{n}_k \cdot \bar{\mathbf{v}} / c} = \frac{1 - \bar{v}^2 / c^2}{1 - (\bar{v} / c) \cos \theta}, \end{aligned}$$

где  $\bar{v} = |\bar{\mathbf{v}}|$ , а  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и направлением вектора дрейфовой скорости электрона. Для знаменателя последней дроби выполняются условия

$$1 - \bar{v} / c \leq 1 - (\bar{v} / c) \cos \theta \leq 1 + \bar{v} / c,$$

откуда следует двойное неравенство

$$\frac{1 - \bar{v}^2 / c^2}{1 + \bar{v} / c} \leq \frac{1 - \bar{v}^2 / c^2}{1 - (\bar{v} / c) \cos \theta} \leq \frac{1 - \bar{v}^2 / c^2}{1 - \bar{v} / c}.$$

С учетом алгебраического тождества для разности квадратов и невозможности в рамках специальной теории относительности существования у материальной частицы скорости, достигающей скорости света, получаем область значений третьего множителя:

$$0 < \frac{K_4}{K_p \bar{U}_p} \frac{1}{\bar{U}_4} < 2.$$

Отсюда следует, что областью значений неинвариантного коэффициента  $\kappa_1$ , определенного формулой (29), является промежуток

$$1/2 \leq \kappa_1 \leq 1. \quad (30)$$

Соотношения (28) и (30) демонстрируют, что неинвариантная величина  $\langle -W_n^2 \rangle_t$  в любом возможном

случае незначительно отличается от инвариантной величины  $\langle -W_m^2 \rangle_s$ .

Содержащая в формуле (21) величина периода может быть представлена [5, 6] в виде выражений

$$T = \frac{2\pi}{c} \frac{\bar{U}_4}{(K_n \bar{U}_n)} = T_\omega \frac{K_4 \bar{U}_4}{(K_p \bar{U}_p)} = \frac{T_\omega}{1 - \mathbf{n}_k \cdot \bar{\mathbf{v}} / c}. \quad (31)$$

Подстановка (28) и (31) в (21) дает

$$\Delta \mathcal{E}_T = \frac{4\pi}{3} e^2 \kappa_1 \frac{\langle -W_n^2 \rangle_s}{(K_p \bar{U}_p)} \bar{U}_4. \quad (32)$$

Полное количество энергии, излучаемой электроном за время равное периоду, определяемое выражением (32), в котором содержатся как неинвариантные, так и инвариантные величины, будем сравнивать со средней энергией колебательного движения электрона в поле монохроматической плоской волны.

#### 4. СРЕДНЯЯ ЭНЕРГИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Полную мгновенную энергию движущейся частицы  $m_e c^2 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ , которую запишем с использованием обозначений (20) в виде  $m_e c^2 U_4$ ,

$$m_e c^2 U_4 = \mathcal{K} + m_e c^2,$$

принято разделять на кинетическую энергию

$$\mathcal{K} = m_e c^2 (U_4 - 1) = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - m_e c^2$$

и энергию покоя  $m_e c^2$ . В рамках используемого подхода, в котором существенную роль играет наличие дрейфовой скорости электрона в поле волны, желательнее было бы выделить из всей величины кинетической энергии ту часть энергии  $\mathcal{K}^{osc}$ , которая соответствует колебательному движению электрона, и ту часть энергии  $\mathcal{K}^{drift}$ , которая соответствует движению колеблющегося электрона как целого, происходящему с постоянной дрейфовой скоростью. Для этого запишем равенство

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{osc} + \mathcal{K}^{drift}$$

и потребуем, чтобы в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится, т. е. его дрейфовая скорость равна нулю,  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ , величина  $\mathcal{K}^{drift}$  принимала нулевое значение. Поскольку условие  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ , соответствует равенству  $\bar{U}_4 = 1$ , для  $\mathcal{K}^{drift}$  получим выражение

$$\mathcal{K}^{drift} = m_e c^2 (\bar{U}_4 - 1).$$

Тогда мгновенное значение энергии колебательного движения электрона в произвольной инерциальной системе отсчета будет определяться формулой

$$\mathcal{K}^{osc} = m_e c^2 (U_4 - \bar{U}_4). \quad (33)$$

Как следует из (33) и определения  $\mathcal{K}$  в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится, выполняется равенство  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{osc}$ . В нерелятивистском случае  $v^2 \ll c^2$ ,  $\bar{v}^2 \ll c^2$  из формулы (33) получаем

$$\mathcal{K}^{osc} = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{m_e \bar{v}^2}{2}.$$

В произвольной инерциальной системе отсчета 4-вектор скорости электрона, движущегося в поле монохроматической плоской волны, может быть представлен [5, 6] в форме

$$U_i(\Phi) = \sqrt{1 + \mu^2} \bar{U}_i + Z_i^{(1)} \cos \Phi + Z_i^{(2)} \sin \Phi + Z_i^{(3)} \cos 2\Phi + Z_i^{(4)} \sin 2\Phi. \quad (34)$$

Здесь величина  $\Phi$ ,

$$\Phi = \varphi - \varphi_0, \quad (35)$$

является разностью между значением фазы волны  $\varphi$  в произвольной 4-точке  $X_i$ , в отношении которой подразумевается ее принадлежность к мировой линии электрона, и значением фазы волны  $\varphi_0 = K_m X_m^0$  в той точке мировой линии  $X_i^0$ , которая принята за начальную. Содержащиеся в (34) постоянные безразмерные 4-векторы  $Z_i^{(1)}$ ,  $Z_i^{(2)}$ ,  $Z_i^{(3)}$  и  $Z_i^{(4)}$  зависят от начальных условий и поляризации волны. В случае круговой поляризации волны  $Z_i^{(3)} = Z_i^{(4)} = 0$ . Кроме того, следствием четырехмерной «перпендикулярности» каждого из четырех 4-векторов  $Z_i^{(1)}$ ,  $Z_i^{(2)}$ , ... и волнового 4-вектора  $Z_n^{(1)} K_n = 0$ ,  $Z_n^{(2)} K_n = 0$ , ... является простая формула

$$(K_n U_n) = \sqrt{1 + \mu^2} (K_m \bar{U}_m), \quad (36)$$

которая будет использована далее.

Для вычисления средней энергии колебательного движения представим  $\mathcal{K}^{osc}$  с помощью (33) и (34) в форме

$$\frac{\mathcal{K}^{osc}}{m_e c^2} = \left( \sqrt{1 + \mu^2} - 1 \right) \bar{U}_4 + \psi(\Phi),$$

где  $\psi(\Phi)$  — сумма четырех последних слагаемых в выражении для временной компоненты 4-вектора скорости, следующем из (34) при  $i = 4$ . Из (35)

следует равенство  $d\Phi = d\varphi$ , которое с учетом пропорциональности дифференциала фазы  $d\varphi$  дифференциалу собственного времени  $ds$  приводит к равенству результатов операций усреднения по разности фаз  $\Phi$  и по собственному времени  $s$ . Поскольку  $\langle \psi(\Phi) \rangle_\Phi = 0$ , для усредненной по собственному времени энергии колебательного движения получим простое выражение

$$\frac{\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_s}{m_e c^2} = \left( \sqrt{1 + \mu^2} - 1 \right) \bar{U}_4. \quad (37)$$

В настоящей работе полное количество энергии, излучаемой электроном за время равное периоду, сравнивается со средней энергией колебательного движения электрона. При этом в работе применяются две различные операции усреднения — по времени системы отсчета и по собственному времени движущегося электрона, приводящие к не совпадающим результатам. Не было найдено убедительных критериев выбора между  $\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_t$  и  $\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_s$  для цели сравнения выбранной величины с полным количеством энергии  $\Delta \mathcal{E}_T$ , излучаемой электроном за время равное периоду. Однако, записывая связь между двумя различными средними в форме равенства

$$\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_t = \kappa_2 \langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_s, \quad (38)$$

можно показать, что областью значений инвариантного коэффициента  $\kappa_2$  является промежуток

$$1 \leq \kappa_2 < 1 + 8 + \frac{16}{27} \approx 9.59, \quad (39)$$

т. е. средние значения  $\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_t$  и  $\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_s$  в любом возможном случае близки. Для обоснования двойного неравенства (39) коэффициент  $\kappa_2$  был представлен в виде суммы трех слагаемых

$$\kappa_2 = 1 + \kappa_2^{(1)} + \kappa_2^{(2)},$$

в которой  $\kappa_2^{(1)}$  и  $\kappa_2^{(2)}$  зависят от параметра  $\mu^2$ , пропорционального произведению интенсивности на квадрат длины волны излучения, параметра эллиптичности волны  $\gamma$ , модуля вектора дрейфовой скорости  $\bar{v}$ , проекции  $(\mathbf{n}_{\bar{v}} \mathbf{n}_k) = \cos \theta$  единичного вектора дрейфовой скорости электрона  $\mathbf{n}_{\bar{v}} = \bar{\mathbf{v}}/|\bar{\mathbf{v}}|$  на направление распространения волны. Коэффициент  $\kappa_2^{(2)}$  зависит еще и от проекций  $(\mathbf{n}_{\bar{v}} \mathbf{n}_a)$  и  $(\mathbf{n}_{\bar{v}} \mathbf{n}_b)$  вектора  $\mathbf{n}_{\bar{v}}$  на единичные векторы  $\mathbf{n}_a$  и  $\mathbf{n}_b$ , направленные вдоль большой и малой осей эллипса поляризации волны соответственно. Определение диапазонов изменения  $\kappa_2^{(1)}$  и  $\kappa_2^{(2)}$  было выполнено аналогично тому, как это сделано (30) в отношении  $\kappa_1$ . Ввиду большого объема вычислений, выкладки, обосновывающие двойное неравенство (39), опущены.

### 5. ОТНОШЕНИЕ ЭНЕРГИИ, ИЗЛУЧАЕМОЙ ЗА ВРЕМЯ РАВНОЕ ПЕРИОДУ, К СРЕДНЕЙ ЭНЕРГИИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Для сравнения энергии, излучаемой за время равное периоду, с усредненной по времени системы отсчета энергией колебательного движения запишем следующее из (8), (32), (37), (38) соотношение

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_T}{\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_t} = \frac{4\pi}{3} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{r_e \langle -W_i^2 \rangle_s}{(K_n \bar{U}_n)} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}. \quad (40)$$

Область значений коэффициентов  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  определяется неравенствами (30) и (39) соответственно. Если же в знаменателе левой части (40) заменить  $\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_t$  на  $\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_s$ , т.е. сравнивать энергию, излучаемую за время равное периоду, с усредненной по собственному времени энергией колебательного движения, то необходимости в использовании коэффициента  $\kappa_2$  не будет. Выражение для  $\Delta \mathcal{E}_T / \langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_s$  повторяет правую часть формулы (40), в которой  $\kappa_2 = 1$ .

Соотношение (40) можно рассматривать как функцию двух инвариантных переменных, в качестве которых, с учетом связей (27) и (36), могут быть выбраны величины  $\langle -W_i^2 \rangle_s$  и  $\mu^2$  или  $(K_n \bar{U}_n)$  и  $\mu^2$  или  $(K_m U_m)$  и  $\mu^2$ , зависящую также и от инвариантной величины  $\kappa_1 / \kappa_2$ , значение которой в любом возможном случае не сильно отличается от единицы. Обозначив для краткости левую часть (40) как  $L$  и определив безразмерную инвариантную величину

$$\Gamma_{cl} = r_e (K_n U_n), \quad (41)$$

преобразуем (40) к виду

$$L(\mu^2, \Gamma_{cl}) = (4\pi/3) \Gamma_{cl} \left( \sqrt{1 + \mu^2} + 1 \right) \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (42)$$

Содержащийся в (40) коэффициент  $\kappa_1 / \kappa_2$  отброшен в (42) ввиду его близости к единице. Для преобразования от (40) к (42) использовались тождество

$$\mu^2 = \left( \sqrt{1 + \mu^2} + 1 \right) \left( \sqrt{1 + \mu^2} - 1 \right)$$

и соотношения (27) и (36).

Целью преобразования величины  $L$ , характеризующей степень влияния возмущений, обусловленных радиационными потерями, на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны, является приведение этой величины к такой форме записи, в которой  $L$  зависит от инвариантных переменных, допускающих наиболее наглядную физическую интерпретацию. В рамках подхода квантовой электродинамики соответствующая  $|\mu|$

величина, названная в [9] классическим параметром нелинейности, характеризует вероятность возникновения многоквантовых (многофотонных) процессов при взаимодействии электрона с электромагнитным полем. В рамках классической электродинамики  $\mu^2$  имеет смысл характеристики, определяющей необходимость учета релятивистских эффектов при анализе движения электрона в поле монохроматической плоской волны. Так, если в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится ( $\bar{v} = 0$  и  $\bar{U}_4 = 1$ ), воспользоваться формулой (37), то при  $\mu^2 = 1$  средняя энергия колебательного движения становится сравнима с энергией покоя электрона  $\langle \mathcal{K}^{osc} \rangle_s \approx 0.4 m_e c^2$  и при анализе движения следует учитывать релятивистские эффекты. При  $\mu^2 \ll 1$  движение электрона имеет нерелятивистский характер.

Физический смысл безразмерной инвариантной величины  $\Gamma_{cl}$  выясняется при анализе задачи в системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода монохроматической плоской волны с резким передним фронтом. В этой системе отсчета скалярное произведение  $(K_n U_n)$ , сохраняющееся при движении электрона в поле монохроматической плоской волны, принимает значение  $(K_n U_n) = K_4 = \omega/c$ . Как следует из определения (41), в рассматриваемой системе отсчета круговая частота излучения выражается через  $\Gamma_{cl}$  формулой  $\omega = c \Gamma_{cl} / r_e$ . Вместо  $\Gamma_{cl}$  используем в 137 раз большую величину  $\Gamma = (1/\alpha) \Gamma_{cl}$ , которую с учетом (8) и (11) запишем в виде

$$\Gamma = (\hbar/m_e c) (K_n U_n). \quad (43)$$

В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода монохроматической плоской волны с резким передним фронтом, скалярное произведение  $(K_n U_n)$  в формуле (43) принимает значение  $(K_n U_n) = K_4 = \omega/c$ , откуда следует, что энергия кванта излучения  $\hbar\omega = h\nu$  выражается через  $\Gamma$  формулой  $\hbar\omega = \Gamma m_e c^2$ .

Используя выражения (27), (36) и (43), представим произведение величин  $\mu^2$  и  $\Gamma^2$  в форме

$$\mu^2 \Gamma^2 = \left( \frac{1}{\alpha} \right)^2 r_e^2 \langle -W_n^2 \rangle_s$$

и рассмотрим правую часть этого равенства, которую с учетом (8), (11) и (19) перепишем в виде

$$\left( \frac{1}{\alpha} \right)^2 r_e^2 \langle -W_n^2 \rangle_s = \left( \frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 \left\langle - \left( \frac{-e}{m_e c^2} F_{ik} U_k \right)^2 \right\rangle_s.$$

Определяя безразмерную инвариантную величину

$$\chi = \frac{\hbar e}{m_e^3 c^4} \sqrt{\left\langle - \left( F_{ik} (m_e c U_k) \right)^2 \right\rangle_s}, \quad (44)$$

заметим, что, за исключением использования в (44) операции усреднения по собственному времени, это тот же самый параметр, который был определен в работе [9] и интерпретировался как работа поля на комптоновской длине волны в системе покоя частицы, отнесенная к  $m_e c^2$ . Согласно [9], параметр  $\chi$  ответственен за величину квантовых нелинейных эффектов.

Как показано выше, квадрат величины (44) связан с безразмерными инвариантными параметрами  $\mu^2$  и  $\Gamma^2$  простым соотношением

$$\chi^2 = \mu^2 \Gamma^2. \quad (45)$$

В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, выразим  $\chi^2$ , используя (45), через интенсивность падающего излучения. В этой системе отсчета  $\Gamma = \hbar\omega / (m_e c^2)$  и, следовательно,

$$\chi^2 = \frac{r_e \lambda^2}{\pi} \frac{I}{m_e c^3} \left( \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \right)^2 = 4\pi\alpha \frac{\lambda_C^3}{m_e c^3} I,$$

где в первом равенстве использована формула (23), а во втором — формулы (6), (8), (10), (11). Предыдущая формула, выражающая  $\chi^2$  через интенсивность  $I$ , может быть записана в виде равенства  $\chi^2 = I/I^{cr}$ , в котором критическая интенсивность  $I^{cr}$  имеет значение

$$I^{cr} = \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{m_e c^3}{\lambda_C^3} \approx 4.648 \cdot 10^{29} \text{ Вт/см}^2. \quad (46)$$

При этой интенсивности модуль вектора напряженности электрического поля  $|\mathbf{E}| = E^{cr}$  волны круговой поляризации удовлетворяет условию  $eE^{cr} \lambda_C = m_e c^2$ , которое определяет критическое поле квантовой электродинамики [10]. Критическая интенсивность (46) (иногда используется в два раза меньшее значение [11]) играет важную роль при теоретическом анализе эффекта рождения частиц из вакуума интенсивным электромагнитным полем [11, 12].

Таким образом, из (42), (43) и (45) следует формула

$$L(\chi^2, \Gamma) = \frac{4\pi}{3} \alpha \Gamma \left( \sqrt{1 + \frac{\chi^2}{\Gamma^2}} + 1 \right) \sqrt{1 + \frac{\chi^2}{\Gamma^2}}, \quad (47)$$

определяющая отношение энергии, излучаемой за время равное периоду, к средней энергии колеба-

тельного движения как функцию двух инвариантных параметров. В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, один из этих параметров оказывается пропорционален частоте падающей волны  $\Gamma = \hbar\omega / (m_e c^2)$ , а другой — ее интенсивности  $\chi^2 = I/I^{cr}$ .

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В правой части формулы (47), которая будет обсуждаться далее, содержится постоянная  $\alpha$ , имеющая квантовое происхождение, и переменные  $\chi$  и  $\Gamma$ , определенные формулами соответственно (44) и (43), в которых также содержатся квантовомеханические постоянные  $\alpha$  или  $\hbar$ . Однако вывод формулы (42) и следующей из нее формулы (47), определяющих величину относительных потерь на излучение, выполнен в рамках классической электродинамики, а значит, правая часть равенства (47) может быть выражена через классические величины, не содержащие в их определениях  $\alpha$  или  $\hbar$ . Действительно, использование вместо  $\chi^2$ , связанного с  $\Gamma$  соотношением (45), другого инвариантного параметра  $\chi_{cl}^2 = \mu^2 \Gamma_{cl}^2$  позволяет записать (47) в виде формулы

$$L(\chi_{cl}^2, \Gamma_{cl}) = \frac{4\pi}{3} \Gamma_{cl} \left( \sqrt{1 + \frac{\chi_{cl}^2}{\Gamma_{cl}^2}} + 1 \right) \sqrt{1 + \frac{\chi_{cl}^2}{\Gamma_{cl}^2}},$$

в правой части которой содержатся величины классической электродинамики.

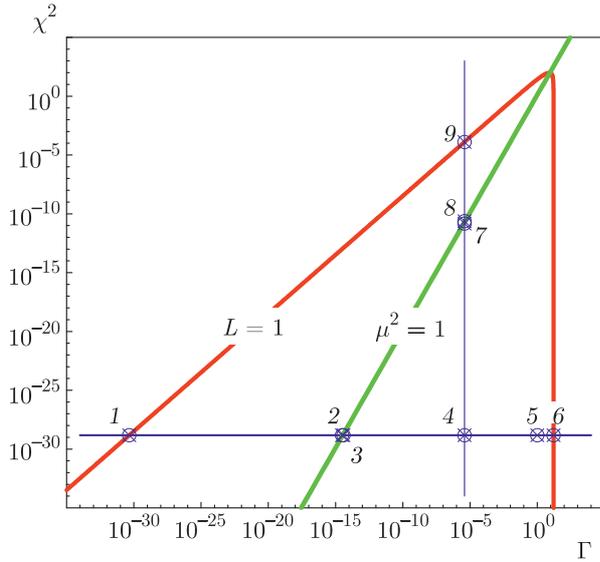
Для анализа поведения функции двух переменных (47) построим линию уровня  $L(\Gamma, \chi^2) = 1$ , которая показана красным цветом на рис. 1. Эту линию можно считать графиком функции  $\Gamma(\chi^2)$ , заданной неявным образом с помощью функционального уравнения  $L(\Gamma, \chi^2) = 1$ . Для построения линии уровня использовалось параметрическое представление

$$\Gamma(\tau) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(\sqrt{1+\tau}+1)\sqrt{1+\tau}},$$

$$\chi^2(\tau) = \tau \left( \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(\sqrt{1+\tau}+1)\sqrt{1+\tau}} \right)^2,$$

в котором координаты  $\Gamma$  и  $\chi^2$  точек, принадлежащих линии уровня, выражены через параметр  $\tau$ .

Зеленая линия, определяемая выражением  $\mu^2 = 1$ , которое, как следует из (45), эквивалентно уравнению  $\chi^2 = \Gamma^2$ , разделяет пространство двух переменных  $\Gamma$  и  $\chi^2$  на две области. График функции  $\chi^2 = \Gamma^2$ , являющийся в двойном логарифмическом



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Линия уровня  $L = 1$  функции (47) (красная линия) и линии, определяемые уравнениями  $\mu^2 = 1$  и  $\mu^2 = 1.618$  (зеленые линии), в пространстве двух инвариантных безразмерных переменных  $\Gamma$  и  $\chi^2$ . Синим цветом показаны линии, соответствующие постоянным значениям параметров  $\chi^2 = 1.48 \cdot 10^{-29}$  и  $\Gamma = 3.8 \cdot 10^{-6}$

масштабе прямой линией, показан на рис. 1 зеленым цветом. На рис. 1 левее и выше зеленой линии расположена область  $\mu^2 > 1$ , правее и ниже зеленой линии расположена область  $\mu^2 < 1$ . Если точки пространства двух переменных  $\Gamma$  и  $\chi^2$  лежат достаточно далеко от линии  $\mu^2 = 1$ , то для них выполняется условие  $\mu^2 \gg 1$  или  $\mu^2 \ll 1$ . Зеленая линия  $\mu^2 = 1$  разделяет области релятивистского и нерелятивистского движения. Из формулы (47) следует, что при условиях  $\mu^2 = \chi^2/\Gamma^2 \ll 1$  и  $L = 1$  параметр  $\Gamma$  принимает значение  $\Gamma = 3/(8\pi\alpha)$ . Вертикальный участок красной линии, задаваемой в неявной форме уравнением  $L = 1$ , расположен в области, в которой выполняется условие  $\mu^2 \ll 1$ , и, следовательно, линия уровня  $L = 1$  описывается в этой области уравнением  $\Gamma = 3/(8\pi\alpha) \approx 16$ . Наклонный участок красной линии  $L = 1$ , расположенный в области  $\mu^2 = \chi^2/\Gamma^2 \gg 1$ , как следует из формулы (47) и соотношения (45), описывается в этой области уравнением  $\chi^2 = 3\Gamma/(4\pi\alpha)$ .

Рассмотрим поведение функции  $L(\Gamma, \chi^2)$  при постоянном значении  $\chi^2$ , например при  $\chi^2 = 1.48 \cdot 10^{-29}$ , при котором в системе отсчета, где электрон покоился до прихода волны, интенсивность излучения составляет  $6.89 \text{ Вт/см}^2$ . Соответствующая горизонтальная линия показана

на рис. 1 синим цветом. Поскольку в точках, обозначенных цифрами 1 и 6, функция (47) принимает одинаковые значения  $L = 1$ , на отрезке между этими точками должен быть хотя бы один экстремум. Вычисляя частную производную  $\partial L/\partial \Gamma$  функции (47) и приравнивая ее к нулю, получим кубическое уравнение  $y^3 + 2y^2 - 1 = 0$ , где  $y = \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 + \chi^2}$ . Одним из корней кубического уравнения, не принадлежащим интересующей нас области значений, является  $y = -1$ . Выделяя в левой части кубического уравнения множитель  $y + 1$ , получим квадратное уравнение  $y^2 + y - 1 = 0$ , корнем которого в интересующей нас области является значение  $y = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Этому значению  $y$  соответствует значение  $\mu^2 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$ . График функции  $\chi^2 = 1.618\Gamma^2$  показан на рис. 1 зеленым цветом и в данном масштабе неотличим от линии, определяемой условием  $\mu^2 = 1$ . Точки пересечения графиков функций  $\chi^2 = 1.618\Gamma^2$  и  $\chi^2 = \Gamma^2$  с синей линией обозначены на рисунке цифрами 2 и 3 соответственно. Легко убедиться в том, что  $\partial^2 L/\partial \Gamma^2 > 0$  при условиях  $\chi^2 > 0$  и  $\Gamma > 0$ . Следовательно, при условиях  $\chi^2 = \text{const} > 0$  и  $\Gamma > 0$  минимальное значение функции (47) достигается в точке пересечения линий  $\chi^2 = \text{const}$  и  $\chi^2 = 1.618\Gamma^2$ .

Таким образом, левее точки 1, для которой  $\Gamma \approx 4.5 \cdot 10^{-31}$ , что в системе отсчета, где электрон покоился до прихода волны, соответствует огромному значению длины волны  $\lambda \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ м}$ , функция (47) принимает на горизонтальной синей линии значения  $L > 1$ . На отрезке от точки 1 до точки 2 ( $\Gamma \approx 3 \cdot 10^{-15}$ ,  $\lambda \approx 800 \text{ м}$ ) функция (47) уменьшается и принимает в точке 2 минимальное значение  $L \approx 3.9 \cdot 10^{-16}$ , т.е. количество энергии, равное средней энергии колебательного движения электрона в поле волны, будет излучено за время, равное  $2.5 \cdot 10^{15}$  периодам. В точке 3 ( $\Gamma \approx 3.8 \cdot 10^{-15}$ ,  $\lambda \approx 630 \text{ м}$ ), где  $\mu^2 = 1$ , функция (47) имеет значение  $L \approx 4 \cdot 10^{-16}$ . В точке 4 ( $\Gamma \approx 3.8 \cdot 10^{-6}$ ,  $\lambda \approx 0.63 \text{ мкм}$ ), где  $\mu^2 = 10^{-18}$ , относительные потери составляют  $L \approx 2.4 \cdot 10^{-7}$ .

В точке 5, где  $\Gamma = 1$ , классическая электродинамика уже неприменима, поскольку  $\lambda = \lambda_C$ . Функция (47) имеет в точке 5 значение  $L \approx 0.06$ , т.е. количество энергии, равное средней энергии колебательного движения электрона в поле волны, будет излучено за время равное 16 периодам. Правее точки 6, для которой  $\Gamma = 3/(8\pi\alpha) \approx 16$ , что в системе отсчета, где электрон покоился до прихода волны, соответствует значению длины волны  $\lambda = (8\pi/3)\alpha\lambda_C = (16\pi^2/3)r_e$ , функция (47) принимает на горизонтальной синей линии значения  $L > 1$ .

Длина волны излучения  $\lambda = (16\pi^2/3)r_e$  совпадает с граничным значением в неравенстве (18), которое получено в рамках нерелятивистского подхода, оправданного для точки 6 в силу того, что параметр  $\mu^2$  имеет в этой точке значение  $\mu^2 \approx 5.6 \cdot 10^{-32}$ .

Рассмотрим поведение функции  $L(\Gamma, \chi^2)$  при постоянном значении  $\Gamma$ , например при  $\Gamma \approx 3.8 \cdot 10^{-6}$ , при котором в системе отсчета, где электрон покоился до прихода волны, длина волны излучения составляет  $\lambda \approx 0.63$  мкм. Соответствующая вертикальная линия, проходящая через точку 4, показана на рис. 1 синим цветом. Легко убедиться том, что  $\partial L/\partial(\chi^2) > 0$  при условиях  $\chi^2 > 0$  и  $\Gamma > 0$ . Следовательно, относительные потери (47) монотонно возрастают при увеличении  $\chi^2$  и при условии постоянства параметра  $\Gamma$ . Выше точки 9, расположенной на пересечении линий  $L = 1$  и  $\Gamma \approx 3.8 \cdot 10^{-6}$  (для этой точки  $\chi^2 \approx 1.26 \cdot 10^{-4}$ , что в системе отсчета, где электрон покоился до прихода волны, соответствует интенсивности  $I \approx 5.9 \cdot 10^{25}$  Вт/см<sup>2</sup>) функция (47) принимает на вертикальной синей линии значения  $L > 1$ , а ниже этой точки — значения  $L < 1$ .

Ниже точки 7, для которой  $\chi^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-11}$  и  $I \approx 6.9 \cdot 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>, находящейся на пересечении синей линии с зеленой линией  $\chi^2 = \Gamma^2$ , находится область, где выполняется условие  $\mu^2 \ll 1$ . Из формулы (47) следует, что при условиях  $\Gamma = \text{const}$  и  $\mu^2 \ll 1$  значение относительных потерь  $L$  почти не меняется и примерно равно значению  $L$  в точке 4. Выше точки 8, для которой  $\chi^2 \approx 2.4 \cdot 10^{-11}$  и  $I \approx 1.1 \cdot 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>, находящейся на пересечении синей линии с линией  $\chi^2 = 1.618\Gamma^2$ , находится область, где выполняется условие  $\mu^2 \gg 1$ .

Из приведенного выше анализа поведения функции  $L(\Gamma, \chi^2)$  при постоянном значении  $\Gamma$  и при постоянном значении  $\chi^2$  следует, что внутри области, ограниченной красной линией, относительные потери на излучение малы,  $L(\Gamma, \chi^2) < 1$ , а вне этой области и на ее границе приближение, предполагающее малое влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны, неприменимо,  $L(\Gamma, \chi^2) \geq 1$ .

Как было отмечено выше, при условии  $\mu^2 \gg 1$  из формулы (47) и соотношения (45) следует, что граница  $L = 1$  описывается в этой области уравнением  $\chi^2 = 3\Gamma/(4\pi\alpha)$ . В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, уравнение границы  $\chi^2 = 3\Gamma/(4\pi\alpha)$  в рассматриваемой области  $\mu^2 \gg 1$  определяется формулой

$$I = I^{cr} \frac{3}{4\pi\alpha} \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{m_e c^2}{r_e^2} \omega, \quad (48)$$

получаемой в результате подстановки соотношений  $\Gamma = \hbar\omega/(m_e c^2)$  и  $\chi^2 = I/I^{cr}$ , выполняющихся в рассматриваемой системе отсчета, в уравнение границы  $\chi^2 = 3\Gamma/(4\pi\alpha)$ .

В рамках используемого в настоящей работе подхода проводится сравнение значений излучаемой за время периода энергии с энергией колебательного движения электрона. Во Введении было отмечено, что для нахождения условий применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением на движение классического электрона, используется сравнение значений модулей силы радиационного трения и силы, действующей на электрон со стороны внешнего электромагнитного поля. Выполним такое сравнение для случая релятивистского движения  $\mu^2 \gg 1$  электрона в поле монохроматической плоской волны круговой поляризации, когда используемые формулы принимают наиболее простой вид. В релятивистском уравнении, учитывающем силу радиационного трения,

$$m_e c \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{rad}, \quad (49)$$

найдем абсолютные значения векторов  $|\mathbf{f}^{rad}|$  и  $|\mathbf{f}^{ext}|$  в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится.

В отсутствие сил радиационного трения уравнение (49) имеет вид

$$m_e \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -e \left( \mathbf{E} + \left[ \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right] \right),$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы напряженности электромагнитного поля. В системе отсчета, в которой дрейфовая скорость равна нулю, электрон в волне круговой поляризации движется по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, с постоянной угловой скоростью. Поскольку значение  $v^2$  постоянно, в результате скалярного умножения предыдущего уравнения на  $\mathbf{v}$  получим  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Кроме того в монохроматической плоской волне  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , а векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{v}$  лежат в одной плоскости, откуда следует, что  $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$ . Модуль вектора силы Лоренца  $|\mathbf{f}^{ext}| = e|\mathbf{E}| = \omega m_e c |\mu|$  будем сравнивать с  $|\mathbf{f}^{rad}|$ .

Используя принятые здесь обозначения, запишем трехмерное векторное выражение для силы радиационного трения (уравнение (9) в [2]):

$$\mathbf{f}^{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} u_4^2 \left\{ \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{3u_4^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a} + \right. \\ \left. + \frac{u_4^2}{c^2} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) \mathbf{v} + \frac{3u_4^4}{c^4} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} \right\}.$$

В системе отсчета, в которой дрейфовая скорость равна нулю, электрон движется по окружности с постоянной угловой скоростью, модуль которой равен частоте волны в рассматриваемой системе отсчета. При этих условиях векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  перпендикулярны, а вектор  $d\mathbf{a}/dt$  выражается формулой  $d\mathbf{a}/dt = -\omega^2 \mathbf{v}$ . Тогда для модуля силы радиационного трения получим выражение

$$|\mathbf{f}^{rad}| = \frac{2e^2}{3c^2} \omega^2 u_4^3 \sqrt{u_4^2 - 1}.$$

Поскольку в рассматриваемых условиях величина  $u_4$  постоянна, ее мгновенное значение совпадает с усредненным,  $u_4 = \langle U_4 \rangle_\Phi$ . Из (34) следует, что  $\langle U_4 \rangle_\Phi = \sqrt{1 + \mu^2}$  при условии  $\bar{U}_4 = 1$ . Тогда

$$|\mathbf{f}^{rad}| = \frac{2e^2}{3c^2} \omega^2 \left( \sqrt{1 + \mu^2} \right)^3 |\mu|.$$

В релятивистском случае  $\mu^2 \gg 1$  граница, на которой реализуется условие  $|\mathbf{f}^{ext}| = |\mathbf{f}^{rad}|$ , определяется соотношением

$$|\mu|^3 = \frac{3}{2} \frac{c}{r_e \omega} = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda}{r_e}. \quad (50)$$

Аналогичное условие (уравнение (2) в [4]) было получено в работе [4]. Поскольку параметр  $\mu^2$  согласно определению (23) пропорционален величине  $I/\omega^2$ , для уравнения границы в релятивистском случае получим зависимость  $I \propto \omega^{4/3}$ , отличающуюся от зависимости  $I \propto \omega$ , описывающей уравнение границы согласно формуле (48).

Кажущееся качественное различие полученных двумя разными способами зависимостей, описывающих уравнение границы в релятивистском случае, обусловлено тем обстоятельством, что уравнение (48) получено в системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, а уравнение (50) — в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится. В силу наличия ненулевой дрейфовой скорости в системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны [5, 7, 8, 13, 14], эта система отсчета не совпадает с системой отсчета, в которой электрон в среднем покоится. Поскольку эти системы отсчета не совпадают, в них, в частности, не совпадают значения частоты падающей волны.

Будем далее обозначать одним штрихом величины, относящиеся к системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, а двумя штрихами — величины, относящиеся к системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится. Для системы отсчета, в которой электрон в среднем покоится,  $\bar{U}'_\alpha = 0$  и  $\bar{U}'_4 = 1$ , формула (36) имеет вид

$$(K''_n U''_n) = \sqrt{1 + \mu^2} K''_4.$$

Инвариантное скалярное произведение  $(K_n U_n)$  имеет одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчета:

$$(K''_m U''_m) = (K'_n U'_n).$$

В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, компоненты 4-вектора скорости до прихода волны имели значения  $U'_\alpha = 0$  и  $U'_4 = 1$ . Следовательно, сохраняющаяся при движении электрона в поле монохроматической плоской волны величина  $(K_n U_n)$  имеет значение

$$(K'_n U'_n) = K'_4.$$

Из предыдущих формул и определения  $K_4 = \omega/c$  следует, что значения частоты падающей волны в рассматриваемых системах отсчета связаны соотношением

$$\omega' = \sqrt{1 + \mu^2} \omega''. \quad (51)$$

Уравнение (50) получено в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится:

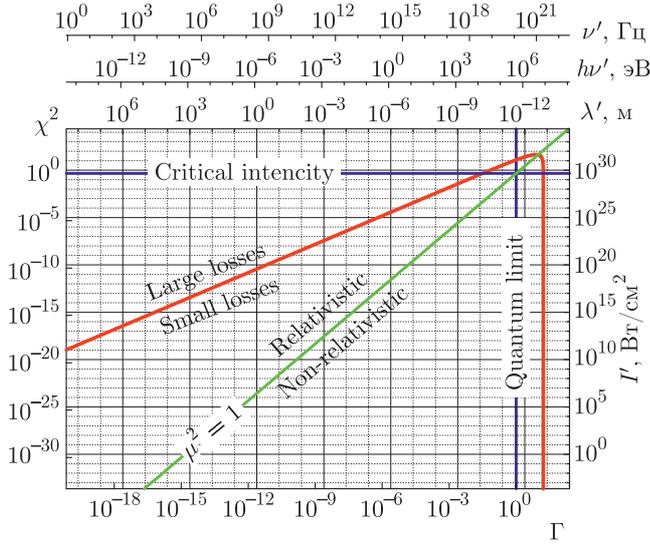
$$|\mu|^3 = \frac{3}{2} \frac{c}{r_e \omega''}.$$

С учетом связи (51), которая для релятивистской области  $\mu^2 \gg 1$  имеет вид  $\omega' = |\mu| \omega''$ , получим уравнение

$$\mu^2 = \frac{3}{2} \frac{c}{r_e \omega'},$$

демонстрирующее качественное согласие с формулой (50). Действительно, согласно определению (23) параметр  $\mu^2 \propto I'/\omega'^2$ , поэтому для уравнения границы в рассматриваемой системе отсчета в релятивистском случае получаем зависимость  $I' \propto \omega'$ , аналогичную (48).

Для случая нерелятивистского движения условие применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны, полученное в результате сравнения действующих на электрон сил, определяется неравенствами (9). Условия (9), так же как и уравнение границы (50), получены в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится. Эта система отсчета не совпадает с системой отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, но в нерелятивистском случае  $\mu^2 \ll 1$ , как следует из (51), можно



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Граница (красная линия), разделяющая области малых и больших потерь на излучение, в пространстве переменных  $\chi^2$  (левая шкала) и  $\Gamma$  (нижняя шкала) в любой инерциальной системе отсчета и в пространстве переменных  $I'$  (правая шкала) и  $\lambda'$  (верхняя шкала) в системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны. Добавлены шкалы, соответствующие энергии кванта излучения  $\hbar\omega' = \hbar\nu'$  и частоте волны  $\nu'$

пренебречь различие частот  $\omega'$  и  $\omega''$ . Таким образом, как для нерелятивистской области  $\mu^2 \ll 1$ , так и для релятивистской области  $\mu^2 \gg 1$ , имеется качественное согласие между полученными двумя разными способами (сравнением действующих на электрон сил и сравнением излучаемой энергии со средней энергией колебательного движения) результатами, описывающими границу применимости приближения.

На рис. 2 показана граница (красная линия) применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны в пространстве переменных  $\chi^2$  (левая шкала) и  $\Gamma$  (нижняя шкала) в любой инерциальной системе отсчета. Значениям безразмерных инвариантных параметров  $\chi^2$  (левая шкала) и  $\Gamma$  (нижняя шкала) в системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, соответствуют интенсивность излучения (правая шкала), вычисляемая по формуле  $I' = \chi^2 I^{cr}$ , и длина волны (верхняя шкала), вычисляемая по формуле  $\lambda' = \lambda_C / \Gamma$ . Зеленая линия  $\mu^2 = 1$  разделяет области релятивистского и нерелятивистского движения в любой инерциальной системе отсчета, в том числе и в той, в которой электрон покоился до прихода волны.

Горизонтальной синей линией на рис. 2 обозначена критическая интенсивность излучения  $I' = I^{cr}$  (46). Вертикальной синей линией на рис. 2 обозначена длина волны излучения  $\lambda' = \lambda_C$  (10), которая соответствует энергии кванта излучения  $\hbar\omega' = m_e c^2$ .

В [5] показано, что сечение рассеяния монохроматической плоской волны произвольной поляризации (линейной, круговой или эллиптической) на классическом электроне в произвольной инерциальной системе отсчета выражается формулами (16) и (18) в [5], учитывающими релятивистские эффекты и наличие дрейфовой скорости электрона в поле монохроматической плоской волны. В системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, сечение рассеяния определяется (уравнение (20) в [5]) выражением

$$\frac{\mathcal{P}'}{I'} = \sigma_0 \frac{1 + \mu^2 \left( 1 - (\gamma/2) \cos(2\varphi_0 + \delta) - (\gamma/2)^2 \right)}{1 + \mu^2 \left( 1 - (\gamma/2) \cos(2\varphi_0 + \delta) \right)}, \quad (52)$$

где  $\sigma_0 = (8\pi/3)r_e^2$  — томсоновское сечение. Содержащаяся в (52) полная фаза  $\varphi_0 + \delta/2$ , т.е. сумма начальной фазы  $\delta/2$  и фазы  $\varphi_0$ , определяет значения полевых величин на переднем фронте волны.

Формулы (16) и (18) в [5] и выражение (52) получены в рамках приближения, предполагающего малое влияние сил радиационного трения на движение электрона в поле монохроматической плоской волны. Как показано в настоящей работе, это приближение применимо внутри области  $L(\lambda', I') \ll 1$ , которая ограничена на рис. 2 красной линией, и в этой области применимо соотношение (52). При малых значениях  $\mu^2 \ll 1$ , т.е. в области, расположенной на рис. 2 правее и ниже зеленой линии  $\mu^2 = 1$ , разделяющей релятивистский и нерелятивистский случаи, как следует из (52), сечение равно томсоновскому:  $\mathcal{P}'/I' \approx \sigma_0$ . В релятивистском случае  $\mu^2 \gg 1$ , т.е. в области, расположенной на рис. 2 левее и выше зеленой линии, сечение выражается формулой

$$\frac{\mathcal{P}'}{I'} \approx \sigma_0 \left( 1 - \frac{(\gamma/2)^2}{1 - (\gamma/2) \cos(2\varphi_0 + \delta)} \right),$$

в правой части которой не содержится параметр  $\mu^2$ , т.е. сечение не зависит от частоты падающей волны и ее интенсивности. В случае круговой поляризации  $\gamma = 0$  падающей волны сечение рассеяния равно томсоновскому сечению,  $\mathcal{P}'/I' = \sigma_0$ , в области применимости приближения, предполагающего малое влияние сил радиационного трения на движение электрона в поле волны.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С целью нахождения пределов применимости приближения, предполагающего малое влияние сил радиационного трения на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны произвольной поляризации (линейной, круговой или эллиптической), полная энергия, излучаемая ускоренно движущимся в поле волны электроном за время равное периоду, сравнивается со средней энергией колебательного движения электрона. Показано, что отношение излучаемой энергии к средней энергии колебательного движения может быть представлено в виде формулы (40), в правой части которой содержатся как инвариантные величины, так и отношение двух неинвариантных величин  $\kappa_1/\kappa_2$ . Показано, что значение неинвариантной величины  $\kappa_1/\kappa_2$  в любом возможном случае не сильно отличается от единицы. Полученная в результате пренебрежения неинвариантным коэффициентом  $\kappa_1/\kappa_2$  формула (42) демонстрирует зависимость отношения  $L$  излучаемой энергии к средней энергии колебательного движения только от двух безразмерных инвариантных параметров  $L(\mu^2, \Gamma_{cl})$ . Формула (42) преобразована к виду (47), где величина  $L$  зависит от двух других безразмерных инвариантных параметров  $L(\chi^2, \Gamma)$ . Такое представление более удобно для анализа, поскольку в системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, один из этих параметров пропорционален частоте падающей волны,  $\Gamma \propto \omega'$ , а другой — ее интенсивности,  $\chi^2 \propto I'$ .

В пространстве двух инвариантных безразмерных переменных  $\Gamma$  и  $\chi^2$  построена линия уровня  $L(\Gamma, \chi^2) = 1$  функции (47), которая интерпретируется как граница применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны. Области релятивистского и нерелятивистского движения в пространстве двух переменных  $\Gamma$  и  $\chi^2$  разделены линией, описываемой уравнением  $\chi^2 = \Gamma^2$ . Та часть границы  $L(\Gamma, \chi^2) = 1$ , которая расположена в релятивистской области  $\chi^2 \gg \Gamma^2$ , описывается в этой области уравнением  $\chi^2 = 3\Gamma/(4\pi\alpha)$ . Та часть границы  $L(\Gamma, \chi^2) = 1$ , которая расположена в нерелятивистской области  $\chi^2 \ll \Gamma^2$ , описывается в этой области уравнением  $\Gamma = 3/(8\pi\alpha) \approx 16$ .

Показано, что результаты анализа применимости приближения, предполагающего малое влияние торможения излучением на движение классического электрона в поле монохроматической плоской волны, полученные путем сравнения действующих на

электрон сил, качественно согласуются с результатами анализа применимости приближения, полученными путем сравнения полной энергии, излучаемой ускоренно движущимся в поле волны электроном за время равное периоду, со средней энергией колебательного движения электрона. Для согласования полученных двумя разными способами результатов необходимо учитывать, что система отсчета, в которой электрон в среднем покоится, не совпадает с системой отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны, и, следовательно, частота и интенсивность падающей волны в этих системах отсчета имеют разные значения. В нерелятивистском случае этим различием можно пренебречь, а в области релятивистского движения эти различия значительны.

Полученные в настоящей работе результаты применимы к наиболее общей постановке модельной задачи о взаимодействии монохроматической плоской волны с классическим точечным электроном, движущимся под действием поля волны как с нерелятивистской, так и с релятивистской скоростью. Общая постановка задачи включает в себя случаи любой поляризации монохроматической плоской волны: линейной, круговой или эллиптической. Кроме того, полученные результаты, выражаемые в общем случае через безразмерные инвариантные параметры, применимы к анализу задачи в произвольной инерциальной системе отсчета, в том числе и в системе отсчета, в которой электрон покоился до прихода волны. Выполненный в настоящей работе анализ применимости рассматриваемого приближения относится к любым величинам, вычисляемым в рамках модельной задачи о взаимодействии монохроматической плоской волны с классическим электроном, в том числе к результатам вычисления сечения рассеяния, полученным в работе [5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2003).
2. В. Л. Гинзбург, УФН **98**, 569 (1969).
3. Н. П. Клепиков, УФН **146**, 317 (1985).
4. С. В. Буланов, Т. Ж. Есиркепов, Дж. Кога, Т. Таджима, *Физика плазмы* **30**, 221 (2004).
5. А. В. Пересторонин, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 367 (2017).
6. А. В. Пересторонин, *Препринт ФИАН № 11* (2016).

7. С. Н. Андреев, В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, КЭ **39**, 68 (2009).
8. E. S. Sarachik and G. T. Schappert, Phys. Rev. D **1**, 2738 (1970).
9. В. И. Ритус, Труды ФИАН **111**, 5 (1979).
10. W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
11. В. С. Попов, В. Д. Мур, Н. Б. Нарожный, С. В. Попруженко, ЖЭТФ **149**, 623 (2016).
12. Н. Б. Нарожный, С. С. Буланов, В. Д. Мур, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **80**, 434 (2004).
13. Б. М. Болотовский, А. В. Серов, УФН **164**, 545 (1994).
14. Б. М. Болотовский, А. В. Серов, УФН **119**, 667 (2003).